Јован Самарџић

13/2019

Увод у математичку логику, професор: Небојша Икодиновић

- дефиниције

- ставови / теореме / тврђења

- докази

ПРИРОДНА ДЕДУКЦИЈА

24. 9. 2019.

- **исказ** – реченица која може бити тачна (1) или нетачна (0)
- **исказна слова** $a, b, c, \ldots, p, q, r, s, t, p_1, p_2, \ldots$
- **логички везници** $\land, \lor, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ – бинарни
  $\neg$ – унарни
- **исказне формуле**: 1) p (исказно слово је формула)
  2) α и β – формуле
  онда су и $(\alpha \land \beta)$, $(\alpha \lor \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$, $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ иск. форм.
  3) α – формула, онда је и $\neg\alpha$ формула

Формуле правимо од исказних слова и лог. везника употребљавајући заграде на уобичајен начин.

- **приоритет**: 1) $\neg$
  2) $\land, \lor$
  3) $\Rightarrow, \Leftrightarrow$

величина – $\mathbb{R}$ (реалан број)
променљиве: x, y, z
операције: $+, \cdot$
израз: $\alpha + \beta \cdot \gamma$

аналогија

$(p \land q) \lor r$ $\quad p=1 \quad q=0 \quad r=0$
$(p + q) \cdot r$ $\quad p=3 \quad q=2 \quad r=-1$

пр. 1 – Ако четвороугао ABCD има једнаке странице и углове, онда је ABCD квадрат
– Четвороугао ABCD није квадрат
– Четвороугао има једнаке странице
Закључак: Четвороугао нема једнаке углове

пр. 2 – Ако је број n дељив са 2 и 3, дељив је са 6
– n није дељив са 6
– n је дељив са 2
Закључак: n није дељиво са 3

пр 1: - $p \wedge q \Rightarrow r$
- $\neg r$
- p

Закључак: $\neg q$

секвент

$$\underbrace{p \wedge q \Rightarrow r,\ \neg r,\ p}_{\text{претпоставке}} \vdash \underbrace{\neg q}_{\text{закључак}}$$

рампа

Основно правило закључивања: Не сме се наносити штета истинитости (salva veritate)

(Из тачних претпоставки следе тачни закључци)

- слонови су рибе
- рибе живе у води

закљ: слонови живе у води — тачно

*** конјукција**

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

правила: $\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$ - $\wedge_E^L$ $\quad$ $\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$ - $\wedge_E^D$ - елиминација конјукције

$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}$ - $\wedge_U$ - увођење конјукције

* секвент: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots \varphi_k \vdash \psi$ је **доказив** ако се може извести применом правила природне дедукције

пр. $(p \wedge q) \wedge r,\ s \wedge t \vdash q \wedge s$

1. $(p \wedge q) \wedge r$ — пп.
2. $s \wedge t$ — пп.
3. $p \wedge q$ — $\wedge_E^L$, 1
4. q — $\wedge_E^D$, 3
5. s — $\wedge_E^L$, 2
6. $q \wedge s$ — $\wedge_U$, 4, 5

*** двострука негација**

$\neg\neg a$ тврди исто што и a; правила: $\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$ - $\neg\neg_E$ - елиминација дупле негације

$\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$ - $\neg\neg_U$ - увођење дупле негације

пр. $p \wedge \neg\neg(q \wedge r),\ s \wedge t \vdash \neg\neg t \wedge q$

1. $p \wedge \neg\neg(q \wedge r)$ — пп
2. $s \wedge t$ — пп.
3. t — $\wedge_E^D$, 2
4. $\neg\neg t$ — $\neg\neg_U$, 3
5. $\neg\neg(q \wedge r)$ — $\wedge_E^D$, 1
6. $q \wedge r$ — $\neg\neg_E$, 5
7. q — $\wedge_E^L$, 6
8. $\neg\neg t \wedge q$ — $\wedge_U$, 4, 7

* импликација

$\Rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

правила:

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta} \quad - \quad \Rightarrow_E \text{ (MP - modus ponens)}$$

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \neg\beta}{\neg\alpha} \quad - \quad \text{MT - modus tolens}$$

пр. $a \Rightarrow (b \Rightarrow c),\ a,\ \neg c \vdash \neg b$

1. $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$ — пп
2. a — пп.
3. $\neg c$ — пп.
4. $b \Rightarrow c$ — MP, 1, 2
5. $\neg b$ — MT, 3, 4

$$\frac{\begin{array}{|l} \alpha \\ \vdots \\ \beta \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta} \quad - \quad \Rightarrow_u$$

поддоказ са додатном претпоставком α

пр. $a \Rightarrow b,\ \neg c \Rightarrow \neg b,\ c \Rightarrow d \vdash a \Rightarrow d$

1. $a \Rightarrow b$ — пп.
2. $\neg c \Rightarrow \neg b$ — пп.
3. $c \Rightarrow d$ — пп.
4. | a — дод. пп.
5. | b — $\Rightarrow_E$, 1, 4
6. | $\neg\neg b$ — $\neg\neg_u$, 5
7. | $\neg\neg c$ — $\Rightarrow_E$, 2, 6
8. | c — $\neg\neg_E$, 7
9. | d — $\Rightarrow_E$, 3, 8
10. $a \Rightarrow d$ — $\Rightarrow_u$, 4-9

пр. $\vdash p \Rightarrow p$

1. | p — дод. пп
2. $p \Rightarrow p$ — $\Rightarrow_u$ 1-1

* негација

x	$\neg x$
0	1
1	0

$$\frac{\alpha \quad \neg\alpha}{\bot} \quad - \quad \neg_E \text{ - елиминација негације}$$

$$\frac{\begin{array}{|l} \alpha \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{\neg\alpha} \quad - \quad \neg_u \text{ - увођење негације}$$

$$\frac{\bot}{\alpha} \quad - \quad \bot_E \text{ -}$$

$\bot$ - логички симбол за контрадикцију (формула која је увек нетачна) пр $p \wedge q \Rightarrow r,\ \neg r,\ p \vdash \neg q$

1.	$p \wedge q \Rightarrow r$	пп.
2.	$\neg r$	пп.
3.	p	пп.
4.	q	доп. пп.
5.	$p \wedge q$	$\wedge_U$, 3,4
6.	r	$\Rightarrow_E$ 1,5
7.	$\bot$	$\neg_E$, 2,6
8.	$\neg q$	$\neg_U$, 4-7

3. 10. 2019.

* дисјункција

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} - \vee_U^L \qquad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta} - \vee_U^D$$
– увођење дисјункције

$$\frac{\alpha \vee \beta \quad \begin{array}{|l}\alpha\\ \vdots \\ \gamma\end{array} \quad \begin{array}{|l}\beta\\ \vdots \\ \gamma\end{array}}{\gamma} - \vee_E$$
– елиминација дисјункције

пр. $\vdash (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r)$

$$\left[\frac{\begin{array}{|l}\alpha\\ \beta\end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta} \Rightarrow_U\right]$$

1.	$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$	доп. пп.
2.	$p \Rightarrow q$	доп. пп.
3.	p	доп. пп.
4.	q	$\Rightarrow_E$, 2, 3
5.	$q \vee r$	$\vee_U^L$, 4
6.	$p \Rightarrow q \vee r$	$\Rightarrow_U$, 3-5
7.	$p \Rightarrow r$	доп. пп.
8.	p	доп. пп.
9.	r	$\Rightarrow_E$, 8, 7
10.	$r \vee q$	$\vee_E^D$, 9
11.	$p \Rightarrow r \vee q$	$\Rightarrow_U$, 8-10
12.	$p \Rightarrow r \vee q$	$\vee_E$, 1, 2-6, 7-11
13.	$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r \vee q)$	$\Rightarrow_U$, 1-12

* еквиваленција

⇔	0	1
0	1	0
1	0	1

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \beta \Rightarrow \alpha}{\alpha \Leftrightarrow \beta} \; \Leftrightarrow_U$$ — увођење еквиваленције

$$\frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow \beta} \; \Leftrightarrow_E^{LD} \qquad \frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{\beta \Rightarrow \alpha} \; \Leftrightarrow_E^{DL}$$ — елиминација еквиваленције

пр. $\vdash \neg p \Leftrightarrow (p \Rightarrow \bot)$

1) $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow \bot)$

2) $p \Rightarrow \bot \Rightarrow \neg p$

1) $\neg p$ | p | $\bot$ | $p \Rightarrow \bot$

2) $p \Rightarrow \bot$ | p | $\bot$ | $\neg p$

1.	$\neg p$	доп. пп.
2.	p	доп. пп.
3.	$\bot$	$\neg_E$, 1, 2
4.	$p \Rightarrow \bot$	$\Rightarrow_U$, 2-3
5.	$\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow \bot)$	$\Rightarrow_U$, 1-4
6.	$p \Rightarrow \bot$	доп. пп.
7.	p	доп. пп.
8.	$\bot$	$\Rightarrow_E$, 6, 7
9.	$\neg p$	$\neg_U$, 7-8
10.	$(p \Rightarrow \bot) \Rightarrow \neg p$	$\Rightarrow_U$, 6-9
11.	$\neg p \Leftrightarrow (p \Rightarrow \bot)$	$\Leftrightarrow_U$, 5, 10

* Поред правила природне дедукције, користе се и помоћна правила (изведена)

* $$\frac{\alpha \vee \beta \quad \neg \alpha}{\beta} \; (DS), \qquad \frac{\alpha \vee \beta \quad \neg \beta}{\alpha} \; (DS)$$ — дисјунктивни силогизми

доказ:

1.	$\alpha \vee \beta$	пп.
2.	$\neg \alpha$	пп.
3.	α	доп. пп.
4.	$\bot$	$\neg_E$, 2, 3
5.	β	$\bot_E$
6.	β	доп. пп.
7.	β	$\vee_E$, 3-5, 6-6

* $$\frac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\neg\alpha \wedge \neg\beta}, \quad \frac{\neg\alpha \wedge \neg\beta}{\neg(\alpha \vee \beta)}, \quad \frac{\neg(\alpha \wedge \beta)}{\neg\alpha \vee \neg\beta}, \quad \frac{\neg\alpha \vee \neg\beta}{\neg(\alpha \wedge \beta)} \; (DM)$$ — Де Морганова правила

* $$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \beta \Rightarrow \gamma}{\alpha \Rightarrow \gamma} \; (T)$$ — транзитивност

* $$\frac{\alpha \Rightarrow \beta}{\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha}, \quad \frac{\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha}{\alpha \Rightarrow \beta} \; (K)$$ — контрапозиција

* $\dfrac{}{\alpha \vee \neg\alpha}$ (TND) - закон искључења трећег

* $\dfrac{}{\alpha \Leftrightarrow \alpha}$ (RE) - рефлексивност еквиваленције

$\dfrac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{\beta \Leftrightarrow \alpha}$ (SE) - симетричност еквиваленције

$\dfrac{\alpha \Leftrightarrow \beta \quad \beta \Leftrightarrow \gamma}{\alpha \Leftrightarrow \gamma}$ (TE) - транзитивност еквиваленције

* $\dfrac{\alpha \Leftrightarrow \beta \quad \alpha' \Leftrightarrow \beta'}{(\alpha * \alpha') \Leftrightarrow (\beta * \beta')}$ $\left(* \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}\right)$

Природна дедукција у предикатској логици

1. Сваки човек је смртан
2. Сократ је човек

Закључак: Сократ је смртан

* Приликом формирања формула у предикатској логици, користимо следеће симболе:

  - променљиве
  - логичке везнике: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
  - **кванфикатори: $\forall$, $\exists$**
  - помоћни знаци: заграде и зарези

Поред ових симбола у одговарајућем контексту користимо и:

- **симболе константи** који означавају поједине елементе **универзума** о којем се говори
  - ↳ сви објекти о којима говоримо
- **предикатски симболи** који означавају својства и везе објеката универзума
- Сваки предикатски симбол има своју **дужину** тј. број објеката на које се односи

пр. Универзум: људи

промењиве: x, y, z
лог. везници: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
квантификатори: $\exists, \forall$
пом. знаци: (,)

симболи константи: Ana, Bane

предикати:
$M(\cdot)$ "бити момак"
$D(\cdot)$ "бити девојка"
$V(\cdot,\cdot)$ "волети"

$$\forall x \, (M(x) \Rightarrow \exists y \, (D(y) \wedge V(x,y)))$$

$$\exists x \, (D(x) \wedge \forall y \, (M(y) \Rightarrow V(y,x)))$$

пр. 1) Свако воли неког.
2) Неко не воли никога
3) Неко воли свакога

1) $\forall x \, \exists y \, V(x,y)$

2) $\exists x \, \forall y \, \neg V(x,y)$

3) $\exists x \, \forall y \, V(x,y)$

$M(Bane)$
$V(Bane, Ana)$
$V(x, Ana)$

* **Атомичне формуле** градимо тако што предикатским симболом повежемо одговарајући број променљивих или константи

- Атомичке формуле повезујемо логичким везницима на уобичајен начин.

- Квантификаторе користимо тако што их постављамо заједно са неком променљивом испред формуле. Свако појављивање променљиве у формули тада постаје **везано**. Појављивања која нису везана су **слободна**

$$\forall x (M(x) \wedge V(x,y)) \Rightarrow \exists z \, (D(z) \wedge V(y,z))$$

слободна

* Ако је α нека формула, онда са $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ означавамо да су све слободне променљиве формуле α неке од променљивих $x_1, \dots, x_n$

* $\alpha[y/x]$ – формула добијена из формуле α тако што су сва слободна појављивања променљиве x замењена са y

* Правила за $\forall x_E$, $\exists x_U$

$$\frac{\forall x\, \alpha}{\alpha[v/x]} \quad \forall x_E$$

v - променљива или симбол константе

$$\frac{\alpha[v/x]}{\exists x\, \alpha} \quad \exists x_U$$

v - исто

пр. $\forall x\,(\check{c}(x) \Rightarrow S(x)),\ \check{c}(Sokrat) \vdash S(Sokrat)$ (б) $\vdash \exists y\, S(y)$

	1.	$\forall x\,(\check{c}(x) \Rightarrow S(x))$	пп
	2.	$\check{c}(Sokrat)$	пп
	3.	$\check{c}(Sokrat) \Rightarrow S(Sokrat)$	$\forall x_E$, 1 $[Sokrat/x]$
а)	4.	$S(Sokrat)$	$\Rightarrow_E$, 2, 3
б)	5.	$\exists y\, S(y)$	$\exists y_U$, 4

* Правила $\forall x_U$, $\exists x_E$

$$\frac{\begin{array}{|l} v \\ \vdots \\ \alpha[v/x] \end{array}}{\forall x\, \alpha} \quad \forall x_U$$

→ свежа променљива (променљива која се не појављује нигде ван овог подоказа)

$$\frac{\exists x\,\alpha \quad \begin{array}{|l} v\ \ \alpha[v/x] \\ \quad\vdots \\ \quad\gamma \end{array}}{\gamma} \quad \exists x_E$$

→ свежа променљива + не сме слободна да се појављује у γ

пр. $\forall x\,(A(x) \Rightarrow B(x)),\ \forall x\,(B(x) \Rightarrow C(x)) \vdash \forall x\,(A(x) \Rightarrow C(x))$

$$\left(\frac{A \subseteq B \quad B \subseteq C}{A \subseteq C}\right)$$

1.	$\forall x\,(A(x) \Rightarrow B(x))$	пп
2.	$\forall x\,(B(x) \Rightarrow C(x))$	пп
3.	v	свежа променљива
4.	$A(v)$	доп. пп.
5.	$A(v) \Rightarrow B(v)$	$\forall x_E$, 1 $[v/x]$
6.	$B(v)$	$\Rightarrow_E$, 4, 5
7.	$B(v) \Rightarrow C(v)$	$\forall x_E$, 2 $[v/x]$
8.	$C(v)$	$\Rightarrow_E$, 4-8
9.	$A(v) \Rightarrow C(v)$	$\Rightarrow_U$, 4-8
10.	$\forall x\,(A(x) \Rightarrow C(x)$	$\forall x_U$, 8-9

10.10.2019.

пр. $\forall x \forall y \forall z\, (O(x,y,z) \Rightarrow O(z,y,x) \wedge \neg O(y,z,x))$ (може се посматрати редослед тачака на правој)

$\vdash \forall x \forall y \forall z\, (O(x,y,z) \Rightarrow \neg O(z,x,y))$

Неформално: $\forall x \forall y \forall z\, (O(x,y,z) \Rightarrow \neg O(z,x,y))$?

Нека су a, b, c произвољни

$O(a,b,c) \Rightarrow \neg O(c,a,b)$?

претпоставимо $O(a,b,c)$

(вишак) [Према "аксиоми" (услову задатка): $O(a,b,c) \Rightarrow O(c,b,a) \wedge \neg O(b,c,a)$]

ппс. $O(c,a,b)$ ①

Према „аксиоми": $O(c,a,b) \Rightarrow O(b,a,c) \wedge \neg O(a,b,c)$ ②

из ① и ② $\Rightarrow O(b,a,c)$, $\neg O(a,b,c)$ ↯

Дакле: $\neg O(c,a,b)$

па значи $O(a,b,c) \Rightarrow \neg O(c,a,b)$

Формално:

1.	$\forall x \forall y \forall z\, (O(x,y,z) \Rightarrow O(z,y,x) \wedge \neg O(y,z,x))$	пп.
2.	a, b, c	свеже пром.
3.	$O(a,b,c)$	доп. пп.
4.	$O(c,a,b)$	доп. пп.
5.	$O(c,a,b) \Rightarrow O(b,a,c) \wedge \neg O(a,b,c)$	$\forall x_E, \forall y_E, \forall z_E$
6.	$O(b,a,c) \wedge \neg O(a,b,c)$	$\Rightarrow_E$ 4, 5
7.	$\neg O(a,b,c)$	$\wedge_E$ 6
8.	$\bot$	$\neg_E$ 3, 7
9.	$\neg O(c,a,b)$	$\neg_U$ 4–8
10.	$O(a,b,c) \Rightarrow \neg O(c,a,b)$	$\Rightarrow_U$ 3–9
11.	$\forall x \forall y \forall z\; O(x,y,z) \Rightarrow \neg O(z,x,y)$	$\forall x_U, \forall y_U, \forall z_U$

* Формула α је теорема предикатске логике ако је доказиво $\vdash \alpha$

- Неколико важних теорема:

$\vdash \forall x \forall y\, \alpha \Leftrightarrow \forall y \forall x\, \alpha$ $\qquad$ $\vdash \exists x \exists y\, \alpha \Leftrightarrow \exists y \exists x\, \alpha$

$\vdash \exists x \forall y\, \alpha \Rightarrow \forall y \exists x\, \alpha$

$\not\Leftarrow$ (нпр. α - отац некоме)

$\vdash \forall x\, (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \forall x\, \alpha \wedge \forall x\, \beta$ $\qquad$ $\vdash \exists x\, (\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \exists x\, \alpha \vee \exists x\, \beta$

$\forall x\, \alpha(x)$ $\quad \alpha(c_1) \wedge \alpha(c_2) \ldots \wedge \alpha(c_3)$

$\exists x\, \alpha(c)$ $\quad \alpha(c_1) \vee \alpha(c_2) \ldots \vee \alpha(c_3)$

$\vdash \forall x\, (\alpha \vee \beta) \Leftarrow \forall x\, \alpha \vee \forall x\, \beta$ $\qquad$ $\vdash \exists x\, (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \exists x\, \alpha \wedge \exists x\, \beta$

$(\not\Rightarrow)$ (α - паран, β - непаран) $\qquad$ $\not\Leftarrow$

Ако се променљива x не појављује слободно у формули β онда:

$\vdash \forall x\, (\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow (\forall x\, \alpha) \vee \beta$ $\qquad$ $\vdash \exists x\, (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (\exists x\, \alpha) \wedge \beta$

$\vdash \neg \forall x \alpha \Leftrightarrow \exists x \neg\alpha$

$\vdash \neg \exists x \alpha \Leftrightarrow \forall x \neg\alpha$

} Де Морганови закони за квантификатори

Аксиоме теорије скупова I

- језик за описивање универзума скупова, садржи бинарне релације

$\in$ и $=$

међу скуповима

$\in(x, y)$ $\quad x \in y$

$\neg(x \in y)$ $\quad x \notin y$

$x = y$

$\neg(x = y)$ $\quad x \neq y$

* Аксиома екстензионалности (једнакости)

Два скупа су једнака ако имају исте елементе

$$\forall a \forall b \, (a = b \Leftrightarrow \forall x (x \in a \Leftrightarrow x \in b))$$

(у наредној теореми издвајамо најважније последице аксиоме)

* Теорема: 1) $\forall a \, (a = a)$

2) $\forall a \forall b \, (a = b \Rightarrow b = a)$

3) $\forall a \forall b \forall c \, (a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c)$

Доказ: 1) $\forall a \forall b \, (a = b \Leftrightarrow \forall x (x \in a \Leftrightarrow x \in b)) \vdash \forall a \, (a = a)$

1.	$\forall a \forall b \, (a = b \Leftrightarrow \forall x (x \in a \Leftrightarrow x \in b))$	пп.
2.	a	свежа пр.
3.	$a = a \Leftrightarrow \forall x (x \in a \Leftrightarrow x \in a)$	$\forall a_E$, $\forall b_E$
4.	$\forall x \, (x \in a \Leftrightarrow x \in A) \Rightarrow a = a$	$\Leftrightarrow_E$
5.	x	свежа пр.
6.	$x \in a$	доп пп.
7.	$x \in a \Rightarrow x \in a$	$\Rightarrow_u$, 6-6
8.	$x \in a \Leftrightarrow x \in a$	$\Leftrightarrow_u$, 7
9.	$\forall x \, (x \in a \Leftrightarrow x \in a)$	$\forall x_u$, 5-8
10.	$a = a$	$\Rightarrow_E$, 4, 9
11.	$\forall a \, (a = a)$	$\forall a_u$

2) $\forall a \forall b (a = b \Rightarrow b = a)$?

a, b произвољни

$a = b$ претпоставка

$\forall x \, (x \in a \Leftrightarrow x \in b) \vdash \forall x (x \in b \Leftrightarrow x \in a)$ $\qquad b = a$

3) a, b, c произвољне

$a = b$, $b = c$

$$\forall x \, (x \in a \Leftrightarrow x \in b), \; \forall x \, (x \in b \Leftrightarrow x \in c) \vdash \underbrace{\forall x (x = a \Leftrightarrow x \in c)}_{a = c}$$

□

деф. Скуп a је **подскуп** од b у ознаци $a \subseteq b$, ако је сваки елемент скупа a уједно и елемент скупа b.

$$a \subseteq b : \quad \forall x \, (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

(надскуп: $\supseteq$)

Скуп a је **строг подскуп** од b у ознаци $a \subset b$, ако $a \subseteq b$ и $a \neq b$

* **Теорема:** 1) $\forall a \, (a \subseteq a)$

2) $\forall a \forall b \, (a \subseteq b \wedge b \subseteq a \Rightarrow a = b)$

3) $\forall a \forall b \forall c \, (a \subseteq b \wedge b \subseteq c \Rightarrow a \subseteq c)$

Доказ: 2) a, b произвољно

$a \subseteq b$, $b \subseteq a$

$$\forall x \, (x \in a \Rightarrow x \in b) \wedge \forall x \, (x \in b \Rightarrow x \in a) \vdash \forall x \, ((x \in a \Rightarrow x \in b) \wedge (x \in b \Rightarrow x \in a))$$

$$x \in a \Leftrightarrow x \in b$$

* **Аксиома празног скупа**

Постоји скуп који нема елементе

$$\exists x \forall y \quad y \notin x$$

* **Теорема:** Постоји тачно један скуп који нема елементе

Доказ: Нека су x_1 и x_2 скупови који немају елементе

$$\forall_y \, \neg (y \in x_1) \quad \forall y \, \neg (y \in x_2) \vdash \forall y \, (y \in x_1 \Leftrightarrow y \in x_2) \qquad x_1 = x_2$$

Пошто је скуп без елемената, уводи се посебна ознака – $\emptyset$

$$\forall x \quad x \notin \emptyset$$

Аксиома празног скупа и претходна теорема дају:

$$\exists x \, \underbrace{\forall y \quad y \notin x}_{\varphi(x)} \quad \wedge \quad \forall x_1 \forall x_2 \, (\underbrace{\forall y \; y \notin x_1}_{\varphi(x_1)} \wedge \underbrace{\forall y \notin x_2}_{\varphi(x_2)} \Rightarrow x_1 = x_2)$$

$$\underbrace{\exists x \; \varphi(x)}_{\text{егзистенција}} \quad \wedge \quad \underbrace{\forall x_1 \forall x_2 \, (\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)}_{\text{јединственост}}$$

$\longrightarrow$ $\exists! \varphi(x)$ – постоји тачно једно x тако да $\varphi(x)$

* **Теорема:** $\forall a \, (\emptyset \subseteq a)$

Доказ: a – произв.

$\forall x \, (x \in \emptyset \Rightarrow x \in a)$?

x – произв.

пр. $x \in \emptyset$

(по аксиоми) важи $x \notin \emptyset \Rightarrow x \in a$

* Аксиоме пара, издвајања, партитивног скупа и уније

(Раселов парадокс $x \notin x$)

Ове аксиоме су следећег облика:

$$\forall a_1 \dots \forall a_n \, \exists y \, \forall x \, (x \in y \iff \alpha(x, a_1, \dots, a_n))$$ — није прихватљиво

за специјалне изборе формуле α

Овај облик се не може прихватити као аксиома за било које α, јер нпр. због $x \notin x$ долазимо до контрадикције.

Блок квантификатора $\forall a_1 \dots \forall a_n$ може бити произвољне дужине, а може се и изоставити.

$$\exists y \, \forall x \, (x \in y \iff \alpha(x))$$

$x \notin x$ $\qquad (\exists y \forall x \, (x \in y \iff x \notin x) \vdash \bot)$

17.10.2019.

Наредне четири аксиоме су специјални случајеви претходне формуле

- Аксиома пара

*** За свака два скупа постоји нови скуп чији су једини елем. уочени скупови**

$$\forall a_1 \forall a_2 \, \exists y \, \forall x \, (x \in y \iff x = a_1 \lor x = a_2)$$

(За свака два скупа a_1 и a_2, постоји скуп y, такви да су његови једини елементи a_1 и a_2)

Према аксиоми екстензионалности, скуп чије постојање представља аксиома пара је јединствен.

$$y = \{a_1, a_2\}$$

$$x \in \{a_1, a_2\} \iff x = a_1 \lor x = a_2$$

(једночлани скуп)

- специјално, скуп $\{a_1, a_1\}$ означавамо $\{a_1\}$ и називамо **СИНГЛТОН**

* $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\dots\{\emptyset\}\}\}\dots\} \dots$ — примери скупова

- Аксиома издвајања

*** За сваки скуп a и сваку формулу $\alpha(x, a)$ постоји подскуп од a, који садржи само оне елементе x за које важи $\alpha(x, a)$**

$$\forall a \, \exists y \, \forall x \, (x \in y \iff x \in a \land \alpha(x, a))$$

општије: претходна аксиома се прихвата у следећем облику

$$\forall a \forall a_1 \dots \forall a_n \, \exists y \, \forall x \, (x \in y \iff x \in a \land \alpha(x, a, a_1, \dots, a_n))$$

Према аксиоми екстензионалности, скуп чије постојање представља аксиома издвајања је јединствен

$$y = \{x \in a \mid \alpha(x, a, a_1, \dots, a_n)\} \; ; \; x \in y \iff x \in a \land \alpha(x, a, a_1, \dots, a_n)$$

$(y \subseteq a)$

- Аксиома партитивног скупа

* За сваки скуп a постоји скуп који садржи све подскупове од a и других елемената нема.

$$\forall a \exists y \forall x (x \in y \iff \underbrace{\forall t (t \in x \Rightarrow t \in a)}_{x \subseteq a})$$

Овај скуп је јединствен и обележава се $\mathcal{P}(a)$ и назива се партитивни скуп од a.

Другачије речено, $\mathcal{P}(a)$ је скуп свих подскупова од a.

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ $\qquad$ $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

a има n елемената $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(a)$ има 2^n елемената

- Аксиома уније

* За сваки скуп a постоји скуп који садржи све елементе елемената скупа a и других елемената нема.

пр. $a = \{\{0,1\}, \{0,2,3\}, \{4\}\}$

унија скупа a је скуп $\{0,1,2,3,4\}$

"$\{0,1\} \cup \{0,2,3\} \cup \{4\}$"

Овај скуп је јединствен и обележава се $\bigcup a$ и назива се унија скупа a

пр. $\bigcup \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \emptyset$

$\bigcup \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Теорема: Не постоји скуп свих скупова

Доказ: Доказ се изводи преко уведених аксиома: $\neg \exists y \forall x\ x \in y$

ппс: Постоји скуп који садржи све скупове и означимо га са V

$\forall x \ x \in V$

Према аксиоми издвајања, постоји подскуп u од V, који садржи само оне елементе x из V такве да $x \notin x$

$u \overset{\text{def}}{=} \{x \in V \mid x \notin x\}$

$x \in u \iff x \in V \land x \notin x$, за сваки x

Специјално $u \in u \iff \underbrace{u \in V}_{V \text{ садржи све скупове}} \land u \notin u$

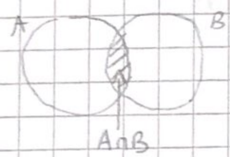
$u \in u \iff u \notin u$ $\quad \lightning$

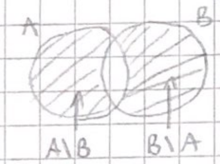
Полазна претпоставка је погрешна.
Не постоји скуп свих скупова.

Последица: За сваки скуп y постоји скуп X који му не припада.

$$\underbrace{\neg \exists y \forall x \; x\in y}_{\text{претходно}} \underset{\substack{\text{Де Морган}\\ \text{за квантиф.}}}{\iff} \forall y \exists x \; x \notin y.$$

Булове операције, Декартов производ





Пресек скупова A и B је јединствен скуп који садржи заједничке елементе скупа A и скупа B и других елемената нема

$$A\cap B \overset{def}{=} \{x \mid x\in A \land x\in B\}$$

Да ли из уведених аксиома следи да постоји пресек свака два скупа?

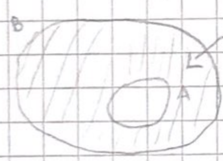
- пресек два скупа постоји због аксиоме издвајања

$$A\cap B = \{x\mid x\in A \land x\in B\} = \{x\in A\mid x\in B\}$$

(из A издвајамо оне који имају својство $x\in B$)
може и обрнуто

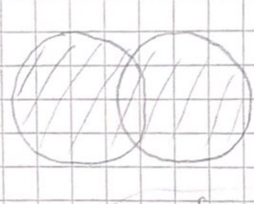
Разлика скупова - $A\setminus B = \{x\in A\mid x\notin B\}$ - постоји због аксиоме издвајања

специјално, ако је $A\subseteq B$



комплемент скупа A у односу на скуп B

Унија два скупа A и B је скуп који садржи елементе скупа A или елементе скупа B (или оба) и нема других елемената



$$A\cup B \overset{def}{=} \{x\mid x\in A \lor x\in B\}$$

Аксиома пара и аксиома уније потврђују постојање овог скупа

$$\begin{aligned} x\in \bigcup\{A,B\} &\iff \exists t\,(t\in\{A,B\} \land x\in t)\\ &\iff \exists t\,((t=A \lor t=B) \land x\in t)\\ &\iff \exists t\,((t=A \land x\in t)\lor(t=B \land x\in t))\\ &\iff x\in A \lor x\in B \end{aligned}$$

Теорема: За било која три скупа:

1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Доказ: 3)

$$x \in A \setminus (B \cup C) \iff x \in A \wedge \neg x \in B \cup C$$
$$\iff x \in A \wedge \neg (x \in B \vee x \in C)$$

$x \in A \to p$
$x \in B \to q$
$x \in C \to r$

$$x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \iff (x \in A \wedge \neg x \in B) \wedge (x \in A \wedge \neg x \in C)$$

$$\vdash p \wedge \neg (q \vee r) \iff (p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg r)$$ ... (природна дедукција)

Теорема: За било које скупове A, B, C важи:

1) $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$

2) $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$

3) $C \subseteq A$ и $C \subseteq B$, онда $C \subseteq A \cap B$

4) $A \subseteq C$ и $B \subseteq C$, онда $A \cup B \subseteq C$

5) $A \subseteq B$, онда $C \setminus B \subseteq C \setminus A$

деф.

a, b – произвољни скупови

$$(a,b) \overset{def}{=} \{\{a\}, \{a,b\}\}$$ – уређен пар (a,b)

Теорема: $(a,b) = (c,d)$ акко $a = c$ и $b = d$

Доказ: $(\Leftarrow)$ пп. $a = c$ и $b = d$

$$\{a\} = \{c\}$$
$$\{a,b\} = \{c,d\}$$
$$\{\{a\}, \{a,b\}\} = \{\{c\}, \{c,d\}\} \iff (a,b) = (c,d)$$

$(\Rightarrow)$ пп. $(a,b) = (c,d)$

$$\{\{a\}, \{a,b\}\} = \{\{c\}, \{c,d\}\}$$

1° $\{a\} = \{c\}$, $\{a,b\} = \{c,d\}$

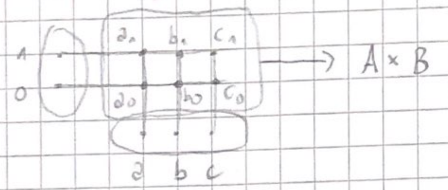
$a = c$

$b = d$

2° $\{a\} = \{c,d\}$, $\{a,b\} = \{c\}$

$$\underbrace{a = c = d \qquad a = b = c}_{a = c,\ b = d}$$

пр. $A = \{a, b, c\}$ $\quad B = \{0, 1\}$



$$B \times A = \{(0,a), (0,b), (0,c), (1,a), (1,b), (1,c)\} \neq A \times B$$

деф. **Декартов производ скупова** A и B, у ознаци **A×B** је скуп који садржи све уређене парове чија је прва координата из A, а друга из B и других елемената нема

$$A \times B \overset{def}{=} \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

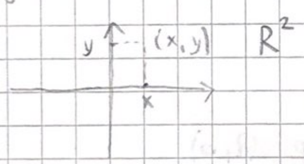
п: На основу којих аксиома постоји Декартов производ било која два скупа?

о: Аксиома пара, издвајања, партитивног скупа и уније.

$$\begin{matrix} a \in A \\ b \in B \end{matrix} \quad a, b \in A \cup B \quad \begin{matrix} \{a\} \\ \{a,b\} \end{matrix} \subseteq A \cup B \quad \begin{matrix} \{a\} \\ \{a,b\} \end{matrix} \in P(A \cup B) \quad \underbrace{\{\{a\},\{a,b\}\}}_{(a,b)} \subseteq P(A \cup B)$$

$$A \times B = \{ z \in P(P(A \cup B)) \mid \exists a \exists b\, (a \in A \wedge b \in B \wedge z = (a,b))\}$$

специјално: $A \times A$ назива се Декартов степен и означава се A^2



24. 10. 2019.

Лема: $(a, b, c) = (a_1, b_1, c_1)$ акко $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$

$$\left[(a,b,c) \overset{def}{=} ((a,b), c) \right]$$

Доказ: $(a,b,c) = (a_1, b_1, c_1) \iff (a,b) = (a_1, b_1) \wedge c = c_1$
$\iff a = a_1 \wedge b = b_1 \wedge c = c_1$

$$A \times B \times C \overset{def}{=} \{(a,b,c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$$

- све исто важи и за уређене четворке

$A \times A = A^2$; $A \times A \times A = A^3$, ... - Декартови степени

Бинарне релације

- ознаке

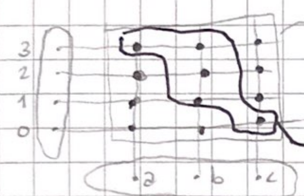
$(\forall x \in X)\,\alpha \;:\; \forall x\,(x \in X \Rightarrow \alpha)$

$(\exists x \in X)\,\alpha \;:\; \exists x\,(x \in X \wedge \alpha)$

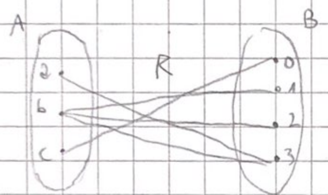
$(\exists! x \in X)\,\alpha \;:\; \exists! x\,(x \in X \wedge \alpha)$

деф. **Бинарна релација** између скупова A и B је било који подскуп од $A \times B$. Специјално, бинарна релација скупа A је неки подскуп од $A \times A$

пр. 1



$R = \{(a,3), (b,3), (b,2), (b,1), (c,0)\}$



$(a,3) \in R \;:\; a\,R\,3$

Укупан број бинарних релација између A и B је 2^{12}

$\|$

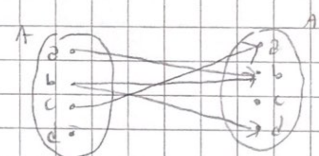
број подскупова 12-чланог скупа

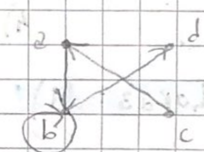
$\emptyset$ - **празна релација**

$A \times B$ - **пуна релација**

пр. 2 $A = \{a, b, c, d\}$

$R = \{(a,b), (b,b), (b,d), (c,a)\}$





пр. $\Delta_A = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d)\}$ - **дијагонала скупа A**
- једначина

деф. **Дијагонала скупа X** јесте релација $\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$

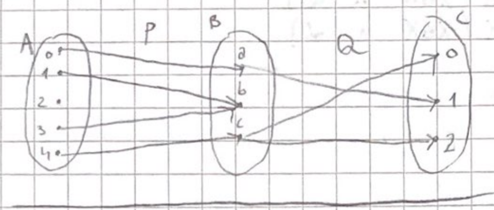
деф. Нека је $R \subseteq A \times B$. **Инверзна релација R^{-1}** је подскуп скупа $B \times A$ и дефинише се: $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$

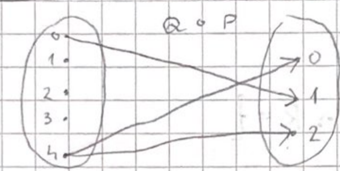
$R^{-1}_{пр.1} = \{(3,a), (3,b), (2,b), (1,b), (0,c)\}$

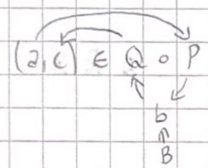
деф. $P \subseteq A \times B$, $Q \subseteq B \times C$

$$Q \circ P \overset{\text{def}}{=} \{ (a,c) \mid (\exists b \in B)((a,b) \in P \wedge (b,c) \in Q) \} \subseteq A \times C$$

пр.







Теорема: $R \subseteq X \times Y$, $Q \subseteq Y \times Z$, $P \subseteq Z \times Y$

1) $R \circ \Delta_X = R$, $\Delta_Y \circ R = R$

2) $(R^{-1})^{-1} = R$

3) $(Q \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ Q^{-1}$

4) $P \circ (Q \circ R) = (P \circ Q) \circ R$

Доказ: 1) $\Delta_X \subseteq X \times X$ $\quad R \subseteq X \times Y$

$$R \circ \Delta_X \subseteq X \times Y$$

$(x,y) \in R \circ \Delta_X \iff$ постоји $z \in X$ тако да $(x,z) \in \Delta_X$ и $(z,y) \in R$

$\iff$ постоји $z \in X$ тако да $x = z$ и $(z,y) \in R$

$\iff (x,y) \in R$

Дакле $R \circ \Delta_X = R$

2) $R \subseteq X \times Y$, $R^{-1} \subseteq Y \times X$, $(R^{-1})^{-1} \subseteq X \times Y$

$(x,y) \in (R^{-1})^{-1} \iff (y,x) \in R^{-1} \iff (x,y) \in R$

Дакле $(R^{-1})^{-1} = R$

3) $R \subseteq X \times Y$, $Q \subseteq Y \times Z$: $Q \circ R \subseteq X \times Z$

$R^{-1} \subseteq Y \circ X$, $Q \subseteq Z \times Y$: $R^{-1} \circ Q^{-1} \subseteq Z \times X$

$(z,x) \in (Q \circ R)^{-1} \iff (x,z) \in Q \circ R$

$\iff$ постоји $y \in Y$, $(x,y) \in R$ и $(y,z) \in Q$

$\iff$ постоји $y \in Y$ $(y,x) \in R^{-1}$ и $(z,y) \in Q^{-1}$

$\iff (z,x) \in R^{-1} \circ Q^{-1}$

4) $R \subseteq X \times Y$, $Q \subseteq Y \times Z$, $P \subseteq Z \times U$

$\underbrace{P \circ (Q \circ R)}_{\subseteq X \times U}$ $\qquad$ $\underbrace{(P \circ Q) \circ R}_{\subseteq X \times U}$

$(x,u) \in P \circ (Q \circ R) \iff$ постоји $z \in Z$, $(x,z) \in Q \circ R$ и $(z,u) \in P$

$\iff$ постоји $z \in Z$, постоји $(x,y) \in R$, $(y,z) \in Q$, $(z,u) \in P$

$\iff$ постоји $y \in Y$, $(y,u) \in P \circ Q$ и $(x,y) \in R$

$\iff (x,u) \in (P \circ Q) \circ R$

Теорема: $R, R_1 \subseteq X \times Y$, $Q, Q_1 \subseteq Y \times Z$

1) Ако $R \subseteq R_1$ онда $Q \circ R \subseteq Q \circ R_1$
2) Ако $Q \subseteq Q_1$ онда $Q \circ R \subseteq Q_1 \circ R$

деф. Нека је $R \subseteq A \times A$ (R је бинарна релација на A). R је:

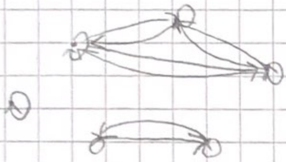
1) **рефлексивна** ако $(\forall x \in A)\ (x,x) \in R$
2) **ирефлексивна** ако $(\forall x \in A)\ (x,x) \notin R$
3) **симетрична** ако $(\forall x \in A)(\forall y \in A)\ ((x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R)$
4) **антисиметрична** ако $(\forall x \in A)(\forall y \in A)\ (((x,y) \in R \land (y,x) \in R) \Rightarrow x = y)$
5) **линеарна** ако $(\forall x \in A)(\forall y \in A)\ ((x,y) \in R \lor (y,x) \in R)$
6) **транзитивна** ако $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)\ ((x,y) \in R \land (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R)$

$$\left.\begin{array}{ll}
(\text{р}) - & \Delta_X \subseteq R \\
(\text{ир}) - & \Delta_X \cap R = \emptyset \\
(\text{с}) - & R \subseteq R^{-1} \\
(\text{ас}) - & R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_X \\
(\text{л}) - & R \cup R^{-1} = A \times A \\
(\text{т}) - & R \circ R \subseteq R
\end{array}\right\} \text{скраћене деф.}$$

Релације еквиваленције

деф. $R \subseteq A \times A$ је **релација еквиваленције** ако је рефлексивна, симетрична и транзитивна (рст)

пр.



деф Нека је R релација еквиваленције на A

Класа еквиваленције елемента $a \in A$

$$[a]_R = \{ b \in A \mid (a,b) \in R \}$$

Количнички скуп у односу на R је скуп свих класа екв. над A

$$A/R = \{ [a]_R \mid a \in A \}$$

за претх. пр: $[0]_R = \{0\}$ $\quad [1]_R = \{1,2\} = [2]_R \quad [3]_R = \{3,4,5\} = [4]_R = [5]_R$

$$A/R = \{ \{0\}, \{1,2\}, \{3,4,5\} \}$$

спец. $A/\Delta_A = \{ \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\} \}$

$A/_{A\times A} = \{ \{0,1,2,3,4,5\} \}$

Теорема: Нека је E рел. екв. на X. 31. 10. 2019.

1) За свако $x \in X$, $x \in [x]_E$

2) За све $x, y \in X$: $[x]_E = [y]_E$ акко $(x,y) \in E$

3) За све $x, y \in X$: $[x]_E \neq [y]_E$ акко $[x]_E \cap [y]_E = \emptyset$

4) $X = \bigcup X/E = \bigcup\limits_{x \in X} [x]_E$

Доказ: 1) Следи из рефлексивности релације E

2) (⇒) $[x]_E = [y]_E \overset{?}{\Rightarrow} (x,y) \in E$

пп. $[x]_E = [y]_E$

$y \underset{(1)}{\in} [y]_E = [x]_E \Rightarrow (x,y) \in E$

(⇐) $(x,y) \in E \overset{?}{\Rightarrow} [x]_E = [y]_E$

пп. $(x,y) \in E$

доказујемо $[x]_E \subseteq [y]_E$, аналогно се доказује $[y]_E \subseteq [x]_E$

$\Downarrow$

$[x]_E = [y]_E$

$z \in [x]_E$

$(x,z) \in E$

$(z,x) \in E$ (симетрично)

$(z,y) \in E$ (транзитивност)

$(y,z) \in E$ (симетричност)

$z \in [y]_E$ ✓

3) $(\Rightarrow)$ $[x]_E \neq [y]_E$ - претпоставка

ппс. $[x]_E \cap [y]_E \neq \emptyset \Rightarrow \exists z,\ z \in [x]_E \cap [y]_E$

$z \in [x]_E,\ z \in [y]_E$

$(x,z) \in E,\ (y,z) \in E$

$(z,y) \in E$ (с)

$(x,y) \in E$ (т)

$[x]_E = [y]_E$ (2) ↯

Дакле, $[x]_E \cap [y]_E = \emptyset$

$(\Leftarrow)$ $[x]_E \cap [y]_E = \emptyset$ - претпоставка

ппс. $[x]_E = [y]_E$

$[x]_E = [y]_E = [x]_E \cap [y]_E = \emptyset$ ↯ $[x]_E \neq \emptyset$ $(x \in [x]_E)$, $[y]_E \neq \emptyset$ $(y \in [y]_E)$

Дакле, $[x]_E \neq [y]_E$

4) очигледно

Теорема: Нека су E_1, E_2 рел. екв. на X

Ако је $X/E_1 = X/E_2$, онда $E_1 = E_2$

Доказ: Нека је $X/E_1 = X/E_2$. $E_1 \overset{\subseteq}{\underset{\supseteq}{=}} E_2$?

$\boxed{\subseteq}$ $(x,y) \in E_1 \Rightarrow (x,y) \in E_2$

пп. $\dfrac{(x,y) \in E_1}{y \in [x]_{E_1}}$

$[x]_E \in X/E_1 = X/E_2$

постоји $x' \in X$ ткд. $[x]_{E_1} = [x']_{E_2}$

$x \in [x]_{E_1} = [x']_{E_2} \Rightarrow (x,x') \in E_2 \Rightarrow [x]_{E_2} = [x']_{E_2}$

$y \in [x]_{E_1} = [x']_{E_2} = [x]_{E_2} \Rightarrow \underline{(x,y) \in E_2}$

Дакле $(x,y) \in E_1 \Rightarrow (x,y) \in E_2$

$\boxed{\supseteq}$ Аналогно

Дакле, $E_1 = E_2$

деф. Скуп $\Pi \in \mathcal{P}(X)$ је **партиција скупа** X ако:

1) за свако $P \in \Pi$, важи $P \neq \emptyset$
2) за свака два $P_1, P_2 \in \Pi$, ако је $P_1 \neq P_2$, онда $P_1 \cap P_2 = \emptyset$
3) $X = \bigcup \Pi$

Теорема: За сваку партицију Π скупа X постоји јединств. рел. екв. E, ткд. $\Pi = X/E$

Доказ: (егзистенција) Дефинишемо релацију E_Π на следећи начин:

$$(x,y) \in E_\Pi \overset{def}{\iff} \text{постоји } P \in \Pi \text{ тако да } x, y \in P$$

Показаћемо да је R, C и T

(рефлексивно) $(x,x) \in E_\Pi \iff \underbrace{\text{постоји } P \in \Pi \text{ ткд. } x \in P}_{\text{по деф. партиције (3)}}$

(симетричност) очигледно

(транзитивност) $\underbrace{(x,y) \in E_\Pi}_{\substack{\text{постоји } P_1 \in \Pi \\ \text{ткд. } x,y \in P_1}}$, $\underbrace{(y,z) \in E_\Pi}_{\substack{\text{постоји } P_2 \\ \text{ткд. } y,z \in P_2}}$

по деф. партиције (2) $P_1 = P_2$ (јер $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ (y))

$\Rightarrow x, z \in P_1 = P_2$ тј. $(x,z) \in E_\Pi$

(јединственост) последица претходне теореме

Дакле, $X/E_\Pi = \Pi$

Релације поретка (уређење)

деф. 1) Релација R је **уређење (рел. поретка)** ако је реф. антисиметрична и транзитивна

2) Релација R над X је **строго уређење** ако је ирефлексивна и транзитивна

3) Релација R над X је **линеарно уређење** ако је уређење и линеарна

пр. $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\leq$ - уређење, $<$ - строго уређење

Теорема: 1) Нека је $\leq$ уређење скупа X. Релација $<$ деф. се

$$x < y \overset{def}{\Leftrightarrow} x \leq y \wedge x \neq y$$, и она је строго уређење X

2) Нека је $<$ строго уређење скупа X. Релација $\leq$ деф. се

$$x \leq y \overset{def}{\Leftrightarrow} x < y \vee x = y$$, и она је уређење X

Доказ: 2) (Р) $x \in X$, $x \leq x$?

$$x < x \vee \underbrace{x = x}_{1}$$

(АС) пп. $x \leq y$, $y \leq x \Rightarrow x = y$

$$\Updownarrow$$

$$(x<y \vee x=y) \wedge (y<x \vee y=x)$$

(свака са свиким)

1° $x<y$, $y<x$ $\overset{T}{\Downarrow}$ $x<x$ ↯ (ИР)

2° $x<y$, $y=x$; $x<y=x$ ↯ (ИР)

3° $x=y$, $y<x$; $y<x=y$ ↯ (ИР)

4° $\boxed{x=y}$

(Т) пп. $x \leq y$, $y \leq z$

$$(x<y \vee x=y) \wedge (y<z \vee y=z)$$

1° $x<y$, $y<z$ $\overset{T}{\Downarrow}$ $x<z$; $x<z \vee x=z$

2° $x<y$, $y=z$; $x<y=z$; $x<z$; $x<z \vee x=z$

3° $x=y$, $y<z$; $x=y<z$; $x<z$; $x<z \vee x=z$

4° $x=y$, $y=z$; $x=y=z$; $x=z$; $x<z \vee x=z$

1) (ИР) $x \in X$, $\neg(x<x)$

$$\neg(x \leq x \wedge \underbrace{x \neq x}_{0}) \Rightarrow \top$$

(Т) $x \in X$ $x<y$, $y<z$

$$(x \leq y \wedge x \neq y) \wedge (y \leq z \wedge y \neq z)$$

из $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (знамо да је $\leq$ транзитивна)

ппс. $x = z \neq y$

$$x \leq y \wedge y \leq x \overset{AC}{\Rightarrow} x = y \text{ ↯ } \Rightarrow x \neq z$$

деф. Нека је $\leq$ уређење на X

1) Елемент a је **највећи** у односу на $\leq$ ако
$$(\forall x \in X)\ x \leq a$$

2) Елемент a је **најмањи** у односу на $\leq$ ако
$$(\forall x \in X)\ a \leq x$$

3) Елемент a је **максималан** у односу на $\leq$ ако
$$\neg(\exists x \in X)\ a < x$$

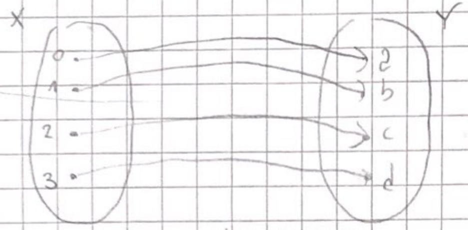
4) Елемент a је **минималан** у односу на $\leq$ ако
$$\neg(\exists x \in X)\ x < a$$

Функције

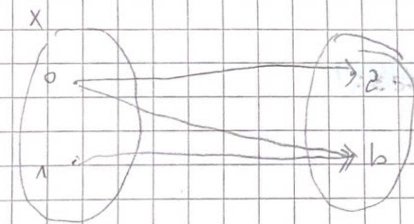
7. 11. 2019.

деф. Релација F између скупова X и Y $(F \subseteq X \times Y)$ је **функција** из X у Y, у ознаци $F: X \to Y$, ако за свако $x \in X$ постоји јединствено $y \in Y$ т. д. $(x, y) \in F$

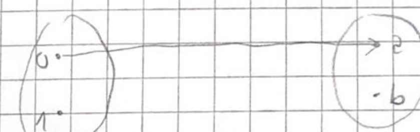
пр.



јесте функција



није функција



није функција

$F: X \to Y$ ако важе два услова

(F1) за свако $x \in X$ постоји $y \in Y$ ткд. $(x, y) \in F$

$$(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\ (x, y) \in F$$

(F2) за све $x \in X$ и све $y_1, y_2 \in Y$ из $(x, y_1) \in F$ и $(x, y_2) \in F \Rightarrow y_1 = y_2$

$$(\forall x \in X)(\exists!\ y \in Y)\ (x, y) \in F$$

Лема: 1° (F1) $\Leftrightarrow \Delta_X \subseteq F^{-1} \circ F$ $\quad (\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\})$

2° (F2) $\Leftrightarrow F \circ F^{-1} \subseteq \Delta_Y$

Доказ: 1° $(\Rightarrow)$ $(F_1) \Rightarrow \Delta_X \subseteq F^{-1} \circ F$?

Нека је $x \in X$ произвољан

По (F1), постоји $y \in Y$ је $(x, y) \in F$, па $(y, x) \in F^{-1}$

$$\underbrace{(\exists y \in Y)\big((x, y) \in F \ \wedge\ (y, x) \in F^{-1}\big)}_{(x, x) \in F^{-1} \circ F}$$

$(\Leftarrow)$: $(F_1) \Leftarrow \Delta_X \subseteq F^{-1} \circ F$?

$(x, x) \in F^{-1} \circ F$, што значи да постоји $y \in Y$ ткд. $(x, y) \in F \wedge (y, x) \in F^{-1}$

*** Теорема:** Композиција две функције је такође функција

$F: X \to Y \quad G: Y \to Z$

$\forall x \in X \ \exists! y \in Y \ (x,y) \in F \quad , \quad \forall y \in Y \ \exists! z \in Z \ (y,z) \in G$

$F \subseteq X \times Y \ , \ G \subseteq Y \times Z \ \Rightarrow \ G \circ F \subseteq X \times Z$

Да ли $G \circ F : X \to Z$, тј. да ли $(\forall x \in X)(\exists! z \in Z)\ (x,z) \in G \circ F$?

Доказ: (Доказујемо (F1) за $G \circ F$)

$\underline{x \in X \text{ - произвољан}}$, тада $\exists y \in Y$ ткд. $(x,y) \in F$ (F1 за F)

$\underline{\exists z \in Z}$ ткд. $(y,z) \in G$ (F1 за G)

$\underline{(x,z) \in G \circ F}$

подвучено = F1

(Доказујемо (F2) за $G \circ F$)

Нека су $x \in X$, $z_1, z_2 \in Z$ произвољни ткд. $(x, z_1) \in G \circ F$ и $(x, z_2) \in G \circ F$

Тада постоји $y_1 \in Y$ ткд. $(x,y_1) \in F$ и $(y_1, z_1) \in G$
и постоји $y_2 \in Y$ ткд. $(x,y_2) \in F$ и $(y_2, z_2) \in G$

$y_1 = y_2$ (F знамо да је ф-ја) $\Rightarrow$ $z_1 = z_2$ (G знамо да је ф-ја)

*** Ознаке:** - $F: X \to Y$

домен / **скуп оригинала** — **кодомен** / **скуп слика**

- $(x,y) \in F$, пишемо $\mathbf{F(x) = y}$

- функција = **пресликавање**, трансформација, оператор ...
(нпр. симетрије)

- $F: X \to Y$ и $G: Y \to Z$ $\quad \mathbf{G \circ F(x) = G(F(x))}$

Ако $F: X \to Y$, инверзна релација $F^{-1} \subseteq Y \times X$ <u>НЕ МОРА БИТИ</u> функција из Y у X

Деф. Нека $F: X \to Y$

1) Функција F је **НА**-функција **(сурјекција)** ако за свако $y \in Y$ постоји $x \in X$ ткд. $(x,y) \in F$

$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ (x,y) \in F$, ознака $\mathbf{F: X \xrightarrow{НА} Y}$

2) Функција F је **1-1**-функција **(инјекција)** ако за све $x_1, x_2 \in X$ и $y_1 \in Y$ из $(x_1, y) \in F$ и $(x_2, y) \in F$ следи $x_1 = x_2$

$(\forall x_1, x_2 \in X)(\forall y \in Y)\ \big((x_1, y) \in F \land (x_2, y) \in F \Rightarrow x_1 = x_2\big)$

ознака: $\mathbf{F: X \xrightarrow{1-1} Y}$ $\quad (\forall x_1, x_2 \in X)\ \big(F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\big)$

контрапозиција: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2)$

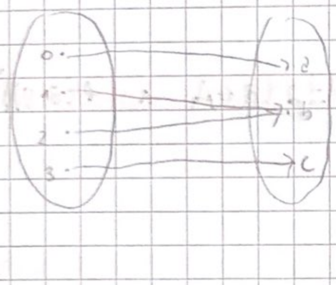
3) Функција F је **бијекција** ако је 1-1 и НА

ознака: $F: X \xrightarrow[\text{НА}]{1-1} Y$

* $F: X \to Y \iff \Delta_X \subseteq F^{-1} \circ F, \quad F \circ F^{-1} \subseteq \Delta_Y$
$F: X \xrightarrow{\text{на}} Y \iff \Delta_X \subseteq F^{-1} \circ F, \quad F \circ F^{-1} = \Delta_Y$
$F: X \xrightarrow{1-1} Y \iff \Delta_X = F^{-1} \circ F, \quad F \circ F^{-1} \subseteq \Delta_Y$
$F: X \xrightarrow[\text{НА}]{1-1} Y \iff \Delta_X = F^{-1} \circ F, \quad F \circ F^{-1} = \Delta_Y$

***Теорема:** Нека $F: X \to Y$. Инверзна релација F^{-1} је функција из Y у X акко је F бијекција

пр.



$F: X \to Y$

$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ a & b & b & c \end{pmatrix}$

$A \subseteq X$

$F\restriction_A : A \to Y, \quad F\restriction_A(x) = F(x), \ x \in A$

$F\restriction_A$ нема смисла ако $x \in X \setminus A$

деф. Нека $F: X \to Y$ и $A \subseteq X$. **Рестрикција** функције F на A, у ознаци $F\restriction_A$ је $F \cap (A \times Y)$

***Лема:** $F: X \to Y, \quad B \subseteq A \subseteq X$

$(F\restriction_A)\restriction_B = F\restriction_B$

Директне и индиректне слике

деф. $F: X \to Y$

1) Ако је $A \subseteq X$, онда $F[A] = \{F(x) \mid x \in A\} \subseteq Y$
$F[A]$ је **директна слика** скупа A

2) Ако је $B \subseteq Y$, онда $F^{-1}[B] = \{x \in X \mid F(x) \in B\}$
$F^{-1}[B]$ је **индиректна слика** скупа B

***својства:** $(F: X \to Y, \quad A, A_1, A_2 \subseteq X, \quad B, B_1, B_2 \subseteq Y)$

1) $A \subseteq F^{-1}[F[A]] \quad ; \quad F[F^{-1}[B]] \subseteq B$

2) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow F[A_1] \subseteq F[A_2], \quad B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow F^{-1}[B_1] \subseteq F^{-1}[B_2]$

3) $F[A_1 \cap A_2] \subseteq F[A_1] \cap F[A_2], \quad F^{-1}[B_1 \cap B_2] = F^{-1}[B_1] \cap F^{-1}[B_2]$

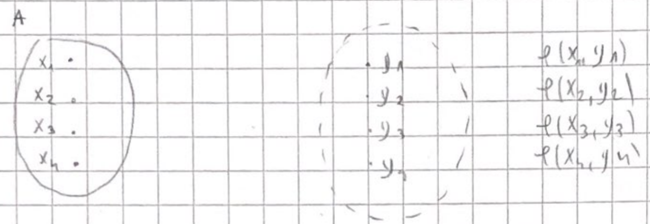
4) $F[A_1 \cup A_2] = F[A_1] \cup F[A_2], \quad F^{-1}[B_1 \cup B_2] = F^{-1}[B_1] \cup F^{-1}[B_2]$

Аксиоме теорије скупова - II

* Аксиома замене

$\varphi(x,y)$ - формула т.к.д. се може доказати

$$\forall x \, \exists! y \, \varphi(x,y)$$



$$\forall x \, \exists! y \, \varphi(x,y) \Rightarrow \forall A \, \exists B \, \forall y \, (y \in B \Leftrightarrow \exists a (a \in A \land \varphi(a, y)))$$

* Аксиома регуларности

- Сваки непразан скуп садржи елемент са којим нема заједничких елемената

$$\forall X (X \neq \emptyset \Rightarrow \exists x (x \in X \land x \cap X = \emptyset))$$

*** Лема:** 1) Не постоји x т.к.д. $x \in x$

2) Не постоје x и y т.к.д. $x \in y \in x$

Доказ: 1) ппс. Нека је x скуп т.к.д. $x \in x$

$X = \{x\}$

$x \in X \qquad \underset{x \in}{X} \cap \underset{\substack{\in \\ x}}{x} \neq \emptyset \quad ↯$ (аксиома регуларности)

2) ппс. постоје x, y т.к.д. $x \in y$ и $y \in x$

$X = \{x, y\}$

$\underset{y \in}{X} \cap \underset{\substack{\in \\ y}}{x} \neq \emptyset \qquad \underset{x \in}{X} \cap \underset{\substack{\in \\ x}}{y} \neq \emptyset \quad ↯$ (аксиома рег)

*** Лема:** За било које x, y из $x \cup \{x\} = y \cup \{y\}$ следи $x = y$

Доказ: ппс. $x \neq y$

$x \in x \cup \{x\} \Rightarrow x \in y \cup \{y\} \Rightarrow x \in y$

$y \in y \cup \{y\} \Rightarrow y \in x \cup \{x\} \underset{y \neq x}{\Rightarrow} y \in x$

↯ претходна лема (2)

* Аксиома бесконачности

$1 = \emptyset \cup \{\emptyset\} = 0 \cup \{0\}$

$2 = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0,1\}$

$3 = 2 \cup \{2\} = \{0\} \cup \{1\} \cup \{2\} = \{0,1,2\}$

$\vdots$

акс. бесконачности оправдава да овај низ може у бесконачно

Постоји скуп који садржи $\emptyset$ и следбеника сваког свог елемента

$$\exists I\,(\emptyset \in I \wedge \forall x\,(x \in I \Rightarrow x \cup \{x\} \in I))$$

ознака: уместо $x \cup \{x\}$, пишемо x' - **следбеник**

деф. Скуп који садржи празан скуп и следбеника сваког свог елемента назива се **индуктивни скуп**

коментар: Аксиома бесконачности тврди да постоји бар један индуктивни скуп

Нека је I индуктивни скуп: $0, 1, 2, 3, \ldots \in I$

$$\mathcal{J}(I) \overset{def}{=} \{X \mid X \text{ је индуктиван и } X \subseteq I\}$$

$\mathcal{J}(I) \neq \emptyset$, јер $I \in \mathcal{J}(I)$

$$\omega \overset{def}{=} \bigcap \mathcal{J}(I) = \bigcap_{X \in \mathcal{J}(I)} X$$

*** Теорема:** 1) ω је индуктиван скуп

(принцип математичке индукције) 2) Ако је $S \subseteq \omega$ и важи: **(БИ)** $0 \in S$
(ИК) ако $x \in S$ онда $x' \in S$

онда је $S = \omega$

Доказ: 1)

1° ? $0 \in \omega$? ($0 = \emptyset$)
$\rightarrow$ за свако $X \in \mathcal{J}(I)$, $0 \in X \Rightarrow 0 \in \bigcap_{X \in \mathcal{J}(I)} X = \omega \Rightarrow 0 \in \omega$ ✓

2° ? $x \in \omega \Rightarrow x' \in \omega$?
$\rightarrow$ пп. $x \in \omega = \bigcap_{A \in \mathcal{J}(I)} A \Rightarrow$ за свако $A \in \mathcal{J}(I)$, $x \in A$
$\Rightarrow x' \in A$ (јер је A индуктивно)

$\Rightarrow x' \in \bigcap_{X \in \mathcal{J}(I)} X = \omega$ ✓

ZF
Цермело Френкелова теор. скупова

2) $S \subseteq \omega = \bigcap_{X \in \mathcal{J}(I)} X \Rightarrow S \subseteq I$
из (БИ) и (ИК) $\Rightarrow S$ је индуктиван

$\Rightarrow S \in \mathcal{J}(I)$ $\Rightarrow S = \omega$

$\omega = \bigcap_{X \in \mathcal{J}(I)} X = \ldots \cap S \cap \ldots \subseteq S$

Скуп природних бројева

* $\omega = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

функција следбеник: $' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

својства:
- за свако $n \in \mathbb{N}$, $n' \neq 0$ (није на)
- за све $m, n \in \mathbb{N}$, из $m' = n'$ следи $m = n$ (1-1 ф-ја)

Теорема:
1) За све природне бројеве m, n важи $m \in n \Rightarrow m \subseteq n$
2) За све природне бројеве m, n важи $m \in n \Leftrightarrow m \subset n$
3) За све природне бројеве m, n важи $m \in n \lor m = n \lor n \in m$

Доказ: 1) $?\ (\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(m \in n \Rightarrow m \subseteq n)\ ?$

$S = \{ n \in \mathbb{N} \mid (\forall m \in \mathbb{N})(m \in n \Rightarrow m \subseteq n)\} \subseteq \mathbb{N}$

$?\ S = \mathbb{N}\ ?$

(БИ) $?\ 0 \in S\ ?$, тј. $(\forall m \in \mathbb{N})\underbrace{(\underbrace{m \in 0}_{\perp} \Rightarrow m \subseteq 0)}_{\top}\ ?$ ✓

(ИК) пп. $n \in S$
тј. $(\forall m \in \mathbb{N})(m \in n \Rightarrow m \subseteq n)$ [индуктивна претпоставка] (ип)

$?\ n' \in S$, тј. $(\forall m \in \mathbb{N})(m \in n' \Rightarrow m \subseteq n')\ ?$

Нека је $m \in \mathbb{N}$ ткд. $m \in n' = n \cup \{n\}$

1° $m \in n$
(ип)
$m \subseteq n \subseteq n'$
Дакле, $m \subseteq n'$

2° $m \in \{n\}$, тј. $m = n$
$m \subseteq n \subseteq n'$
Дакле, $m \subseteq n'$

$m \subseteq n'$

Према принципу мат. индук. $S = \mathbb{N}$

2) $?\ (\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(m \in n \Leftrightarrow m \subset n)\ ?$

$m \in \mathbb{N}$ - произвољан
$S_m = \{ n \in \mathbb{N} \mid m \in n \Leftrightarrow m \subset n\}$
$S_m = \mathbb{N}\ ?$
(БИ) $0 \in S_m\ ?$
$m \in 0 \Leftrightarrow m \subset 0 \qquad \perp \Leftrightarrow \perp \quad \top$

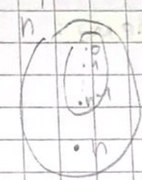
(ИК) ип: $m \in n \Leftrightarrow m \subset n$
$m \in n' \Leftrightarrow m \subset n'\ ?$

($\Rightarrow$) $m \in n' = n \cup \{n\}$

1° $m \in n$
$m \subseteq n$ по (1)
$n \subset n'$ ($n \in n'$)
$\overline{\quad m \subset n' \quad}$

2° $m = n$
$m = n \subset n'$
$\boxed{m \subset n'}$

(⇐) $m \subset n' = n \cup \{n\}$



Доказаћемо прво да $n \notin m$

Ако би било $n \in m$, по (1) следи $n \subseteq m$

Како и $\{n\} \subseteq m \Rightarrow n \cup \{n\} = n' \subseteq m$ ↯ $(m \subset n')$

Дакле, $n \notin m \Rightarrow m \subseteq n$ тј. $m \subset n \vee m = n$

1° $m \subset n$

$m \in n$ (по нп)

$m \in n \cup \{n\} = n'$

2° $m = n$

$m = n \in n'$

$m \in n'$ $\Rightarrow$ $\boxed{m \in n'}$

3) $?\ (\forall m \in N)(\forall n \in N)(m \in n \vee m = n \vee n \in m)\ ?$

$S = \{m \in N \mid (\forall n \in N)(m \in n \vee m = n \vee n \in m)\}$

$?\ S = N\ ?$

(БИ) $0 \in S$?

$(\forall n \in N)(0 \in n \vee 0 = n \vee n \in 0)$

$$\underbrace{\emptyset \subset n \vee \emptyset = n}_{\emptyset \subseteq n\ \checkmark}$$

(ИК) ИП: $m \in S$, тј. $S = (\forall m \in N)(m \in n \vee m = n \vee n \in m)$

$?(\forall m \in N)(m \in n' \vee m = n' \vee n' \in m)?$

Нека је $m \in N$ произвољан

По ИП $m \in n \vee m = n \vee n \in m$

1° $m \in n$

$n' = n \cup \{n\}$

$m \in n'$

$m \in n' \vee m = n' \vee n' \in m$

2° $m = n$

$n' = n \cup \{n\}$

$m \in n'$

$m \in n' \vee m = n' \vee n' \in m$

3° $n \in m \Rightarrow n \subseteq m$

$\{n\} \subseteq m$

$n' = n \cup \{n\} \subseteq m$

$n' \subset m$ (по 2) $\vee$ $n' = m$ (по 2)

$n' \in m$ $\vee$ $n' = m$

$m \in n' \vee m = n' \vee n' \in m$

Претходна теорема омогућава успостављање уређења

$0 \overset{\in}{\subset} \{0\} \overset{\in}{\subset} \{0,1\} \overset{\in}{\subset} \{0,1,2\} \overset{\in}{\subset} \{0,1,2,3\} \ldots$

$0 < 1 < 2 < 3 < 4$

деф. $m \leq n \iff m \subseteq n \iff m \in n \vee m = n$

Према (3) из претходне теореме, $\leq$ је линеарно уређење

* **Лема:** За $m, n \in N$

1) $m < n \iff m' \le n$
2) $m < n' \iff m \le n$
3) $m < n \iff m' \le n'$

* **Теорема (принцип потпуне индукције):** Ако је $S \subseteq N$ и важи

$$(\forall n \in N)\left((\forall k < n)\ k \in S \Rightarrow n \in S\right), \text{ онда } S = N$$

Доказ: (БИ) $n = 0$

$(\forall k < 0)\ k \in S$ - задовољено својство, објашњење:

$\lfloor k < 0 \quad k \in \emptyset$

$(\forall k \in \emptyset)\ k \in S$

$(\forall k\,(\underbrace{k \in \emptyset}_{\perp} \Rightarrow k \in S) \qquad \top$

$(\forall k < n)\ k \in S \Rightarrow n \in S$ еквивалентан је услову

(ИК) $(\forall k < n)\ k \in S \Rightarrow (\forall k < \underset{\text{↳ следбеник}}{n'})\ k \in S$

Дакле:

$$(\forall k < 0)\ k \in S \wedge (\forall n)\left[(\forall k < n)\ k \in S \Rightarrow (\forall k < n')\ k \in S\right]$$

ако са $\varphi(x)$ означимо $(\forall k < x)\ k \in S$, онда

$$\varphi(0) \wedge \forall n\left[\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n')\right]$$

Према принципу (мат.) индукције: $\forall n\ \varphi(n)$ тј. $\forall n (\forall k < n)\ k \in S$ значи $\forall n\ n \in S \Rightarrow$

$\Rightarrow S = N$

* **Теорема:** Сваки непразан подскуп од N има најмањи елемент

Доказ: (ппс) $X \subseteq N$ т.к.д. X нема најмањи елемент

Треба доказати да је $X = \emptyset$, одн. $\boxed{N \setminus X = N}$

$\forall n \left((\forall k < n)\ k \in N/X \Rightarrow n \in N \setminus X\right)$ - услов је задовољен

зашто? (пп. да $(\forall k < n)\ k \in N/X$ тј. $(\forall k < n)\ k \notin X$

Тада, ако би било $n \in X$, n би био најмањи у X.
Дакле $n \notin X$, одн. $n \in N/X$

Скуп N/X задовољава услов претходне теореме, па је $N/X = N$

$\Rightarrow X = \emptyset$

деф. Уређење $\leq$ на скупу X је **добро** ако сваки непразан подскуп од X има најмањи елемент у односу на $\leq$

Теорема рекурзије

Сабирање и множење пр. бројева

*** Теорема рекурзије:** За сваки скуп X и елемент $a \in X$ и функцију $h: X \to X$ постоји јединствена ф-ја $f: \mathbb{N} \to X$ ткд. важи:

$$\begin{cases} \text{(Rec 1)} & f(0) = a \\ \text{(Rec 2)} & f(n') = h(f(n)) \end{cases}$$

индуктивно / рекурентно / рекурзивно } дефинисан низ

$f: \mathbb{N} \to A$ - низ елемената у X
уместо $f(n)$ пишемо f_n
уместо n' пишемо $n+1$

$$\begin{tikzcd} 0 \in \mathbb{N} \arrow[r, "'"] \arrow[d] & \mathbb{N} \arrow[d, "f"] \\ a \in X \arrow[r, "h"'] & X \end{tikzcd}$$

$f(0) = a$

$f \circ ' = h \circ f$

$f(n') = h(f(n))$ □

* $m \in \mathbb{N}$ $f_m: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f_m(0) = m$ (Rec 1)
$g = '$ $f_m(n') = f_m(n)'$ (Rec 2)

f_m је коректно деф. по теореми рекурзије

Уместо $f_m(n)$ пишемо $m+n$, и могли бисмо да је зовемо **додавање броју m**

Значи: $m + 0 = m$
$m + n' = (m+n)'$

$$2+3 = 2+2' \underset{Rec2}{=} (2+2)' = (2+1')' = (2+1)'' = (2+0')'' = (2+0)''' \underset{Rec1}{=} 2'''$$

* "$m \cdot n = \underbrace{m + m + \ldots + m}_{n \text{ пута}}$"

Множење уводимо следећим једнакостима:

$m \cdot 0 = 0$
$m \cdot n' = m + (m \cdot n)$

$$2 \cdot 3 = 2 \cdot 2' = 2 + 2 \cdot 2 = 2 + 2 \cdot 1' = 2 + 2 + 2 \cdot 0' = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 0 = 2 + 2 + 2 + 0 = 2 + 2 + 2$$

* **Теорема:** За све природне бројеве m, n, k важи
1) $(m+n)+k = m+(n+k)$
2) $0+m = m$
3) $n'+m = (n+m)'$
4) $m+n = n+m$

Доказ: **1)** ? $\forall m \forall n \forall k \; ((m+n)+k = m+(n+k))$?

индукција по k: (БИ) $(m+n)+0 = m+n$

$m+(n+0) = m+n$

(ИК) $(m+n)+k' = ((m+n)+k)' \overset{(ИХ)}{=} (m+(n+k))' = m+(n+k)'$

$= m+(n+k')$

2) ? $\forall m \; (0+m = m)$?

индукција по m: (БИ) $0+0 = 0$

(ИК) $0+m = m$

$0+m' = (0+m)' = m'$

слично и остало

* **Теорема:** За све $m, n, k \in N$ важи:
1) $(m+n)\cdot k = m\cdot k + n\cdot k$
2) $(m\cdot n)\cdot k = m\cdot(n\cdot k)$
3) $m\cdot n = n\cdot m$

$\vdots$

* Користећи Rec1 и Rec2, уместо n' пишемо $n+1$

доказ: $n+1 = n+0' = (n+0)' = n'$

Кардиналност скупова

Коначни скупови

* **Теорема (Дирихлеов принцип)**: За свака два природна броја m, n ако $m > n$ онда не постоји 1-1 функција из m у n.

Доказ: инд. по n:

(БИ) $n = 0$, тј $n = \emptyset$
Ако је $m > 0$, онда је $m \neq \emptyset$

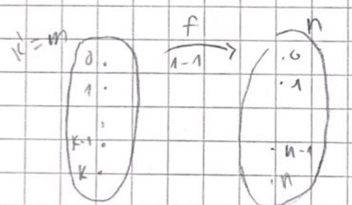
Не постоји ф-ја из непразног у празан скуп, самим тим не постоји ни 1-1 ф-ја.

(ИК) пп. да је тврђење тачно за n.
тј. за све $m > n$ не постоји 1-1 ф-ја из m у n

Доказаћемо да тврђење важи и за $n' = n+1 = n \cup \{n\}$

Нека је $m > n'$: тада је $m = k' = k \cup \{k\}$ за неки пр. број $k > n$

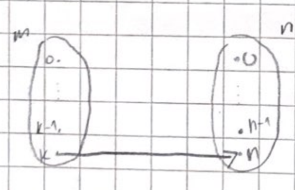
Нека $f : m \xrightarrow{1-1} n'$, тј $f : k \cup \{k\} \xrightarrow{1-1} n \cup \{n\}$



· број n мора бити слика неког елемента из m, јер бисмо у супротном имали 1-1 ф-ју из m у n, што је супротно са (ИП)

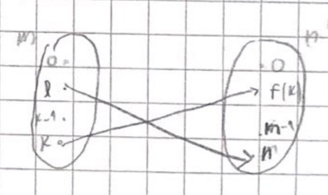
Разликујемо два случаја:

1° $f(k) = n$



Тада је рестрикција f на $\{0, 1, \dots, k-1\}$ заправо 1-1 ф-ја из k у n што је немогуће по (ИП) јер $k > n$

2° $f(l) = n$, за неко $l \in k$



Уместо ф-је f посматрамо сл. ф-ју

$$h(x) = \begin{cases} f(k) & x = l \\ n & x = k \\ f(x) & x \neq l,\ x \neq k \end{cases}$$

$h : k \cup \{k\} \xrightarrow{1-1} n \cup \{n\}$ и $h(k) = n$
па изводимо контрадикцију као у 1°

* **Последице:** Нека су m, n пр. бројови

1) Постоји 1-1 функција из m у n акко $m \leq n$

2) Постоји бијекција из m у n акко $m = n$

деф. Скуп X је **коначан** ако постоји бијекција између X и n, за неки природан број n

Иначе је **бесконачан**

деф. Ако постоји бијекција између X и n, кажемо да је n **кардиналност** скупа X (n је **број елемената** скупа X) и пишемо $|X| = n$

* **Теорема:** Нека су X и Y коначни скупови

1) постоји бијекција између X и Y акко $|X| = |Y|$

2) постоји 1-1 ф-ја из X у Y акко $|X| \leq |Y|$

Доказ: **1)** ($\Rightarrow$) $f: X \xrightarrow[\text{НА}]{1-1} Y$ и нека је $|X| = m$, $|Y| = n$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow[\text{НА}]{f\ 1-1} & Y \\ g \downarrow {\scriptstyle 1-1,\ \text{НА}} & & {\scriptstyle 1-1,\ \text{НА}} \downarrow h \\ m & & n \end{array}$$

$h \circ f \circ g^{-1} : m \xrightarrow[\text{НА}]{1-1} n$

$m = n$

($\Leftarrow$) $|X| = |Y| = n$

$$\begin{array}{ccc} X & & Y \\ & g \searrow {\scriptstyle 1-1,\ \text{НА}} \quad {\scriptstyle 1-1,\ \text{НА}} \nearrow h & \\ & n & \end{array}$$

$h^{-1} \circ g : X \xrightarrow[\text{НА}]{1-1} Y$

*** Теорема:** Нека је n било који пр. бр. **1)** Сваки подскуп a од n је коначан и $|a| \le n$

2) Ако је a прави подскуп од n $(a \subset n)$ онда не постоји бијекција између a и n

3) За сваку функцију f из n у n важи: $f: n \xrightarrow{1-1} n$ акко $f: n \xrightarrow{на} n$

последица: Нека је A произвољан коначан скуп

1) Сваки подскуп X од A је коначан и $|X| \le |A|$
2) За сваки прави подскуп X од A не постоји бијекција између X и A
3) За сваку ф-ју f из A у A важи $f: A \xrightarrow{1-1} A$ акко $f: A \xrightarrow{на} A$

Бесконачни скупови

$N = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ N - није коначан $f: N \xrightarrow{1-1} \{0, 1, \ldots, n-1\}$

$s: N \to N$ $s(x) = x+1$ (ф-ја сљедбеник)

s је 1-1: $s(x) = s(y) \iff x = y$
s није НА: 0 нема сљедбеник

$\Rightarrow$ према посљедицу 3) N не може бити коначан

II: $N^+ = \{1, 2, 3, \ldots\} \subset N$
$f: N \xrightarrow[на]{1-1} N^+$ $f(x) = x+1$

N није коначан према посљедици 2)

пр. 1) $\{15, 16, 17, \ldots\} \leftarrow N$ $f(x) = x+15$

2) $N \to 2N = \{2, 4, 6, \ldots\}$ $f(x) = 2x$

деф. Скуп је **бесконачан** ако није коначан

деф. **1)** Скупови A и B су **исте кардиналности** ако постоји бијекција између њих

2) Скуп A је **мање или једнаке кардиналности** од B ако постоји 1-1 функ. из A у B

*** Особине:** За све скупове A, B, C

1) $|A| = |A|$
2) $|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|$
3) $|A| = |B|$ и $|B| = |C| \Rightarrow |A| = |C|$
4) $|A| \le |A|$
5) $|A| \le |B|$ и $|B| \le |C| \Rightarrow |A| \le C$

Доказ: **1); 4)** $i: A \xrightarrow[на]{1-1} A$ $i(x) = x$

2) $|A| = |B|$
$f: A \xrightarrow[на]{1-1} B$; $f^{-1}: B \xrightarrow[на]{1-1} A$: $|B| = |A|$

3); 5) $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$
$f: A \xrightarrow[на]{1-1} B$; $g: B \xrightarrow[на]{1-1} C$ $g \circ f: A \xrightarrow[на]{1-1} C$ $\Rightarrow |A| = |C|$

*** Теорема (Кантор-Бернштајнова)** Ако је $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, онда је $|A| = |B|$

***Лема:** Нека је A било који скуп и $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ функција за коју важи:

$$(*) \quad X \subseteq Y \Rightarrow F(X) \subseteq F(Y), \text{ за све } X, Y \in \mathcal{P}(A)$$

Тада постоји $E \subseteq A$ т.д. $F(E) = E$

Доказ: $\mathcal{E} = \{ X \subseteq A \mid X \subseteq F(X) \}$, $\mathcal{E} \neq \emptyset$ јер $\emptyset \in \mathcal{E}$

Показаћемо да је тражени скуп $E = \bigcup \mathcal{E}$

$$E = \bigcup_{X \in \mathcal{E}} X \subseteq \bigcup_{X \in \mathcal{E}} F(X) \overset{!}{\subseteq} F\Big(\bigcup_{X \in \mathcal{E}} X\Big) = F(E)$$

(За свако $X \in \mathcal{E}$, $X \subseteq \bigcup_{X \in \mathcal{E}} X$, па према услову $(*)$ $F(X) \subseteq F\big(\bigcup_{X \in \mathcal{E}} X\big)$)

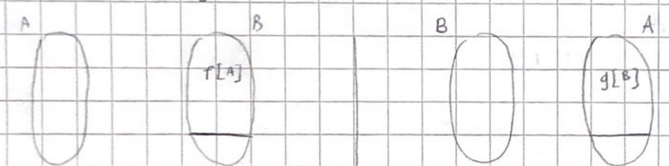
Из $E \subseteq F(E) \Rightarrow E \in \mathcal{E}$

Према услову $(*)$ $F(E) \subseteq F(F(E))$, па важи и $F(E) \in \mathcal{E}$

$$F(E) \subseteq \bigcup_{X \in \mathcal{E}} X = E \Rightarrow F(E) = E$$

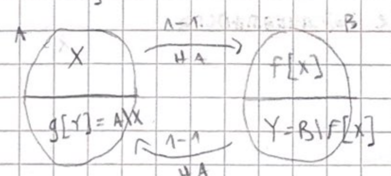
Доказ: $|A| \leq |B|$, $|B| \leq |A|$

$f : A \xrightarrow{1-1} B \qquad g : B \xrightarrow{1-1} A$



f одређује бијекцију између скупова A и $f[A]$;
уопштено: За било које $X \subseteq A$, f одређује бијекцију између X и $f[X]$

За свако $Y \subseteq B$, f одређује бијекцију између Y и $g[Y]$



Да ли постоји скуп $X \subseteq A$ ткд $A \setminus X = g[B \setminus f[X]]$ тј. $X = A \setminus g[B \setminus f[X]]$?

Дефинишимо ф-ју $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ на сл. начин:

$$F(X) \overset{def}{=} A \setminus g[B \setminus f[X]]$$

(Да ли постоји E ткд. $F(E) = E$, тј. фиксна тачка?)

Проверимо услов $(*)$ из леме:

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow f[X_1] \subseteq f[X_2] \Rightarrow B \setminus f[X_2] \subseteq B \setminus f[X_1] \Rightarrow g[B \setminus f[X_2]] \subseteq g[B \setminus f[X_1]]$$

$$\Rightarrow A \setminus g[B \setminus f[X_1]] \subseteq A \setminus g[B \setminus f[X_2]]$$

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow F(X_1) \subseteq F(X_2) \Rightarrow (\text{по леми}) \ \exists E \ \ F(E) = E$$

Дефинишимо ф-ју $h: A \to B$ на следећи начин:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in E \\ g^{-1}(x) & , x \notin E \quad (x \in A \setminus E) \end{cases}$$

$g^{-1}(x)$ је ознака за јединств. елем. из $B \setminus f[E]$ који се слика ф-јом g у x

h је бијекција   1-1 ✓
НА ✓

$$\boxed{|A| = |B|}$$

деф. Скуп A је **мање кардиналности** од $|A| < |B|$ ако је $|A| \leq |B|$ и $|A| \neq |B|$

(када постоји $f: A \xrightarrow{1-1} B$, не постоји $g: A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} B$)

***Теорема:** За сваки скуп A, важи $|A| < |\mathcal{P}(A)|$

Доказ: 1) $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$?

$f: A \to \mathcal{P}(A)$, $f(a) = \{a\}$ $\to$ f је 1-1

2) $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$?

ппс. $g: A \xrightarrow[\text{НА}]{1-1} \mathcal{P}(A)$

$D \stackrel{def}{=} \{x \in A \mid x \notin g(x)\} \subseteq A$, тј $D \in \mathcal{P}(A)$

Како је g на ф-ја, $\exists d \in A \quad g(d) = D$

1° $d \in D$
$d \notin g(d)$
$d \notin D$ ↯

2° $d \notin D$
$d \notin g(d)$
$d \in D$ ↯

Дакле не постоји бијекција између A и $\mathcal{P}(A)$.

Пребројиви и непребројиви скупови

деф. Скуп A је **пребројив** ако је $|A| = |N|$ (пише се и $|A| = \aleph_0$)

Скуп је **највише пребројив** ако је коначан или пребројив.

*** Теорема:** Сваки подскуп пребројивог скупа је највише пребројив.

Доказ: Довољно је доказати да тврђење важи за подскупове скупа N

$A \subseteq N$ и A није коначан (бесконачан је)
Треба доказати да је A пребројив

Применом теореме рекурзије дефинишемо следећи низ скупова:

$$E : N \to \mathcal{P}(A) \qquad E(0) = \emptyset$$
$$E(n') = E(n) \cup \min(A \setminus E(n))$$

- за свако $n \in N$, E_n је коначан
- $E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots \quad (E_m \subset E_n,\ m<n)$
- $\min(A \setminus E_m) \in E_n \quad , \quad m<n$

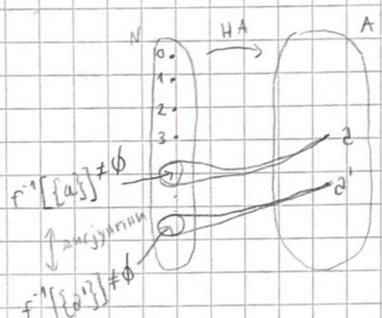
$h : N \to A$
$h(n) = \min(A \setminus E_n)$
$\underline{1\text{-}1} \qquad |N| \leq |A|$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{1\text{-}1} \qquad |N| \leq |A| \\ \text{из } A \subseteq N \Rightarrow |A| \leq |N| \end{array}\right\} \quad |A| = |N|$$

*** Теорема:** Ако постоји НА функција $N \to A$ онда $|A| \leq |N|$, одн. A је највише пребројив

Доказ: $f : N \xrightarrow{НА} A \quad , \quad ?\, |A| \leq |N|\, ?$

Да ли постоји 1-1 ф-ја из A у N



$h : A \to N$

$h(a) = \min f^{-1}[\{a\}]$

N је добро уређен, па сваки $f^{-1}[\{a\}]$ има најмањи елемент јер је непразан

$?\, h$ је 1-1 $?$

$a \neq a'$

$f^{-1}[\{a\}] \cap f^{-1}[\{a'\}] = \emptyset$

$\min f^{-1}[\{a\}] \neq \min f^{-1}[\{a'\}]$

$\hookrightarrow h(a) \neq h(a') \qquad$ 1-1 ✓

Теорема: **1)** $N \times N$ је пребројив скуп. Општије: Декартов пр. два пребројива скупа је пребројив

2) За свако $k \geq 1$, N^k је пребројив

3) Унија пребројиво много пребројивих скупова је пребројив скуп

4) Унија свих коначних низова пребројивог скупа је пребројив скуп

Доказ: **1)** 1° $|N| \leq |N \times N|$

$f: N \to N \times N \quad f(n) = (n, 0) \to 1\text{-}1 \quad (n_1 \neq n_2 \Rightarrow (n_1, 0) \neq (n_2, 0))$

$|N \times N| \leq |N|$

$g: N \times N \to N \quad g(m,n) = 2^m \cdot 3^n \to 1\text{-}1$

$\Rightarrow \quad |N \times N| = |N| \quad$ (К-Б)

2° $|A| = |N|$

$|B| = |N|$

$|A \times B| = |N|$?

$f: A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} N \quad , \quad g: B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} N$

$h: A \times B \to N \times N \qquad h(a,b) \stackrel{def}{=} (f(a), g(b)) \Rightarrow h$ - бијекција

$N \times N \xrightarrow{h_1} N$ — ∃ по 1°

$\Rightarrow |A \times B| = |N| \Rightarrow A \times B$ - пребројив

2) Доказ индукцијом, последица тврђења 1)

3) (A_n) - низ пребројивих скупова

$A = \bigcup_{n \in N} A_n$ пребројив?

A_n - пребројив

$f_n: N \xrightarrow[\text{на}]{1-1} A_n$

$f: N \times N \to A$

$f(n,k) \stackrel{def}{=} f_n(k)$

f је на?

$a \in A = \bigcup_{n \in N} A_n$ произвољан

$a \in A_{n_0}$ за неки n_0

$f_{n_0}: N \xrightarrow[\text{на}]{1-1} A_{n_0}$

постоји $k_0 \in N$ $\quad f_{n_0}(k_0) = a$

$f(n_0, k) = a$

$N \xrightarrow[\text{на}]{g,\ 1-1} N \times N \xrightarrow[\text{на}]{f} A$

$h = f \circ g: N \xrightarrow{\text{на}} A$

$|A| \leq |N|$

$\Rightarrow$ пребројив

4] $N^{<\omega}$ - скуп свих коначних низова

$N^{<\omega} = N^1 \cup N^2 \cup \dots$ - унија пребројиво много пребројивих скупова

деф. Скуп A је **непребројив** ако је $|A| > |N|$

пр. $\mathcal{P}(N)$ је непребројив

$[0,1)$ - интервал реалних бројева - непребројив

Дпс. $r : N \xrightarrow[НА]{1-1} [0,1)$

r_n - реални број коме придружујемо дец. запис који не садржи само цифру 9 почев од неког места

$\cancel{0,34\,9999\dots} = 0,35$

не користимо

$$\begin{array}{llllll} r_0 : & 0, c_0^0 & c_1^0 & c_2^0 & c_3^0 & \dots \\ r_1 : & 0, c_0^1 & c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 & \dots \\ r_2 : & 0, c_0^2 & c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & \dots \\ \vdots & & & \vdots & & \end{array} \qquad \begin{array}{l} d_0 \neq 9,\ c_0^0 \\ d_1 \neq 9,\ c_1^1 \\ d_2 \neq 9,\ c_2^2 \end{array}$$

Нека је $d_0, d_1, d_2 \dots$ низ цифара ткд. $\forall k\ d_k \neq 9$ и $d_k \neq c_k^k$

Нека је $x = 0, d_0 d_1 \dots \in [0,1)$

Како је r НА-ф-ја, постоји пр. број l ткд. $r_l = x$

што је немогуће јер је $d_l \neq c_l^l$

Дакле, не постоји бијекција између N и $[0,1)$

Аксиома избора (AC)

$ZF + AC = ZFC$

(AC) Ако је $\mathcal{A}$ скуп чији су елементи непразни скупови, онда постоји ф-ја

$f: \mathcal{A} \to \bigcup\mathcal{A}$ т.к.д. $f(X) \in X$ за свако $X \in \mathcal{A}$

↳ **функција избора** за $\mathcal{A}$

пр. $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots\}$

f из сваког $X \in \mathcal{A}$ бира по један елемент

(AC') (други начин) За сваки скуп A постоји $f: \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ т.д. $f(X) \in X$, за све $X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$

* **Теорема:** $(AC) \iff (AC')$

Доказ: $(\Rightarrow)$ очигледно

$(\Leftarrow)$ претп. (AC') ?(AC)?

Нека је $\mathcal{A}$ скуп чији су елем. непразни скупови

$A \overset{def}{=} \bigcup\mathcal{A}$

по (AC') постоји $f: \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ $f(X) \in X$, $X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$

$f\restriction_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \underset{\bigcup\mathcal{A}}{\overset{\shortparallel}{A}}$

* **Лема:** Ако $g: X \xrightarrow{\text{на}} Y$, онда $|Y| \leq |X|$

подсећање: уређење $\leq$ на X је **добро** ако сваки непразан подскуп од X има најмањи елемент

* **Теорема (Цермелова) (WO):** Сваки скуп се може добро уредити

WO $\iff$ AC

Доказ: Y - скуп, $\leq$ - добро уређење на Y

$X \subseteq Y \Rightarrow \exists \min X$ $\quad$ $f = \min: \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\} \to Y$ $\quad$ за $\emptyset \neq X \subseteq Y$ $\min(X) \in X$

$\Rightarrow$ $\min$ - изборна функција

деф. Нека је $\leq$ уређење на скупу P.

1. Скуп $L \subseteq P$ је **ланац** ако су свако $x, y \in L$ $x \leq y$ или $y \leq x$

2. Скуп $X \subseteq P$ је **одозго ограничен** ако постоји елемент $a \in P$ ткд. за све $x \in X$ важи $x \leq a$

пр $(N^+, |)$ - уређење које није линеарно $\Rightarrow$ читав N^+ није ланац

$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$ - јесте ланац, нема горње ограничење

*** Теорема (Цорнове) (ZL)** Нека је $\leq$ уређење на P. Ако сваки ланац у P има горње ограничење, онда у P постоји макс. елемент