Увод у вероватноћу

Јован Самарџић, 13/2019

Професорка: Ленка Главаш

- дефиниције
- ознаке
- теореме
- докази
- примери

Година курса: 2020/21

Молим да ми све грешке пријавите преко мејла или друштвених мрежа.

1. Елементи комбинаторике.

Комбинаторика – бави се пребројавањем комбинаторних конфигурација.

Комбинаторна конфигурација – структура сачињена од елемената неког скупа.
(подскуп, низ, таблица)

Коначан скуп – непразан скуп A ткд. за неко $n \in \mathbb{N}$ постоји бијекција $f: \{1,2,\dots,n\} \to A$.

Кажемо да је A **n-скуп**, у ознаци $|A| = n$.

Следе основни комбинаторни принципи, тј. правила пребројавања:

Принцип једнаког броја: Два коначна скупа A и B имају једнак број елемената акко постоји бијекција $f: A \to B$.

T: $f: A \to B$. 1) f је 1-1 $\Rightarrow |A| \leq |B|$.
2) f је на $\Rightarrow |A| \geq |B|$.

Принцип збира: Ако је A коначан скуп, при чему $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ $(A_j \cap A_k = \emptyset,\ j \neq k)$

онда је $|A| = |A_1| + \dots + |A_n|$

Принцип производа: Ако скупови $A_1, \dots, A_r$ редом садрже $m_1, \dots, m_r$ елемената,

онда је $|A_1 \times \dots \times A_r| = m_1 \dots m_r$

Дирихлеов принцип: Ако су $A_1, \dots, A_r$ међусобно дисјунктни скупови

за које важи $|A_1 \cup \dots \cup A_r| > nr$

онда постоји бар један $1 \leq j \leq r$ ткд. $|A_j| > n$

елементи у конфигурацији	могу се понављати	не могу се понављати	
распоред битан	варијација са понављањем	варијација без понављања	
	пермутација са понављањем	пермутација без понављања	$k=n$
распоред небитан	комбинација са понављањем	комбинација без понављања	

k - варијација са понављањем: уређена k-торка елемената n-скупа A

$$V_n^k = n^k$$

k - варијација без понављања: уређена k-торка различитих елемената n-скупа A, $k \leq n$

$$\overline{V_n^k} = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

Пермутација без понављања: n-варијација без понављања елем. n-скупа A

$$P_n = n!$$

Пермутација са понављањем типа $(k_1, \dots, k_m)$: $n = k_1 + \dots + k_m > 0$

уређена n-торка елем. скупа $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $a_i \neq a_l$,
у којој се елемент a_j појављује тачно k_j пута.

$$P_n^{k_1,\dots,k_n} \quad \frac{n!}{k_1! \dots k_m!}$$

k - комбинација без понављања: k - подскуп (неуређена k-торка) од n-скупа A

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

→ k-вар. без пон.

→ пермут.

k - комбинација са понављањем: неуређена k-торка елем. из n-скупа A, међу којима може бити једнаких елемената.

$$\overline{C_n^k} = \binom{n-1+k}{k}$$

Биномни коефицијент: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, $0 \le k \le n \in N$

Својства: 1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ 2) $\binom{n}{0} = 1$ 3) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Д: 3) $\binom{n}{k}$ - бр. k-подскупова n-скупа
2^n - бр. подскупова n-скупа (укупан)

Паскалова формула: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Д: $\binom{n}{k}$ - бр. свих подскупова
$\binom{n-1}{k-1}$ - бр. оних који садрже неко x
$\binom{n-1}{k}$ - бр. оних који не садрже то x

Вандермондова неједнакост: $\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}$

проблем одабира k-подскупа који се састоји од m предмета првог типа и n предмета другог типа.

Њутнова биномна формула: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

Последица: $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{2k} + \dots = 2^{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{2k+1} + \dots$

2. Случајан експеримент.

Случајан експеримент: комплекс услова са следећим својствима:

* унапред је дефинисано шта се региструје у експерименту и познати су сви могући исходи
* исход у појединачном извођењу експеримента није унапред познат
* може се понављати произвољан број пута на истоветан начин

Елементаран догађај, ω: било који исход случајног експеримента

Простор елементарних догађаја, Ω: скуп свих могућих исхода.

Случајан догађај, A: подскуп простора елементарних догађаја

↳ догађај је **реализован** ако је исход неки од елем. дог. који се садржи у A
тада је тај исход **повољан** за A

↳ класа свих случ. догађаја се означава са $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (до даљњег)

Специјални догађаји:

* **Сигуран догађај**, Ω
* **Немогућ догађај**, $\emptyset$

Операције:

комплемент, $\bar{A}$: догађај супротан од A $(\bar{A} = \Omega \setminus A)$

T: $\bar{\Omega} = \emptyset$; $\bar{\emptyset} = \Omega$; $\bar{\bar{A}} = A$

унија, $A \cup B$: догађај се реализује ако се реализује A или B

T: $A \cup \Omega = \Omega$; $A \cup \emptyset = A$; $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

пресек, AB: догађај се реализује ако се реализује A и B

↳ Догађаји су **дисјунктни/узајамно се искључују** ако $AB = \emptyset$

T: $A\Omega = A$; $A\emptyset = \emptyset$; $A \subset B \Rightarrow AB = A$

разлика, $A \setminus B$: $A\bar{B}$

симетрична разлика, $A \Delta B$: $A\bar{B} \cup \bar{A}B$

Релације: инклузија, $A \subset B$: реализација догађаја A повлачи реализацију догађаја B

еквиваленција, $A = B$: догађаји A и B су једнаки ($A \subset B$ и $B \subset A$)

Правила: идемпотенција: $A \cup A = A$ $\quad AA = A$

комутативност: $A \cup B = B \cup A$ $\quad AB = BA$

асоцијативност: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\quad (AB)C = A(BC)$

дистрибутивност: $(A \cup B) C = AC \cup BC$ $\quad AB \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$

де Морганови закони: $\overline{\bigcup A_n} = \bigcap \overline{A_n}$ $\quad \overline{\bigcap A_n} = \bigcup \overline{A_n}$

Посматрајмо сл. експеримент Ω, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ и $A \in \mathcal{A}$ фиксиран

Понављамо експеримент n пута под истим условима (свако понављање је независно)

Учестаност / фреквенција, $n(A)$: број реализација сл. дог. A у n извођења

Релативна учестаност: једнака је $\dfrac{n(A)}{n}$

Статистичка дефиниција вероватноће: $P(A) = \lim_{n \to \infty} \dfrac{n(A)}{n}$

3. Класична дефиниција вероватноће.

Вероватноћа исхода, p_k:

Нека је $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ коначан простор исхода.
За свако $k \in [1,n]$, елем. дог. ω_k придружимо $p_k \in R$ ткд.

(1) $p_k \geq 0$, за све k

(2) $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$

Вероватноћа догађаја A, $P(A) = \sum_{j:\omega_j \in A} p_j$

Јасно, $P(A)$ можемо да посматрамо као функцију $P: \mathcal{A} \to [0,1]$

Идеја је да конструишемо математички (вероватносни) модел експеримента:

I) Ω - простор елем. догађаја неког случ. експеримента
II) $\mathcal{A}$ - класа свих случ. догађаја
III) $P(\cdot)$ - доделимо вероватноће свим догађајима $(P: \mathcal{A} \to \mathbb{R})$

$\left.\right\}$ $(\Omega, \mathcal{A}) \to$ мерљив простор

Простор вероватноћа: уређена тројка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Класична дефиниција вероватноће:

Нека је $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, при чему су сви исходи једнако вероватни ($\forall j \; p_j = \frac{1}{n}$) и $A \in \mathcal{A}$

Ако $|A| = m \leq n$, тада $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{број повољних}}{\text{укупан број}}$

Коначна адитивност: Ако су $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$ међу којима су свака два дисјунктна.
Тада важи: $P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$

Сва својства из следећег питања важе и у овом случају.

Формула укључивања и искључивања:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) - \sum_{1\le j_1<j_2\le n} P(A_{j_1} A_{j_2}) + \ldots + (-1)^{k-1} \sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le n} P(A_{j_1}\ldots A_{j_k}) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \ldots A_n)$$

Д: Сви ω који не припадају ни једном A_j не утичу на резултат, па их не гледамо.

Зато нека је $\omega \in \Omega$ повољан за тачно m догађаја од $\{A_1,\ldots,A_n\}$

* лева страна: урачунат само једном
* десна страна: $\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \ldots + (-1)^{r-1}\binom{m}{r} + \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m}$

урачунат у првој суми

од m бирамо два и стављамо у пресек

* Треба нам $Л = Д \iff Л - Д = 0 \iff 1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \ldots + (-1)^{m}\binom{m}{m} = 0$

$$\iff \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k \, 1^{m-k} = 0$$

$$\iff (1-1)^m = 0$$

$$\iff 0 = 0$$

, што је тачно.

Принцип укључивања и искључивања: (није за вероватноће, већ кардиналности)

Нека је $C_k = \sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le r} |A_{j_1} \ldots A_{j_k}|$ и $A = A_1 \cup \ldots \cup A_r$ коначан. Тада:

$$|A| = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} C_k$$

Последице: 1) број елемената који се садрже у тачно l од укупно r скупова је:

$$\sum_{k=0}^{r-l} (-1)^k \binom{l+k}{l} C_{l+k}$$

2) број елемената који се садрже у бар l од укупно r скупова је:

$$\sum_{k=0}^{r-l} (-1)^k \binom{l+k-1}{l-1} C_{l+k}$$

4. Експерименти са највише пребројиво много исхода.

„Уопштавамо" претх. питање (радимо за највише пребројив случај):

Нека је $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ највише пребројив простор исхода и $\mathcal{A} = \mathcal{P}(A)$.

За све $k \in N$ додељујемо $\omega_k \longmapsto p_k$, где: (1) $p_k \geq 0$, за све k

(2) $\sum^{\infty} p_k = 1$

Вероватноћа случ. дог., $P(A) = \sum_{j : \omega_j \in A} p_j$

Дискретан простор вероватноћа: уређена тројка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Својства вероватноће:
(важе и за коначан п.в.)

1) $P(A) \in [0, 1]$

2) $P(\Omega) = 1$

3) $P(\emptyset) = 0$

4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

5) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

6) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Д: 1) $0 \leq P(A) = \sum_{\omega_j \in A} p_j \leq \sum_j p_j = 1$

2) $P(\Omega) = \sum_{\omega_j \in \Omega} p_j = 1$

3) $P(\emptyset) = \sum_{\omega_j \in \emptyset} p_j = 0$

4) $A \cup \bar{A} = \Omega \Rightarrow P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1$

5) $A \cup \bar{A}B = B \Rightarrow P(B) = P(A) + P(\bar{A}B) \geq P(A)$

6) $A \cup B = A \cup \bar{A}B \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A}B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Пребројива адитивност: Ако је $(A_n)_{n \in N}$ низ међусобно дисјунктних случ. догађаја.

Тада важи: $P\left(\bigcup^{+\infty} A_j\right) = \sum^{+\infty} P(A_j)$

5. Условна вероватноћа. Формула множења вероватноћа.

У $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ уочимо $A \in \mathcal{A}$, $P(A) \in [0,1]$
Претпоставимо да имамо информацију да је експеримент завршен повољно по $B \in \mathcal{A}$.
Поновимо експеримент n пута, учестаност реализације неког $B \in \mathcal{A}$ је $n(B)$.
Посматрајмо само оне експерименте са повољним исходом по B (занемаримо све остале)
Тада је релативна учестаност реализације A у оквиру тих експеримената дата са:

$$\frac{n(AB)}{n(B)}, \text{ а то је једнако: } \frac{n(AB)}{n} \cdot \frac{n}{n(B)} \xrightarrow[\text{(стат. деф.)}]{n \to \infty} P(AB) \cdot \frac{1}{P(B)}$$

Условна вероватноћа, $P(A|B)$: Ако су $A, B \subset \Omega$ $(P(B) > 0)$, тада: $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

↳ под претпоставкама из класичне деф. врв.: $P(A|B) = \dfrac{|AB|}{|B|}$

Својства: Нека је $P(\cdot | B) : \mathcal{A} \to [0,1]$, где $P(B) \neq 0$. Тада:

1) $P(B|B) = 1$; $P(\Omega|B) = 1$; $P(\emptyset|B) = 0$
2) $B \subset A \Rightarrow P(A|B) = 1$
3) $A \subset B \Rightarrow P(A|B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$
4) $AB = \emptyset \Rightarrow P(A|B) = 0$
5) $P(\bigcup A_n | B) = \sum^{n} P(A_i|B)$, где је $(A)_n$ низ међусобно дисјунктних дог.
6) $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$

Формула множења вероватноћа: $P(AB) = P(A|B) \cdot P(B)$, $P(B) > 0$

Уопштење: Нека $P(A_1 \dots A_{n-1}) \overset{(*)}{>} 0$. Тада: $P(A_1 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$

Д: $\text{д} = P(A_1) \cdot \dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} \cdot \dfrac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)} \cdot \ldots \cdot \dfrac{P(A_1 \dots A_n)}{P(A_1 \dots A_{n-1})} = P(A_1 \dots A_n) = \text{Л}$

Напомена: $A_1 \dots A_k \supseteq A_1 \dots A_{n-1}$ за све $k \in [1, n-1]$
па $P(A_1 \dots A_k) \geq P(A_1 \dots A_{n-1}) \underset{(*)}{>} 0$

6. Формула потпуне вероватноће. Бајесова формула.

Формула потпуне вероватноће:

Нека $\{A_1, A_2, \dots\}$ највише пребројива колекција која одређује разбијање Ω и нека $B \subset \Omega$.

Тада важи: $P(B) = \sum P(A_i B) = \sum\limits_{i: P(A_i)>0} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$

Д: $B = B \cap \Omega = B \cap \bigcup A_i = \bigcup A_i B$

$\Rightarrow P(B) = P(\bigcup A_i B) \underset{\text{адитивност вероватноће}}{=} \sum P(A_i B)$

$= \sum\limits_{P(A_i)>0} P(A_i B) + \sum\limits_{P(A_i)=0} P(A_i B) = \sum\limits_{P(A_i)>0} P(A_i B) + 0 = \sum\limits_{P(A_i)>0} P(A_i B) \overset{\text{формула мн. вероватноће}}{=} \sum\limits_{P(A_i)>0} P(A_i|B) \cdot P(A_i)$

Бајесова формула:

Исте претпоставке, али је додатно $P(B) > 0$, као и $P(A_1), P(A_2), \dots > 0$

$$P(A_i | B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum P(B|A_i) \cdot P(A_i)} \quad , \text{ за свако } i$$

Д: Знамо $P(BA_i) = P(B|A_i) \cdot P(A_i)$

$\parallel$

$P(A_i B) = P(A_i|B) \cdot P(B)$

Дакле, $P(A_i|B) = \dfrac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \dfrac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum\limits_{P(A_i)>0} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$

Скуп хипотеза: $\{A_1, A_2, \dots\}$

Априорне вероватноће хипотеза: $P(A_i)$

Апостериорне вероватноће хипотеза: $P(A_i|B)$

7. Независност догађаја.

* Независност – у интуитивном смислу
  у математичком смислу (ова нас занима)

* Посматрамо $A, B \subset \Omega$ т.к.д. $P(A) > 0$, $P(B) > 0$
  Постоје две могућности: $P(A|B) \neq P(A)$ или $P(A|B) = P(A)$.

Важи: $P(A|B) = P(A) \iff \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \iff P(AB) = P(A) \cdot P(B) \iff P(B|A) = P(B)$

Независни догађаји: ако важи $P(AB) = P(A)\,P(B)$

Особине:
1) Немогућ догађај је независан са свим догађајима
2) Сигуран догађај је независан са свим догађајима.
3) Два дисјунктна догађаја са позитивним вероватноћама су увек зависна.

Д:
1) $P(\emptyset) = 0 \Rightarrow P(\emptyset B) = P(\emptyset) = 0 = 0 \cdot P(B) = P(\emptyset) \cdot P(B)$
2) $P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(\Omega B) = P(B) = 1 \cdot P(B) = P(\Omega) \cdot P(B)$
3) $P(AB) = 0$, док је $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, па не може бити $P(AB) = P(A)P(B)$

* Нека је $\mathcal{K} = \{A_n \mid n \in I\}$ колекција догађаја, где је I највише пребројив индексни скуп.

Потпуно независни догађаји:

Ако за свако коначно $J \subset I$ важи: $P\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) = \prod_{k \in J} P(A_k)$

Ово је еквивалентно са: $(\forall k \geq 2)(\forall$ комб. индекса $\{j_1, j_2, \dots, j_k\})$ $P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{j_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} P(A_{j_i})$

Независни у паровима:

Ако за свака два догађаја A_j, A_k $(j \neq k)$ важи: $P(A_j A_k) = P(A_j)\,P(A_k)$

T: Потпуна независност увек повлачи независност у паровима.

T: Обрнуто не важи.

Контрапример (Бернштајнов експеримент):

У кутији се налазе 4 куглице нумерисане: 110, 101, 011, 000
Извлачи се једна на случајан начин.

A_i - извучена је куглица са јединицом на i-том месту
$\mathcal{K} = \{A_1, A_2, A_3\}$

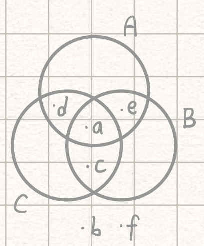
$P(A_1) = 1/2, \quad P(A_2) = 1/2, \quad P(A_3) = 1/2$

$$\left.\begin{aligned} P(A_1A_2) &= 1/4 = P(A_1)\,P(A_2) \\ P(A_2A_3) &= 1/4 = P(A_2)\,P(A_3) \\ P(A_1A_3) &= 1/4 = P(A_1)\,P(A_3) \end{aligned}\right] \Rightarrow \text{независни у паровима}$$

$P(A_1A_2A_3) = 0 \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) \quad \Rightarrow$ нису потпуно независни

T: Ако важи $P(A_1 \dots A_n) = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$ за случајне догађаје из колекције $\mathcal{K} = \{A_1, \dots, A_n\}$, то не значи да важе аналогне једнакости за чланове потколекција.

Пример: Имамо $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, где $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$, $p(a) = p(b) = 12.5\%$ и $p(c) = p(d) = p(e) = p(f)$



$P(ABC) = P(\{a\}) = 1/8$

аналогно

$P(A) = P(\{a, d, e\}) = 1/8 + 2 \cdot 3/16 = 1/2 = P(B) = P(C)$

$P(AB) = 5/16 \neq P(A) \cdot P(B)$, слично и за AC и BC

T: Ако су догађаји из колекције $\mathcal{K} = \{A_1, \dots, A_n\}$ независни, онда за сваку k-торку различитих индекса $j_1, \dots, j_k$ из I важи: $P(B_{j_1} \dots B_{j_k}) = P(B_{j_1}) \dots P(B_{j_k})$, $B_{j_i} \in \{A_{j_i}, \overline{A_{j_i}}\}$

$\boxed{8.}$ Дискретна случајна величина и њена расподела.

Случајна величина, X : мерљиво пресликавање из Ω у $\mathbb{R}$ $(X:\Omega\to\mathbb{R})$

Реализована вредност, x : реалан број $X(\omega)$ придружен елементарном догађају $\omega\in\Omega$.

Скуп вредности случајне величине, $S_X := \{x\in\mathbb{R} \mid \exists\omega\in\Omega : X(\omega)=x\} = \operatorname{Im} X$

$\{X=x\} = \{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=x\}$, $x\in S_X$

Расподела вероватноћа случајне величине, $P_X(\cdot)$: $\mathcal{B}\to\mathbb{R}$

$$P_X(B) = P\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\in B\} = P\{X\in B\}, \quad B\subset\mathbb{R}$$

Функција расподеле случајне величине, $F_X(x)$: $\mathbb{R}\to[0,1]$,

$$F_X(x) = P\{X\le x\} = P\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\le x\}, \quad x\in\mathbb{R}$$

→ детально обрађена у 19. питању.

Специјално:

Проста случајна величина: она чији је S_X коначан

Дискретна случајна величина: она чији је S_X дискретан, тј. коначан или највише пребројив

→ Одређена је њеним законом расподеле $X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_j & \dots \end{pmatrix}$, $x_j\in S_X$, $p_j = P\{X=x_j\}$

У том случају: 1) $P_X(B) = P\{X\in B\} = \sum_{j:x_j\in B} P\{X=x_j\} = \sum_{j:x_j\in B} p_j$

2) $F_X(x) = \sum_{j:x_j\le x} p_j$

9. Бернулијева и биномна расподела.

Бернулијева случ. величина, $X \sim Ber(p)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ - закон расподеле.

Пример: Индикатор догађаја, $I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

има закон расподеле $I_A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-P(A) & P(A) \end{pmatrix}$

Хоћемо да уопштимо, али морамо увести пар појмова:

Бернулијев експеримент: случајан експеримент са два могућа исхода (1/0, тј. успех/неуспех)

Бернулијева/ биномна схема:
- изводимо тачно n Бернул. експ.
- вероватноћа успеха је $p \in (0,1)$
- експерименти су међусобно независни

Желимо да конструишемо вероватносни модел $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ за Бернулијеву схему.

- $\Omega = \{(c_1, c_2, \dots, c_n) \mid c_i \in \{0,1\}\}$ (јасно $|\Omega| = 2^n$)
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
- P дефинишемо путем придруживања: $\omega = (c_1, \dots, c_n) \mapsto p^{\overset{\text{бр. 1}}{\sum c_i}} (1-p)^{\overset{\text{бр. 0}}{n - \sum c_i}}$ (овде користимо независност)

У овом моделу, тј. простору, посматрамо случајну величину: $X(\omega) = \sum^{n} c_j$ (број јединица, тј. успешних)
Јасно $S_X = \{0, 1, \dots, n\}$

Вероватноће из закона расподеле од X дате су са:

$$P\{X=k\} = P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Биномна случ. величина, $X \sim B(n,p)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \\ P_n(0) & P_n(1) & \dots & P_n(n) \end{pmatrix}$, где $P_n(k) = P\{X=k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$Ber(p) = B(2,p)$

T: Може се представити као збир n (тј. n индикатора) независних Бернулијевих сл вел.: $X = \sum_{j=1}^{n} I_j$, $X \sim B(n,p)$

Пример: Број успеха у Бернулијевој схеми, S_n.

Напомена: Ако је X проста, може се представити: $X(\omega) = \sum_{j=1}^{n} x_j I_{A_j}(\omega)$, где $A_j = \{X = x_j\}$ и $\omega \in \Omega$

Напомена: Важи и општије, тј. за дискретне: $X(\omega) = \sum x_j I_{A_j}(\omega)$

Уочимо да је $\{A_1, A_2, \dots\}$ разбијање сигурног догађаја Ω.

Још значајних дискретних расподела:

* Геометријска случ. величина, $X \sim G(p)$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ p & p(1-p) & \dots & p(1-p)^{k-1} & \dots \end{pmatrix}$ (бесконачна)

↳ Бројач Бернулијевих експеримената до првог успеха.

* Негативна биномна случ. величина, $X \sim NB(r,p)$: $\begin{pmatrix} r & r+1 & \dots & k \\ p^r & r \cdot p^r(1-p) & \dots & \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \end{pmatrix}$, $r \in N$, $k \geq r$

↳ Бројач Бернулијевих експеримената до r-тог успеха.

↳ $NB(1,p) = G(p)$

* Хипергеометријска случ. величина: за њу су вероватноће p_k из закона расподеле:

$$p_k = P\{X = k\} = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

за $\max\{0, n+m-N\} \leq k \leq \min\{n, m\}$

где $N \in N$, $n, m \in \{1, 2, \dots, N-1\}$

↳ Из кутије са N куглица (m црних, N-m црвених) се одједном одабере n куглица.
X - број црних међу одабраним куглицама.

* Дискретна равномерна случ. величина, $X \sim \mathcal{U}\{a,b\}$: $\begin{pmatrix} a & a+1 & \dots & b \\ 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}$, $\frac{1}{n} = \frac{1}{b-a+1}$

* Дегенерисана случ. величина: $\begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in R$

10. Дискретан случајни вектор и његова расподела.

Случајан вектор, X: уређена n-торка $(X_1, \dots, X_n)$, где су X_j случ. вел. из $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

↳ можемо га представити као мерљиво пресликавање: $X : \Omega \to R^n$, $X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$

Отуда, $\mathcal{S}_X = \mathcal{S}_{X_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{X_n}$

Дискретан случајан вектор: случ. вектор за који је $\mathcal{S}_X$ дискретан

Даље разматрамо само дводимензиони дискр. случ. век. (X, Y), где:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{S}_X = \{x_1, x_2, \dots\} \\ \mathcal{S}_Y = \{y_1, y_2, \dots\} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{S}_{(X,Y)} = \mathcal{S}_X \times \mathcal{S}_Y$$

Заједнички (дводимензиони) закон расподеле од (X, Y): одређују га бројеви p_{ij}

$$p_{ij} = P\{(X,Y) = (x_i, y_j)\} = P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\} \cap \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = y_j\}\}$$

Маргинални закони расподеле за X и Y: одређују их бројеви $p_{i\cdot}$ и $p_{\cdot j}$

$$p_{i\cdot} = P\{X = x_i\} \overset{\text{формула потп. врв.}}{=} \sum_{j : y_j \in \mathcal{S}_Y} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_j p_{ij}, \quad x_i \in \mathcal{S}_X$$

$$p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\} \overset{\text{формула потп. врв.}}{=} \sum_{i : x_i \in \mathcal{S}_X} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_i p_{ij}, \quad y_j \in \mathcal{S}_Y$$

	y_1	y_2	...	y_j	...	
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1j}	...	
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2j}	...	
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	...	p_{ij}	...	→ $p_{i\cdot}$
⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋱	
				↓ $p_{\cdot j}$		

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$$

Напомена: из $p_{i\cdot}$, $p_{\cdot j}$ не можемо реконструисати заједн. закон расп.

Условна случ. величина, $X \mid Y = y_j$: дискр. сл. вел. са скупом вр. $\mathcal{S}_X$ које се реализују са врв:

$$P\{X = x_i \mid Y = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \quad x_i \in \mathcal{S}_X, \quad p_{\cdot j} > 0$$

↳ **Условна расподела вероватноћа**: $X \mid Y = y_j : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots \\ \frac{p_{1j}}{p_{\cdot j}} & \frac{p_{2j}}{p_{\cdot j}} & \dots & \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} & \dots \end{pmatrix}$

Аналогно дефинишемо $Y \mid X = x_i$.

20. Независност случајних величина.

Независне случајне величине: ако важи $P\{X=x_i, Y=y_j\} = P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}$, за све $(x_i,y_j)\in \mathcal{S}_{(X,Y)}$

тј. $p_{i,j} = p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$

Напомена: Тада важи и: $X = (X\mid Y=y_j)$, за $y_j\in \mathcal{S}_Y$, $p_{\cdot j}>0$

$Y = (Y\mid X=x_i)$, за $x_i\in \mathcal{S}_X$, $p_{i\cdot}>0$

Д: $P\{X=x_i \mid Y=y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \overset{\text{нез.}}{=} \frac{p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}}{p_{\cdot j}} = p_{i\cdot} = P\{X=x_i\}$

Т: Ако су X, Y независне дискр. сл. вел. и ако $B_1\subset \mathcal{S}_X$, $B_2\subset \mathcal{S}_Y$, тада:

$$P\{X\in B_1, Y\in B_2\} = P\{X\in B_1\}\cdot P\{Y\in B_2\}$$

Д: $B_1=\{r_1,r_2,\dots\}\subset \mathcal{S}_X$, $B_2=\{s_1,s_2,\dots\}\subset \mathcal{S}_Y$

$$P\{X\in B_1, Y\in B_2\} = P\{\bigcup_i\bigcup_j\{X=r_i, Y=s_j\}\} \underset{\text{адитивност}}{=} \sum_i\sum_j P\{X=r_i, Y=s_j\} \underset{\text{независност}}{=} \sum_i\sum_j P\{X=r_i\}\cdot P\{Y=s_j\}$$

$$\underset{\text{адитивност}}{=} P\{\bigcup_i\{X=r_i\}\}\cdot P\{\bigcup_j\{Y=s_j\}\} = P\{X\in B_1\}\cdot P\{Y\in B_2\}$$

Т: Дискр. сл. вел. $X_1,\dots,X_n$ су потпуно независне акко за сваку n-торку $(x_1,\dots,x_n)\in R^n$

$$P\{\bigcap_{j=1}^{n}\{X_j=x_j\}\} = \prod_{j=1}^{n} P\{X_j=x_j\}$$

Т: Да би (X,Y) било одређено њиховим појединачним расподелама, X и Y морају бити независне.

* Ако је X дискр. сл. величина и $g: R\to R$ Борелова функција
Тада је $Y=g(X)$ такође дискр. сл. величина у истом простору вероватноћа и $\mathcal{S}_Y=\{y_i=g(x_i) \mid x_i\in \mathcal{S}_X\}$

Исто важи и за дискретан n-димензиони сл. вектор.

Т: Ако су X, Y независне сл. величине и $g,h: R\to R$.
Тада су и $g(X)$ и $h(Y)$ независне.

ПОГЛЕДАТИ И 19. ПИТАЊЕ.

21. Математичко очекивање случајне величине.

Математичко очекивање. $EX = \sum_{j}^{\infty} x_j \cdot P\{X=x_j\}$, где је X дис. сл. вел. и $\mathcal{S}_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

Напомена: Да би мат. очекивање постојало, овај ред мора бити апсолутно-конвергентан. Ако није, онда мат. очекивање не постоји.

Т: Нека је X дис. сл. вел., $\mathcal{S}_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ извесна ф-ја којом је деф. $Y := g(X)$

Ако постоји $EY = Eg(X)$, оно је једнако $EY = \sum_j g(x_j) \cdot P\{X=x_j\}$.

Напомена: $Eg(X) \neq g(EX)$ у општем случају.

Особине: 1) $E(aX+bY+c) = aEX + bEY + c$.

специјално:
- $E(X+Y) = EX+EY$. (ово важи и општије, тј. за $X_1, X_2, \ldots, X_n$)
- $E(aX) = aE(X)$.
- $E(c) = c$.

2) $|EX| \leq E|X|$.

3) Ако је $X \geq 0$ скоро сигурно ($P\{X \geq 0\} = 1$) онда је $EX \geq 0$.

4) Ако је X ограничена сл. вел. ($|X| \leq d$ је скоро сиг. за неко $d \in (0, +\infty)$), онда $|EX| \leq d$.

5) Ако је $X \leq Y$ скоро сигурно, онда је $EX \leq EY$.

Д: 1) Доказујемо у случају кад су X, Y ненегативне дис. сл. вел. и $a, b, c \geq 0$.

Узмимо $\mathcal{S}_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и $\mathcal{S}_Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$. Тада можемо записати: $X = \sum_k x_k \cdot I_{A_k}$ $(A_k := \{X=x_k\})$ разб. сиг. дог.

$Y = \sum_l y_l \cdot I_{B_l}$ $(B_l := \{Y=y_l\})$ разб. сиг. дог.

$$aX+bY+c = \sum_k \sum_l (ax_k+by_l+c) \cdot \underbrace{I_{A_k} \cdot I_{B_l}}_{I_{A_kB_l}}$$

$$\Rightarrow E(aX+bY+c) = \sum_k \sum_l (ax_k+by_l+c) \cdot P(A_kB_l) = a\sum_k x_k \underbrace{\sum_l P(A_kB_l)}_{P(A_k)} + b\sum_l y_l \underbrace{\sum_k P(A_kB_l)}_{P(B_l)} + c\underbrace{\sum_{k,l} P(A_kB_l)}_{1}$$

формула потп. врв.

$$= aEX + bEY + c.$$

Т: X, Y - независне $\Rightarrow E(XY) = EX \cdot EY$ (ово важи и општије, тј. за потпуно незав. $X_1, X_2, \ldots, X_n$)

Д: Доказујемо у случају кад су X, Y ненегативне дис. сл. вел.

$$E(XY) = \sum_k \sum_l x_k y_l P(A_kB_l) \overset{\text{нез.}}{=} \sum_k \sum_l x_k y_l P(A_k)P(B_l) = \sum_k x_k P(A_k) \cdot \sum_l y_l P(B_l) = EX \cdot EY.$$

Дат је дводимензиони случ. вектор (X, Y).

Условно математичко очекивање случ. вел. X при услову $Y=y_j$, где $p_{\cdot j}>0$, је мат. оч. од $X|Y=y_j$.

Ако постоји, дато је са: $E(X|Y=y_j) = \sum_i x_i \cdot P\{X=x_i \mid Y=y_j\} = \sum_i x_i \cdot \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$

Претпоставимо додатно $p_{\cdot j}>0$ за све j.
У том случају, условно математичко очекивање случ. вел. X при услову Y, $E(X|Y)$ је случ. вел.

Њене могуће вредности су $E(X|Y=y_j)$, за све $y_j \in S_Y$.
Одговарајуће вероватноће једнаке су $p_{\cdot j}$

Њено очекивање дато је са: $E(E(X|Y)) = \sum_j E(X|Y=y_j) \cdot P\{Y=y_j\} = \sum_j E(X|Y=y_j) \cdot p_{\cdot j} = EX$. (исто као X)

ПОГЛЕДАТИ И 18. ПИТАЊЕ.
И 22. ПИТАЊЕ.

22. Дисперзија случајне величине.

Дисперзија случајне величине. $DX = E(X-EX)^2$. Ако је X дискретна, важи: $DX = \sum_j (x_j - EX)^2 \cdot p_j$

Стандардна девијација је $\sqrt{DX}$.

Особине: Ако је X сл. вел. за коју постоји дисперзија (коначан број) и $a, b, c \in \mathbb{R}$ константе:

* 1) $DX = EX^2 - (EX)^2$.

2) $0 \leq DX \leq EX^2$, $\quad DX = 0 \iff X: \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) $D(X+b) = DX$.

4) $D(aX) = a^2 DX$.

↳ специјално: $D(-X) = DX$.

Д: 1) $DX \overset{\text{деф.}}{=} E(X-EX)^2 = E(X^2 - 2EX \cdot X + (EX)^2) \overset{\text{линеарност } E}{=} EX^2 - 2EX \cdot EX + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$.

Напомена: X - дискретна $\Rightarrow \quad DX = \sum_j x_j^2 p_j - \underbrace{(EX)^2}_{\text{const}}$

2) $(\Leftarrow)$ $X: \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow EX = c,\ EX^2 = c^2 \Rightarrow DX = 0$.

$(\Rightarrow)$ $DX = 0$, где је X дискретна и $EX = c$ $\Rightarrow$ мора да важи $\sum_j (x_j - c)^2 \cdot p_j = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_j = 0, & x_j \neq c \\ p_j = 1, & x_j = c. \end{cases}$$

3) $D(X+b) \overset{\text{деф.}}{=} E(X+b-E(X+b))^2 = E(X+b-EX-b)^2 = E(X-EX)^2 = DX$.

4) $D(aX) = E(aX)^2 - (E(aX))^2 = a^2(EX^2 - (EX)^2) = a^2 DX$.

Т: $X_1, \dots, X_n$ - независне у паровима. Тада (ако постоје): $D(X_1 + \dots + X_n) = DX_1 + \dots + DX_n$. (општији случај у следећем питању)

Д: $D(\sum_{j=1}^n X_j) \overset{\text{деф.}}{=} E(\sum_{j=1}^n X_j - E(\sum_{j=1}^n X_j))^2 = E(\sum_{j=1}^n X_j - \sum_{j=1}^n EX_j)^2 = E(\sum_{j=1}^n (X_j - EX_j))^2 = E(\sum_{j=1}^n (X_j - EX_j)^2) + 2\sum_{1\leq j<k\leq n} E((X_j - EX_j)(X_k - EX_k))$

$\overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^n DX_j + 0 = \sum_{j=1}^n DX_j$

$(*)$ $X_1, \dots, X_n$ - независне у паровима $\Rightarrow E((X_j - EX_j)(X_k - EX_k)) = E(X_j X_k) - EX_j \cdot EX_k = EX_j \cdot EX_k - EX_j \cdot EX_k = 0$.

расподела случ. вел. X	EX	DX	параметри
дегенерисана (у тачки $c \in \mathbb{R}$)	c	0	
Бернулијева	p	$p(1-p)$	$p \in (0,1)$
Биномна	np	$np(1-p)$	$n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$
Геометријска	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$p \in (0,1)$
Негативна биномна	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	$r \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$
Хипергеометријска	$\frac{nm}{N}$	$\frac{nm}{N} \cdot \frac{N-m}{N} \cdot \left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$	$N \in \mathbb{N}$ $n, m \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$
Дискретна равномерна	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$	$a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$
Пуасонова	λ	λ	$\lambda > 0$

ПОГЛЕДАТИ И 18. ПИТАЊЕ.

23. Коваријација и коефицијент корелације.

Коваријација. $cov(X,Y) := E((X-EX)(Y-EY)) = E(XY) - EX \cdot EY$

↳ Не постоји ако не постоји EX или EY.

Особине: 1) $cov(X,X) = DX$.

2) X, Y независне $\Rightarrow$ $cov(X,Y) = 0$. Обрнуто не мора да важи.

↳ тј. за $cov(X,Y)=0$ кажемо да су X,Y некорелиране.
(некоперисане)

3) $cov(aX, bY) = ab \cdot cov(X,Y)$.

$cov(X+a, Y+b) = cov(X,Y)$.

4) $cov\left(\sum_{j=1}^{n} X_j, \sum_{k=1}^{m} Y_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} cov(X_j, Y_k)$. Последица: $D\left(\sum^{n} X_j\right) = \sum^{n} DX_j + 2\sum_{1\le j<k\le n} cov(X_j, X_k)$.

Стандардизована верзија случајне величине. $X^* = \frac{X - EX}{\sqrt{DX}}$: за њу важи: $EX^* = 0$, $DX^* = 1$

↳ постоји ако је X недегенерисана и постоји DX.

Коефицијент корелације. $\rho_{X,Y} := E(X^* Y^*) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}}$.

↳ постоји ако постоје DX, DY

T: $|\rho_{X,Y}| \le 1$

При томе, једнакост важи акко $P\{aX+bY = c\} = 1$, за неке $a,b,c \in \mathbb{R}$. (Тада су X,Y лин. зависне)

$Y = kX + l$ $\Updownarrow$

Д: * $D(X^* \pm Y^*) = E(X^* \pm Y^*)^2 - (E(X^* \pm Y^*))^2 = E(X^* \pm Y^*)^2 - (\underbrace{EX^*}_{0} \pm \underbrace{EY^*}_{0}) = E(X^* \pm Y^*)^2 =$

$= E(X^*)^2 \pm 2E(X^* Y^*) + E(Y^*)^2 = DX^* \pm 2\rho_{X,Y} + DY^* = 2 \pm 2\rho_{X,Y} = 2(1 \pm \rho_{X,Y})$

Знамо да је дисперзија ненегативна $\Rightarrow 1 + \rho_{X,Y} \ge 0 \quad \wedge \quad 1 - \rho_{X,Y} \ge 0 \Rightarrow |\rho_{X,Y}| \le 1$

* Једнакости: $\rho_{X,Y} = -1 \Leftrightarrow D(X^* + Y^*) = 0 \Leftrightarrow X^* + Y^* = const$ је скоро сигурно.

$\rho_{X,Y} = 1 \Leftrightarrow D(X^* - Y^*) = 0 \Leftrightarrow X^* - Y^* = const$ је скоро сигурно.

11. Низ биномних вероватноћа и Бернулијев закон великих бројева.

Подсећање: вероватносни модел Бернулијеве схеме: $\Omega = \{\omega = (c_1, \dots, c_n) \mid c_i \in \{0,1\}\}$.

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

$P: \omega = (c_1, \dots, c_n) \mapsto p^{\sum_{}^{n} c_j}(1-p)^{n - \sum^{n} c_j}$

На Ω је дефинисана и $S_n \sim B(n,p)$ - број успеха у Бернулијевој схеми. (већ увели у 9. питању)

Тада важи и: $P(\{\omega\}) = p^{S_n(\omega)}(1-p)^{n-S_n(\omega)}$, $\omega \in \Omega$

Биномне вероватноће, $P_n(k) := P\{S_n = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $0 \le k \le n$

↳ вероватноће из закона расподеле случ. вел. $S_n \in B(n,p)$.

Важи: $ES_n = np$; $DS_n = np(1-p)$. (22. питање - табела)

Занима нас: За које k низ биномних вероватноћа $(P_n(k))$ достиже максимум?

Дискусија: Нека је $1 \le k \le n$: $P_n(k) - P_n(k-1) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - \binom{n}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{n-k+1}{n-k+1} \cdot p \cdot p^{k-1}(1-p)^{n-k} - \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} \cdot \frac{k}{k} \cdot p^{k-1}(1-p)(1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k+1)!} \cdot p^{k-1}(1-p)^{n-k}\big((n-k+1)p - k(1-p)\big) \gtreqless 0$$

Дакле поредимо $(n-k+1)p$ и $k(1-p)$, како бисмо видели однос $P_n(k)$ и $P_n(k-1)$.

$P_n(k) < P_n(k-1)$, ако $k > (n+1)p$

$P_n(k) < P_n(k-1)$, ако $k < (n+1)p$

$P_n(k) = P_n(k-1)$, ако $k = (n+1)p$

Закључак:

1° $0 < p < \frac{1}{n+1} \Rightarrow P_n(0) > P_n(1) > \dots > P_n(n)$ (тада је $(n+1)p < 1 \le k$)

2° $\frac{n}{n+1} < p < 1 \Rightarrow P_n(0) < P_n(1) < \dots < P_n(n)$ (тада је $(n+1)p > n \ge k$)

3° $\frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1} \Rightarrow P_n(0) < P_n(1) < \dots < P_n(k_0 - 1) \le P_n(k_0) > P_n(k_0+1) > \dots > P_n(n)$, $k_0 = \lfloor (n+1)p \rfloor$ ↗↘

Бернулијев закон великих бројева: за $\varepsilon > 0$: $P\{|\frac{S_n}{n} - p| > \varepsilon\} \le \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$ $\iff$ $P\{|\frac{S_n}{n} - p| \le \varepsilon\} \ge 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$

Последица: $\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{S_n}{n} - p| > \varepsilon\} = 0$ $\iff$ $\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{S_n}{n} - p| \le \varepsilon\} = 1$

Д: Фиксирајмо $\varepsilon > 0$ и нека су са $P_n(k)$ означене биномне вероватноће.

$$P\{|\tfrac{S_n}{n} - p| > \varepsilon\} = P\Big\{\bigcup_{\substack{0\le k\le n \\ |\frac{k}{n}-p|>\varepsilon}} \{S_n = k\}\Big\} \overset{\text{кон. адит.}}{=} \sum_{\substack{0\le k\le n \\ |\frac{k}{n}-p|>\varepsilon}} P_n(k) \cdot \overset{\text{додали}}{1} \le \sum_{\substack{0\le k\le n \\ |\frac{k}{n}-p|>\varepsilon}} P_n(k) \cdot \frac{(\frac{k}{n}-p)^2}{\varepsilon^2}$$

$$\overset{\text{сабирци су ненегативни}}{\le} \frac{1}{n^2\varepsilon^2} \sum_{k=0}^{n} (k-np)^2 P_n(k) \overset{\text{деф.}}{=} \frac{DS_n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

12. Чебишовљева неједнакост и Чебишовљев закон великих бројева.

Т: Нека је X случ. вел. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и $g: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ извесна функција.

Ако постоји $Eg(X)$, онда за свако $\varepsilon > 0$ важи: $P\{\omega \in \Omega \mid g(X(\omega)) > \varepsilon\} \leq \frac{Eg(X)}{\varepsilon}$

Д: Фиксирајмо $\varepsilon > 0$ и нека је $A := \{\omega \in \Omega \mid g(X(\omega)) \geq \varepsilon\}$

Тада за $\forall \omega \in \Omega$ $g(X(\omega)) \geq \varepsilon \cdot I_A(\omega)$ $\Rightarrow$ $Eg(X) \geq E(\varepsilon \cdot I_A) = \varepsilon EI_A = \varepsilon P(A) = \varepsilon \cdot P\{g(X) \geq \varepsilon\}$

Марковљева неједнакост: $\forall \varepsilon > 0$: $P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E|X|}{\varepsilon}$

Д: последица претходног $(g(X) = |X|)$

Чебишовљева неједнакост: $\forall \varepsilon > 0$: $P\{|X - EX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$

Д: $P\{|X - EX| \geq \varepsilon\} = P\{(X - EX)^2 \geq \varepsilon^2\} \overset{T}{\leq} \frac{E(X - EX)^2}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{\varepsilon^2}$, за $\varepsilon > 0$

Последица: Ако узмемо $EX = m$, $DX = \sigma^2$ и $\varepsilon = k\sigma > 0$ $\Rightarrow$ $P\{|X - m| < k\sigma\} \leq \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2}$

$\Rightarrow$ $P\{|X - m| < k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2}$

Нека је p дата вероватноћа успеха у појединачном извођењу Бернулијевог експеримента.
За дато $\varepsilon>0$ и $\alpha\in(0,1)$ тражимо најмање n ткд.

$$P\{|\tfrac{S_n}{n}-p|\le\varepsilon\}\ge\alpha$$

По $\boxed{11}$, за $\varepsilon>0$ важи: $P\{|\frac{S_n}{n}-p|\le\varepsilon\}\ge 1-\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}\overset{(*)}{\ge}1-\frac{1}{4n\varepsilon^2}$ (*) $p(1-p)<\frac{1}{4}$, за $0\le p\le 1$

Узмимо $1-\frac{1}{4n\varepsilon^2}=\alpha \Rightarrow n=\frac{1}{4\varepsilon^2(1-\alpha)}$

Закључак: За дато $\varepsilon>0$ и при великим вредностима n:

- Вероватноћа да $S_n\in[np-n\varepsilon,\ np+n\varepsilon]$ блиска је 1.

  Зашто? Јер $P\{|\frac{S_n}{n}-p|\le\varepsilon\}=P\{-\varepsilon\le\frac{S_n}{n}-p\le\varepsilon\}=P\{np-n\varepsilon\le S_n\le np+n\varepsilon\}$ (за велика n је већи интервал)

- Вероватноћа да $S_n\in[0,np-n\varepsilon]$ или $S_n\in[np+n\varepsilon,n]$ блиска је 0.

* $S_n\in B(n,p)$ можемо представити као $S_n=\sum_{k=1}^n I_k$, где су $I_1,\dots,I_n$ незав. сл. вел. са $Ber(p)$ расподелом.

Тада је Бернулијев з.в.бр.: $\forall\varepsilon>0$: $P\{|\frac{S_n}{n}-p|>\varepsilon\}\underset{(ES_n=np)}{=}P\{|\frac{\sum^n I_k}{n}-\frac{\sum^n EI_k}{n}|>\varepsilon\}\le\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}\longrightarrow 0$, за $n\to\infty$

Желимо то да уопштимо: тј. занима нас да ли можемо (под којим условима) важи последња неједнакост само за произвољне сл. вел. $X_1,\dots,X_n$? (уместо I_k)

Управо о томе говори следеће тврђење.

Чебишовљев закон великих бројева: Нека су $X_1,X_2,\dots,X_n$ независне сл вел. и $C>0$ ткд. $\forall j$ $DX_j\le C$.

$$\text{Тада: } (\forall\varepsilon>0)\ P\{|\frac{\sum^n X_j}{n}-\frac{\sum^n EX_j}{n}|>\varepsilon\}\le\frac{C}{n\varepsilon^2}\to 0 \quad \text{за } n\to+\infty$$

Д: Применимо Чебишевљеву неједнакост на $X:=\frac{\sum^n X_j}{n}$

$$P\{|\frac{\sum^n X_j}{n}-\frac{\sum^n EX_j}{n}|\ge\varepsilon\}\underset{(*)}{\le}\frac{\sum^n DX_j}{n^2\varepsilon^2}\underset{DX_j\le C}{\le}\frac{nC}{n^2\varepsilon^2}=\frac{C}{n\varepsilon^2},\quad \text{за свако } \varepsilon>0.$$

$$(*)\ DX=D\frac{\sum^n X_j}{n}=\frac{1}{n^2}D(\sum^n X_j)\underset{X_1,\dots,X_n \text{ су независне}}{=}\frac{1}{n^2}\sum^n DX_j=\frac{\sum^n DX_j}{n^2}$$

15. Пуасонова расподела. Пуасонова апроксимација.

Пуасонова апроксимација биномне расподеле:

Нека сл. величина $S_n \sim B(n, p_n)$ и нека су $P_n(k) = P\{S_n = k\} = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$, $0 \le k \le n$.

Ако $n \to \infty$ и $p_n \to 0$, али тако да $n \cdot p_n \to \lambda$, где је $\lambda > 0$, тада важи:

$$\Pi_\lambda(k) := \lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}.$$

Д: Фиксирајмо $0 \le k \le n$.

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{(np_n)^k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{(1-p_n)^k}$$

$$* \quad \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \cdot \ldots \cdot n} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$* \quad \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \xrightarrow{np_n \to \lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-\lambda}$$

$$* \quad \frac{1}{(1-p_n)^k} \xrightarrow[(\text{за } n\to\infty)]{p_n \to 0} 1$$

$$\Rightarrow P_n(k) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \lambda^k \cdot e^{-\lambda} \cdot 1 = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Пуасонова случајна величина, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$: одређена законом расподеле:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots \\ \Pi_\lambda(0) & \Pi_\lambda(1) & \dots & \Pi_\lambda(k) & \dots \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \Pi_\lambda(k) := P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \ \lambda > 0.$$

Напомена: $\sum_{k=0}^{\infty} \Pi_\lambda(k) = \sum^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$

Т: $X \in \mathcal{P}(\lambda) \Rightarrow EX = \lambda, \quad DX = \lambda$ (већ поменули)

Адитивност: Ако су $X_1, \dots, X_n$ независне Пуасонове сл. вел. ткд. $X_j \in \mathcal{P}(\lambda_j)$, тада: $\sum_{j=1}^{n} X_j = \mathcal{P}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right)$

Т: Ако су X, Y независне Пуасонове сл. вел., онда сл. вел. X при услову у коме је дата реализација $X+Y$ има биномну расподелу.

Д: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu) \Rightarrow X+Y \in \mathcal{P}(\lambda+\mu)$ (по претходном)

$$P\{X=k \mid X+Y=l\} = \frac{P\{X=k, X+Y=l\}}{P\{X+Y=l\}} = \frac{P\{X=k, Y=l-k\}}{P\{X+Y=l\}} \overset{\text{нез.}}{=} \frac{P\{X=k\} \cdot P\{Y=l-k\}}{P\{X+Y=l\}} = \frac{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{l-k}}{(l-k)!} e^{-\mu}}{\frac{(\lambda+\mu)^l}{l!} e^{-(\lambda+\mu)}}$$

Дакле: $P\{X=k \mid X+Y=l\} \underset{\text{кад средимо}}{=} \binom{l}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{l-k}$, за $0 \le k \le l$.

13. Муавр - Лапласове теореме.

Нека $S_n \in B(n,p)$ и нека су $P_n(k)$ одговарајуће биномне вероватноће.
За довољно велико n, важи:

Локална Муавр-Лапласова теорема:

$$P_n(k) = P_n\{S_n = k\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}$$

Интегрална Муавр-Лапласова теорема:

$$P\{a \le S_n \le b\} \approx \int_{a^*}^{b^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \qquad a^* = \frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}, \quad b^* = \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$(a, b \in R \cup \{-\infty, +\infty\},\ a < b)$

Посматрајмо стандардизовану: $S_n^* = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ (тада $ES_n^* = 0$, $DS_n^* = 1$)

Тада је: $\mathcal{S}_{S_n^*} = \{x_k^* = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}} \mid 0 \le k \le n\}$

$$P_n^*(k) = P\{S_n^* = x_k^*\} = P_n(k) = P_n(x_k^* \sqrt{np(1-p)} + np), \quad 0 \le k \le n.$$

По лок. М-Л: $P_n^*(k) \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_k^*)^2}{2}}$.

По инт. М-Л: $P\{a \le S_n \le b\} = P\{a^* \le S_n^* \le b^*\} \approx \int_{a^*}^{b^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

По Бернулију: $P\{np - n\varepsilon \le S_n \le np + n\varepsilon\} = \sum_{k \in [np-n\varepsilon,\, np+n\varepsilon]} P_n(k) \xrightarrow{n\to\infty} 1$, за $\varepsilon > 0$.

Густина стандардне нормалне расподеле, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in R$

Функција расподеле стандардне нормалне расподеле, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt$, $x \in R$.

Напомена: још не уводимо нормалну расподелу, ово су само имена за функције.

14. Нормална расподела.

све пише у 18. питању.

16. Геометријске вероватноће. Бифонова игла. Бертранов парадокс.

Разматрамо ситуацију када је простор исхода Ω непребројив бесконачан скуп.

Прецизније: $\Omega \subset R^n$ је ограничен, мерљив скуп ткд. је $m(\Omega) < \infty$, где је m Лебегова мера.

$n=1 \rightarrow$ дужина.
$n=2 \rightarrow$ површина.
$n=3 \rightarrow$ запремина.

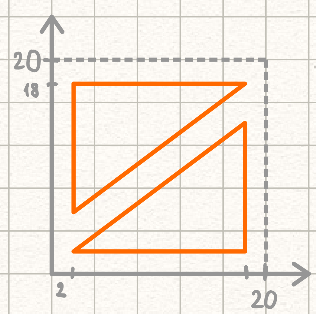
Конструишемо простор вероватноћа којим се моделира случајан експеримент одабира тачке из $\Omega \subset R^n$.

Имамо Ω, имамо $\mathcal{A}$, па нам треба P.
Нека је $A \subseteq \Omega$ мерљив.
Вероватноћа да је приликом случајног одабира тачке из скупа Ω изабрана баш тачка из A је $P(A) := \frac{m(A)}{m(\Omega)}$.

Пример: На жицу од 20m (независно) слећу два врапца.
Одредити вероватноћу да су удаљености врабаца од бандера, као и њихова раздаљина барем по 2m.

* x - положај првог врапца на жици (тј. интервалу $(0,20)$)
y - положај другог врапца на жици

Мора да важи:
$$\left.\begin{array}{l} 2 \leq x \leq 18 \\ 2 \leq y \leq 18 \\ |x-y| \geq 2 \end{array}\right\} (*)$$



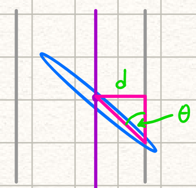
Дакле, $\Omega = \{(x,y) \in R^2 \mid 0 < x, y < 20\}$.
$A \subseteq \Omega$ - одређен условима $(*)$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{2 \cdot \frac{14^2}{2}}{20^2} = \frac{49}{100}.$$

Бифоновпроблем игле: Нека је раван „исцепана" паралелним правама које су на растојањима по L.
На ту раван бацимо иглу дужине $l \le L$.
Тражимо вероватноћу да игла сече неку од датих правих.

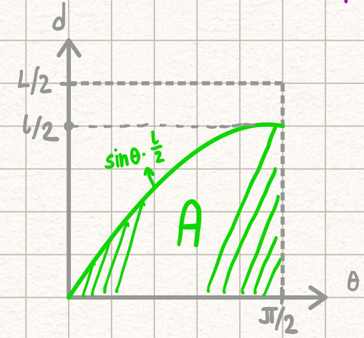
* Положај игле је једнозначно одређен са: d – удаљеност средишта игле до најближе праве.
θ – оштар/прав угао који игла заклапа са правама.

Хипотенуза обележеног правоуглог троугла је дужине $\frac{d}{\sin\theta}$.



$\Rightarrow$ игла сече најближу праву акко је $\frac{d}{\sin\theta} \le \frac{l}{2}$, тј. $d \le \sin\theta \cdot \frac{l}{2}$

Дакле, $\Omega = \{(d,\theta) \mid 0 \le d \le \frac{L}{2},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\} \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow m(\Omega) = \frac{L\pi}{4}$



$A \subseteq \Omega$ је догађај да игла сече праву.

$$\Rightarrow m(A) = \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cdot \frac{l}{2}\, d\theta = \frac{l}{2} \cdot (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{l}{2}$$

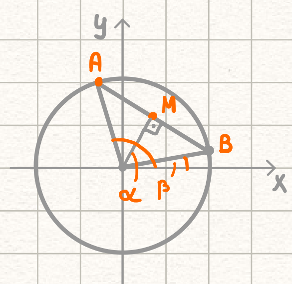
$$\Rightarrow P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{2l}{L\pi}$$

Занимљиво: одавде можемо приближно израчунати π (за $n \to \infty$, $\frac{n(A)}{n} \approx \frac{2l}{L\pi} \Rightarrow \pi \approx \frac{2l \cdot n}{L \cdot n(A)}$)

Бертранов парадокс: На случ. начин бира се тетива круга полупречника 1.
Тражимо вероватноћу догађаја да је дужина изабране тетиве већа од $\sqrt{3}$

дужина стр. једнакостр. троугла уписаног у круг

* M – ср. тетиве AB

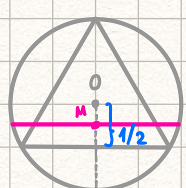


Координате можемо бирати на 3 начина:

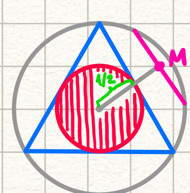
1° $M(\rho,\theta)$: $\rho \in [0,1]$, $\theta \in [0,2\pi)$.

2° $M(x,y)$: $x^2+y^2 \le 1$

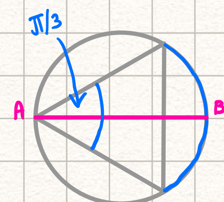
3° $A(1,\alpha)$ и $B(1,\beta)$: $\alpha,\beta \in [0,2\pi)$.



$P(A) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$



$P(A) = \frac{\frac{\pi^2}{4}}{\pi^2} = \frac{1}{4}$



$P(A) = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{3}$

17. Проблеми дефинисања вероватноће. Колмогоровљева аксиоматика.

* Нека је Ω простор исхода неког случ. експеримента.
σ-алгебра догађаја дефинисана на Ω је класа $\mathcal{A}$ подскупова скупа Ω која испуњава услове:

(A1) $\Omega \in \mathcal{A}$.
(A2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$.
(A3) Ако сваки члан бесконачног низа $(A_n)_{n\in N}$ припада $\mathcal{A}$, онда и $\bigcup^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Напомена: Из Де Моргана, A2 и A3 важи: $\bigcap^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Елементи σ-алгебре су мерљиви скупови. У теорији вероватноћа, то су случајни догађаји.

Уколико услов (A3) заменимо са (A3') $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$, тада је $\mathcal{A}$ алгебра догађаја.

Напомене: свака σ-алгебра је алгебра. Обрнуто важи само ако је алгебра коначна.

Пример: $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ је једна σ-алгебра.

* Напомена: уређени пар $(\Omega, \mathcal{A})$ је мерљив.

Сада дефинишемо вероватноћу аксиоматски: као функцију са одређеним својствима.

Колмогоров:

Скуповна функција $P: \mathcal{A} \to R$ је вероватноћа у мерљивом простору $(\Omega, \mathcal{A})$ ако важи:

(Б1) $P(\Omega) = 1$ (нормираност)

(Б2) $P(A) \in [0,1]$ за све $A \in \mathcal{A}$ (ненегативност)

(Б3) $P(\bigcup^{\infty} A_n) = \sum^{\infty} P(A_n)$ за све дисј. дог. из $\mathcal{A}$ (пребројива / σ-адитивност)

Простор вероватноћа је уређена тројка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

18. Апсолутно-непрекидна случајна величина.

Случајна величина X, тј. њена расподела вероватноћа $P_X(\cdot)$, је апсолутно-непрекидна ако постоји $f_X : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ ткд. за свако $x \in \mathbb{R}$ важи:

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt, \qquad \text{где је } F_X(\cdot) \text{ функција расподеле сл. вел. } X.$$

Функција $f_X(\cdot)$ се зове густина расподеле (вероватноћа) сл. вел. X.

Напомена: Свака апсолутно-непрекидна функција расподеле је непрекидна. Обрнуто не важи.

Особине густине $f_X(\cdot)$:

1) $\forall t \in \mathbb{R} \quad P\{X = t\} = 0.$

2) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b, \quad P\{X \in (a,b]\} = P\{X \in [a,b)\} = P\{X \in [a,b]\} = P\{X \in (a,b)\} = \int_a^b f_X(x)\,dx.$

3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad P\{X \leq x\} = P\{X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt.$

$$P\{X \geq x\} = P\{X > x\} = \int_{x}^{+\infty} f_X(t)\,dt.$$

Т: Ако је густина $f(\cdot)$ непрекидна на неком интервалу, тада је функција расподеле $F(\cdot)$ диф. на том инт. и за сваку тачку x из тог интервала важи: $F'(x) = f(x)$

(зато што $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$)

Т: Густина расподеле $f(\cdot)$ је једнозначно одређена функцијом расподеле $F(\cdot)$ до на скупу Лебегове мере нула.
(„дужине")

Т: Нумеричка вредност $f(x) \in \mathbb{R}$ густине расподеле $f(\cdot)$ у тачки x није вероватноћа.

Д: Нека је f непрекидна у околини тачке x.

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{P\{x < X \leq x + \Delta x\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}, \quad \text{па} \quad P\{x < X \leq x+\Delta x\} = f(x) \cdot \Delta x (1 + o(1)), \quad \Delta x \to 0+$$

Т: Интеграбилна ф-ја $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ је густина расподеле акко $\begin{cases} f \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \end{cases}$

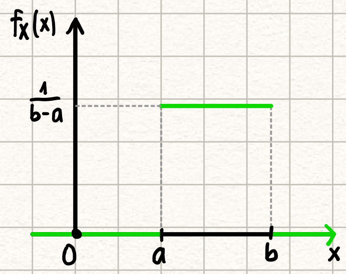
Носач апсолутно-непрекидне расподеле са густином расподеле $f(\cdot)$ је скуп $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$.

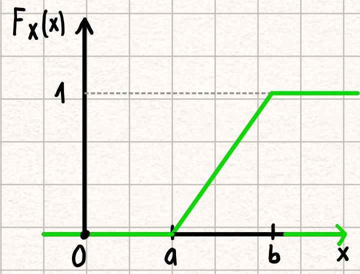
Значајне апсолутно-непрекидне расподеле:

* Равномерна расподела, $X \sim \mathcal{U}[a,b]$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad a<b, \ a,b \in \mathbb{R}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

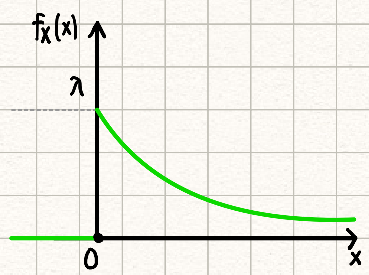


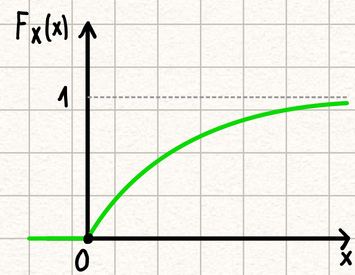


* Експоненцијална расподела, $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad \lambda > 0$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1-e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

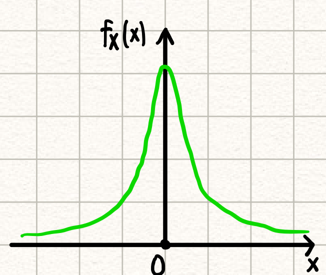


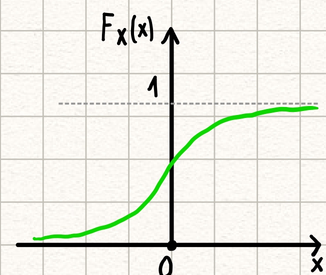


* Кошијева расподела:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x$$





* Стандардна нормална расподела:

$\boxed{13}$

$$f_X(x) = \varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x\in R \qquad \left(\text{напомена: } \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt = 1\right)$$

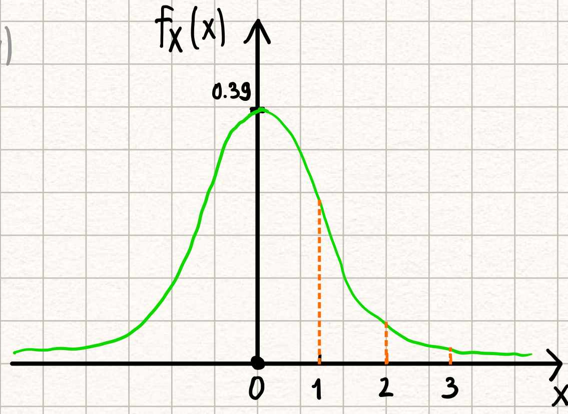
Особине:
1) парна
2) има макс. у $x=0$ $\quad (\varphi(0)\approx 0.39894)$
3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varphi(x) = 0$

Брзина конвергенције:

$$\int_{-1}^{1}\varphi(t)\,dt \approx 0.6827$$

$$\int_{-2}^{2}\varphi(t)\,dt \approx 0.9545$$

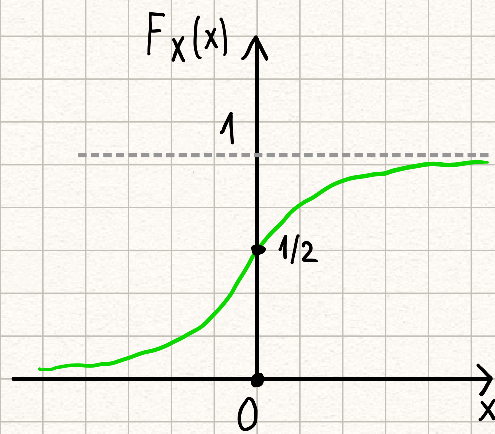
$$\int_{-3}^{3}\varphi(t)\,dt \approx 0.9973$$



$\boxed{13}$

$$F_X(x) = \Phi(x) := \int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \quad x\in R$$

Особине:
1) непрекидна.
2) строго растућа.
3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x) = 1$.
4) $\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$



* Нормална расподела, $X\sim\mathcal{N}(m,\sigma^2)$: $m\in R$, $\sigma\in(0,+\infty)$ (уопштење, тј. стандардна је $\mathcal{N}(0,1)$)

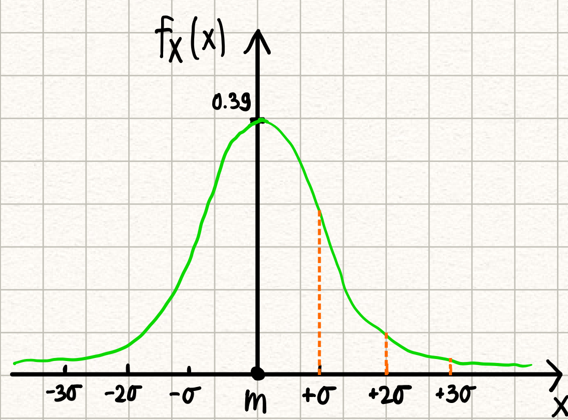
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x\in R$$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ (деф.) (погледати Т доле)

σ-правило: $\int_{m-\sigma}^{m+\sigma} f(t)\,dt \approx 0.6827$

2σ-правило: $\int_{m-2\sigma}^{m+2\sigma} f(t)\,dt \approx 0.9545$

3σ-правило: $\int_{m-3\sigma}^{m+3\sigma} f(t)\,dt \approx 0.9973$



Т: $X\in\mathcal{N}(m,\sigma^2) \Rightarrow$ 1) $Y = \frac{X-m}{\sigma} \in \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \begin{cases} 2)\ F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \\ 3)\ f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\cdot\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right). \end{cases}$

Нумеричке карактеристике апс.-непр. сл. величине:

Математичко очекивање за апс.-непр. сл. вел. X је $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)$. (под условом да постоји)

Нека је X апс.-непр. сл. величина са густином f_X и нека је $g: R \to R$ нека функција.

Ако је $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\,dx$ апсолутно конвергентан $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| \cdot f_X(x)\,dx < +\infty\right)$, уводимо мат. очекивање за $Y := g(X)$.

$$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\,dx.$$

Специјално:
* $g(x) = x^n \to EY = EX^n$ n-ти моменат сл. величине X.
* $g(x) = |x|^n \to EY = E|X|^n$ n-ти апсолутни моменат сл. величине X.
* $g(x) = (x - EX)^n \to EY = E(X-EX)^n$ n-ти централни моменат сл. величине X.
* $g(x) = |x - EX|^n \to EY = E|X-EX|^n$ n-ти апсолутни централни моменат сл. величине X.

расподела случ. вел. X	EX	DX	параметри
експоненцијална	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\lambda > 0$
гама $\left(f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)$ ↳ уопштење експ.	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\alpha, \beta > 0$
равномерна на огр. инт. (a,b)	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$a < b$, $a, b \in R$
нормална	m	σ^2	$m \in R$, $\sigma^2 : \sigma \in (0, \infty)$
Кошијева	нема	нема	

* $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} 1+x^2 = s \\ 2x\,dx = ds \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_1^{+\infty} \frac{ds}{s} = +\infty \Rightarrow$ Кошијева нема мат. очекивање.

19. Функција расподеле.

Нека је X случ. величина на простору $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Функција расподеле случајне величине X је $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, $F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\}$, $x \in \mathbb{R}$.

Особине: 1) неопадајућа
2) непрекидна са десне стране
3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Т: Може имати највише пребројиво много прекида.

Нека је $X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ случ. вектор на простору $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Функција расподеле случајног вектора X је $F_X : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, $F_X(x) = P\{X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n\}$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

Особине $(n=2)$: 1) $x_1 < x_2 \Rightarrow F_{X,Y}(x_1, y) \le F_{X,Y}(x_2, y)$.
$y_1 < y_2 \Rightarrow F_{X,Y}(x, y_1) \le F_{X,Y}(x, y_2)$.

2) непрекидна са десне стране (по сваком свом аргументу).

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$; $\lim\limits_{y \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

4) $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F_{X,Y}(x,y) = 1$

5) $\lim\limits_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x,y) = P\{X \le x, Y \in \mathbb{R}\} = P\{X \le x\} = F_X(x)$ - маргинална функција расподеле

$\lim\limits_{x \to +\infty} F_{X,Y}(x,y) = P\{X \in \mathbb{R}, Y \le y\} = P\{Y \le y\} = F_Y(y)$ - маргинална функција расподеле

6) $a_1 < a_2,\ b_1 < b_2 \Rightarrow P\{a_1 \le X \le a_2,\ b_1 \le Y \le b_2\} = F_{X,Y}(a_2, b_2) + F_{X,Y}(a_1, b_1) - F_{X,Y}(a_1, b_2) - F_{X,Y}(a_2, b_1)$.

7) $P\{X > x, Y > y\} = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{X,Y}(x,y)$.

Д: 7) $P\{X > x, Y > y\} = 1 - P\overline{\{X > x, Y > y\}} \overset{\text{Де Морган}}{=} 1 - P\{\{X \le x\} \cup \{Y \le y\}\}$

$= 1 - P\{X \le x\} - P\{Y \le y\} + P\{X \le x, Y \le y\} = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{X,Y}(x,y)$

Случајан вектор (X,Y) је апсолутно-непрекидан ако постоји $f_{X,Y}: R^2 \to [0,+\infty)$ ткд. за свако $(x,y) \in R^2$ важи:

$$F_{X,Y}(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(t,s)\,ds\,dt.$$

Функција $f_{X,Y}(\cdot)$ се зове заједничка густина расподеле (вероватноћа) сл. вектора (X,Y).

T: Компоненте X и Y апс.-непр. сл. вектора (X,Y) су апс.-непр. сл. величине. Важи и обрнуто.

Њихове маргиналне густине расподеле су функције: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,s)\,ds$ и $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(t,y)\,dt$.

Условна случајна величина X при услову $Y=y_j$, је апс.-непр. сл. вел. са густином расподеле: $f_{X|Y=y_j} = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$.

Напомена: $y \in R$ је фиксирана тачка у којој је марг. густина f_Y непрекидна и строго позитивна.

Независност компоненти: Нека је $(X_1, \dots, X_n)$ апс.-непр. случ. век. са зај. густином расподеле $f: R^n \to [0,+\infty)$.
За све j, случ. величина X_j је апс.-непр. и има маргиналну густину расподеле f_j.

Случ. вел. $X_1, \dots, X_n$ су независне акко за свако $x = (x_1, \dots, x_n)$ важи: $f(x) = \prod_{j=1}^{n} f_j(x_j)$.

Општи критеријум независности: Нека су $X_1, \dots, X_n$ случ. вел. на истом простору вероватноћа.
За све j, случ. вел. X_j има ф-ју расподеле F_j, и нека је $F: R^n \to [0,1]$ зај. ф-ја расп. вектора $(X_1, \dots, X_n)$

Случ. вел. $X_1, \dots, X_n$ су независне акко за свако $x = (x_1, \dots, x_n)$ важи: $F(x) = \prod_{j=1}^{n} F_j(x_j)$.

24. Функција генератриса момената.

Функција генератриса момената случ. вел. X је $M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_{k: x_k \in S_X} e^{t \cdot x_k} \cdot P\{X = x_k\}, & X\text{- дискретна} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\,dx, & X\text{- апс.-непр. са густином } f \end{cases}$

↳ постоји акко $E(e^{tX})$ постоји за свако t у некој отвореној околини нуле.

из [18]

T: Ако случ. вел. X има ф-ју ген. мом. M_X, онда сви њени моменти постоје и важи: $EX^n = M_X^{(n)}(0)$.

Закључак: Преко M_X можемо одредити све моменте од X. (отуд и име за ову ф-ју)

T: Ако постоји $h>0$ ткд. за $t: |t|<h$ важи $M_X(t) = M_Y(t)$, онда X и Y имају исте расподеле.

Закључак: Овде видимо карактеризацију расподеле вероватноћа њеном ф-јом ген. момената.

Особине: 1) $M_{aX+b} = e^{tb} \cdot M_X(at)$

2) $X_1, \dots, X_n$ - независне и имају ф-је ген. мом. $M_{X_1}, \dots, M_{X_n}$ за $|t|<h$, $h>0$. Означимо $X = \sum^n X_j$.

$$M_X(t) = \prod^n M_{X_j}(t)$$

25. Централна гранична теорема.

Лема: (X_n) - низ сл. вел.
F_j - функција расподеле за X_j.
M_j - функција генератриса момента за X_j.

F - нека функција расподеле, M - њој одговарајућа функција генератриса момента.

Ако при $n \to \infty$ важи $M_n(t) \to M(t)$ за свако t у некој отвореној околини нуле,
онда при $n \to \infty$ важи $F_n(x) \to F(x)$ за сваку тачку x у којој је F непрекидна.

Централна гранична теорема:

(X_n) - низ независних, једнако расподељених случ. вел. са очекивањем m и дисперзијом σ^2.
$S_n = \sum^n X_j$

Тада при $n \to \infty$ важи: $$P\left\{ \frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \le x \right\} \longrightarrow \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \text{за све } x \in \mathbb{R}.$$

Д: (претпостављамо додатно да постоји ф-ја ген. мом. за све чланове низа)

Уочимо да је довољно доказати за $m=0$, $\sigma^2=1$ (иначе уведемо нови низ $Y_n := \frac{X_n - m}{\sqrt{\sigma^2}}$)

Нека је $Z_n := \frac{S_n}{\sqrt{n}}$.
Довољно је показати да низ $M_{Z_1}, M_{Z_2}, \ldots$ конвергира ка ф-ји ген. мом. стд. нормалне расподеле.
Тиме смо га свели на лему.

Због независности и једнаке расподељености чланова низа (X_n) важи:

$$M_{S_n}(t) = \prod^n M_{X_j}(t) = (M(t))^n$$

Тада: $M_{Z_n}(t) = M_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \overset{/\ln}{\Rightarrow} \ln M_{Z_n}(t) = n \cdot \ln M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right).$

Применимо Маклорена: $M(\theta) = M(0) + M'(0)\cdot\theta + \frac{M''(0)}{2!}\cdot\theta^2 + R_2(\theta) \Rightarrow M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \approx 1 + \frac{t^2}{2n}$

Опет Маклорен: $\ln(1+\theta) = \theta - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\theta^n}{n} + R_n(\theta) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \ln M_{Z_n}(t) = \frac{t^2}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = e^{\frac{t^2}{2}}.$$