Увод у нумеричку математику

Јован Самарџић, 13/2019

Професорка: Зорица Дражић

- дефиниције
- ознаке
- теореме
- докази
- примери

Година курса: 2020/21

Молим да ми све грешке пријавите преко мејла или друштвених мрежа.

УВОД

1. Појам и врста грешке

Нека запис $y = A(x)$ представља проблем одређивања неке величине y на основу датог x.
Претпоставимо да је A толико сложен оператор да се решење не може скроз тачно израчунати.

Пример: Рецимо да се $\int_a^b x(t)\,dt$ не може аналитички израчунати. Шта можемо да урадимо?

а) заменимо ф-ју $x(t)$ полиномом или неком другом ф-јом чији је интеграл израчунљив.
б) уместо интеграла, израчунамо Риманову суму: $\sum_i x(t_i)\,\Delta t_i$.

Дакле, у општем случају, можемо да узмемо неко x^* уместо x или неко A^* уместо A.
То значи да уместо $y = A(x)$, проблем смо свели на тражење $y^* = A^*(x^*)$.

деф. Грешка је оцена блискости тзв. приближног решења y^* и тачног решења y.
Појам „блиско" зависи од простора у ком је проблем, као и од саме метрике на том простору.

деф. По пореклу, грешка може бити:

1° неотклоњива грешка - услед мана математичког модела или погрешних података.
(временска прогноза за месец унапред: подаци се мењају)

2° грешка методе / грешка одсецања - услед замене оператора или улазне величине или када бесконачни процес заменимо коначним.

3° рачунска грешка / грешка заокругљивања - услед заокругљивања
($\pi \approx 3.14$, $\sqrt{2} \approx 1.41$, итд.)

Пример: Знамо да бројеве можемо да записујемо на два начина:

1° фиксни зарез: одређен са n_1 - бр. циф. испред зареза и n_2 - бр. циф. иза зареза.
нпр. $n_1 = 4$, $n_2 = 5$, 31.207 записујемо $0031|20700$

2° покретни зарез: $a = p \cdot 10^q$, $|p| < 1$, где је p - мантиса, а q - експонент.
одређен са m - бр. циф. мантисе и e - бр. циф. експонента.
нпр. $m = 7$, $e = 3$, 31.207 записујемо $3120700|002$, $0312070|003$ ...
Први запис зовемо нормализовани.

Шта ако нпр. желимо да у покретном зарезу запишемо неки број који има више од m цифара? Долази до рачунске грешке и добијамо неки други број x^*.
Број x је тачна вредност, док је x^* приближан број.

деф. Апсолутна грешка је величина $\Delta x^* = |x - x^*|$.

деф. Релативна грешка је величина $\delta x^* = \dfrac{|x - x^*|}{|x|}$.

У пракси, често нам није позната тачна вредност, па не можемо да израчунамо ове две грешке. Зато уводимо наредна два појма:

деф. Граница апсолутне грешке је величина таква да $\Delta x^* = |x - x^*| \leq Ax^*$

Напомена: $x^* - Ax^* \leq x \leq x^* + Ax^*$

деф. Граница релативне грешке је величина таква да $\delta x^* = \dfrac{|x - x^*|}{|x|} \leq Rx^*$

У пракси, узимамо $Rx^* = \dfrac{Ax}{|x^*|}$ (пошто не знамо тачну вредност)

Често изостављамо реч граница (нпр. Ax^* зовемо само апс. грешка).

деф. Постоје и процентуална грешка: $Rx^* \cdot 100$, као и промилна грешка: $Rx^* \cdot 1000$.

2. Значајне и сигурне цифре

Већину бројева можемо записати у декадном запису: $a^* = \pm(\alpha_1 10^n + \dots + \alpha_k 10^{n-k+1} + \dots \alpha_m 10^{n-m+1})$.

деф. **Значајне цифре** броја су све цифре његовог записа полазећи од прве ненула цифре слева.

Пример: У броју 0.03120700, значајне су све цифре осим прве две нуле.
Последње две нуле су такође значајне, пошто указују на тачност са којом је број дат.

деф. Значајна цифра α_k броја је **сигурна цифра** ако за дато Ax^* постоји $0 < \omega \le 1$ ткд.

$$Ax^* \le \omega \cdot 10^{n-k+1} \qquad (n-k+1 \text{ је позиција цифре})$$

При томе: 1° $\omega \le \frac{1}{2}$, тада је α_k сигурна у ужем смислу.
2° $\frac{1}{2} < \omega \le 1$, тада је α_k сигурна у ширем смислу.

Напомене:
1) Ако је цифра сигурна у ужем смислу, онда је сигурна и у ширем смислу.
2) Ако је цифра сигурна, сигурне су и све (значајне) цифре испред ње.
3) Ако цифра није сигурна, нису ни цифре иза ње.

Пример: Узмимо да је $Ax^* = 0.5 \cdot 10^{-5}$ за $x^* = 0.03120700$.
Гледамо само значајне цифре: 3, 1, 2, 0, 7, 0, 0.

7: $0.5 \cdot 10^{-5} \le 0.5 \cdot 10^{-6}$ ↯, па 7, као ни 0, 0 нису сигурне.
0: $0.5 \cdot 10^{-5} \le 0.5 \cdot 10^{-5}$, па 0, као и 2, 1, 3 јесу сигурне.

Сигурне цифре можемо одредити и на други начин. Како је $Ax^* = 0.5 \cdot 10^{-5}$, важи:

$$0.03120700 - 0.5 \cdot 10^{-5} \le x \le 0.03120700 + 0.5 \cdot 10^{-5}$$
$$0.03120200 \le x \le 0.03121200$$

Видимо да x може имати било које цифре на последња 3 места и свакако упада у интервал.
То не важи и за 4. позицију отпозади: ту може само 0 или 1.

Закључак: Због овога, цифре које нису сигурне не треба писати, јер оптерећују израчунавања.
При одбацивању тих цифара, последња сигурна цифра се:

1° не мења: ако је $\alpha_{k+1} < 5$ или $\alpha_{k+1} = 5$, α_k парно;
2° повећа за 1: иначе

Дакле, апсолутна грешка нам говори да ли је цифра сигурна.
Показујемо везу између броја сигурних цифара и релативне грешке.

Теорема 1: Ако је k број сигурних цифара од x^*, α_1 прва сигурна цифра, важи:

$$\frac{\omega}{(\alpha_1+1)\cdot 10^k} \leq Rx^* \leq \frac{\omega}{\alpha_1 \cdot 10^{k-1}}, \qquad 0 < \omega \leq 1.$$

Доказ: Нека је α_k последња сигурна цифра.

По деф. сигурне цифре, важи: $\omega \cdot 10^{n-k} < Ax^* \leq \omega \cdot 10^{n-k+1}$ (иначе то не би била последња сигурна)

Дељењем декадним записом $x^* \neq 0$, добијамо:

$$\frac{\omega \cdot 10^{n-k}}{\alpha_1 10^n + \ldots + \alpha_k 10^{n-k+1}} < Rx^* \leq \frac{\omega \cdot 10^{n-k+1}}{\alpha_1 10^n + \ldots + \alpha_k 10^{n-k+1}}$$

Како $0 \leq \alpha_2 \cdot 10^{n-1} + \ldots + \alpha_k 10^{n-k+1} < 10^n$:

$$\frac{\omega \cdot 10^{n-k}}{\alpha_1 10^n + 10^n} < Rx^* \leq \frac{\omega \cdot 10^{n-k+1}}{\alpha_1 10^n}$$

Сређивањем:

$$\frac{\omega}{(\alpha_1+1)\cdot 10^k} \leq Rx^* \leq \frac{\omega}{\alpha_1 \cdot 10^{k-1}}$$

Закључак: Ax^* указује на број децималних цифара приближног броја
Rx^* указује на укупан број његових сигурних цифара.

Проблем: када рачунамо са приближним бројевима, то утиче на грешку коначног резултата.

деф. Ако се рачунска грешка не акумулира, нумерички алгоритам је **стабилан**.
Иначе је **нестабилан**.

Пример: стр. 5, пример 6 → рекурентни интеграл

Пример: стр. 6, пример 7 → корен

3. Грешке приближних вредности функција

деф. Нека је f функција параметара $(x_1, \dots, x_n) \in G$, $y = f(x_1, \dots, x_n)$ и $y^* = f(x_1^*, \dots, x_n^*)$

Апсолутна грешка величине y^* је $Af^* \equiv Ay^* := \sup_{(x_1,\dots,x_n)\in G} \Delta y^*$

$$= \sup_{(x_1,\dots,x_n)\in G} |f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1^*, \dots, x_n^*)|.$$

Релативна грешка величине y^* је $Rf^* \equiv Ry^* := \dfrac{Ay^*}{|y^*|}$.

Супремум је често тешко одредити, па ћемо израз из дефиниције оценити.
Приметимо следеће:

$$\Delta = y - y^* = f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1^*, \dots, x_n^*) = f(x_1^* + \Delta_1, \dots, x_n^* + \Delta_n) - f(x_1^*, \dots, x_n^*)$$

$$\overset{\text{Тејлор}}{=} \left[f(x_1^*, \dots, x_n^*) + \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta_n \right) + \epsilon(\underbrace{\Delta_1}_{\to 0}, \dots, \underbrace{\Delta_n}_{\to 0}) \right] - f(x_1^*, \dots, x_n^*) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta_i.$$

Дакле, у пракси користимо линеарну оцену апсолутне грешке:

$$\Delta f^* := \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i^* \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*), \quad \Delta x_i^* = |\Delta_i|$$

Ако добијени израз убацимо у дефиницију, добијамо:

$$Af^* \leq \sum_{i=1}^{n} \sup \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i^* \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*), \quad \Delta x_i^* = |\Delta_i|$$

Овде користимо и општу формулу за границу апсолутне грешке:

$$Af^* := \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot Ax_i^* \qquad (\text{пошто } \Delta x_i^* \leq Ax_i^*)$$

4. Грешке збира, разлике, производа, количника и степена

Формуле из 3 примењујемо на основне операције:

1) збир: $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n = S$

$$\Delta S^* = |S - S^*| = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|}_{1} \cdot \Delta x_i^* = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^*;$$

$$AS^* = \sum_{i=1}^{n} Ax_i^*.$$

2) разлика: $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 = R$

$$\Delta R^* = |R - R^*| = \sum_{i=1}^{2} \underbrace{\left|\frac{\partial R}{\partial x_i}\right|}_{|\pm 1| = 1} \Delta x_i^* = \sum_{i=1}^{2} \Delta x_i^*;$$

$$AR^* = Ax_1^* + Ax_2^*.$$

3) производ и количник: $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{e_1} \dots x_n^{e_n} = P \quad (e_i = \pm 1)$

$$AP^* = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial P}{\partial x_i}\right| \cdot Ax_i^* = \sum_{i=1}^{n} \left|e_i \cdot x_1^{e_1} \dots x_{i-1}^{e_{i-1}} \cdot x_i^{e_i - 1} \cdot x_{i+1}^{e_{i+1}} \cdot \dots \cdot x_n^{e_n}\right| \cdot Ax_i^* = \sum_{i=1}^{n} \left|\underbrace{e_i}_{\pm 1} \cdot \frac{P}{x_i}\right| \cdot Ax_i^* = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{P}{x_i}\right| \cdot Ax_i^*;$$

$$RP^* = \frac{AP^*}{|P^*|} = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{1}{x_i}\right| \cdot Ax_i^* = \sum_{i=1}^{n} Rx_i^*.$$

4) степен: * $f(x) = x^k \Rightarrow$ (аналогно) $Rf^* = |k| \cdot Rx^*;$

* $f(x) = \sqrt[k]{x} \Rightarrow$ (аналогно) $Rf^* = \left|\frac{1}{k}\right| \cdot Rx^*.$

5. Обратан проблем грешке

Тражимо колике могу бити границе грешака аргумената ткд. грешка функције не прелази дозвољену вредност.

Другим речима, тражимо $\Delta x_1^*, \dots, \Delta x_n^*$ ткд. $\Delta f^* \leq \varepsilon$, тј. $\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot \Delta x_i^* \leq \varepsilon$

а) функција једне промењиве: $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$.

$$\Delta f^* = |f'(x^*)| \cdot \Delta x^* \stackrel{(\text{за } f'(x^*) \neq 0)}{\Rightarrow} \Delta x^* = \frac{\Delta f^*}{|f'(x^*)|}. \stackrel{\Delta f^* \leq \varepsilon}{\Longrightarrow} \Delta x^* \leq \frac{\varepsilon}{|f'(x^*)|}$$

б) функција више промењивих: $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$.

Почетни услов даје само везу између $\Delta x_1^*, \dots, \Delta x_n^*$.
Зато нам је потребан додатни услов:

1° принцип једнаких утицаја: $\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \cdot \Delta x_1^* = \dots = \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \cdot \Delta x_n^*$

$$\Rightarrow \Delta f^* = n \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot \Delta x_i^* \Rightarrow \Delta x_i^* = \frac{\Delta f^*}{n \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|}.$$

2° принцип једнаких апсолутних грешака: $\Delta x_1^* = \dots = \Delta x_n^* = \Delta x_k^*$

$$\Rightarrow \Delta f^* = \Delta x_k^* \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right| \Rightarrow \Delta x_k^* = \frac{\Delta f^*}{\sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|}.$$

3° принцип једнаких релативних грешака: $R x_1^* = \dots = R x_n^* = R x_k^* = \frac{\Delta x_k^*}{|x_k^*|}$

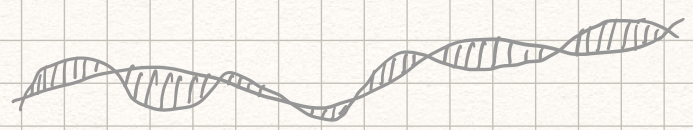
$$\Rightarrow \Delta f^* = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot \Delta x_i^* = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot \frac{\Delta x_i^*}{|x_i^*|} \cdot |x_i^*| = \frac{\Delta x_k^*}{|x_k^*|} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot |x_i^*| \Rightarrow \Delta x_k^* = \frac{\Delta f^* \cdot |x_k^*|}{\sum_{i=1}^{n} \left|x_i^* \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}\right|}.$$

ИНТЕРПОЛАЦИЈА

6. Опште о апроксимацији функција

Апроксимација је поступак у ком неку ф-ју $f(x)$ заменимо ф-јом $g(x)$ која јој је блиска у неком смислу. Пишемо $f(x) \approx g(x)$.

Када кажемо „у неком смислу", то значи да сами дефинишемо шта значи да су ф-је блиске. Другим речима, сами бирамо метрику.



Блискост две функције „подешавамо" избором слободних параметара $(c_0, \dots, c_n)$ ф-је $g(x)$.
У зависности од тога како ти параметри одређују g, постоје:

1) линеарна апроксимација: $g(x) = \sum^{n} \phi_i(x) \cdot c_i$, ϕ_i - лин. нез. функције (нпр. $1, x, x^2, \dots$).

   Специјално, када те параметре одређујемо тако да су вредности ф-ја f и g једнаке на дискретном скупу тачака $x_0, \dots, x_n$, онда то зовемо интерполација.

2) нелинеарна апроксимација: иначе

7. Интерполациони полином Лагранжа

Као што смо поменули у претх. питању, код линеарне апроксимације можемо за ϕ_i узети x^i, $i \in \{0,1,2\dots\}$
Тада се интерполациона функција $L_n(x) = \sum c_i \cdot x^i$ зове **интерполациони полином.**

Теорема 1: Постоји јединствени полином $L_n(x)$ степена n ткд. у $n+1$ различитих тачака $x_0, \dots, x_n$

$$L_n(x_i) = f(x_i).$$

Доказ: * јединственост:

ппс. Постоје два таква полинома: $L_n^1(x)$ и $L_n^2(x)$
Тада је полином $L_n^1 - L_n^2$ степена највише n, а има бар $n+1$ нулу $\lightning$

* егзистенција: конструисаћемо га.

Посматрајмо полиноме $l_i(x)$ степена n ткд. $l_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(i,j \in \{0,\dots,n\})$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ (*)
По претх. они су јединствено одређени.

Коначно, полином $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \cdot f(x_i)$ јесте степена n и испуњава услов теореме.

Сада ћемо добијени полином $L_n(x)$ да средимо:

Како су $x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ нуле $l_i(x)$, можемо га записати: $l_i(x) = a_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j)$

Нађимо a_i: $l_i(x_i) = 1 \Rightarrow a_i = \dfrac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)} \Rightarrow l_i(x) = \dfrac{\prod (x-x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$.

Када то убрстимо, добијамо израз:

деф. **Интерполациони полином Лагранжа** је $L_n(x) := \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{x-x_j}{x_i-x_j} \right) \cdot f(x_i)$.

Додатно, можемо увести ознаку $\omega_{n+1}(x) := \prod_{j=0}^{n} (x-x_j) \Rightarrow \omega'_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x-x_j) \right) \Rightarrow \omega'_{n+1}(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)$

Следи: $\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{x-x_j}{x_i-x_j} = \dfrac{\prod_{j=0}^{n} (x-x_j)}{(x-x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i-x_j)} = \dfrac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\, \omega'_{n+1}(x_i)}$.

Зато Лагранжов полином можемо записати и као: $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{\omega_{n+1}(x)\, f(x_i)}{(x-x_i)\, \omega'_{n+1}(x_i)}$.

8. Грешка полиномијалне интерполације

деф. Грешка полиномијалне интерполације у тачки x је вредност ф-је $R(x) := f(x) - L_n(x)$ у тачки x.

Теорема 1: Ако је $f(x)$ диференцијабилна $n+1$ пута, тада за сваки аргумент $\bar{x}$ постоји тачка ξ, која припада минималном интервалу који садржи све тачке $x_0, \dots, x_n, \bar{x}$, таква да је:

$$R(\bar{x}) = f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(\bar{x})$$

Доказ: $1°$ $\bar{x} = x_j$: тривијално $\left(R(\bar{x}) = 0,\ \omega_{n+1}(\bar{x}) = 0 \Rightarrow 0 = 0, \text{ па увек важи} \right)$

$2°$ $\bar{x} \neq x_j$: нека је $F(x) := f(x) - L_n(x) - K \cdot \omega_{n+1}(x)$, K - const ткд. $F(\bar{x}) = 0$.

Осим $\bar{x}$, нуле $F(x)$ су и $x_0, \dots, x_n$ $\Rightarrow$ $F(x)$ има бар $n+2$ нуле: $x_0, \dots, x_n, \bar{x}$
(јер $R(x_i) = 0$ и $\omega_{n+1}(x_i) = 0$)

Пошто имамо $n+2$ нуле, оне одређују $n+1$ интервала.
Како је F непрекидна, диференцијабилна и $F(x_i) = F(x_j) = 0$, важи Ролова теорема.

Њеном узастопном применом на те интервале $\Rightarrow$ F' има бар $n+1$ нулу;
⋮
$F^{(n+1)}$ има бар једну нулу: ξ

$$0 = F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \underbrace{L_n^{(n+1)}}_{\text{полином } n\text{-тог степ.}}(\xi) - K \cdot \omega_{n+1}^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - K \cdot (n+1)! \Rightarrow K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Важи и $F(\bar{x}) = 0 = f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(\bar{x})$, а одавде следи тврђење.

Напомена: Када у пракси рачунамо грешку, користимо оцену:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|, \quad \text{где је } M_{n+1} := \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Пример: Конструишемо $L_2(x)$ за $f(x) = \sqrt{x}$, са чворовима: $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 144$.

x_i	100	121	144
y_i	10	11	12

$$L_2(x) = \sum_{i=0}^{2} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \cdot f(x_i) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \cdot f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \cdot f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \cdot f(x_2)$$

$$= \frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)} \cdot 10 + \frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)} \cdot 11 + \frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)} \cdot 12.$$

Грешка: $|R_2(x)| \leq \frac{M_3(x)}{3!} |\omega_3(x)|$. $\quad M_3(x) = \max_{x \in [100, 144]} |f^{(3)}(x)| = \max_{x \in [100, 144]} \left| \frac{3}{8} \cdot x^{-\frac{5}{2}} \right| \overset{\text{опада}}{=} \frac{3}{8} \cdot 100^{-\frac{5}{2}}$

Дакле: $L_2(115) = 10.72275551$

$$|R_2(115)| \leq \frac{3/8 \cdot 100^{-5/2}}{6} |(115-100)(115-121)(115-144)| = 0.16 \cdot 10^{-2}.$$

9. Подељене разлике

деф. Подељена разлика нултог реда је $f[x_i] := f(x_i)$.

Подељена разлика k-тог реда је $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] := \dfrac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$.

Теорема 1: Подељена разлика реда k се израчунава као: $f[x_0, \dots, x_k] = \sum_{i=0}^{k} \dfrac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{k} (x_i - x_j)}$.

Доказ: Потпуном индукцијом по k:

(БИ) $k=1$: $$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} = \sum_{i=0}^{1} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{1} (x_i - x_j)}.$$

(ИК) $k \leq n \Rightarrow n+1$: $$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \overset{(\text{ИХ})}{=} \frac{1}{x_n - x_0}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n-1} (x_i - x_j)} \right) =$$

$$= \frac{1}{x_n - x_0}\left(\frac{f(x_n)}{\prod_{j=1}^{n-1} (x_n - x_j)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)} - \frac{f(x_0)}{\prod_{j=1}^{n-1} (x_0 - x_j)} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n-1} (x_i - x_j)} \right) =$$

$$= \frac{1}{x_n - x_0}\left(\frac{f(x_n)}{\prod_{j=1}^{n-1} (x_n - x_j)} - \frac{f(x_0)}{\prod_{j=1}^{n-1} (x_0 - x_j)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(x_i - x_0) - (x_i - x_n)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)} \cdot f(x_i) \right)$$

$$= \frac{f(x_n)}{\prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j)} + \frac{f(x_0)}{\prod_{j=1}^{n} (x_0 - x_j)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)} \cdot f(x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)} \cdot f(x_i)$$

Последица: 1) Подељена разлика је линеарни оператор: $(\alpha f_1 + \beta f_2)[x_0, \dots, x_n] = \alpha \cdot f_1[x_0, \dots, x_n] + \beta f_2[x_0, \dots, x_n]$;

2) Редослед чворова $x_0, \dots, x_n$ није битан. (симетричност)

Доказ: тривијално

Напомена: Подељене разлике се записују табеларно: (овако се и лакше рачуна)

x_0	$f(x_0)$		
		$f[x_0, x_1]$	
x_1	$f(x_1)$		$f[x_1, x_2, x_3]$
		$f[x_1, x_2]$	
x_2	$f(x_2)$		

$\boxed{11.}$ Грешка полиномијалне интерполације преко подељених разлика

Теорема 1: $f(x) - L_k(x) = \omega_{k+1}(x) \cdot f[x, x_0, \ldots, x_k].$

Доказ:

$$f(x) - L_k(x) = f(x) - \omega_{k+1}(x) \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{(x-x_i)\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k}(x_i - x_j)}$$

$$= \omega_{k+1}(x) \left(\frac{f(x)}{\prod_{j=0}^{k}(x-x_j)} + \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{(x_i - x)\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k}(x_i - x_j)} \right)$$

$$\overset{\boxed{9}\,T1}{=} \omega_{k+1}(x) \cdot f[x, x_0, \ldots, x_k].$$

$\boxed{10.}$ # Њутнов интерполациони полином са подељеним разликама

Лагранжов полином се може записати и у другом облику, који указује да се овај полином може сматрати уопштењем Тејлоровог:

У $\boxed{11}$ смо доказали: $f(x) - L_k(x) = \omega_{k+1}(x) \cdot f[x, x_0, \dots, x_k]$. $(*)$

Полином $L_n(x)$ можемо записати у облику: $L_n(x) = L_0(x) + \big(L_1(x) - L_0(x)\big) + \dots + \big(L_n(x) - L_{n-1}(x)\big)$, $(**)$
где је $L_m(x)$ интерполациони полином одређен чворовима $x_0, \dots, x_m$. (по $\boxed{7}$ Т1, они су јединствени)

$L_m(x) - L_{m-1}(x)$ је полином степена m, који је нула у тачкама $x_0, \dots, x_{m-1}$ (јер $L_{m-1}(x_j) = L_m(x_j) = f(x_j)$)

Зато је $L_m(x) - L_{m-1}(x) = a_m \cdot \omega_m(x)$, где је a_m const коју треба одредити, а $\omega_m(x) = \prod_{j=0}^{m-1}(x - x_j)$. (Безу)

Ако убацимо $x = x_m$: $L_m(x_m) - L_{m-1}(x_m) = a_m \cdot \omega_m(x_m) \iff f(x_m) - L_{m-1}(x_m) = a_m \cdot \omega_m(x_m)$.

$\overset{(*)}{\Rightarrow} a_m = f[x_m, x_0, \dots, x_{m-1}] = [x_0, \dots, x_m]$

Дакле, $L_m(x) - L_{m-1}(x) = f[x_0, \dots, x_m] \cdot \omega_m(x)$

Коначно, по $(**)$: $L_n(x) := f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$

деф. Добијени израз назива се **Њутнов интерполациони полином са подељеним разликама.**

Напомена: Када у пракси рачунамо грешку, користимо оцену:

$$|R_n(x)| \leq |f[x, x_0, \dots, x_n]| \cdot |\omega_{n+1}(x)|. \quad \text{(због } \boxed{11}\text{ Т1)}$$

Зашто је ово уопштење Тејлора? Покажимо везу извода и подељених разлика:

Теорема 1: $f[x, x_0, \dots, x_n] = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, за неко $\xi \in$ мин. интервалу који садржи $x_0, \dots, x_n, x$.

Доказ: По $\boxed{8}$ Т1: $\exists \xi \quad f(x) - L_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(x)$

По $\boxed{11}$ Т1: $f(x) - L_n(x) = \omega_{n+1}(x) \cdot f[x, x_0, \dots, x_n]$.

Тврђење следи директно.

Напомена: у Лагранжу x_{n+1} има утицај у n сабирака, док овде само у једном.
Зато је грешка рачуна мања.

12. Коначне разлике

Када су чворови x_i равномерно распоређени ($x_i = x_0 + i \cdot h$), уместо подељених, користимо коначне разлике.

деф. $f_i := f(x_i)$ (само скраћени запис)

деф. Коначна разлика првог реда је $f_{i+1} - f_i$.

У зависности од потребе, имамо ознаке: $f_{i+1} - f_i := \Delta f_i$ разлика унапред;

$:= \nabla f_{i+1}$ разлика уназад;

$:= \delta f_{i+1/2}$ централна разлика.

Коначна разлика k-тог реда је:

$$\Delta^k f_i := \Delta(\Delta^{k-1} f_i) = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i;$$

$$\nabla^k f_i := \nabla(\nabla^{k-1} f_i) = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1};$$

$$\delta^k f_i := \delta(\delta^{k-1} f_i) = \delta^{k-1} f_{i+\frac{1}{2}} - \delta^{k-1} f_{i-\frac{1}{2}}.$$

Напомена: $\Delta^k f_i = \nabla^k f_{i+k} = \delta^k f_{i+\frac{k}{2}}$

Теорема 1: $\Delta^k f_i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \cdot C_k^j \cdot f_{i+k-j}$. $\quad C_k^j = \binom{k}{j}$

Доказ: Потпуном индукцијом по k:

(БИ) $k=1$: тривијално $\left(\sum_{j=0}^{1} (-1)^j \cdot C_1^j \cdot f_{i+1-j} = 1 \cdot \frac{1!}{0! \cdot 1!} \cdot f_{i+1} + (-1) \cdot \frac{1!}{1! \cdot 0!} \cdot f_i = f_{i+1} - f_i = \Delta f_i \right)$

(ИК) $k \le n \Rightarrow n+1$:

$$\Delta^{n+1} f_i = \Delta^n f_{i+1} - \Delta^n f_i \overset{(\text{ИХ})}{=} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j f_{i+1+n-j} - \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j f_{i+n-j}$$

$$= C_n^0 f_{i+1+n} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j C_n^j f_{i+1+n-j} - (-1)^n C_n^n f_i - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_n^j f_{i+n-j}$$

$$\overset{(*)}{=} \underbrace{C_{n+1}^0 f_{i+1+n}}_{(*)} + \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} C_n^{j+1} f_{i+n-j}}_{\text{само други запис}} - \underbrace{(-1)^n C_{n+1}^{n+1} f_i}_{(*)} - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_n^j f_{i+n-j}$$

$$= C_{n+1}^0 f_{i+1+n} - (-1)^n C_{n+1}^{n+1} f_i + \sum_{j=0}^{n-1} f_{i+n-j} \cdot (-1)^{j+1} \left(C_n^{j+1} + C_n^j \right)$$

$$\overset{(**)}{=} C_{n+1}^0 f_{i+1+n} - (-1)^n C_{n+1}^{n+1} f_i + \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} f_{i+n-j} \cdot (-1)^{j+1} C_{n+1}^{j+1}}_{(**)}$$

$$= C_{n+1}^0 f_{i+1+n} - (-1)^n C_{n+1}^{n+1} f_i + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} f_{i+n-(j-1)} (-1)^j C_{n+1}^j}_{\text{само други запис}}$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j C_{n+1}^j f_{i+n+1-j}.$$

$(*)$ $C_n^0 = 1 = C_{n+1}^0$
$C_n^n = 1 = C_{n+1}^{n+1}$

$(**)$ $C_n^j + C_n^{j+1} = C_{n+1}^{j+1}$

13. Веза између подељених и коначних разлика

Теорема 1: Ако је $x_i = x_0 + i \cdot h$, онда је: $f[x_i, \dots, x_{i+k}] = \dfrac{\Delta^k f_i}{h^k \cdot k!}$.

Доказ: Потпуном индукцијом по k:

(БИ) $k=1$: тривијално $\left(f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{\Delta f_i}{h} = \dfrac{\Delta f_i}{h \cdot 1!} \right)$

(ИК) $k \leq n \Rightarrow n+1$: $f[x_i, \dots, x_{i+n+1}] = \dfrac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}] - f[x_i, \dots, x_{i+n}]}{x_{i+n+1} - x_i}$

$$\stackrel{(\text{ИХ})}{=} \frac{1}{h \cdot (n+1)} \cdot \left(\frac{\Delta^n f_{i+1}}{h^n \cdot n!} - \frac{\Delta^n f_i}{h^n \cdot n!} \right)$$

$$= \frac{\Delta^{n+1} f_i}{h^{n+1} (n+1)!}$$

Одавде добијамо и везу извода и коначних разлика:

Последица: $\Delta^k f_i = h^k \cdot f^{(k)}(\xi)$, $x_i \leq \xi \leq x_{i+k}$

Доказ: тривијално (из $\boxed{10}$ Т1 и претх. теореме)

Узимајући у обзир равномерну распоређеност чворова, $\boxed{10}$ (**) $L_n(x) = L_0(x) + (L_1(x) - L_0(x)) + \dots + (L_n(x) - L_{n-1}(x))$ се може записати на разне начине (у зависности од положаја тачке x у односу на чворове)

↳ она у којој тражимо вредност полинома

Нека је x_0 чвор најближи тачки x, а остали чворови x_i имају позитиван или негативан индекс, у зависности од положаја у односу на тај чвор. (тј. $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$)

Уведимо и промењиву q: $x = x_0 + q \cdot h$ (јасно, $q \in (-1, 1)$ зато што смо тако бирали x_0).

$x_0 \; x$ $q>0$

$x \; x_0$ $q<0$

14. Њутнов интерполациони полином за интерполацију унапред

* Ако се x налази на почетку таблице (тј. сви индекси су позитивни), тада (**) постаје:

$$L_n(x) = L_0(x) + (L_1(x) - L_0(x)) + \dots + (L_n(x) - L_{n-1}(x)) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

При томе, по $\boxed{13}$ Т1, знамо и да важи $f[x_0, \dots, x_k] = \dfrac{\Delta^k f_0}{h^k \cdot k!}$. Такође, важи и $q = \dfrac{x - x_0}{h}$.

$$L_n(x) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{h^2 \cdot 2!}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{h^n \cdot n!}(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

Коначно, добијамо:

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - (x_0 + h)}{h} = \frac{x - x_0}{h} - \frac{h}{h}$$

$$L_n(x) = f_0 + q \cdot \Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \cdot \Delta^2 f_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!} \cdot \Delta^n f_0 := P_n^I(x) = P_n^I(x_0 + qh).$$

деф. Ово је Њутнов интерполациони полином за интерполацију унапред.

Зовемо га и I Њутнов интерполациони полином.

Грешка интерполације:

$$f(x) - L_n(x) = f(x_0 + qh) - L_n(x_0 + qh_0) \overset{\boxed{8}\text{T1}}{=} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)\dots(x - x_n)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (qh) \cdot ((q-1)h) \cdot \dots \cdot ((q-n)h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1} \cdot \prod_{j=0}^{n}(q-j), \qquad x_0 \le \xi \le x_n$$

Коначно, због последице $\boxed{13}$ Т1, важи $\Delta^{n+1} f_i = h^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(\xi)$, па добијамо израз:

Закључак: Користимо оцену:

$$|R_n(x)| \le \frac{|\Delta^{n+1} f|}{(n+1)!} \cdot \left|\prod_{j=0}^{n}(q-j)\right|,$$

$\Delta^{n+1} f$ је max (по модулу) те колоне а може и ср. вр. те колоне

15. Њутнов интерполациони полином за интерполацију уназад

Наставља се директно на 14.

* Ако се x налази на крају таблице (тј. сви индекси су негативни), тада (**) постаје:

$$L_n(x) = f_0 + f[x_{-1}, x_0](x-x_0) + \dots + f[x_{-n}, \dots, x_0](x-x_0)(x-x_{-(n-1)})$$

При томе, по 13 Т1, знамо и да важи $f[x_{-k}, \dots, x_0] = \frac{\Delta^k f_{-k}}{h^k \cdot k!}$. Такође, важи и $q = \frac{x-x_0}{h}$.

$$L_n(x) = f_0 + \frac{\Delta f_{-1}}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 f_{-2}}{h^2 \cdot 2!}(x-x_0)(x-x_{-1}) + \dots + \frac{\Delta^n f_{-n}}{h^n \cdot n!}(x-x_0)\dots(x-x_{-(n-1)})$$

Коначно, добијамо:

$$\frac{x-x_{-1}}{h} = \frac{x-(x_0-h)}{h} = \frac{x-x_0}{h} + \frac{h}{h}$$

$$L_n(x) = f_0 + q \cdot \Delta f_{-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \cdot \Delta^2 f_{-2} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!} \cdot \Delta^n f_{-n} := P_n^{II}(x) = P_n^{II}(x_0+qh).$$

деф. Ово је **Њутнов интерполациони полином за интерполацију уназад.**

Зовемо га и **II Њутнов интерполациони полином.**

Грешка интерполације: Аналогно, изводимо оцену:

$$|R_n(x)| \leq \frac{|\Delta^{n+1} f|}{(n+1)!} \cdot \left|\prod_{j=0}^{n}(q+j)\right|,$$

$\Delta^{n+1} f$ је max (по модулу) те колоне а може и ср. вр. те колоне

Напомена (важи и за 14 и за 15): Како се грешка шири кроз таблицу?

Нека је $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$ тачност са којом је дато f_i.

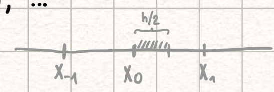
Пошто за добијање колоне Δf одузимамо два, по 4 $\Rightarrow$ овде је тачност 2ε.
Слично, за $\Delta^2 f$ тачност је 4ε итд.

Закључак: $|\Delta^m f_i| < 2^m \cdot \varepsilon$.

$\boxed{16.}$ Централне интерполационе формуле

Већа прецизност би се добила ако се користе чворови са обе стране x.
(а не само са једне, као у $\boxed{14}$ и $\boxed{15}$)

* Ако $x \in (x_0, x_0 + \frac{h}{2}]$, чворове индексирамо овако: $x_0,\ x_1 = x_0 + 1 \cdot h,\ x_{-1} = x_0 + (-1) \cdot h, \ldots$



На скупу од $2n+2$ чвора $(x_0, x_1, x_{-1}, \ldots, x_n, x_{-n}, x_{n+1})$, тада $(**)$ $\boxed{14}$ постаје:

$$L_{2n+1}(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_{-1}](x-x_0)(x-x_1) + \ldots + f[x_0, x_1, x_{-1}, \ldots, x_n, x_{-n}, x_{n+1}](x-x_0)\ldots(x-x_{-n})$$

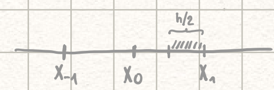
При томе, по $\boxed{13}$ Т1, знамо и да важи $f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f_i}{h^k \cdot k!}$. Такође, важи и $q = \frac{x - x_0}{h}$.

$$L_{2n+1}(x) = f_0 + q\,\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 f_{-1} + \frac{q(q^2-1)}{3!}\Delta^3 f_{-1} + \ldots + \frac{q(q^2-1)(q^2-n^2)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1} f_{-n}.$$

(користимо сим. п.р.)

деф. Ово је **Гаусов интерполациони полином за интерполацију унапред.**

* Ако $x \in (x_0 + \frac{h}{2}, x_1]$, чворове индексирамо на исти начин.



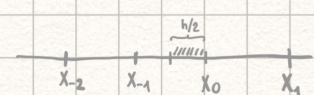
На скупу од $2n+2$ чвора $(x_1, x_0, x_2, x_{-1}, \ldots, x_{n+1}, x_{-n})$, тада $(**)$ $\boxed{14}$ постаје:

$$L_{2n+1}(x) = f(x_1) + f[x_1, x_0](x-x_1) + f[x_1, x_0, x_2](x-x_1)(x-x_0) + \ldots + f[x_1, x_0, x_2, \ldots, x_{n+1}, x_{-n}](x-x_1)\ldots(x-x_{n+1})$$

$$L_{2n+1}(x) = f_1 + (q-1)\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 f_{-1} + \ldots + \frac{q(q^2-1)\ldots(q^2-(n-1)^2)(q-n)(q-(n+1))}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1} f_{-n}.$$

деф. Ово је **Гаусов интерполациони полином за интерполацију уназад.**

* Ово можемо да добијемо и у другом облику, тако што се чворови пренумеришу ткд. $x \in [x_0 - \frac{h}{2}, x_0]$.



На скупу од $2n+2$ чвора $(x_0, x_{-1}, x_1, \ldots, x_n, x_{-(n+1)})$, тада $(**)$ $\boxed{14}$ постаје:

$$L_{2n+1}(x) = f(x_0) + f[x_0, x_{-1}](x-x_0) + f[x_0, x_{-1}, x_1](x-x_0)(x-x_{-1}) + \ldots + f[x_0, x_{-1}, \ldots, x_n, x_{-(n+1)}](x-x_0)\ldots(x-x_n)$$

$$L_{2n+1}(x) = f_0 + q\Delta f_{-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 f_{-1} + \frac{q(q^2-1)}{3!}\Delta^3 f_{-2} + \ldots + \frac{q(q^2-1)\ldots(q^2-n^2)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1} f_{-(n+1)}. \qquad (***)$$

деф. **Стирлингов интерполациони полином** је аритметичка средина (***) и Гаусовог за унапред.

$$L_{2n+1}(x) = f_0 + q\,\frac{\Delta f_{-1} + \Delta f_0}{2} + \frac{q^2}{2!}\Delta^2 f_{-1} + \frac{q(q^2-1)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 f_{-2} + \Delta^3 f_{-1}}{2} + \dots + \frac{q(q^2-1)\dots(q^2-n^2)}{(2n+1)!}\cdot\frac{\Delta^{2n+1} f_{-(n+1)} + \Delta^{2n+1} f_{-n}}{2}.$$

Напомена: $|q| \leq 0.25$

деф. **Беселов интерполациони полином** је аритметичка средина (***) и Гаусовог за уназад.

$$L_{2n+1}(x) = \frac{f_0+f_1}{2} + \left(q-\frac{1}{2}\right)\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\cdot\frac{\Delta^2 f_{-1} + \Delta^2 f_0}{2} + \dots + \frac{q(q^2-1)(q^2-(n-1)^2)(q-n)\left(q-\frac{1}{2}\right)}{(2n+1)!}\,\Delta^{2n+1} f_{-n}.$$

Напомена: $0.25 \leq |q| \leq 0.75$

17. Други видови интерполације

* **Интерполација рационалним функцијама:** интерполациона ф-ја је у количник два полинома:

$$R_{i,\dots,i+k}(x) := \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + \dots + p_m x^m}{q_0 + q_1 x + \dots + q_n x^n}, \qquad k = m+n$$

при чему $R_{i,\dots,i+k}(x_{i+j}) = f(x_{i+j})$, $j = 0,\dots,k$ и $k = m+n$ (*)

У овом запису, имамо $m+1+n+1 = m+n+2$ параметра који одређују R.
Ако поделимо и бројилац и именилац једним од коеф. ⇒ имамо параметар мање.

Дакле, $R_{i,\dots,i+k}(x)$ је једнозначно одређено са $(m+n+1)$-им параметром.
Те параметре одређујемо као решења система који добијемо из (*).

Закључак: $R_{i,\dots,i+k}(x)$ је једнозначно одређено са m, n и $f(x_{i+j})$ $(j=0,\dots,k)$

Напомена: овај тип интерполације је згодан за функције са изразитим екстремумима.

* **Интерполација тригонометријским функцијама:**

1) **формула Хермитеа:** за 2π-периодичну ф-ју

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{\sin(x-x_j)}{\sin(x_i-x_j)} \right) \cdot f(x_i)$$

(исто као Лагранж, само има sin)

2) **формула Гауса:** слично, само има $\frac{1}{2}$ у синусу.

Напомена: овај тип интерполације је згодан за периодичне функције.

$\boxed{18.}$ Инверзна интерполација

До сада, наш проблем је био како познату ф-ју заменити неком „једноставнијом".
Сад гледамо како да (приближно) за познато $Y = f(x)$ одредимо непознату вредност x.

Нека је f задата („табеларно") својим вредностима $y_i = f(x_i)$ и нека је $Y \in (y_i, y_{i+1})$ нека вредност.

Лема: Нека је $f: \underbrace{[a,b]}_{\text{сегмент!}} \to R$ непрекидна ф-ја која је и монотона. Онда је она бијекција.

Последица: Такво $f(x)$ има инверзну ф-ју $g(y) := f^{-1}(y)$.

Ту инверзну ф-ју $g(x)$ можемо интерполирати јединственим полиномом L_n ткд. важи $L_n(y_i) = x_i = f^{-1}(y_i)$
Дакле, $g(Y) \approx L_n(Y)$, па се наш проблем своди на тражење $L_n(Y)$.

1° Нееквидистантна таблица: користимо Лагранжов интерполациони полином.
пазимо да лема буде испуњена. (нпр. ограничимо интервал по потреби)

Пример: Тражимо нулу таблично задате ф-је:

x	2	2.5	3.5	4
y	0.9093	0.5985	-0.3508	-0.7568

Претпостављамо да f јесте монотоно.
Проблем: $x - ?$ ткд. $f(x) = 0$ $\Leftrightarrow$ $x - ?$ ткд. $x = f^{-1}(0)$ $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(0) - ?$ $\Leftrightarrow$ $\overset{L_3 - ?}{L_3(0) - ?}$

Пошто не тражимо L за f него за f^{-1}, таблицу инвертујемо и за њу нађемо L_3.
(као и раније)

y	-0.7568	-0.3508	0.5985	0.9093
x	4	3.5	2.5	2

2° Еквидистантна таблица: користимо неки од полинома са коначним разликама.

Претпоставимо $y_0 < Y < y_1$ $\Rightarrow$ користимо I Њутнов полином:

$$f(x) = Y \approx f_0 + \frac{q}{1!} \cdot \Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!} \Delta^n f_0,$$

при томе f_0, сви $\Delta^i f_0$ су нам познати. (таблица)
q је непознато, а како је $x = x_0 + q \cdot h$, то значи ако нађемо q, нашли смо x. (x_0, h - познати)

Ако је ипак $y_{n-1} < Y < y_n$ $\Rightarrow$ користимо II Њутнов полином: (све аналогно)

Ако је негде између, користимо полиноме из $\boxed{16}$.

Остаје само питање како наћи q? Покажимо на примеру.

Пример: Тражимо x ткд. $f(x) = 0.8$ користећи Њутнов инт. пол. за таблично задато f.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
10	0.1763			
		0.1877		
20	0.3640		0.0257	
		0.2134		0.0226
30	0.5774		0.0483	
0.8 →		0.2617		
40	0.8391			
	$\varepsilon = 1/2 \cdot 10^{-4}$	$2\varepsilon = 10^{-4}$	$4\varepsilon = 2\cdot 10^{-4}$	$8\varepsilon = 4\cdot 10^{-4}$

$f(x) = 0.8 \overset{\text{монот.}}{\Rightarrow} x \in (30, 40)$, па користимо II Њутнов полином.

$x = x_n + q \cdot h$, $h = 10 \Rightarrow x = 40 + q \cdot 10$.

$$0.8 = P_3^{II}(40 + q \cdot 10) = 0.8391 + 0.2617 \cdot q + 0.0483 \cdot \frac{1}{2!} \cdot q(q+1) + 0.0226 \cdot \frac{1}{3!} q(q+1)(q+2).$$

$$\Rightarrow q = -\frac{1}{0.2617}\left(0.0391 + \frac{1}{2} \cdot 0.0483\, q(q+1) + \frac{1}{6} \cdot 0.0226 \cdot q(q+1)(q+2)\right) = F(q).$$

Ово решавамо методом итерације:

Изаберемо $q_0 = 0$.

$q_1 = F(q_0) = \frac{-0.0391}{0.2617} = -0.14941$ → на једну децималу више!

$q_2 = F(q_1)$ -0.13430

$q_3 = -0.13556$

$q_4 = -0.13545$

$q_5 = -0.13546$

$q_6 = -0.13546$ ⇒ заустављамо се када се поклопе све: то је q

$\Rightarrow q = -0.13546 \Rightarrow x = 40 + q \cdot 10 \Rightarrow x = 38.6454$.

Специјалан случај: ако је ф-ја задата аналитички (а не табеларно)

Тада је табелирамо, али корак мора бити довољно мали тако да се линеарном или квадратном интерпол. постиже жељена тачност у околини тачке $f(x) = y$.

За линеарну интерполацију: $h \le \sqrt{\frac{8\varepsilon}{M_2}}$, а за квадратну: $h \le \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}\varepsilon}{M_3}}$

$\boxed{19.}$ Нумеричко диференцирање

Користимо га када је функцију тешко/немогуће диференцирати.

Напомена: Узимамо $f^{(k)}(x) \approx L_n^{(k)}(x)$. Тада важи и $R_n^{(k)} = f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x)$.

$$L_n(x) = f_0 + q\cdot\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\cdot\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\cdot\Delta^n f_0 \qquad (\text{I Њутнов})$$

Пошто је све преко q, диференцираћемо по q. Приметимо: $L_n'(x) = \frac{dL_n}{dx} = \frac{dL_n}{dq}\cdot\frac{dq}{dx} \overset{q=\frac{x-x_0}{h}}{=} \frac{1}{h}\cdot\frac{dL_n}{dq}$.

Први извод: $L_n'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 + \frac{2q-1}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 f_0 + \dots\right)$

Напомена: $L_n'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \dots\right)$ (само $q=0$) $(*)$

Други извод: $L_n''(x) = (L_n'(x))' = \frac{1}{h}\left(\Delta^2 f_0 + (q-1)\Delta^3 f_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12}\cdot\Delta^4 f_0 + \dots\right)$

Грешка: $R_n^{(k)}(x) = (f(x) - L_n(x))^{(k)} \overset{\boxed{11}\,T1}{=} (f[x,x_0,\dots,x_n]\,\omega_{n+1}(x))^{(k)} \overset{\text{Лајбниц}}{=} \sum_{j=0}^{k} C_k^j\cdot(f[x,x_0,\dots,x_n])^{(j)}\,\omega_{n+1}^{(k-j)}(x)$

Лема: $(f[x,x_0,\dots,x_n])^{(j)} = j!\cdot f[\underbrace{x,\dots,x}_{j+1},x_0,\dots,x_n]$.

Доказ: Нека је $g(x) = f[x,x_0,\dots,x_n]$.

$g[x,x+\varepsilon,\dots,x+j\cdot\varepsilon] \overset{\boxed{10}\,T1}{=} \frac{g^{(j)}(\xi_\varepsilon)}{j!}$, где $\xi_\varepsilon \in [x, x+j\cdot\varepsilon]$. Приметимо: $\xi \xrightarrow{\varepsilon\to 0} x$

Тада је: $g^{(j)}(x) = j!\cdot g[\underbrace{x,\dots,x}_{j+1}]$, тј. $(f[x,x_0,\dots,x_n])^{(j)} = j!\cdot f[\underbrace{x,\dots,x}_{j+1},x_0,\dots,x_n]$.

(расписати)

Даље, $R_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j\cdot(f[x,x_0,\dots,x_n])^{(j)}\,\omega_{n+1}^{(k-j)}(x) = \sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}\,j!\cdot f[\underbrace{x,\dots,x}_{j+1},x_0,\dots,x_n]\,\omega_{n+1}^{(k-j)}(x)$

$$R_n^{(k)}(x) \overset{\boxed{10}\,T1}{=} \sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{(k-j)!}\cdot\frac{f^{(n+j+1)}(\xi)}{(n+j+1)!}\,\omega_{n+1}^{(k-j)}(x)$$

Одавде добијамо и оцену:

$$|f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x)| \le \sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{(k-j)!\,(n+j+1)!}\cdot\max_{\xi\in[y_1,y_2]}|f^{(n+j+1)}(\xi)|\cdot|\omega_{n+1}^{(k-j)}(x)|.$$

$\begin{pmatrix} y_1 = \min(x,x_0,\dots,x_n) \\ y_2 = \max(x,x_0,\dots,x_n)\end{pmatrix}$

$\boxed{20.}$ Укупна грешка нумеричког диференцирања

Нека су чворови равномерно распоређени: $h = x_{k+1} - x_k$.
Посматрајмо шта се дешава са грешком првог извода у тачки x_0. (тј. грешку од (*) из $\boxed{19}$)

$$f'(x_0) - L_n'(x_0) = 1 \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}'(x_0) + 1 \cdot \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \cdot \cancelto{0}{\omega_{n+1}(x_0)} \qquad \text{(убацили } k=1\text{)}$$

Лема: $\omega_{n+1}'(x_0) = (-1)^n \, n! \, h^n$

Доказ: $\omega_{n+1}'(x_0) = \left((x-x_0)\dots(x-x_n)\right)'_{x=x_0} = (x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)$ (сви остали имају члан $(x-x_0) \Rightarrow 0$)

$$\overset{(x_k = x_0 + k\cdot h)}{=} (x_0 - x_0 - h)\dots(x_0 - x_0 - nh) = (-h)\dots(-nh) = (-1)^n \cdot n! \cdot h^n$$

Даље: $f'(x_0) - L_n'(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (-1)^n \, n! \, h^n \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) - L_n'(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1} (-1)^n h^n$

Дакле, по овоме, ако смањимо корак h, смањује се и грешка методе.
Међутим, смањивање корака повећава утицај рачунске грешке $\Rightarrow$ раст укупне грешке.
Идеја је да нађемо оптималну вредност за h (ткд. је грешка најмања).

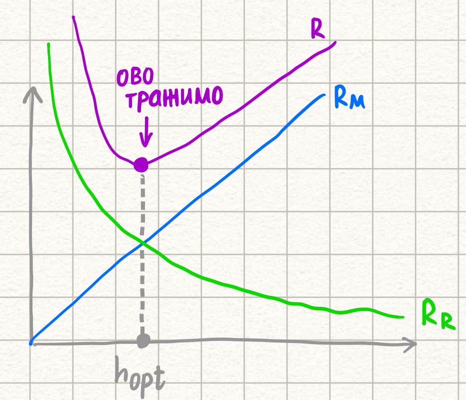
* По добијеном, грешка методе је: $|R_M| \le \left|\frac{f^{(2)}(\xi)}{2} \cdot h\right| \le \frac{M_2 \cdot h}{2}$, $\quad M_2 = \max\limits_{\xi \in [x_0, x_1]} |f^{(2)}(\xi)|$.

* Са друге стр., за $n=1$, апрокс. првог извода у x_0 је: $f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}$. (**)

  Зато је рачунска грешка: $|R_R| \le \frac{\varepsilon + \varepsilon}{h} = \frac{2\varepsilon}{h}$ (ε - рачунска грешка за $f(x_1), f(x_0)$)

Дакле, укупна грешка апроксимације првог извода изразом (**) је:

$$|R| = |R_M + R_R| \le |R_M| + |R_R| \le \frac{M_2 \cdot h}{2} + \frac{2\varepsilon}{h} := R(h) \quad \text{(зависи само од } h\text{)}$$



h_{opt} ћемо наћи као минимум функције $R(h)$:

$$R'(h) = \frac{M_2}{2} - \frac{2\varepsilon}{h^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad h_{opt} = \sqrt{\frac{4\varepsilon}{M_2}}.$$

Тада је: $|R| \le R(h_{opt}) = \sqrt{4\varepsilon \cdot M_2}$.

Одредимо и оптимални корак при нумеричком диф. када тражимо други извод:

Други извод се приближно одређује из формуле: $f''(x_0) = \dfrac{f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)}{h^2}$.

* Јасно, $R_R \leq \dfrac{\varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon}{h^2} = \dfrac{4\varepsilon}{h^2}$.

* Запишимо чланове из бројиоца преко Тејлора:

$$\begin{cases} f(x_0-h) = f(x_0) - h\cdot f'(x_0) + \dfrac{h^2}{2} f''(x_0) - \dfrac{h^3}{6} f'''(x_0) + \dfrac{h^4}{24} f^{IV}(\xi_1). \\ f(x_0+h) = f(x_0) + h\cdot f'(x_0) + \dfrac{h^2}{2} f''(x_0) + \dfrac{h^3}{6} f'''(x_0) + \dfrac{h^4}{24} f^{IV}(\xi_2). \\ -2f(x_0) = -2f(x_0) \end{cases}$$

$$\to f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h) = h^2 f''(x_0) + \frac{h^4}{12}\left(f^{IV}(\xi_1) + f^{IV}(\xi_2)\right).$$

$$\Rightarrow f''(x_0) = \frac{f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\left(f^{IV}(\xi_1) + f^{IV}(\xi_2)\right)$$

$$\overset{(***)}{=} \frac{f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \cdot f^{IV}(\xi).$$

Дакле: $R_M \leq \dfrac{h^2}{12} \cdot M_4$

Одавде: $R = R_M + R_R = \dfrac{h^2}{12} M_4 + \dfrac{4\varepsilon}{h^2}$.

Као и за први извод, добијамо: $h_{opt} = \sqrt[4]{\dfrac{48\cdot\varepsilon}{M_4}}$

ИНТЕГРАЦИЈА

Често је јако компликовано одредити интеграл, некад је и немогуће.
Тада се прибегава **нумеричкој интеграцији**, тј. тзв. **квадратурним формулама**.
То значи да подинтегралну ф-ју заменимо неком другом, једноставнијом.

Пример: $I(f) = \int_a^b p(x) f(x)\,dx$, $f(x)$ - непр. на $[a,b]$ и $p(x) > 0$ - непр. на (a,b) (тзв. **тежинска ф-ја**)

f угл. апроксимирамо: $f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\phi_i(x) + r(x)$, ϕ_i - дате лин. нез. ф-је, $r(x)$ - грешка.

(*) $\int\sum = \sum\int$

Када уврстимо(*) добијамо квадратурну формулу: $S_n(f) = \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot f(x_i)$, $A_i = \int_a^b p(x) \cdot \phi_i(x)\,dx$.

у књизи c_i

где су x_i чворови, а A_i тзв. **тежински коефицијенти**.
Ни једно ни друго не зависи од f.

Грешка је: $R_n(f) = I(f) - S_n(f) = \int_a^b p(x) \cdot r(x)\,dx$.

деф. Кажемо да је **квадратурна формула тачна** за f ако је испуњен услов $I(f) = S_n(f)$.

21. Њутн-Котесове квадратурне формуле

Нека је $I(f) = \int_a^b p(x)\, f(x)\, dx$ (као у примеру).

Апроксимирајмо $f(x)$ Лагранжовим интерпол. полиномом $L_n(x)$ степена n.
Стога задајемо чворове $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$.

Прво, да A_i-еви не би зависили од избора интервала $[a,b]$, сменом га скалирајмо на $[-1,1]$.

$$x = \frac{b-a}{2} \cdot t + \frac{b+a}{2}$$ (решимо систем $a = p\cdot(-1) + q$, $b = p \cdot 1 + q$) $\left(dx = \frac{b-a}{2} dt\right)$

Нека су $t_k \in [-1,1]$ слике чворова при горњој смени. То не мења наш Лагранжов полином, тј. важи:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i - x_j} \right) \cdot \underbrace{f(x_i)}_{const} = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i - t_j} \right) \cdot f(x_i).$$ (јер се све скрати)

Тада: $I(f) \approx \int_a^b p(x) L_n(x)\, dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} \bar{p}(t) \cdot L_n\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t\right) dt$, где је $\bar{p}(t) := p\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t\right) \equiv p(x)$.

Коначно, увршtавањем добијамо општи облик Њутн-Котесових формула:

$$S_n(f) = \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot f(x_i), \qquad \text{где је} \qquad A_i = \int_{-1}^{1} \bar{p}(t) \cdot \left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j} \right) dt$$

Напомена: Тежински коеф. A_i не зависе ни од a, b, ни од f, већ само од избора чворова и $p(x)$.
тежинска ф-ја

Грешка: $R_n(f) = \int_a^b p(x) \cdot R_n(x)\, dx \overset{[8]T1}{=} \int_a^b p(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(x)\, dx$, $\xi \in [a,b]$.

Приметимо: $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \cdot \prod_{i=0}^{n} (t - t_i)$. Означимо $\bar{\omega}_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^{n} (t-t_i)$.

Када уведемо смену за t, добијамо оцену:

(*) $$|R_n(f)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+2} \cdot \int_{-1}^{1} |\bar{p}(t) \cdot \bar{\omega}_{n+1}(t)|\, dt,$$ где $M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$

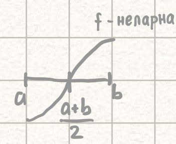
Лема 1: Ако је $p(x)$ парна функција у односу на средину сегмента $[a,b]$ (тј. $\bar{p}(-t)=\bar{p}(t)$)
и ако су чворови симетрично распоређени у односу на средину сегмента (тј. $t_k=-t_{n-k}$)
онда важи $A_k = A_{n-k}$.

Доказ: Прво нацртајмо слику, да буде јасније:

$$A_k = \int_{-1}^{1} \bar{p}(t)\cdot\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{t-t_j}{t_k-t_j}\right)dt \overset{t=-s}{=} \int_{-1}^{1} \bar{p}(-s)\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{-s+t_{n-j}}{-t_{n-k}+t_{n-j}}\right)(-ds) = \int_{-1}^{1} \bar{p}(s)\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{s-t_{n-j}}{t_{n-k}-t_{n-j}}\right)ds$$

$$\overset{l=n-j}{=} \int_{-1}^{1} \bar{p}(s)\left(\prod_{\substack{l=0\\ l\neq n-k}}^{n} \frac{s-t_l}{t_{n-k}-t_l}\right)ds = A_{n-k}.$$

Лема 2: Ако је $p(x)$ парна, $f(x)$ непарна функција у односу на средину сегмента $[a,b]$
и ако су чворови симетрично распоређени у односу на средину сегмента,
онда је квадратурна формула тачна за f.



Доказ: По деф. треба да докажемо $I(f)=S_n(f)$.
Како је f непарна $\Rightarrow I(f)=0 \Rightarrow$ треба да докажемо $S_n(f)=0$.

$$S_n(f) = \frac{b-a}{2}\left[A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \ldots + A_{n-1}f(x_{n-1}) + A_n f(x_n)\right]$$

1° n - непарно $\Rightarrow$ број чворова $(n+1)$ је паран

Знамо $f(x_k) = -f(-x_k) = -f(x_{n-k})$ (по услову леме), па сабирке групишемо:

$$S_n(f) = \frac{b-a}{2}\left[\underbrace{(A_0-A_n)}_{0\ (Л1)}f(x_0) + \underbrace{(A_1-A_{n-1})}_{0\ (Л1)}f(x_1) + \ldots + \underbrace{(A_{n/2}-A_{n/2-1})}_{0\ (Л1)}f(x_{n/2})\right] = 0.$$

2° n - парно $\Rightarrow$ број чворова је непаран

На исти начин групишемо сабирке (само сада остаје један вишак):

$$S_n(f) = \frac{b-a}{2}\left[\underbrace{(A_0-A_n)}_{0\ (Л1)}f(x_0) + \ldots + (A_{n/2-1}-A_{n/2+1})f(x_{n/2-1}) + A_{n/2}\cdot f(x_{n/2})\right] = \frac{b-a}{2}\cdot A_{n/2}\cdot \underbrace{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{0\ (слика)} = 0.$$

Лема 3: Ако је n парно, $f=P_n(x)$ неки полином, $p(x)$ парна, чворови симетрично распоређени,
онда је КФ тачна и за полиноме степена $n+1$.

Доказ: Како је f већ полином, то значи да је оно сам свој интерпол. пол. $(L_n(x)=P_n(x)=f)$
Због тога, КФ јесте тачна за пол. степена n $\left(I(f)=\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx = \int_a^b p(x)\,L_n(x)\,dx = S_n(f)\right)$

$P_{n+1}(x) = P_n(x) + c\cdot\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{n+1}$, где је c нека const. (сваки P_{n+1} можемо да „препакујемо" у ово)

За оба сабирка су КФ тачне: 1: управо доказали,
2: то је непарна ф-ја (n-парно), па можемо на Л2

Самим тим, КФ је тачна и за полиноме степена $n+1$.

Дакле, у општем случају, КФ је тачна за сваки полином највише степена n.
Ако су чворови сим. расп., $p(x)$ парна у односу на ср. $[a,b]$ и n парно, онда је тачна и за $n+1$ степ.

Тада је: $\bar{\omega}_{n+2}(t) = (t-t_0)(t-t_1)\dots(t-t_{n-1})(t-t_n)$, при чему $t_i = -t_{n-i}$

$\Rightarrow \quad \bar{\omega}_{n+2}(t) = (t^2-t_0^2)(t^2-t_1^2)\dots(t^2-0)$ (напомена: средишњи посматрамо као дупли (пошто је 0))

$\Rightarrow \quad \bar{\omega}_{n+2}(t) = t^2 \prod_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}(t^2-t_i^2).$ За $n=0$, дефинишемо $\prod_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}(t^2-t_i^2)_{n=0} := 1.$

Дакле, грешку оцењујемо истим изразом као у општем случају, само n заменимо са $n+1$:

пре: $|R_n(f)| \le \frac{M_{\cancel{n+1}}}{(\cancel{n+1})!} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\cancel{n+2}} \cdot \int_{-1}^{1} |\bar{p}(t) \cdot \bar{\omega}_{\cancel{n+1}}(t)|\, dt,$

(**) после: $|R_n(f)| \le \frac{M_{n+2}}{(n+2)!} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+3} \cdot \int_{-1}^{1} |\bar{p}(t) \cdot t \cdot \bar{\omega}_{n+1}(t)|\, dt,$ где $M_{n+2} = \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+2)}(x)|$

Напомена: $t \cdot \bar{\omega}_{n+1}(t) = (t-0)\cdot\bar{\omega}_{n+1}(t) = (t-t_{SR})\cdot\bar{\omega}_{n+1}(t) = \bar{\omega}_{n+2}(t)$

Наредна три питања су спец. случајеви претх., тј. имамо $p(x) \equiv 1$.

$\boxed{22.}$ Квадратурна формула правоугаоника

Добија се када имамо $n=0$ и $t_0=0$:

$$S_0(f) = \frac{b-a}{2} \cdot A_0 \cdot f(x_0), \quad \text{где} \quad A_0 = \int_{-1}^{1} 1\,dx = x\Big|_{-1}^{1} = 2 \quad \Rightarrow \quad S_0(f) = \frac{b-a}{2} \cdot 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Дакле, квадратурна формула правоугаоника је $S_0(f) = (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

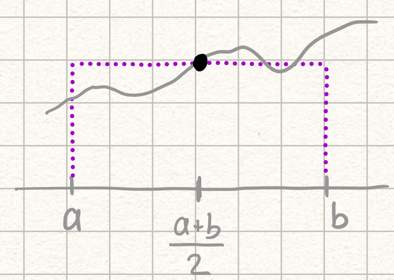
Зашто се зове тако? Зато што је то формула за површину правоугаоника (слика).

Грешка: Имамо $n+1 = 1$ чвор, ткд. он испуњава услов сим. расп. Такође, n је парно. Дакле, важи $\boxed{21}$ Л3. Због тога можемо да применимо (**) из $\boxed{21}$:

$$|R_0(f)| \leq \frac{M_2}{2} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \cdot \int_{-1}^{1} t(t-0)\,dt = \frac{M_2}{2} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \cdot \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{M_2}{2} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \cdot \frac{2}{3}$$

$$|R_0(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Слика:



II начин за извођење:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx c \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Специјално, за $f \equiv 1$: $\int_a^b 1\,dx = (b-a) = c$

Дакле: $\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

23. Трапезна квадратурна формула

Добија се када имамо $n=1$ и $t_0=-1$, $t_1=1$. $(\Rightarrow x_0=a,\ x_1=b)$

$$S_1(f) = \frac{b-a}{2}\cdot\left(A_0 f(a) + A_1 f(b)\right), \quad \text{где} \quad A_0 = \int_{-1}^{1}\frac{t-t_1}{t_0-t_1}\,dt = \int_{-1}^{1}\frac{t-1}{-2}\,dt = 1 \quad \overset{\boxed{21}\text{Л1}}{\Longrightarrow} \quad A_1 = A_0 = 1.$$

Дакле, трапезна квадратурна формула је $S_1(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$

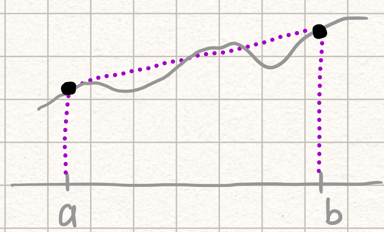
Зашто се зове тако? Опет због облика (слика).

Грешка: Пошто је $n=1$ непарно, не можемо користити (**) из $\boxed{21}$
Због тога морамо да применимо (*) из $\boxed{21}$:

$$|R_1(f)| \leq \frac{M_2}{2}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^3\cdot\int_{-1}^{1}|(t-1)(t+1)|\,dt = \dots \qquad \left(\text{раздвојимо } \int_{-1}^{0}+\int_{0}^{1} \dots\right)$$

$$|R_1(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12}\cdot\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

Слика:



II начин за извођење:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx C_1\cdot f(a) + C_2\cdot f(b)$$

Специјално, за $f\equiv 1$: $\int_a^b 1\,dx = b-a = C_1 + C_2$

за $f\equiv x$: $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2} = a\cdot C_1 + b\cdot C_2$

$\overset{\text{симетрија}}{\Longrightarrow}$ $C_1 = C_2 = \frac{b-a}{2}$.

Дакле: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$

$\boxed{24.}$ Симпсонова квадратурна формула

Добија се када имамо $n=2$ и $t_0=-1$, $t_1=0$, $t_2=1$.

$$S_2(f) = \frac{b-a}{2}\cdot\left(A_0 f(a) + A_1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + A_2 f(b)\right), \text{ где } \quad A_0 = \int_{-1}^{1}\frac{t-t_1}{t_0-t_1}\cdot\frac{t-t_2}{t_0-t_2}\,dt = \ldots = \frac{1}{3} \overset{\boxed{21}\text{Л1}}{\Longrightarrow} A_2 = \frac{1}{3}$$

$$A_1 = \int_{-1}^{1}\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\cdot\frac{t-t_2}{t_1-t_2}\,dt = \ldots = \frac{4}{3}$$

Дакле, Симпсонова квадратурна формула је $S_2(f) = \frac{b-a}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$

Грешка: Имамо $n+1=3$ чвора, а они испуњавају услов сим. расп. Takoђе, n је парно. Дакле, важи $\boxed{21}$ Л3. Због тога можемо да применимо $(**)$ из $\boxed{21}$:

$$|R_2(f)| \le \frac{M_4}{4!}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^5\cdot\int_{-1}^{1} t^2\cdot|t^2-1|\,dt = \ldots$$

$$|R_2(f)| \le \frac{1}{90}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^5\cdot\max_{x\in[a,b]}|f^{IV}(x)|$$

II начин за извођење:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx c_1\cdot f(a) + c_2\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + c_3\cdot f(b).$$

Специјално,

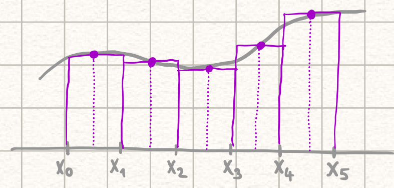
$$\left.\begin{array}{lll} \text{за } f\equiv 1: & \int_a^b 1\,dx = b-a & = c_1 + c_2 \\ \text{за } f\equiv x: & \int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2} & = a\cdot c_1 + b\cdot c_2 \\ \text{за } f\equiv x^2 & \int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3} & = a^2c_1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 c_2 + b^2 c_3 \end{array}\right\} \overset{\text{сим.}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} c_1 = c_3 = \frac{b-a}{6}. \\ c_2 = \frac{2}{3}(b-a). \end{array}$$

Дакле: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$

Уопштења за 22, 23, 24.

Приметимо следеће својство: $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx.$

Нпр. за правоугаоник:



Идеја је да наш интервал поделимо на m подинтервала дужине h.
Тако добијамо опште КФ Њутн-Котесовог типа.

1) Правоугаоник:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\cdot\sum_{i=1}^{m} f_{i-1/2} := S_0^h(f)$$

(сумирамо за све подинт.) $\left(h=\frac{b-a}{m}\right)$

Грешка: $$|R_0^h(f)| \le \sum_{i=1}^{m} \frac{h^3}{24} \max_{[x_{i-1},x_i]} |f''(\xi_i)| \overset{m\cdot\frac{1}{m}}{=} \frac{mh^3}{24}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \max_{[x_{i-1},x_i]} |f''(\xi_i)|\right) \overset{\text{ср.вр.}\le\max}{\le} \frac{mh^3}{24}\cdot \max_{[a,b]} |f''(\xi)|$$

$$|R_0^h(f)| \le \frac{(b-a)h^2}{24}\cdot \max_{[a,b]} |f''(\xi)|$$ $(m\cdot h = b-a)$ $(h\downarrow \overset{2}{\Rightarrow} R\downarrow)$

2) Трапез:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{m} \frac{h}{2}\cdot(f_{i-1}+f_i) = \frac{h}{2}(f_0+f_1+f_1+f_2+\dots+f_{m-1}+f_m)$$
$$= \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\cdot\sum_{i=1}^{m-1} f_i + f_m\right) := S_1^h(f).$$

Грешка: $$|R_1^h(f)| \le \sum_{i=1}^{m} \frac{h^3}{12}\cdot \max_{[x_{i-1},x_i]} |f''(\xi_i)| = \dots$$ (аналогно)

$$|R_1^h(f)| \le \frac{(b-a)h^2}{12}\cdot \max_{[a,b]} |f''(\xi)|$$

3) Симпсон:

Морамо прво поделити на паран број подинтервала дужине $h=\frac{b-a}{2m}$.
Ово мора зато што се основна формула дефинише над два подинтервала.
Сада имамо $n=2m$, па је број чворова $n+1$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{2(i-1)}}^{x_{2i}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{m}\left(f_{2(i-1)} + 4f_{2i-1} + f_{2i}\right)$$
$$= \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{i=1}^{m} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} f_{2i} + f_{2m}\right) := S_2^h(f)$$

Грешка: $$|R_2^h(f)| \le \sum_{i=1}^{m} \frac{h^5}{90}\cdot \max_{[x_{2i-2},x_{2i}]} |f^{IV}(\xi_i)| = \frac{h^5\cdot m}{90}\cdot\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \max_{[x_{2i-2},x_{2i}]} |f^{IV}(\xi_i)|$$ (аналогно)

$$|R_2^h(f)| \le \frac{(b-a)h^4}{180}\cdot \max_{[a,b]} |f^{IV}(\xi)|$$

Наведене оцене грешака су ипак непрактичне (морамо оценити max извода f, које не мора уопште бити задато аналитички)

Стога се често користи Рунгеова оцена грешке:

Претпостављајући да се извод ф-је (онај који се појављује у старим оценама за грешке) не мења много на (a,b), успостављамо следећу везу:

$$\underbrace{I}_{\text{права вредност интеграла}} = \underbrace{S^h}_{\text{кф са кораком } h} + \underbrace{M \cdot h^k}_{\text{грешка}} \approx \underbrace{S^H}_{\text{кф са кораком } H} + M \cdot H^k,$$ где су h, H два корака

Одавде можемо одредити M: $S^h - S^H = M(H^k - h^k) \Rightarrow M = \frac{S^h - S^H}{H^k - h^k}$.

Зато се грешка вредности $S^h(f)$ оцењује овако:

$$R_h \approx I(f) - S^h(f) = M \cdot h^k = \frac{S^h - S^H}{H^k - h^k} \cdot h^k = \frac{S^h - S^H}{(\frac{H}{h})^k - 1}.$$

Специјално, за $H = 2h$, добијамо поменуту Рунгеову оцену грешке: $R_h \approx \frac{S^h - S^{2h}}{2^k - 1}$

($k=2$: правоугаоник, трапез; $k=4$: Симпсон)

Напомена: ова оцена је (очигледно) згодна за имплементацију.

Пример: стр. 55

* Тражимо толеранцију tol укупне грешке: $R = R_M + R_R < tol$.

R_M смо одредили, дакле тражимо R_R:

Нека је $S_n(f) = \sum_i A_i \cdot f_i$ и нека је f_i дато са грешком ε: $R_R \leq \sum |A_i| \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \sum |A_i|$.

Приметимо: ако узмемо $f \equiv 1 \Rightarrow \int_a^b 1\,dx = (b-a) = \sum A_i \cdot 1 \Rightarrow \sum A_i = b - a$

Када уврстимо: $R_R \leq \varepsilon \cdot (b-a)$.

* На вежбама смо обрадили случај несвојствених интеграла.

25. Гаусове квадратурне формуле

У Њутн-Котесовим формулама, чворови су задати, а коеф. се одређују ткд. КФ буде тачна за полиноме што већег степена.

Гаусове квадратурне формуле су такође облика $S_n(f) = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot f(x_i)$.

Овде, осим коеф., тражимо и чворове x_i ткд. КФ буде тачна за полиноме што већег степена.
Како A_i - ?, x_i - ? $\Rightarrow$ имамо $n+n = 2n$ непознатих $\Rightarrow$ макс. степен пол. ткд. КФ тачна је $2n-1$.

Дакле, захтевом да доња једнакост важи за произв. полином $P_m(x)$ степена $m \leq 2n-1$, одређена је квадратурна формула.

$$I(P_m) = S_n(P_m), \quad \text{тј.} \quad \int_a^b p(x) \cdot P_m(x)\, dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot P_m(x_i)$$

Овај услов је еквивалентан систему од $2n$ једначина:

$$\{x^k\}: \quad \int_a^b p(x) \cdot x^k\, dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot x_i^k \quad , \quad k \in \{0, \dots, 2n-1\}$$

Проблем: овај систем није линеаран.
Зато морамо другим путем. За тај пут, требају нам две леме:

Лема 1: КФ је тачна за сваки полином степена m $\quad \left(P_m = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot x^k\right)$
акко је тачна за све ф-је x^k, $k \in \{0, \dots, m\}$.

Доказ: $(\Rightarrow)$ тривијално (пошто су $1, x, x^2, \dots, x^m$ полиноми степена највише m, а тачна је за $\forall P_m$)

$(\Leftarrow)$ Доказујемо: $S_n(x^k) = I(x^k) \overset{?}{\Longrightarrow} S_n(P_m) = I(P_m)$.

$$S_n(P_m) = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot P_m(x_i) = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot x_i^k = \sum_{k=0}^{m} a_k \left(\frac{b-a}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot x_i^k \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot S_n(x^k) = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot I(x^k) = \sum_{k=0}^{m} a_k \int_a^b p(x) \cdot x^k\, dx = \int_a^b p(x) \cdot \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot x^k\, dx$$

$$= \int_a^b p(x) \cdot P_m(x)\, dx = I(P_m).$$

Лема 2: Ако су x_i $(i\in\{1,\dots,n\})$ чворови КФ која је тачна за све полиноме степена $2n-1$, онда је:

$$\int_a^b p(x)\cdot \omega_n(x)\cdot P_{n-1}(x)\,dx = 0,$$ где је $P_{n-1}(x)$ - произв. пол. степена $n-1$

Доказ: Како је КФ тачна за пол. ст. $2n-1$, а $\deg(\omega_n(x)\cdot P_{n-1}(x)) = 2n-1 \Rightarrow$ КФ је тачна за њега.

$$\int_a^b p(x)\cdot \omega_n(x)\cdot P_{n-1}(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^n A_i\cdot \underbrace{\omega_n(x_i)}_{0}\cdot P_{n-1}(x) = 0.$$

Због Л1, једнакост из Л2 је еквив. са $\int_a^b p(x)\cdot\omega_n(x)\cdot x^k\,dx = 0$, $k\in\{0,\dots,n-1\}$

Приметимо да $\omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x-x_i) = x_n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n$.

Када то уврстимо горе, добијамо линеаран систем по $b_1,\dots,b_n \xRightarrow{\text{решимо}}$ имамо $\omega_n(x) \xRightarrow{\boxed{26}}$ имамо x_i (као нуле полинома ω_n)

Дакле, сада смо одредили непознате чворове x_i.

Коначно, непознате коеф. A_i можемо одредити из првих n једначина оног нелин. система.

Грешка: Када у (*) из $\boxed{21}$ убацимо $2n-1$ уместо n, као и $\omega_{2n}\equiv\omega_n^2$ (двоструке нуле):

$$|R_{2n-1}(f)| \le \frac{1}{(2n)!}\max_{\xi\in[a,b]}|f^{(2n)}(\xi)|\cdot\int_a^b p(x)\,\omega_n^2(x)\,dx$$

Дискусија: 1) Гаусове КФ су тачније за полиноме виших степена у односу на Њутн-Котесове:

Ако имамо 3 тачке: Њ-К: $\underset{\text{услови}}{\text{до}}$ P_3, Г: P_5

Ако имамо 10 тачака: Њ-К: P_9, Г: P_{19}

2) Гаусова квадратурна формула не може бити тачна и за P_{2n}.

$$P_{2n}(x) = \prod_{i=1}^n (x-x_i)^2 = \omega_n^2(x)$$

Тада је: $I(P_{2n}) = \int_a^b \underbrace{p(x)}_{>0}\cdot\underbrace{(x-x_1)^2}_{\ge 0}\cdot\ldots\cdot\underbrace{(x-x_n)^2}_{\ge 0}\,dx > 0$

$$S_{2n-1}(P_{2n}) = \frac{b-a}{2}\cdot\sum_{i=1}^n A_i\,(x_i-x_1)^2\ldots\underbrace{(x_i-x_i)^2}_{0}\ldots(x_i-x_n)^2 = 0$$

Дакле, увек су различити.

26. Системи ортогоналних полинома

деф. У линеарном простору функција $\mathcal{L}_2(a,b)$, скаларни производ дефинишемо са:

$$(f,g) := \int_a^b p(x)\, f(x)\, g(x)\, dx. \qquad (p(x)>0 \text{ тежинска})$$

деф. Функције су ортогоналне ако $(f,g)=0$.

деф. Ортогонални систем је $\{f_k(x)\}$, $k\in\{0,1,2,\dots\}$, $(f_i,f_j)=0$ за $\forall i\neq j$.

деф. Систем ортогоналних полинома (у односу на $p(x)$) је ортогонални систем ткд. $f_k(x)\equiv Q_k(x)$. (све су полиноми)

Теорема 1: Постоје нормирани (монични) полиноми $Q_k(x)$, $k\in\{0,1,\dots\}$ ткд. $(Q_i,Q_j)=0$, $\forall i\neq j$.
Они су јединствено одређени рекурентном формулом:

$$Q_0(x) := 1.$$
$$Q_{k+1}(x) := \left(x-\frac{(xQ_k,Q_k)}{(Q_k,Q_k)}\right)\cdot Q_k(x) - \frac{(Q_k,Q_k)}{(Q_{k-1},Q_{k-1})}\cdot Q_{k-1}(x), \quad \text{за } k=0, \text{ други сабирак } =0.$$

Доказ: Полазећи од $Q_0(x)=1$, претпоставимо да су јединств. одређени такви полиноми за $\forall j\le k$.
Тада сваки норм. пол. $Q_{k+1}(x)$ се може јединств. представити у облику:

$$Q_{k+1}(x) = (x-a_k)\cdot Q_k(x) + a_{k-1}Q_{k-1}(x) + \dots + a_0Q_0(x).$$

Коеф. a_j одређујемо тако што $/\circ Q_j$ и искористимо $(Q_i,Q_j)=0$, $\forall i\neq j\le k$ (важи по пп.)

$$* \; 0=(Q_{k+1},Q_k) = ((x-a_k)Q_k,Q_k)+0+\dots+0 = (xQ_k,Q_k)-a_k(Q_k,Q_k) = 0$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{(xQ_k,Q_k)}{(Q_k,Q_k)} \qquad \left[(Q_k,Q_k)=0 \overset{def}{\Leftrightarrow} Q_k\equiv 0 \; \lightning \; (\text{нормиран})\right]$$

$$* \; 0=(Q_{k+1},Q_j) = ((x-a_k)Q_k,Q_j)+a_j(Q_j,Q_j) = (xQ_k,Q_j)-a_k\underbrace{(Q_k,Q_j)}_{0}+a_j(Q_j,Q_j) = 0$$

$$\Rightarrow a_j = -\frac{(xQ_k,Q_j)}{(Q_j,Q_j)}, \quad \text{за } j\in\{0,1,\dots,k-1\}$$

По пп., за $j\le k-1$ важи: $Q_{j+1}(x) := \left(x-\frac{(xQ_j,Q_j)}{(Q_j,Q_j)}\right)\cdot Q_j(x) - \frac{(Q_j,Q_j)}{(Q_{j-1},Q_{j-1})}\cdot Q_{j-1}(x)$,

$$\Rightarrow x\cdot Q_j = Q_{j+1} + \frac{(xQ_j,Q_j)}{(Q_j,Q_j)}\cdot Q_j(x) + \frac{(Q_j,Q_j)}{(Q_{j-1},Q_{j-1})}\cdot Q_{j-1}(x) \overset{/\circ Q_k}{\Rightarrow} (xQ_j,Q_k) = (Q_{j+1},Q_k)+0+0.$$

По деф.: $(xQ_j,Q_k) = \int_a^b p(x)\cdot xQ_j\cdot Q_k\,dx = \int_a^b p(x)\,xQ_k\cdot Q_j\,dx = (xQ_k,Q_j)$

$$\Rightarrow a_j = -\frac{(xQ_k,Q_j)}{(Q_j,Q_j)} = -\frac{(Q_{j+1},Q_k)}{(Q_j,Q_j)} = \begin{cases} -\frac{(Q_k,Q_k)}{(Q_{k-1},Q_{k-1})}, & j=k-1 \\ 0, & j<k-1 \end{cases} \quad (\text{ортог.})$$

Одавде добијамо израз из теореме.
Јединственост следи из нормираности.

По теореми, $\{Q_i\}$ чине базу $\Rightarrow$ сваки полином можемо записати као: $P_m(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i Q_i(x)$.

$\overset{1 \cdot Q_n}{\underset{n>m}{\Rightarrow}} (P_m, Q_n) = 0 \overset{деф}{\Rightarrow} \int_a^b p(x) \cdot P_m(x) \cdot Q_n(x) = 0$, при чему је $Q_n(x)$ јединствено (Т1)

Али по $\boxed{25}$ Л2: $\int_a^b p(x) \cdot P_m(x) \cdot \omega_n(x)\, dx = 0 \overset{\omega_n \text{- нормиран}}{\Longrightarrow} \omega_n(x) = Q_n(x)$

Теорема 2: **Корени x_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, нормираног ортогоналног полинома $Q_n(x)$ су реални, једноструки и припадају отв. инт. (a,b).**

Доказ: Нека су $a < x_1 < \dots < x_j < b$ реални корени од Q_n из (a,b) и непарне вишеструкости.
Нека је $P(x) = \prod_{i=1}^{j} (x - x_i)$

То значи да су за полином $P(x) \cdot Q_n(x)$, $x_1, \dots, x_j$ сада корени парне вишеструкости.
Значи имамо $(x-x_1)^{p_1} \dots (x-x_j)^{p_j}$, где су $p_1, \dots, p_j$ парни, а и преостале нуле Q_n су парне виш.

Дакле: $P(x) \cdot Q_n(x) = \left[(x-x_1)^{p_1/2} \dots (x-x_j)^{p_j/2} \dots (x-x_k)^{p_k/2} \right]^2 \Rightarrow P(x) \cdot Q_n(x) \geq 0$.

Следи $(Q_n, P) := \int_a^b \underbrace{p(x) \cdot Q_n(x) \cdot P(x)}_{>0} dx \neq 0 \Rightarrow \deg P = \deg Q_n = n$ (иначе ↯ са врхом странице)

Сада знамо $P(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \Rightarrow j = n \Rightarrow x_1, \dots, x_n$ су реални корени од Q_n из (a,b)
Како је $\deg Q_n = n$, морају бити и једноструки.

МЕТОДЕ ЛИН. АЛГ.

27. Основни задаци линеарне алгебре

Задаци лин. алг. су: 1) решавање система лин. једн. $Ax=b$;
2) израчунавање детерминанти матрица $\det A$;
3) налажење инверзних матрица A^{-1};
4) одређивање сопс. век. и сопс. вр. $\Leftrightarrow$ тражење нетрив. решења $Ax=\lambda x$;

За све ово постоје формални алгоритми, али некад су они превелики/прекомпликовани.
Ту улеће нумерика.

* Подсећање битних појмова и ставова о матрицама:

деф. Матрица A је:
- регуларна: $\det A \neq 0$
- сингуларна: $\det A = 0$

исто за реалне ($A^T=A^*$)
- Хермитеова: $A^* = A$ (A^* - конјугована: $a^*_{ij} = \overline{a_{ji}}$)
- симетрична: $A^T = A$ (A^T - транспонована: $a^T_{ij} = a_{ji}$)

исто за реалне ($A^T=A^*$)
- унитарна: $A^* = A^{-1}$
- ортогонална: $A^T = A^{-1}$

- нормална: $A^*A = AA^*$
- позитивно дефинитна: Хермитеова и $\forall x \neq 0$ $x^*Ax > 0$

деф. Матрице A, B су сличне ако постоји регуларна матрица T ткд. $B = T^{-1}AT$.

деф. Сопствене вредности матрице A су они скалари λ ткд. $Ax=\lambda x$ има нетрив. решења.
Та нетрив. решења, зову се сопствени вектори.

деф. Карактеристични полином матрице A је $D(\lambda) := \det(A-\lambda E)$.
Из деф. видимо да су сопс. вр. нуле $D(\lambda)$.

Лема 1: 1) Сопс. вектори који одговарају различитим сопс. вр. су лин. независни;

2) Ако је λ_k корен реда n_k од $D(\lambda)$, онда њему одговара највише n_k лин. нез. сопс. век;

3) Сличне матрице имају исте сопс. вредности;

4) Матрице $A, \alpha A, A^k$ имају једнаке сопс. век, а за сопс. вр. важи: $\lambda[\alpha A] = \alpha\lambda[A]$; $\lambda[A^k] = (\lambda[A])^k$;

5) Матрице A, A^T имају исте сопс. вр.
Матрице A, A^* имају узајамно конјуговане сопс. вр;

6) За сваку Хермит. матрицу $A \in M_n$ постоји унитарна матрица $U \in M_n$ ткд. $U^*AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$.
При томе: $\lambda_i \in R$, вектори колона u_k матрице U су одг. сопс. век.
Стога, они су ортог. и чине базу простора M_n.

7) За сваку матрицу $A \in M_n$ постоји унитарна матрица $U \in M_n$ ткд. $U^*AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \overset{\text{не мора } 0}{*} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$.

деф. У век. пр. C^n, норма вектора је $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}$, за било које p.

Специјално, $p=1$: апсолутна норма $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$;

$p=2$: еуклидска норма $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$;

$p\to\infty$: униформна норма $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i|$.

Напомена: У сваком коначно-димензионом простору, све норме су еквивалентне:

$$\exists c_1, c_2 > 0 \qquad c_1\|x\|' \le \|x\|'' \le c_2\|x\|'.$$

деф. У век. пр. C^n, скаларни производ је $(x,y) \equiv y^*x := [\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum^{n} x_i\bar{y}_i$.

деф. Норма матрице A је индукована нормом вектора: $\|A\| := \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Специјално, $p=1$: $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$;

$p=2$: $\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1\le i\le n}\lambda_i(A^*A)}$; $\lambda_i(A^*A)$ – i-та сопс. вр. матрице A^*A.

$p\to\infty$: $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$.

деф. Норма матрице $\|A\|$ и норма вектора $\|x\|$ су сагласне ако важи: $\|Ax\| \le \|A\|\cdot\|x\|$. $(A\in M_n)$

Лема 1: Све сопс. вр. матрице A су по модулу мање или једнаке од њене произвољне норме сагласне са неком нормом вектора.

Доказ: $|\lambda|\cdot\|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \le \|A\|\cdot\|x\| \Rightarrow |\lambda| \le \|A\|$

деф. Условљеност регуларне матрице је скалар $\mathrm{cond}(A) := \|A\|\cdot\|A^{-1}\|$.

Условљеност сингуларне матрице је $+\infty$.

Лема 2: 1) $\mathrm{cond}(\alpha A) = \mathrm{cond}(A)$;
2) $\mathrm{cond}(E) = 1$;
3) $\mathrm{cond}(A) \geq 1$.

Доказ: 1) тривијално $\left(\mathrm{cond}(\alpha A) = \|\alpha A\|\cdot\|(\alpha A)^{-1}\| = |\alpha|\cdot\|A\|\cdot\left|\frac{1}{\alpha}\right|\cdot\|A^{-1}\| = \|A\|\cdot\|A^{-1}\| = \mathrm{cond}(A)\right)$;
2) тривијално $\left(\mathrm{cond}(E) = \|E\|\cdot\|E\| = 1\right)$;
3) $\mathrm{cond}(A) = \|A\|\cdot\|A^{-1}\| \geq \|A\cdot A^{-1}\| = \|E\| = 1$.

Напомена: Што је $\mathrm{cond}(A)\in[1,+\infty]$ веће, то је условљеност лошија.

Пример: стр. 109

28. Гаусова метода елиминације

Гаусов метод елиминације служи за решавање система линеарних једначина:

$$Ax = b, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ је регуларна}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Наиме, у коначно много корака, такав систем трансформишемо у систем са горње троугаоном матрицом.

$$Ux = c, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{nn} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Тај систем има исто решење као и полазни.

То решење, ако су сви $u_{ii} \neq 0$, једнако је: $x_n = \frac{c_n}{u_{nn}}$, $x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(c_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right)$ за $i \leq n-1$.

Алгоритам:

0) Заменом редоследа врста, на прво место ставимо ону којој коеф. a_{p1} у првој колони није 0;
Таква врста постоји, јер је A регуларна.

1) „Анулирамо" коеф. у првој колони за све остале врсте;

Дакле, ове кораке матрично можемо записати на следећи начин: $(A_1; b_1) = L_1 P_1 (A; b)$

$$(A; b) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}, \qquad (A_1; b_1) = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ 1 & & & 0 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix}:$$ доводи p-ти ред на врх (иста као E, само врсте $1 \leftrightarrow p$)

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -l_{n1} & 0 & & 1 \end{bmatrix}, \quad l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$$ (мисли се након $\leftrightarrow$): анулира

Решења овог и полазног система су иста. (тривијално следи из тога што су L_1, P_1 регуларне)

Напомена: Корак 0 се зове делимично пивотирање.

Ако бисмо тражили $\max |a_{ij}| = |a_{pq}|$, тада бисмо, осим p-те врсте пермутовали и q-ту колону.
То се зове потпуно пивотирање.

2) Поновимо поступак за матрицу димензије $(n-1)$.

Дакле: $(U; c) = L_{n-1}P_{n-1} \dots L_1 P_1 (A; b)$.

Специјално, ако се не врше пермутације $(P_i \equiv E)$ $\Rightarrow$ $(U; c) = L_{n-1} \dots L_1 (A; b)$

$$\text{тј.} \quad L_1^{-1} \dots L_{n-1}^{-1} (U; c) = (A; b).$$

Приметимо да L_i^{-1} одговара операцији супротној од L_i, па важи: $L_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & & +l_{i+1,i} & 1 & \\ & & \vdots & \vdots & \ddots \\ & & +l_{n,i} & 0 & & 1 \end{bmatrix}$

Зато је $L := L_1^{-1} \dots L_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ l_{21} & 1 & & \\ & l_{31} & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$.

Одавде добијамо запис: $A = L \cdot U$.

29. Троугаона декомпозиција матрице

Другим речима, Гаусовом методом елиминације је извршена LU декомпозиција матрице A на две троугаоне матрице: доње троугаоне L са свим 1 на дијаг. и горње троугаоне U.

Пре смо претпоставили да нема пермутација, међутим чак и да их има, то не представља проблем.

$$P \cdot A = L \cdot U. \qquad \text{(P - производ матрица пермутација)}$$

деф.

$$T_j := \left[\begin{array}{cccc|ccc|c}
u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1j} & u_{1,j+1} & \dots & u_{1n} & c_1 \\
\lambda_{21} & u_{22} & & u_{2j} & \vdots & & \vdots & \\
\lambda_{31} & \lambda_{32} & & & & & & \\
 & & & u_{jj} & u_{j,j+1} & \dots & u_{jn} & c_j \\
\hline
 & & & \lambda_{j+1,j} & a^{(j)}_{j+1,j+1} & \dots & a^{(j)}_{j+1,n} & b^{(j)}_{j+1} \\
 & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nj} & a^{(j)}_{n,j+1} & & a^{(j)}_{n,n} & b^{(j)}_n
\end{array}\right]$$

(један цео корак, у једној матрици)

Напомена: T_{n-1} садржи испод главне дијагонале елементе матрице L, а на и изнад главне дијагонале садржи елементе матрице U.

Пример:

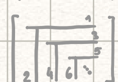
$$(A; b) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \overset{L_1}{\Rightarrow} T_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 & 2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{17}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 & \frac{10}{3} \end{bmatrix} \overset{P_1}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 & \frac{10}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{17}{3} \end{bmatrix} \overset{L_2}{\Rightarrow} T_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 & \frac{10}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \end{array}\right]$$

Одавде, букв. читамо: $P = P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$.

Приметимо и следеће: $PAx = LUx = b$ (наш систем) $\Leftrightarrow$ $Ly = Pb$, где $y = Ux$.

LU декомпозицију не морамо да радимо преко низа T_j, већ можемо и директно:

Претпоставимо, због једноставности, да нема пермутација (тј. $P \equiv E$).
Из услова $A = LU$ добијамо $n \cdot n = n^2$ веза између елемената матрица A и L, U: $a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} \cdot u_{kj}$
Тај систем има $\frac{n(n-1)}{2}$ непознатих l_{ij} и $\frac{n(n-1)}{2}$ непознатих u_{ij}.

Један редослед решавања је следећи: $T_{n-1} =$  и после прочитамо L и U.

Шта је разлика између Гаусове елиминације и троугаоне декомпозиције? Редослед операција.

Код Гауса се међурезултати памте, а код LU декомп. иде одједном.
То може да се искористи за смањење рачунске грешке.

31. Израчунавање детерминанте и инверзне матрице

LU декомпозиција може да послужи за рачунање следећег:

* **Детерминанта:**

$\det(PA) = \det P \cdot \det A = \pm \det A.$

$\det(PA) = \det L \cdot \det U = 1 \cdot (u_{11} \dots u_{nn}) = u_{11} \dots u_{nn}.$

Значи $\det A$ је, до на знак, једнака $u_{11} \dots u_{nn}$.

1° $P \equiv E$: u_{ii} су једнаки количницима детерминанти главних минора.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix},$$

где су матрице са индексом 11 димензије $i \times i$
(остале не морају бити квадратне)

Зато је $\det(A_{11}) = \det(L_{11} \cdot U_{11}) = \det(U_{11}) = u_{11} \dots u_{ii}$

2° $P \not\equiv E$: ако је A_i главни минор матрице A, имамо да је:

$$u_{11} = \det(A_1), \qquad u_{ii} = \frac{\det(A_i)}{\det(A_{i-1})} \quad (i \geq 2)$$

* **Инверзна матрица:**

Ако са x_i означимо i-ту колону матрице A^{-1}, а са e_i i-ти базни вектор $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

$$AA^{-1} = E \quad \Rightarrow \quad Ax_i = e_i \quad (1 \leq i \leq n) \quad \Rightarrow \quad LUx_i = PAx_i = Pe_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

Дакле, A^{-1} налазимо решавањем система лин. једн. $LU \cdot x_i = Pe_i$.

30. Тродијагоналан систем једначина

деф. **Тродијагонални систем једначина** је $Ax=b$, где је $A = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & & \\ * & * & * & 0 & & \\ 0 & * & * & * & & \\ 0 & 0 & * & * & * & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * \end{bmatrix}$.

Такав систем можемо записати у следећем облику:

$$\begin{cases} c_1 x_1 + b_1 x_2 = d_1; \\ a_i x_{i-1} + c_i x_i + b_i x_{i+1} = d_i, \quad 2 \le i \le n-1; \\ a_n x_{n-1} + c_n x_n = d_n \end{cases}$$

Алгоритам: (Гаусовом методом)

1) пп. $c_1 \neq 0$: $x_1 = \frac{1}{c_1}(d_1 - b_1 x_2) \Rightarrow x_1 = \alpha_2 x_2 + \beta_2$, $\alpha_2 = -\frac{b_1}{c_1}$, $\beta_2 = \frac{d_1}{c_1}$.

Ово сада можемо да убацимо у другу једначину. (елиминисали x_1)

2) Изразимо x_2 преко x_3

⋮

i-1) $x_{i-1} = \alpha_i x_i + \beta_i$ (елиминисали x_{i-1}).

Убацимо ово: $a_i(\alpha_i x_i + \beta_i) + c_i x_i + b_i x_{i+1} = d_i \Rightarrow x_i = \frac{1}{a_i \alpha_i + c_i}(d_i - a_i\beta_i - b_i x_{i+1})$;

$$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad \alpha_{i+1} = \frac{-b_i}{a_i \alpha_i + c_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{d_i - a_i \beta_i}{a_i \alpha_i + c_i}.$$

n-1) $a_n(\alpha_n x_n + \beta_n) + c_n x_n = d_n \Rightarrow x_n(a_n \alpha_n + c_n) + a_n \beta_n = d_n \Rightarrow x_n = \beta_{n+1} = \frac{d_n - a_n \beta_n}{c_n + \alpha_n a_n}$;

Напомена: Број операција које треба извршити, асимптотски је једнак $8n$.

32. Гаус-Жорданова метода и Чолески декомпозиција

* Гаус - Жорданова метода:

При Гаусовој елиминацији, једначина из које је једном изабран пивот се после више не трансформише. При томе се после $(n-1)$ корака добија троугаона матрица.

Сада, у сваком кораку се трансформишу све једначине осим те у којој је тренутни пивот.
За пивот не бирамо оне коеф. из једначина из којих је већ бирано.
При томе се после $(n-1)$ корака добија дијагонална матрица.

Напомена: Ово је спорије, али практичније ако после одређујемо A^{-1}.
(решавамо само n дијаг. уместо n троугаоних система)

* Чолески декомпозиција:

Ако је A позитивно дефинитна, тада постоји јединствена доње троугаона матрица:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}, \qquad l_{ii} > 0$$

ткд. важи $A = LL^*$. При томе, ако је A реална, онда је и L реална матрица.

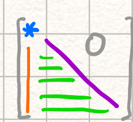
$\hookrightarrow \quad a_{ii} = |l_{i1}|^2 + \dots + |l_{ii}|^2; \qquad a_{ij} = l_{i1}\bar{l}_{j1} + \dots + l_{ij}\bar{l}_{jj}$ за $j<i$;

Одавде, одређујемо елем. матрице L:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}; \qquad l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}};$$

$$l_{i1} = \frac{a_{ij}}{l_{11}}; \qquad l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\cdot \bar{l}_{jk}\right);$$

$1 < j < i \leq n$



Напомена: 1) Због поз. деф., $a_{11} > 0$
2) $a_{ii} = |l_{i1}|^2 + \dots + |l_{ii}|^2 \Rightarrow |l_{ij}| < \sqrt{a_{ii}}$, па је метода стабилна.

Поента: Кад одредимо L, решење система $Ax = b$ се налази решавањем два троугаона система:

$$L\cdot y = b, \qquad L^* x = y$$

35. Теорема о непокретној тачки

деф. Нека је $B \subset X$ затворен подскуп комплетног метричког простора.
Пресликавање $G: B \to B$ је контракција ако постоји $q<1$ ткд. $d(G(x_1), G(x_2)) \leq q \cdot d(x_1, x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in B$.
q се зове коефицијент контракције.

деф. Непокретна тачка је она тачка x^* за коју важи $G(x^*) = x^*$.

Теорема 1 (Банахова теорема о непокретној тачки): Нека је $G: B \to B$ контракција. Тада:

1) Низ $\{x_n\}$ одређен са $x_{n+1} = G(x_n)$, $x_0 \in B$ произв, конвергира ка неком $\bar{x} \in B$;

2) Тачка $\bar{x}$ је непокретна при G и јединствена је;

3) $d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot d(x_0, x_1)$;

$d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{q}{1-q} \cdot d(x_{n-1}, x_n)$.

Доказ: 1) Изаберимо два броја ткд. $m > n$.

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m).$$

Приметимо: $d(x_{n+1}, x_n) = d(G(x_n), G(x_{n-1})) \leq q \cdot d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq q^n \cdot d(x_0, x_1)$.

$$d(x_n, x_m) \leq q^n \cdot d(x_0, x_1) + q^{n+1} d(x_0, x_1) + \dots + q^{m-1} d(x_0, x_1) = d(x_0, x_1) \cdot q^n (1 + q + q^2 + \dots + q^{m-n-1}).$$

$$= d(x_0, x_1) \cdot q^n \cdot \sum_{j=0}^{n-m-1} q^j \leq d(x_0, x_1) \cdot q^n \sum_{}^{\infty} q^j \leq d(x_0, x_1) \cdot q^n \cdot \frac{1}{1-q} \xrightarrow{n \to \infty} 0. \quad (\text{јер } q<1)$$

Како је $\{x_n\}$ Кошијев, а м.п. је комплетан $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ конвергира (ка неком $\bar{x}$).
Како је скуп B затворен $\Rightarrow$ $\bar{x} \in B$.

2) * $\bar{x}$ је непокретна:

$$d(x_{n+1}, G(\bar{x})) = d(G(x_n), G(\bar{x})) \leq q \cdot d(x_n, \bar{x}) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = G(\bar{x}) \xRightarrow{\text{Lim јединств.}} \bar{x} = G(\bar{x}).$$

* $\bar{x}$ је једина која је непокретна:

ппс. $\exists \bar{\bar{x}} \neq \bar{x}$, $G(\bar{\bar{x}}) = \bar{\bar{x}}$.

$$d(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = d(G(\bar{x}), G(\bar{\bar{x}})) \leq q \cdot d(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) \Rightarrow \underbrace{(1-q)}_{>0} \cdot \underbrace{d(\bar{x}, \bar{\bar{x}})}_{\geq 0} \leq 0$$

Једино могуће ако $d(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = 0 \overset{\text{м.п.}}{\Rightarrow} \bar{x} = \bar{\bar{x}}$. ↯

3) Изаберимо два броја ткд. $m > n$.

* Из 1): $d(x_n, x_m) \le \frac{q^n}{1-q} \cdot d(x_0, x_1)$. Ако узмемо $m \to \infty$: $d(x_n, \bar{x}) \le \frac{q^n}{1-q} \cdot d(x_0, x_1)$.

* $d(x_n, \bar{x}) = d(G(x_{n-1}), G(\bar{x})) \le q \cdot d(x_{n-1}, \bar{x}) \le q \cdot (d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, \bar{x}))$

$$\Rightarrow (1-q) \cdot d(x_n, \bar{x}) \le q \cdot d(x_{n-1}, x_n) \quad \Rightarrow \quad d(x_n, \bar{x}) \le \frac{q}{1-q} d(x_{n-1}, x_n).$$

Чему нам служи ова теорема? Због ње можемо увести итеративне процесе.

Посматрајмо $Ax = b$, то је систем чије је решење неко x^*, дакле важи $Ax^* = b$.

Теорема нам указује да низ $x_{n+1} = G(x_n)$ конвергира ка решењу x^*.
Ово се зове двослојна стационарна линеарна итеративна метода реда 1.

Шта би био критеријум заустављања? Другим речима, тражимо n ткд. $d(x_n, \bar{x}) \le \varepsilon$.

По теореми, $d(x_n, \bar{x}) \le \frac{q^n}{1-q} \cdot d(x_0, x_1)$, , па зато се наш проблем своди на:

$$\frac{q^n}{1-q} \cdot d(x_0, x_1) \le \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{d(x_0, x_1)}}{\ln q}$$

33. Метода просте итерације за системе линеарних једначина

Посматрајмо $Ax = b$, као и итеративни процес $x_{n+1} = \underbrace{B \cdot x_n + C}_{G(x_n)}$

Теорема 1: Нека систем $Ax=b$ има јединствено решење x^*.
Тада итеративни процес $x_{k+1} = Bx_k + c$ конвергира ка том решењу за сваки поч. вектор x_0 акко су све сопс. вр. матрице B по модулу мање од 1.

Доказ: $(\Rightarrow)$ ппс. $\exists \lambda_0(B)$, $|\lambda_0| \geq 1$.

Како је λ_0 сопс. вр. $\Rightarrow$ $Bv_0 = \lambda_0 v_0$ $(v_0 \neq 0)$
Означимо $x_0 := x^* + v_0$ (x^* - решење)

$$x_k - x^* = (Bx_{k-1} + \cancel{c}) - (Bx^* + \cancel{c}) = B(x_{k-1} - x^*)$$

$$= B \cdot [(Bx_{k-2} + c) - (Bx^* + c)] = B^2(x_{k-2} - x^*) = \ldots = B^k(x_0 - x^*) = B^k \cdot v_0$$

$$= B^{k-1} \cdot Bv_0 = B^{k-1}\lambda_0 v_0 = \ldots = \lambda_0^k v_0 \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad ↯ \quad (|\lambda_0| \geq 1,\ v_0 \neq 0)$$

$(\Leftarrow)$ $x_k - x^* = B^k(x_0 - x^*)$ (на исти начин као пре)
Треба доказати да $B^k \xrightarrow{k\to\infty} [0]$. (матрица са свим нулама, јер тада $x_k \to x^*$)

Лема: Свака квадратна матрица реда n је слична Жордановој матрици J:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in M_{n_i},$$

λ_i - сопс. вр. од B, n_i - вишестр. λ_i.
$(n_1 + \ldots + n_m = n)$

$B = C^{-1}JC$; $B^2 = C^{-1}JCC^{-1}JC = C^{-1}J^2C$; ... ; $B^k = C^{-1}J^kC$.

Знамо да $C^{-1}, C \neq [0]$ (регуларна је).
То значи да би важило $B^k \xrightarrow{k\to\infty} [0]$, мора $J^k \to 0$.

$$J^k = \begin{bmatrix} J_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m^k \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad J_i^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \cdots & \binom{k}{n_i-1}\lambda_i^{k-n_i+1} \\ 0 & \lambda_i^k & \cdots & \binom{k}{n_i-2}\lambda_i^{k-n_i+2} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^k \end{bmatrix}.$$

Како је $|\lambda_i| < 1$ $\Rightarrow$ $J_i^k \xrightarrow{k\to\infty} [0]$ $\Rightarrow$ (заиста) $J^k \xrightarrow{k\to\infty} [0]$ $\Rightarrow$ $B^k \xrightarrow{k\to\infty} [0]$.

Због овога, као што смо већ истакли: $x_k \to x^*$.

Теорема 2: Ако је нека норма матрице B (која је сагласна са неком нормом вектора) мања од 1, тада итеративни процес $x_{k+1} = B \cdot x_k + c$ конвергира.

Доказ: Пошто су норме сагласне: $\|Bx\| \leq \|B\| \cdot \|x\|$

Означимо са λ_i и v_i одговарајуће сопс. вр. и сопс. вр: $Bv_i = \lambda_i v_i$

$$|\lambda_i| \cdot \|v_i\| = \|\lambda_i v_i\| = \|Bv_i\| \overset{\text{сагл.}}{\leq} \|B\| \cdot \|v_i\| \overset{\|v_i\| \neq 0}{\Longrightarrow} |\lambda_i| \leq \|B\| < 1 \overset{T1}{\Longrightarrow} \text{конвергира.}$$

Посматрајмо обични систем:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{matrix}$$

Метода просте итерације, тј. **Јакобијева метода** одређена је са:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(-a_{12}x_2^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) + \frac{b_1}{a_{11}}.$$

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(-a_{21}x_1^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) + \frac{b_2}{a_{22}}.$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(-a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right) + \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

Приметимо да ово скраћено можемо да запишемо као: $x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + C$, где:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ & & & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \dots & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}.$$

Када овако дефинисан низ конвергира ка решењу?

По T2, довољно је да важи $\|B\|_\infty < 1$.

$\|B\|_\infty = \max_i \sum_j^n |b_{ij}| = \max_i \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^n \left|-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|$ и то мора да буде < 1.

Дакле, мора бити испуњен услов: $\forall i = 1, \dots, n \quad \sum_{j\neq i}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|$.

У том случају, кажемо да је матрица B **дијагонално доминантна**.

Постоји и **Гаус-Зајделова метода**: иста као ова, само користимо одмах $x_i^{(k+1)}$ кад може.

34. Нумеричка стабилност и условљеност

деф. Кажемо да је линеарни систем $A \cdot x = b$ **стабилан** ако малим променама улазних параметара A, b одговарају мале промене решења x.

Иначе, кажемо да је линеарни систем **нестабилан**.

Тражимо нешто што може да буде показатељ да ли неки систем јесте стабилан:

Да ли то може бити $\det A$? Не.

На први поглед, има смисла: знамо ако $\det A = 0 \Rightarrow$ или има ∞ решења или их нема уопште;
ако $\det A \neq 0 \Rightarrow$ јединствено решење
Има смисла да претпоставимо да ако је $\det A$ близу 0, то значи да је решење осетљивије.

Ипак, ово није добра мера за стабилност:
Помножимо све једначине неким c: $\det$ се повећа c^n пута, а карактеристике система су скоро исте.

Испоставља се да је условљеност $\operatorname{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ тачнија мера за стабилност:

Ако је $\operatorname{cond}(A)$ мало $\Rightarrow$ **боље условљена** $\Leftrightarrow$ стабилнија;
Ако је $\operatorname{cond}(A)$ велико $\Rightarrow$ **лоше условљена** $\Leftrightarrow$ нестабилнија.

Нека је x^* тачно решење система, а x' приближно решење: $Ax^* = b$; $Ax' = b'$. $(b \neq b')$

$$\Rightarrow A(x' - x^*) = b' - b \quad \Rightarrow \quad x' - x^* = A^{-1}(b' - b) \quad \Rightarrow \quad \|x' - x^*\| = \|A^{-1}(b'-b)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b' - b\|$$

$$\overset{:\|b\|}{\Rightarrow} \frac{\|x'-x^*\|}{\|b\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|b'-b\|}{\|b\|} \quad \overset{Ax^*=b}{\Longrightarrow} \quad \frac{\|x'-x^*\|}{\|A\| \cdot \|x^*\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|b'-b\|}{\|b\|}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\|x'-x^*\|}{\|x^*\|}}_{\text{рел. гр. решења}} \leq \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{\operatorname{cond}(A)} \cdot \underbrace{\frac{\|b'-b\|}{\|b\|}}_{\text{рел. гр. десне стране}}.$$

Видимо да је рел. гр. решења сразмерна рел. гр. десне стране и да расте са порастом $\operatorname{cond}(A)$.

(Слично се добија и ако допустимо и да се A мења.)

НЕЛИНЕАРНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

деф. Нелинеарна једначина је она која је облика $f(x) = 0$. (1 једначина, 1 непозната)

Пре него што кренемо да тражимо решење, морамо да га локализујемо, тј. изолујемо.
То радимо ослањајући се на наредне две леме:

Лема 1: Ако $f \in C[a,b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$

$\Rightarrow$ $f(x) = 0$ има бар једно решење $x^* \in (a,b)$.

Доказ: Директно из теореме о међувредности.

Лема 2: Ако $f \in C(a,b)$ монотона на $[a,b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$

$\Rightarrow$ $f(x) = 0$ има јединств. реш. $x^* \in (a,b)$.

Доказ: тривијално из Л1.

$\boxed{36.}$ Метода итерације за нелинеарну једначину

Идеја је иста као у $\boxed{33}$:

Користећи рекурентну везу $x_{k+1} = g(x_k)$ (није једнозначно), при чему имамо x_0, формирамо низ $x_1, x_2, \dots$ који конв. ка x^* (решење).

Како је у питању двослојна стационарна метода реда 1, можемо применити Банахову теорему ($\boxed{35}$ Т1).

Теорема 1: Ако је $g(x): B \to B$ диференцијабилна и $|g'(x)| \leq q < 1$, тада итеративни процес конвергира ($x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$) и важи:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0|; \qquad |x_n - x^*| \leq \frac{q}{1-q}\,|x_n - x_{n-1}|;$$

(априорна грешка) (апостериорна грешка)

Доказ: По Лагранжовој теореми о средњој вредности:

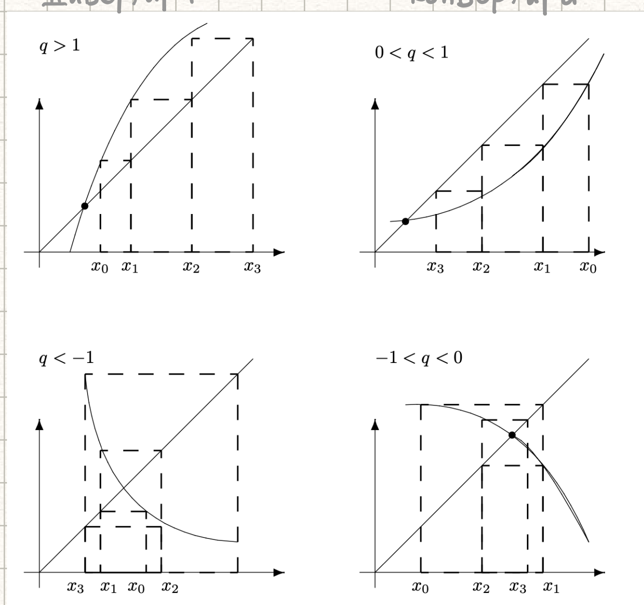
$$\exists \xi \in (a,b) \quad |g(x) - g(y)| = |g'(\xi)| \cdot |x-y| \leq \max_{x\in(a,b)} |g'(x)| \cdot |x-y|$$

Како је $\forall x \ |g'(x)| < 1 \Rightarrow$ можемо узети $q = \max\limits_{x\in(a,b)} |g'(x)|$

Сада смо проблем скроз свели на Банахову теорему, па тврђење следи из ње.

Пример: стр. 164

дивергира конвергира



Slika 7.1: Geometrijska interpretacija metode iteracije.

37. Њутнова метода у R^1 - конвергенција

Њутнова метода у R^1 је дефинисана следећим итеративним алгоритмом:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n \in \{0,1,2,\dots\}, \quad \text{при чему } f'(x_n) \neq 0. \qquad (*)$$

Како је једначина тангенте на криву $f(x)$ у тачки x_n баш: $y = t_n(x) \equiv f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$,
јасно је да је тачка x_{n+1} из $(*)$ решење једначине $t_n(x) = 0$.

Другим речима: у сваком кораку, $f(x)$ апроксимирамо тангентом у тачки $(x_i, f(x_i))$.
x_{i+1} је пресек тангенте и Ox осе.

Зато ову методу називамо и метода тангенти.

Како знамо да овај процес конвергира?

Теорема 1: Ако функција $f: [a,b] \to R^1$ има следеће особине:

а) $f \in C^1[a,b]$;
б) $f(a) \cdot f(b) < 0$;
в) $\forall x \in [a,b] \ \exists f''(x)$;
г) f' и f'' не мењају знак на $[a,b]$; $\quad (\Leftrightarrow \ f'(x) \neq 0)$
д) за тачку $x_0 \in [a,b]$ важи $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Онда низ $\{x_n\}$, одређен са $(*)$, са првим чланом x_0
конвергира ка јединственом решењу $x^* \in [a,b]$ једначине $f(x) = 0$.

Доказ: * $f(x) = 0$ има јединствено решење x^*:

Решење постоји по Л1 (може због услова а) и б)).
Јединствено је по Л2 (може због услова г), по њему је монотона).

БУО: $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ (остало аналогно).
Узмимо и $x_0 = b$ (да би био испуњен услов д)

* Докажимо потпуном индукцијом да је $\forall n \ \ x_n > x^*$

(БИ) $n = 0$: тривијално (изабрали смо $x_0 = b$, а $x^* \in (a,b)$).

(ИК) Претпоставимо $x_k > x^*$, за $k \in \{1, \dots, n\}$. Доказујемо $x_{n+1} > x^*$:

По Тејлору: $0 = f(x^*) = f(x_n + (x^* - x_n)) = \underline{f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n)} + \frac{1}{2} f''(\xi)(x^* - x_n)^2, \quad \xi \in (x^*, x_n)$

$$\overset{f''>0}{\Rightarrow} \ \underline{f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n)} < 0$$

$$\overset{f'>0}{\Rightarrow} \ x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > x^* \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} > x^*,$$ што је и требало доказати.

* Због г), f је монотона.
Пошто су све x_k са исте стране њене нуле x^*, а $f(x_0) = f(b) > 0$, онда је $f(x_k) > 0$.

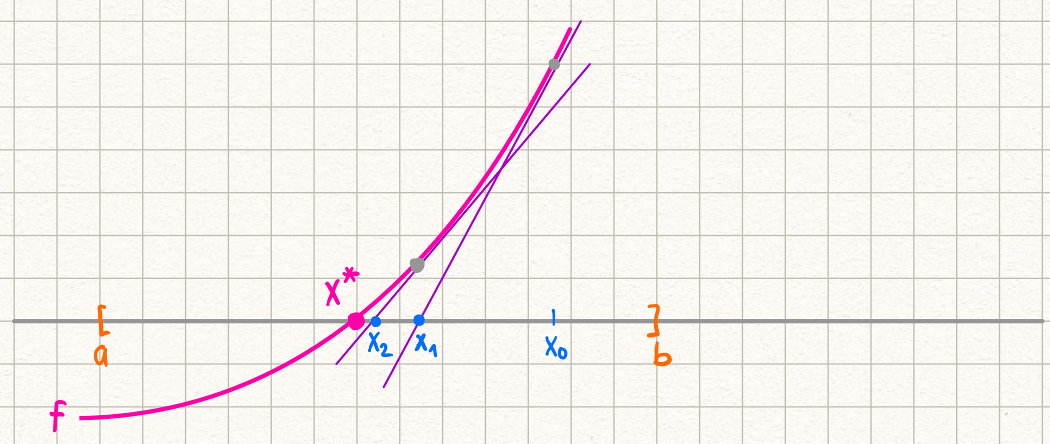
$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad x_{k+1} < x_k \quad \Rightarrow \{x_n\}$ је монотон и ограничен (нулом) $\Rightarrow \{x_n\}$ је конвергентан.

* Означимо са $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in [a,b]$

Из (*) $\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \dfrac{f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)}{f'(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \bar{x} - \dfrac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \quad \Rightarrow \quad f(\bar{x}) = 0.$

Како је x^* једина нула f (доказали на почетку) $\Rightarrow \bar{x} = x^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*.$

Графички приказ:



38. Њутнова метода у R^1 - оцене тачности решења

Нека је $m_1 = \min\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

По Лагранжовој теореми: $\exists \xi \in (x^*, x_n)$ $f(x^*) - f(x_n) = f'(\xi)(x^* - x_n)$ $\overset{f(x^*)=0}{\Rightarrow}$ $|f(x_n)| = |f'(\xi)|\cdot|x^* - x_n| \geqslant m_1|x^* - x_n|$.

$\Rightarrow$ грешку можемо оценити са $|x^* - x_n| \leq \dfrac{|f(x_n)|}{m_1}$

Напомена: Ова оцена важи за сваку апроксимацију x_n.

* Ако је x_n апроксимација одређена Њутновом методом, користећи добијену оцену, изведимо и другу:

Тејлор $\Rightarrow$ $f(x_n) = f(x_{n-1} + (x_n - x_{n-1})) = \underbrace{f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})}_{0 \text{ (по } (*))} + \frac{1}{2} f''(\xi)(x_n - x_{n-1})^2$

$$\Rightarrow |f(x_n)| = \frac{1}{2}|f''(\xi)|\cdot|x_n - x_{n-1}|^2 \leq \frac{1}{2} M_2 |x_n - x_{n-1}|^2$$

Када то убацимо у прву оцену, добијамо:

$$|x^* - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}\cdot|x_n - x_{n-1}|^2, \quad \text{где} \quad m_1 = \min_{x\in[a,b]}|f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

Одавде видимо и квадратну брзину конвергенције Њутнове методе.

39. Метода regula falsi

У 37, криву смо апроксимирали тангентом.

Ако криву апроксимирамо сечицом која је одређена двема тачкама криве, где је једна тачка x_F која је фиксирана, а друга тачка x_i коју одређујемо из:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_F)-f(x_n)} \cdot (x_F - x_n),$$

добијамо методу regula falsi (лажни положаји).

Оцена грешке:

Како је $f(x^*)=0$ $\overset{\text{веза}}{\Longrightarrow}$ $x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \dfrac{f(x_n)-f(x^*)}{f(x_F)-f(x_n)} \cdot (x_F - x_n),$

$$\overset{\text{Лагранж}}{\Longrightarrow} \quad x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{(x_n - x^*)\cdot f'(\xi_1)}{(x_F - x_n)\cdot f'(\xi_2)}(x_F - x_n) = (x_n - x^*)\left(1 - \frac{f'(\xi_1)}{f'(\xi_2)}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} - x^* = (x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - x^*)\left(1 - \frac{f'(\xi_1)}{f'(\xi_2)}\right)$$

$$\Rightarrow \quad (x_{n+1} - x^*)\cdot \frac{f'(\xi_1)}{f'(\xi_2)} = (x_n - x_{n+1})\cdot\left(1 - \frac{f'(\xi_1)}{f'(\xi_2)}\right) = (x_n - x_{n+1})\cdot \frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{f'(\xi_2)}.$$

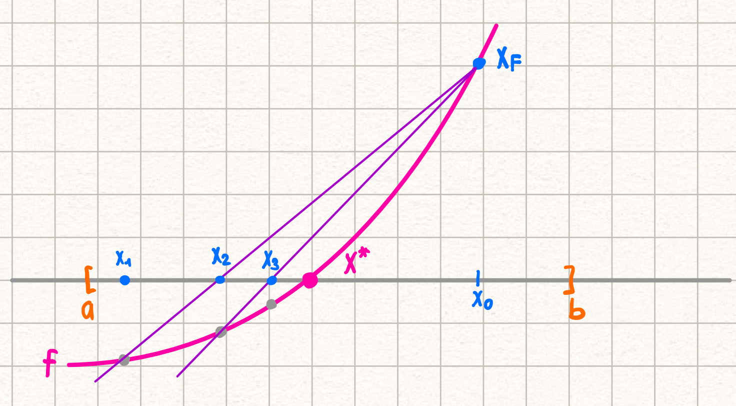
$$\Rightarrow \quad x_{n+1} - x^* = \frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{f'(\xi_1)}\cdot(x_n - x_{n+1}) = \frac{f'(\xi_1)-f'(\xi_2)}{f'(\xi_1)}\cdot(x_{n+1} - x_n).$$

Ако је $f \in C^1[a,b]$ и монотона на $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\exists m_1, M_1$ $\quad 0 < m_1 \leq |f'(x)| \leq M_1 < +\infty$, за $\forall x \in [a,b]$

Зато је тражена оцена:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1}\cdot|x_{n+1} - x_n|.$$

Графички приказ:



$\boxed{40.}$ Метода сечице

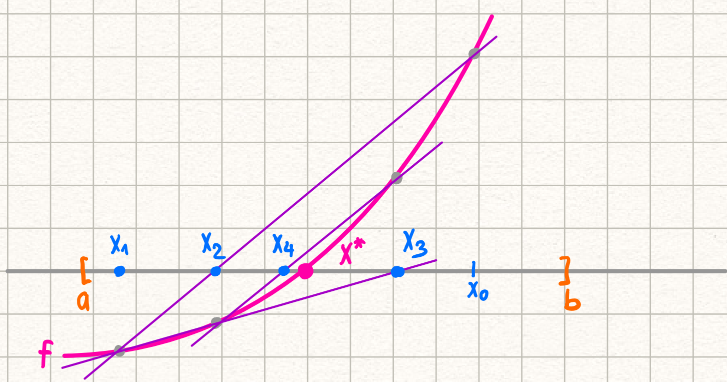
Ако криву апроксимирамо сечицом која је одређена двема тачкама криве: $(x_n, f(x_n))$ и $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} \cdot (x_{n-1} - x_n),$$

добијамо методу сечица.

Оцена грешке: иста као у $\boxed{39}$, а може и она из $\boxed{38}$.

Графички приказ:



Напомена: Ова метода се може комбиновати са Њутновом.

Пример: стр. 178.

41. Метода половљења интервала

Претпоставимо да $f \in C[a,b]$ и да је $f(a)\cdot f(b) < 0 \overset{\text{Л1}}{\Rightarrow}$ постоји бар једно решење $x^* \in [a,b]$ за $f(x)=0$.

Израчунајмо $\frac{a_0+b_0}{2}$, тј. средиште интервала $[a_0, b_0] \equiv [a,b]$.

1° $f(\frac{a_0+b_0}{2}) = 0$: нашли смо решење $x^* = \frac{a_0+b_0}{2}$.

2° $f(\frac{a_0+b_0}{2}) \neq 0$: бирамо ону половину интервала ткд. у крајевима ф-ја има различит знак.

Поступак понављамо и добијамо низ интервала $[a_0,b_0] \supset [a_1,b_1] \supset \dots$

Могуће је да ћемо добити тачно решење. (закорачимо у њега после коначно много пута)
Ипак, чак и када то није случај, низови $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ конвергирају ка x^*. Докажимо то:

Теорема 1: Нека је $f \in C[a,b]$ и $f(a)\cdot f(b) < 0$.
Низови $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ конвергирају ка x^*, које је решење једначине $f(x)=0$.

Доказ: По претходном, јасно је $a_0 \le a_1 \le \dots \le a_n \le \dots \le b_n \le \dots \le b_1 \le b_0$.
Дакле, ови низови су монотони, а како су и ограничени са $[a,b]$, они су конвергентни.

$$\Rightarrow \exists A, B \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = B. \quad \text{Притом,} \quad a_i \le A \le B \le b_i.$$

Како је $B-A = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{d_n}_{\text{дужина } n\text{-тог интервала}} = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0 \quad \Rightarrow \quad A=B$ је једина тачка која припада свим интервалима.

Знамо $f(a_n)\cdot f(b_n) \le 0$.
Са друге стране: $\lim_{n\to\infty} f(a_n)\cdot f(b_n) \overset{\text{непр.}}{=} f(\lim_{n\to\infty} a_n)\cdot f(\lim_{n\to\infty} b_n) = f(A)\cdot f(B) = f^2(A) \le 0$.

$$\Rightarrow f(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = B = x^* \text{ јесте решење.}$$

Оцена грешке: $|x^* - x_n| \le \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{b-a}{2^{n+1}}$

Одавде лако одређујемо и број корака који нам је потребан за одређену тачност ε:

$$n \geq \left[\frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2} \right]$$

Напомена: Мане овог алгоритма су немогућност уопштења на више димензија, као и спора конвергенција.

Али зато је веома једноставан.