Теорија вероватноћа

Јован Самарџић, 13/2019

Професор: Павле Младеновић

- дефиниције
- ознаке
- теореме
- докази
- примери

Година курса: 2021/22

Молим да ми све грешке пријавите преко мејла или друштвених мрежа.

$\boxed{1.}$

σ-алгебра и мерљив простор

Теорија вероватноћа је математичка дисциплина која проучава случајне експерименте.

деф. Случајни експеримент је комплекс услова који се могу неограничено много пута понављати. При томе, не доводе увек до једнозначно одређеног исхода.

деф. Елементарни догађај је један исход случајног експеримента.

деф. Сваком случајном експерименту придружујемо скуп свих могућих исхода. Тај скуп зовемо простор елементарних догађаја / простор исхода, у ознаци Ω.

деф. Алгебра догађаја је класа $\mathcal{A}$ подскупова од Ω, која испуњава својства:

(A1) $\Omega \in \mathcal{A}$;
(A2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$;
(A3) $A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$;

деф. σ-алгебра догађаја је класа $\mathcal{A}$ подскупова од Ω, која испуњава својства:

(A1) $\Omega \in \mathcal{A}$;
(A2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$;
(A4) $A_1 \in \mathcal{A},\ A_2 \in \mathcal{A},\ A_3 \in \mathcal{A}, \dots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

деф. Случајни догађај / Догађај је било који елемент алгебре, односно σ-алгебре.

Пример 2: 1) тривијална σ-алгебра: $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$;

2) партитивни скуп;

3) $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$.

Напомена: $\mathcal{A}$ је σ-алгебра $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ је и алгебра. Обрнуто не важи. (④ T1)

Пример: $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$,
$\mathcal{A}$ - фамилија подскупова који су коначни или им је комплемент коначан.

$\mathcal{A}$ - јесте алгебра, а није σ-алгебра (нпр. $A_1 = \{2\},\ A_2 = \{4\}, \dots \in \mathcal{A}$, а $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{2, 4, 6, \dots\} \notin \mathcal{A}$).

Лема 1: Нека $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$. Тада: $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Другим речима, σ-алгебра је затворена у односу на пребројиву примену пресека.

Доказ: $\bigcap^{\infty} A_n \overset{\text{Де Морг.}}{=} \left(\overline{\bigcup^{\infty} \overline{A_n}} \right) \in \mathcal{A}$.

* **Лема 2:** Пресек две σ-алгебре $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ над Ω је такође σ-алгебра.

Доказ: тривијално (докажемо сва 3 услова за $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$)

Напомена: Аналогно тврђење важи за произвољан број σ-алгебри.

Тражимо најмању σ-алгебру која садржи све скупове из неке фамилије K која није σ-алгебра.

Приметимо да је партитивни скуп једна таква σ-алгебра.
Посматрајмо све такве σ-алгебре. По Л2, њихов пресек је исто једна σ-алгебра, означимо је $\sigma[K]$.

деф. Минимална σ-алгебра генерисана колекцијом K је $\sigma[K]$.

Пример: Нека је $\Omega = R$, a $K = \{ (a,b] \mid a,b \in R,\ a<b \}$.

Минималну алгебру која садржи K означаваћемо са $\mathcal{B}_0$.

Минималну σ-алгебру која садржи K означаваћемо са $\mathcal{B}$.
Зовемо је Борелова σ-алгебра подскупова реалне праве.

Њени елементи се зову Борелови скупови на реалној правој.

Лема 3: Следећи скупови су Борелови:

1) $\{a\}$;
2) (a,b);
3) $[a,b]$;
4) $(a, +\infty)$;
5) $(-\infty, b)$;
6) $\mathbb{Q}$;
7) I;
8) сваки отворен скуп;
9) сваки затворен скуп.

Доказ: тривијално.

2. Простор вероватноћа. Колмогоровљева аксиоматика. Основна својства вероватноће

деф. Уређени пар $(\Omega, \mathcal{A})$ зове се мерљив простор.

Да бисмо одредили вероватносни модел неког експеримента, треба још да дефинишемо вероватноће догађаја из $\mathcal{A}$.

деф. Функција $P: \mathcal{A} \to R$ је вероватноћа/вероватносна мера на мерљивом простору $(\Omega, \mathcal{A})$ ако:

(Б1) $P(\Omega) = 1;$ нормираност
(Б2) $P(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{A};$ ненегативност
(Б3) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum^{\infty} P(A_n).$ σ- адитивност

деф. $AB = A \cap B$.

Теорема 1: 1) $P(\emptyset) = 0;$

2) (коначна адитивност) $P(\bigcup^{n} A_k) = \sum^{n} A_k;$

3) $P(\bar{A}) = 1 - P(A);$

4) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B);$

5) (Лема о покривању) $P(\bigcup^{\infty} A_n) \leq \sum^{\infty} P(A_n);$ (не морају бити дисјунктни)

6) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB);$

7) (Формула укључивања и искључивања)

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_iA_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\ldots A_n);$$

8) (Непрекидност одозго)

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n);$$

9) (Непрекидност одоздо)

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n);$$

10) (Непрекидност у нули)

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \wedge \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$$

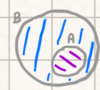
Доказ: 1) Важи $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$

$$P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset \cup \dots) \overset{Б3}{=} P(\emptyset) \cup P(\emptyset) \cup \dots \quad \Rightarrow \quad P(\emptyset) = 0.$$

2) $$P\Big(\bigsqcup^{n} A_k\Big) = P(A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots) \overset{Б3}{=} P(A_1) + \dots + P(A_n) + \cancelto{0 \text{ (по 1)}}{P(\emptyset)} + \dots = \sum_{j=1}^{n} P(A_j).$$

3) $$P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) \overset{2)}{=} P(A) + P(\bar{A}) \overset{Б1}{\Rightarrow} 1 = P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

4) $$A \subset B \Rightarrow B = A \cup \bar{A}B \Rightarrow P(B) = P(A) + P(\bar{A}B) \overset{Б2}{\geq} P(A).$$



5) $$A_1 \cup A_2 \cup \dots = A_1 \cup \bar{A}_1 A_2 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \cup \dots$$

Приметимо да су догађаји са десне стране дисјунктни.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1 \cup \bar{A}_1 A_2 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \cup \dots) \overset{Б3}{=} P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) + \dots \overset{4)}{\leq} P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

6) $A \cup B = A \cup \bar{A}B$, $B = \bar{A}B \cup AB$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A}B) = P(A) + P(\bar{A}B) + P(AB) - P(AB)$$
$$\overset{2)}{=} P(A) + P(\bar{A}B \cup AB) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

7) Индукцијом по броју догађаја.

(БИ) $n=2$: већ доказано у 6).

(ИК) $n \Rightarrow n+1$: применимо 6) на скупове $A = \bigcup^{n} A_k$ и $B = A_{n+1}$:

$$P\Big(\bigcup^{n+1} A_k\Big) = P\Big(\bigcup^{n} A_k\Big) + P(A_{n+1}) - P\Big(\bigcup^{n} A_k \, A_{n+1}\Big)$$

$$\overset{(ИХ)}{=} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) + P(A_{n+1})$$

$$- \sum_{i=1}^{n} P(A_i A_{n+1}) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j A_{n+1}) - \dots - (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n A_{n+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \dots + (-1)^{n} P(A_1 A_2 \dots A_n A_{n+1})$$

8) Означимо $B_1 = A_1$ и $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ $(k \geq 2)$ $\Rightarrow$ $B_1, B_2, B_3, \dots$ дисјунктни

Приметимо и да важи: $\bigcup^{\infty} A_k = \bigsqcup^{\infty} B_k$, као и $A_n = \bigsqcup^{n} B_k$.

$$P\Big(\bigcup^{\infty} A_k\Big) = P\Big(\bigsqcup^{\infty} B_k\Big) \overset{Б3}{=} \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) = \lim_{n \to \infty} \sum^{n} P(B_k) \overset{2)}{=} \lim_{n \to \infty} P\Big(\bigsqcup^{n} B_k\Big) = \lim_{n \to \infty} P(A_n).$$

9) тривијално из 8) (само пређемо на комплементарне догађаје).

10) тривијално из 9) (специјалан случај: $\bigcap^{\infty} = \emptyset$).

Теорема 2: Нека је $(\Omega, \mathcal{A})$ мерљив простор
и $P: \mathcal{A} \to R$ ф-ја која је коначно адитивна (Т1. 2) и непрекидна у нули (Т1. 10)

Тада је P и σ-адитивна.

Доказ: Нека је (A_n) низ дисјунктних догађаја из $\mathcal{A}$ и нека је $A = \bigsqcup^{\infty} A_k$.

По коначној адитивности: $P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P(\underbrace{\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k})$

↳ B_n - опадајуће и $\bigcap B_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0$.

Дакле, за $n \to \infty$ имамо: $P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) + 0 = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \Rightarrow$ σ-адитивност.

деф. **(Основна дефиниција - Колмогоровљеве аксиоме)**

Уређена тројка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ где је:

Ω - простор исхода случајног експеримента;

$\mathcal{A}$ - σ-алгебра подскупова скупа Ω;

P - вероватноћа дефинисана на σ-алгебри $\mathcal{A}$,

зове се **простор вероватноћа / вероватносни модел** разматраног случајног експеримента.

3. Борел-Кантелијеве леме

Разматрамо низ догађаја $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$.
Посматрамо $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ – то је догађај да се реализује бесконачно много од догађаја $A_1, A_2, A_3, \ldots$
Наредна теорема говори о вероватноћи реализације тог догађаја.

Теорема 1 (Борел-Кантелијеве леме)

1) Ако је (A_n) низ догађаја и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$, онда важи: $P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0$;

2) Ако је (A_n) низ независних догађаја и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$, онда важи: $P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1$.

Доказ: 1)
$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}_{B_n}\Big) = P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\Big) \overset{\text{непр. одоздо}}{=} \lim_{n\to\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) \overset{5)}{\le} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)}_{<+\infty} = 0.$$

2) Приметимо: $P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1 \iff P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = 0 \iff (\forall n)\ P\left(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = 0$.

Како су $A_1, A_2, A_3, \ldots$ независни $\Rightarrow$ $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}, \ldots$ су независни

$$P\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\Big) = \lim_{m\to\infty} P\Big(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\Big) = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} P(\overline{A_k}) = \prod_{k=n}^{\infty} P(\overline{A_k}).$$

$$\overset{/\ln}{\Rightarrow} \ln \prod_{k=n}^{\infty} P(\overline{A_k}) \overset{T1.3}{=} \ln \prod_{k=n}^{\infty} (1-P(A_k)) = \sum_{k=n}^{\infty} \ln(1-P(A_k)) \overset{(*)}{\le} -\underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)}_{=+\infty} = -\infty \Rightarrow \prod_{k=n}^{\infty} P(\overline{A_k}) = 0$$

$\Rightarrow$ $P\left(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = 0$, а то је еквивалентно нашем тврђењу.

(*) $\ln(1-x) \le -x$, $x \in (0,1)$

Последица: Ако је (A_n) низ независних догађаја, онда важи:

1) $P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) \in \{0, 1\}$.

2) $P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0 \iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$

4. Монотони низови и монотоне класе

Опет разматрамо низ догађаја $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$.

Посматрамо $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ – то je догађај да се реализује бесконачно много од догађаја $A_1, A_2, A_3, \ldots$

и $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ – то je догађај да се реализују сви догађаји низа почев од неког индекса.
тј. догађај да се не реализује коначно много од догађаја $A_1, A_2, A_3, \ldots$

деф. Горња гранична вредност низа догађаја је догађај $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

Доња гранична вредност низа догађаја је догађај $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.

деф. Ако je $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = A$, тај догађај зовемо гранична вредност низа догађаја $\lim_{n\to\infty} A_n$.

деф. Низ догађаја (A_n) je растући ако важи: $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$

Низ догађаја (A_n) je опадајући ако важи: $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$

Заједно, ово су монотони низови.

Лема 1: 1) Ако je (A_n) растући $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

2) Ако je (A_n) опадајући $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Доказ: 1) $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots) \cup (A_2 \cap A_3 \cap \ldots) \cup (A_3 \cap \ldots) \cup \ldots = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) \cap (A_2 \cup A_3 \cup \ldots) \cap (A_3 \cup \ldots) \cap \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

2) аналогно

деф. Фамилија M подскупова скупа Ω зове се **монотона класа** ако садржи граничне вредности свих монотоних низова чији чланови припадају тој фамилији.

Другим речима: $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \in M \quad \Rightarrow \quad \bigcup^{\infty} A_k \in M$;

$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \in M \quad \Rightarrow \quad \bigcap^{\infty} A_k \in M$.

Теорема 1: Нека је M алгебра скупова.
Тада важи: M је σ-алгебра $\Leftrightarrow$ M је монотона класа.

Доказ: ($\Rightarrow$) тривијално (по $\underbrace{A4}$ и $\underbrace{\boxed{1}\text{Л}1.2}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty}}\underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty}} A_k \in M$).

($\Leftarrow$) Знамо да је M монотона класа и нека је (A_n) низ скупова из M.

Означимо $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \overset{M-\text{алг.}}{\Rightarrow} B_n \in M$. Такође, како је $B_1 \subset B_2 \subset \ldots \Rightarrow (B_n)$ је растући.

Коначно: $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} B_n \overset{\text{мон.}}{\in} M \Rightarrow M$ је σ-алгебра.

Лема 2: Пресек монотоних класа је такође монотона класа.

Доказ: тривијално

деф. **Минимална монотона класа** која садржи колекцију скупова K, у ознаци $M(K)$, је пресек свих монотоних класа које садрже ту колекцију.

Теорема 2: Нека је $\mathcal{A}_0$ алгебра подскупова скупа Ω. Тада је и $M(\mathcal{A}_0)$ алгебра скупова.

Доказ: * A1: Тривијално ($\Omega \in \mathcal{A}_0 \subset M(\mathcal{A}_0)$).

одмах видимо $K \subseteq M(\mathcal{A}_0)$

* A2: Нека је $K = \{B \mid B \in M(\mathcal{A}_0),\ \overline{B} \in M(\mathcal{A}_0)\}$. Докажимо да је K монотона класа.

Нека је (B_n) монотон низ из K (самим тим и из $M(\mathcal{A}_0)$).
Тада је и $(\overline{B_n})$ монотон низ из $K \subseteq M(\mathcal{A}_0)$.
Одавде: $\lim_{n\to\infty} B_n \in M(\mathcal{A}_0)$ и $\overline{(\lim_{n\to\infty} B_n)} = \lim_{n\to\infty} \overline{B_n} \in M(\mathcal{A}_0) \overset{\text{испуњава услов}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} B_n \in K \Rightarrow K$ је монотона

Како је (очигледно) $\underbrace{\mathcal{A}_0 \subset K}_{\text{јер је } \mathcal{A}_0 \text{ алг.}} \subset M(\mathcal{A}_0) \Rightarrow K$ је мин. монотона класа $\Rightarrow K = M(\mathcal{A}_0)$.

Коначно, $A \in M(\mathcal{A}_0) \Rightarrow A \in K \overset{\text{деф. } K}{\Rightarrow} \overline{A} \in K \Rightarrow \overline{A} \in M(\mathcal{A}_0)$.

* A3: За свако $A \in M(\mathcal{A}_0)$, означимо $M_A := \{B \mid B \in M(\mathcal{A}_0),\ A \cup B \in M(\mathcal{A}_0)\}$.
Аналогно, докажимо да је M_A монотона класа.

Нека је (B_n) монотон низ из M_A (самим тим и из $M(\mathcal{A}_0)$).
Тада је и $(A \cup B_n)$ монотон низ из $M_A \subseteq M(\mathcal{A}_0)$.
Одавде: $\lim\limits_{n\to\infty} B_n \in M(\mathcal{A}_0) \Rightarrow A \cup \lim\limits_{n\to\infty} B_n = \lim\limits_{n\to\infty} (A \cup B_n) \in M(\mathcal{A}_0) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} B_n \in M_A \Rightarrow M_A$ је монотона.

Како је (очигледно) $\mathcal{A}_0 \subset M_A \subset M(\mathcal{A}_0) \Rightarrow M_A$ је мин. монотона класа $\Rightarrow M_A = M(\mathcal{A}_0)$.

Коначно, $A, B \in M(\mathcal{A}_0) = M_A \overset{\text{деф. } M_A}{\Rightarrow} A \cup B \in M(\mathcal{A}_0)$.

Теорема 3: Нека је $\mathcal{A}_0$ алгебра подскупова скупа Ω.

Тада је $\sigma(\mathcal{A}_0) = M(\mathcal{A}_0)$.

Доказ: $(\supseteq)$ Како је $\sigma(\mathcal{A}_0)$ монотона класа, а $M(\mathcal{A}_0)$ мин. монотона класа $\Rightarrow M(\mathcal{A}_0) \subset \sigma(\mathcal{A}_0)$.

$(\subseteq)$ По Т2: $M(\mathcal{A}_0)$ је алгебра.

По Т1: $M(\mathcal{A}_0)$ је σ-алгебра, а $\sigma(\mathcal{A}_0)$ је мин. σ-алгебра $\Rightarrow \sigma(\mathcal{A}_0) \subset M(\mathcal{A}_0)$.

Напомена: ову теорему користимо у доказу $\boxed{14}$ Т1.

5. Продужење мере са алгебре на σ-алгебру

Теорема 1 (Константин Каратеодори):

Нека је: $\mathcal{A}_0$ - алгебра догађаја (подскупова скупа Ω)

$P: \mathcal{A}_0 \to R$ - вероватноћа на алгебри $\mathcal{A}_0$.

$\sigma[\mathcal{A}_0]$ - минимална σ-алгебра која садржи алгебру $\mathcal{A}_0$.

Тада постоји тачно једна вероватноћа $\tilde{P}: \sigma[\mathcal{A}_0] \to R$ ткд. $\tilde{P}(A) = P(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}_0$.

6. Комплетирање простора вероватноће. Теорема о апроксимацији

деф. Простор вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ је комплетан ако σ-алгебра $\mathcal{A}$ садржи све подскупове скупа чија је вероватноћа једнака нули.

Теорема 1: Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа.

Тада постоји комплетан простор вероватноћа $(\Omega, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ ткд:

→ $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$

→ $\forall A \in \mathcal{A}$, $P(A) = \tilde{P}(A)$.

Теорема 2 (Апроксимација вероватноће):

Нека је $\mathcal{A}_0$ алгебра догађаја, $\sigma[\mathcal{A}_0]$ минимална σ-алгебра која садржи $\mathcal{A}_0$,

$P: \sigma[\mathcal{A}_0] \to R$ вероватноћа и $A \in \sigma[\mathcal{A}_0]$. Тада:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A_0 \in \mathcal{A}_0 \quad P(A \triangle A_0) \leq \varepsilon$$

7. Функција расподеле

* Када нам је $\Omega = \mathbb{R}$, за $\mathcal{A}$ узимамо $\mathcal{B}$.
Сада гледамо како на тој σ-алгебри задајемо вероватноћу.

деф. Функција $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ је функција расподеле ако:

1° F је растућа;

2° $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$;

3° F је непрекидна здесна, тј. $\lim\limits_{t \to x+0} F(t) = F(x)$

Теорема 1: 1) Нека је P вероватноћа на $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ и $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = P((-\infty, x])$.
Тада је F функција расподеле.

2) Нека је F функција расподеле.
Тада постоји јединствена вероватноћа на $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ткд. важи горњи услов.

Доказ: 1) 1° тривијално $\left((-\infty, x_1) \subseteq (-\infty, x_2) \Rightarrow F(x_1) = P((-\infty, x_1]) \le P((-\infty, x_2]) = F(x_2)\right)$;

2° $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$: довољно је доказати да за неки низ $x_n \downarrow -\infty$ важи $\lim\limits_{n \to \infty} F(x_n) = 0$.

$$\lim_{n \to \infty} F(x_n) = \lim_{n \to \infty} P((-\infty, x_n]) \overset{\text{непр. одозго}}{=} P\left(\bigcap_{n}^{\infty} (-\infty, x_n]\right) = P(\emptyset) = 0.$$

$\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$: довољно је доказати да за неки низ $y_n \uparrow +\infty$ важи $\lim\limits_{n \to \infty} F(y_n) = 0$.

$$\lim_{n \to \infty} F(x_n) = \lim_{n \to \infty} P((-\infty, y_n]) \overset{\text{непр. одозго}}{=} P\left(\bigcup_{n}^{\infty} (-\infty, y_n]\right) = P(\mathbb{R}) = P(\Omega) = 1.$$

3° $\lim\limits_{t \to x+0} F(t) = F(x)$: довољно је доказати да за неки низ $t_n \downarrow x$ важи $\lim\limits_{n \to \infty} F(t_n) = F(x)$.

$$F(x) = P(\underbrace{(-\infty, x]}) \underset{(*)}{\overset{\text{непр. одозго}}{=}} \lim_{n \to \infty} P(\underbrace{(-\infty, t_n]}) = \lim_{n \to \infty} F(t_n)$$

(*) $(-\infty, t_1] \supset (-\infty, t_2] \supset \dots$
и $\bigcap\limits^{\infty} (-\infty, t_n) = (-\infty, x]$

2) Нека је $\mathcal{K}$ колекција свих интервала облика $(a,b]$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$.

За ф-ју расподеле F дефинишемо $P: \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ са:

од овог P направићемо вероватноћу

$P((a,b]) = F(b) - F(a)$;
$P((-\infty, b]) = F(b)$;
$P((a, +\infty)) = 1 - F(a)$;
$P((-\infty, +\infty)) = 1$.

За наставак доказа, требају нам 3 леме.

Лема 1: Нека је $\bigcup\limits^{n} I_k \subset I$, где је $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $I, I_1, I_2, \ldots \in \mathcal{K}$.

Тада: $\sum\limits^{n} P(I_k) \le P(I)$

Доказ: 1° $n \in \mathbb{N}$: индукција

2° $n = \infty$: преласком на lim у збиру прираштаја ф-је F на коначном броју дисј. инт.

Лема 2: Нека је $I \subset \bigcup\limits^{n} I_k$, где је $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $I, I_1, I_2, \ldots \in \mathcal{K}$. (не морају дисјунктни)

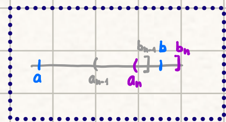
Тада: $\sum\limits^{n} P(I_k) \ge P(I)$

Доказ: 1° Сви инт. су коначни, тј. $I = (a, b]$, $I_k = (a_k, b_k]$. Доказујемо: $\sum\limits^{n}(F(b_k) - F(a_k)) \geq F(b) - F(a)$

1°_1 $n < +\infty$: индукција

(БИ) тривијално $(F\uparrow)$;

(ИК) Знамо: $(a,b] \subset \bigcup\limits^{n}(a_k, b_k]$, при чему $b \in (a_n, b_n]$.



$1^\circ_{1_1}$ $a_n \le a \Rightarrow (a,b] \subset (a_n, b_n) \Rightarrow$ тривијално $(F\uparrow)$;

(слика!) $1^\circ_{1_2}$ $a < a_n \Rightarrow (a, a_n] \subset \bigcup\limits^{n-1}(a_k, b_k] \overset{(ИХ)}{\Longrightarrow} F(a_n) - F(a) \le \sum\limits^{n-1}(F(b_k) - F(a_k))$

↳ покривање ⇒ преклапања ⇒ $a_n \le b_{n-1}$

Сада: $F(b) - F(a) \overset{F\uparrow}{\le} F(b_n) - F(a) = \underbrace{F(a_n)}_{\text{додали}} - F(a) + F(b_n) - \underbrace{F(a_n)}_{\text{одузели}} \le \sum\limits^{n}(F(b_k) - F(a_k))$

1°_2 $n = \infty$: Знамо: $(a,b] \subset \bigcup\limits^{\infty}(a_k, b_k]$.

[Нека је $\varepsilon > 0 \overset{F\text{-непр. здесна}}{\Longrightarrow} \exists \delta \in (0, b-a), \exists \delta_k > 0$ $F(a+\delta) \le F(a) + \varepsilon$, $F(b_k + \delta_k) \le F(b_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$.

$a_1 \le a \le a+\delta$
$b \le b_\infty \le b_\infty + \delta_\infty$

Тада важе инклузије: $(a+\delta, b] \subset [a+\delta, b] \subset \bigcup\limits^{\infty}(a_k, b_k + \delta_k) \subset \bigcup\limits^{\infty}(a_k, b_k + \delta_k]$

Како је компактан скуп $[a+\delta, b]$ садржан у унији отв. скупова $(a_k, b_k + \delta_k)$

коначно

то постоји коначан број m ткд:

ограничимо (није ∞)

$(a+\delta, b] \subset [a+\delta, b] \subseteq \bigcup\limits^{m}(a_k, b_k + \delta_k) \subset \bigcup\limits^{m}(a_k, b_k + \delta_k]$

главни део

$F(b) - (F(a) + \varepsilon) \le F(b) - F(a+\delta) \overset{1^\circ_1}{\le} \sum\limits^{m}(F(b_k + \delta_k) - F(a_k))$

$\le \sum\limits^{m}(F(b_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} - F(a_k)) \overset{F\uparrow}{\le} \varepsilon + \sum\limits^{\infty}(F(b_k) - F(a_k))$

Пошто ово важи за $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow F(b) - F(a) \le \sum\limits^{\infty}(F(b_k) - F(a_k))$

2° $I = (-\infty, b]$, остали бесконачни интервали аналогно

Нека је $m \in \mathbb{N}$, $b \in (m, m+1]$. Тада:

$$P(I) = F(b) = (F(b) - F(m)) + (F(m) - F(m-1)) + \dots = \sum_{-\infty}^{\infty} P(I \cap (n, n+1]).$$

$$I \subset \dot{\bigcup}^{n} I_k \Rightarrow \forall k \quad I \cap (n, n+1] \subseteq \dot{\bigcup}^{\infty} (I_k \cap (n, n+1])$$

$$P(I) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(I \cap (n, n+1]) \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P(I_k \cap (n, n+1]) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(I_k \cap (n, n+1]) \overset{1°}{=} \sum_{k=1}^{\infty} P(I_k).$$

Дакле, из Л1 и Л2 $\Rightarrow$ функција P је σ-адитивна на фамилији $\mathcal{K}$. (*)

Нека је $\mathcal{B}_0$ мин. алгебра која садржи све интервале из $\mathcal{K}$.
Фамилија $\mathcal{B}_0$ се састоји од свих коначних унија интервала из $\mathcal{K}$. **(**)**
Ако је $A = \dot{\bigcup}^{n} I_k \in \mathcal{B}_0$, где су I_k дисј., тада дефинишемо $P(A) = \sum^{n} P(I_k)$.

(деф. је добра због (*): $\sum_{k}^{n} P(I_k) = \sum_{k}^{n} \sum_{l}^{m} P(I_k J_l) = \sum_{l}^{m} P(J_l)$)

Лема 3: **Функција P јесте вероватноћа на алгебри $\mathcal{B}_0$.**

Доказ: Б1, Б2) – очигледно

Б3) Доказујемо да је P σ-адитивна на $\mathcal{B}_0$.

Нека је $A = \dot{\bigcup}^{\infty} A_k$, $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}_0 \overset{(**)}{\Rightarrow} A = \dot{\bigcup}_{\nu}^{n} I_\nu$, $A_k = \bigsqcup_{\mu}^{m_k} I_{k_\mu}$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} P(A) = \sum_{\nu}^{n} P(I_\nu) = \sum_{\nu}^{n} \sum_{k}^{\infty} \sum_{\mu}^{m_k} P(I_\nu I_{k_\mu}) = \sum_{k}^{\infty} \sum_{\mu}^{m_k} P(I_{k_\mu}) = \sum_{k}^{\infty} P(A_k).$$

Вратимо се на доказ Т1:

На основу теореме о продужењу мере ($\boxed{5}$ Т1): $\exists!$ проширење P на Борелову σ-алг. $\mathcal{B}$.
При томе, чува се тражена једнакост ($\forall x \in \mathbb{R}$ $F(x) = P((-\infty, x])$).

Пример: стр. 21: Лебегова мера λ на $(0,1]$ – користимо $\boxed{6}$.

8. Дискретне, апс. непр. и сингуларне функције расподеле

* Нека је $a_1, a_2, \dots$ низ (коначан или бесконачан) различитих бројева и $b_1 + b_2 + \dots = 1$, $b_i \geq 0$.

За сваки Борелов скуп B дефинишемо $P(B) := \sum_{\{k \mid a_k \in B\}} b_k$.

Лако се проверава да је P вероватноћа и при томе $P(\{a_k\}) = b_k$.

$$\overset{T1}{\Rightarrow} \quad \exists!\, F: \quad F(x) = \sum_{\{k \mid a_k \leq x\}} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, \delta_{a_k}(x) \qquad \left(\delta_a(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases} \right)$$

деф. $F(x)$ се зове дискретна функција расподеле.

$P(x)$ се зове дискретна расподела вероватноћа.

Примери: 1) Бернулијева расподела: $P(k) = \begin{cases} p, & k = 1 \\ 1-p, & k = 0 \end{cases}$

p

$$F(x) = (1-p)\,\delta_0(x) + p\,\delta_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

2) Биномна расподела: $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

n, p

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\, \delta_k(x)$$

3) Дискретна равномерна расподела: $P_N(k) = \frac{1}{N}$

N

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ k/N, & k \leq x < k+1 \\ 1, & x \geq N \end{cases}, \quad \text{за } k \in \{1, 2, \dots, N-1\}$$

4) Геометријска расподела: $P(k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$

p

5) Пуасонова расподела: $P_\lambda(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$

$\lambda > 0$

Напомена: Све $F(x)$ имају прекиде у тачкама a_k, а иначе је const (степенице)

То не мора увек да важи (стр. 24, пример 6, $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$)

* деф. Функција расподеле је апсолутно непрекидна ако постоји ненегативна $f: R \to R$ ткд.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \qquad \forall x \in R$$

Вероватноћу која одговара оваквој F зовемо апсолутно непрекидна расподела.

Функцију f зовемо густина расподеле вероватноћа.

Напомена: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$ (само ставимо $x \to +\infty$, па по 2° важи $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$)

Примери: 1) Равномерна расподела: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

a, b

2) Нормална расподела: $\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

m, σ^2 $(\sigma > 0)$

$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ – за $m = 0$, $\sigma^2 = 1$

Напомене: 1) φ је парна; 2) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

3) Гама расподела: $f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$, за $x > 0$ (иначе је 0)

$\alpha, \lambda > 0$

4) Експоненцијална расподела: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$ $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$

5) Двострана експоненцијална расподела: $f(x) = \frac{\lambda}{2} \cdot e^{-\lambda|x|}$

$\lambda > 0$

6) Двојна експоненцијална расподела: $f(x) = e^{-x} e^{-e^{-x}}$, $F(x) = e^{-e^{-x}}$

7) Кошијева расподела: $f(x) = \frac{\alpha}{\pi(x^2 + \alpha^2)}$

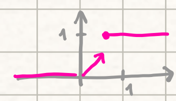
$\alpha > 0$

* деф. F је **сингуларна функција расподеле** ако F' постоји и једнако је 0 скоро свуда.

Пример: **Канторова сингуларна функција расподеле:** стр. 27 (одлично објашњено)

* Постоје функције расподеле које не припадају ни једној од ове три групе.

Нпр. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 1, & x \geq 1/2 \end{cases}$ (слика), испуњава и 1° и 2° и 3°



Ипак, приметимо: $F(x) = \frac{1}{2} F_1(x) + \frac{1}{2} F_2(x)$, где $\underset{\text{апс. непр.}}{\underset{\downarrow}{F_1(x)}} \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 1, & x \geq 1/2 \end{cases}$, $\underset{\text{дискр.}}{\underset{\downarrow}{F_2(x)}} = \begin{cases} 0, & x < 1/2 \\ 1, & x \geq 1/2 \end{cases}$

Теорема 1: **Свака функција расподеле може се представити као конвексна комбинација дискретне, апсолутно непрекидне и сингуларно непрекидне функције расподеле.**

Доказ: Приметимо да за растућу и ограничену функцију F важи:

(*) F има највише пребр. много прекида, али у свакој тачки има и леви и десни лимес.

(**) F има извод F' скоро свуда, при томе $\forall x_1, x_2$ $\int_{x_1}^{x_2} F'(x)\,dx \leq F(x_2) - F(x_1)$

Сада, нека је F ф-ја расподеле, $\underbrace{a_1, a_2, \dots \text{ све тачке прекида}}$ и $b_n = \overset{\text{„величина скока"}}{\underbrace{F(a_n+0)}_{\text{постоје}} - \underbrace{F(a_n-0)}_{\text{због (*)}}}$.

Дефинишимо ф-је: $F_d(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \delta_{a_n}(x) = \sum_{\{n | a_n \leq x\}} b_n$

$F_{an}(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{x} F'(t)\,dt}$

$F_{sn}(x) = F(x) - F_d(x) - F_{an}(x)$

Ако је $\sum_{}^{\infty} b_n = \alpha \neq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} F'(t)\,dt = \beta \neq 0$, онда су

$\underset{\text{дискр.}}{\underset{\downarrow}{F_1(x)}} = \frac{1}{\alpha} \cdot F_d(x)$, $\underset{\text{апс. непр.}}{\underset{\downarrow}{F_2(x)}} = \frac{1}{\beta} \cdot F_{an}(x)$, $\underset{\text{синг. непр.}}{\underset{\downarrow}{F_3(x)}} = \frac{1}{1-\alpha-\beta} \cdot F_{sn}(x)$

и важи: $F = \alpha F_1 + \beta F_2 + (1-\alpha-\beta) F_3$

Ако је неки од коеф. једнак нули, само тај члан изоставимо.

9. Вероватноћа у вишедимензионом простору

деф. Нека је $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ колекција свих скупова облика $(a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n]$.

Борелова σ-алгебра подскупова $\mathbb{R}^n$ је мин. σ-алг. која садржи $\mathcal{K}$, у ознаци $\mathcal{B}^n$.

Напомена: $\mathcal{B}^n$ садржи све скупове који се могу добити помоћу n-дим. интервала највише пребројивом применом комплемента, уније и пресека.

деф. Темена n-дим. интервала $I = (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n]$ су све тачке $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_k \in \{a_k, b_k\}$.

деф. Знак темена је $z_I(x) := \begin{cases} +1, & \text{паран број } a_k\text{-ова} \\ -1, & \text{непаран} \end{cases}$

деф. За произвољно $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, означимо $\Delta_F(I) := \sum_{x}^{\text{темена}} z_I(x) \cdot F(x)$.

(нпр. $n=2$: $\Delta_F(I) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)$)

деф. Функција $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ је n-димензиона функција расподеле ако:

1° $\lim\limits_{x_k \to -\infty} F(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$

2° $F(+\infty, \ldots, +\infty) = 1$;

3° F је непрекидна здесна по сваком аргументу;

4° $\forall I \quad \Delta_F(I) \geqslant 0$. (уопштење за монотоност)

Важи аналогна теорема са $\boxed{7}$ T1.

Теорема 1: 1) Нека је P вероватноћа на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ и $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(x_1, \ldots, x_n) = P((-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n])$. Тада је F n-димензиона функција расподеле.

2) Нека је F n-димензиона функција расподеле. Тада постоји јединствена вероватноћа на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ткд.

а) $F(x_1, \ldots, x_n) = P((-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n])$, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

б) $P(I) = \Delta_F(I)$, $\forall (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n]$.

Пример: $F(x_1, \dots, x_n) := F_1(x_1) \cdot \dots \cdot F_n(x_n)$, где су F_k једнодим. ф-је расподеле.

Слично као за $n=1$, и сад ф-је расподеле могу бити дискр, апс. непр., синг. или мешовите.

Посебно су важне апс. непрекидне, које се могу записати: $F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \dots dt_n$.

f зовемо густина n-димензионе расподеле. За њу важи: $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \dots dt_n = 1$.

Пример: Функција равномерне расподеле на $[0,1]^n$: $F(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \exists j \ x_j < 0 \\ x_1 x_2 \dots x_n, & \forall j \ x_j \in [0,1] \\ \prod^n \min\{x_j, 1\}, & \forall j \ x_j \geq 0 \\ 1, & \forall j \ x_j > 1 \end{cases}$

Густина равномерне расподеле на $[0,1]^n$: $f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \forall j \ x_j \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Лебегова мера на $[0,1]^n$ је вероватноћа на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ која одговара овом F.

10. Вероватноћа у бесконачнодим. простору

Узимамо $\Omega = R^T$, где је T бесконачан скуп.

Пример: 1) $R^\infty = R^N$ - скуп свих низова $(x_1, x_2, \dots)$

2) $R^{[0,1]}$ - скуп свих функција $x: [0,1] \to R$.

3) T може бити и $\mathbb{Z}, R, [0,+\infty), \dots$ али и нешто компликованије.

деф. Нека је $x: T \to R$ нека ф-ја из R^T.

За $(t_1, \dots, t_n) \in T^n$ дефинишемо $\Pi_{(t_1,\dots,t_n)}: R^T \to R^n$, $\Pi_{(t_1,\dots,t_n)}(x) = (x(t_1), \dots, x(t_n))$.

деф. Скуп $A \subset R^T$ је цилиндар ако $\exists (t_1, \dots, t_n) \in T^n$ $\exists B \subset R^n$ $A = \Pi^{-1}_{(t_1,\dots,t_n)}(B)$.

Скуп B зове се основа цилиндра.

деф. A је Борелов цилиндар ако је B Борелов скуп.

деф. Сви Борелови цилиндри у простору R^T чине алгебру $\mathcal{B}_0^T$.

деф. Мин. σ-алгебру $\sigma(\mathcal{B}_0^T)$ која садржи алгебру $\mathcal{B}_0^T$ зовемо Борелова σ-алгебра $\mathcal{B}^T$.

Њени елементи су Борелови скупови у простору R^T.

Пример: $\mathcal{B}^\infty = \mathcal{B}^{R^\infty}$.

Нека је C фиксиран број. Тада је $A = \{x: N \to R \mid x(n) \le C, \ \forall n\}$ један Борелов скуп.

деф. Нека је $P: \mathcal{B}^T \to R$ вероватноћа, $(t_1, \dots, t_n) \in T^n$, $B \in \mathcal{B}^n$, A цилиндар са основом B.

Уводимо $P_{(t_1,\dots,t_n)}: \mathcal{B}^n \to R$, $\quad P_{(t_1,\dots,t_n)}(B) = P(\Pi^{-1}_{(t_1,\dots,t_n)}(B)) = P(A)$.

Напомене: 1) R^T можемо сматрати цилиндром над R^n.

2) Ако је B основа A $\Rightarrow$ $\bar{B}$ је основа $\bar{A}$.

3) Ако су $B_1, B_2, \dots$ дисј. $\Rightarrow$ $A_1, A_2, \dots$ су дисј.

Лема 1: Функција $P_{(t_1,\dots,t_n)}: \mathcal{B}^n \to R$ је вероватноћа.

Доказ: Б1) тривијално $\left(P_{(t_1,\dots,t_n)}(R^n) = P(\Pi^{-1}_{(t_1,\dots,t_n)}(R^n)) = P(R^T) = 1 \right)$

Б2) тривијално $\left(P_{(t_1,\dots,t_n)}(B) = P(\Pi^{-1}_{(t_1,\dots,t_n)}(B)) \geq 0 \right)$

Б3) Нека су $B_1, B_2, \dots$ дисј.

$$P_{(t_1,\dots,t_n)}\left(\bigcup^{\infty} B_k\right) = P\left(\Pi^{-1}_{(t_1,\dots,t_n)}\left(\bigcup^{\infty} B_k\right)\right) = P\left(\bigcup^{\infty} \Pi^{-1}_{(t_1,\dots,t_n)}(B_k)\right)$$

$$= P\left(\bigcup^{\infty} A_k\right) = \sum^{\infty} P(A_k) = \sum^{\infty} P_{(t_1,\dots,t_n)}(B_k).$$

Вероватноћа P једнозначно је одређена ф-јом расподеле $F_{(t_1,\dots,t_n)}(x_1, \dots, x_n) = P\{x \mid x(t_1) \leq x_1, \dots, x(t_n) \leq x_n\}$.

За њу, важи: а) услов симетрије: $\forall n \in N$ $\forall (t_1,\dots,t_n) \in T^n$ $\forall$ пермутација $(j_1, \dots, j_n)$ скупа $\{1,\dots,n\}$

$$F_{(t_1,\dots,t_n)}(x_1, \dots, x_n) = F_{(t_{j_1},\dots,t_{j_n})}(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}).$$

б) услов сагласности: $\forall (t_1,\dots,t_n) \in T^n$ $\quad \forall k < n$

$$F_{(t_1,\dots,t_k)}(x_1, \dots, x_k) = F_{(t_1,\dots,t_n)}(x_1, \dots, x_k, +\infty, \dots, +\infty).$$

11. Колмогоровљева теорема егзистенције

Питамо се под којим условима унапред дата фамилија коначнодим. ф-ја расподеле одређује вероватноћу у простору функција.

Теорема 1 (Колмогоровљева теорема егзистенције):

Нека је T беск. скуп и за $\forall n$ $\forall (t_1, \dots, t_n) \in T^n$ је дата $P_{(t_1, \dots, t_n)}$ и одг. ф-ја расп. $F_{(t_1, \dots, t_n)}$.

Ако за дату фамилију ф-ја расподела важе услови симетрије и сагласности, онда постоји јединствена вероватноћа $P: \mathcal{B}^T \to R$ ткд. $\forall (t_1, \dots, t_n) \in T^n$ $\forall B \in \mathcal{B}^n$ и цил. A са осн. B:

$$P(A) = P_{(t_1, \dots, t_n)}(B).$$

Доказ: На алгебри свих цилиндара $\mathcal{B}_0^T$ дефинишемо функцију P:

за сваки цилиндар $A = \Pi^{-1}_{(t_1, \dots, t_n)}(B)$, $B \in \mathcal{B}^n$ је $P(A) = P_{(t_1, \dots, t_n)}(B)$.

* Докажимо да је $P: \mathcal{B}_0^T \to R$ добро дефинисана:

стр. 36

* Докажимо да је P вероватноћа на $\mathcal{B}_0^T$:

Б1) тривијално ($\forall t \in T$ $R^T = \Pi_t^{-1}(R)$ $\Rightarrow$ $P(R^T) = P(\Pi_t^{-1}(R)) = P_t(R) = 1$)

Б2) очигледно

Б3) Прво докажимо коначну адитивност:

стр. 36

Да би P била σ-адитивна, по $\boxed{2}$ Т2, довољно је доказати непр. у нули.

стр. 37, 38

* Дакле, P је вероватноћа на алгебри $\mathcal{B}_0^T$ $\overset{\boxed{5}\,T1}{\Longrightarrow}$ продужујемо је на σ-алг. $\mathcal{B}^T$

12. Случајна величина

* Прво наводимо нека својства инверзне слике.

деф. Нека су S_1 и S_2 непразни, $f: S_1 \to S_2$ и $A \subset S_2$.

Инверзна слика скупа A је $f^{-1}(A) := \{x \in S_1 \mid f(x) \in A\}$.

Теорема 1: Нека је $f: S_1 \to S_2$, (A_n) низ подскупова S_2 и $A \subset S_2$.

1) $f^{-1}\left(\bigcup^{\infty} A_n\right) = \bigcup^{\infty} f^{-1}(A_n)$; 2) $f^{-1}\left(\bigcap^{\infty} A_n\right) = \bigcap^{\infty} f^{-1}(A_n)$; 3) $f^{-1}(\bar{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$.

Доказ: тривијално

* деф. Функција $X: \overset{(\Omega, \mathcal{A}, P)}{\Omega} \to \overset{(R, \mathcal{B})}{R}$ је случајна величина ако је мерљива у односу на σ-алг. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Другим речима: $\forall B \in \mathcal{B}$ $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$.

Пример: Бацамо новчић два пута: $X(пп) = 2$, $X(пг) = X(гп) = 1$, $X(гг) = 0$.

деф. Случајна величина $I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$ зове се индикатор догађаја A.

деф. Нека је $\Omega = \bigsqcup^{\infty} A_k$ и $x_1, x_2, \ldots \in R$.

Случајна величина $X(\omega) = \sum^{\infty} x_k I_{A_k}(\omega) = \sum_{\{k \mid \omega \in A_k\}} x_k$ зове се дискретна случајна величина.

Ако је разбијање коначно, онда је X проста случајна величина.

Знамо да је инв. слика сваког Бореловог скупа догађај $(X^{-1}(B) \in \mathcal{A})$.
Тражимо класу свих догађаја таквог облика.

Теорема 2: Нека је X сл. вел. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Тада је $\sigma(X) = \{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ σ-алгебра.

Она је под-σ-алгебра од $\mathcal{A}$ и зове се **σ-алгебра генерисана случ. величином X.**

Доказ: A1) $\Omega = X^{-1}(R) \in \sigma(X)$;

A2) $A \in \sigma(X) \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B} \quad A = X^{-1}(B) \Rightarrow \bar{B} \in \mathcal{B}$ и $\bar{A} = \overline{X^{-1}(B)} \overset{T1}{=} X^{-1}(\bar{B}) \in \sigma(X)$;

A3) (A_n) низ из $\sigma(X) \Rightarrow \exists (B_n) \in \mathcal{B} \quad A_n = X^{-1}(B_n)$.

$$\bigcup^{\infty} A_n = \bigcup^{\infty} X^{-1}(B_n) = X^{-1}(\underbrace{\bigcup^{\infty} B_n}_{\in \mathcal{B}}) \in \sigma(X).$$

Теорема 3: Нека су X, Y сл. вел. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Тада:
1) $\{\omega \mid X(\omega) < Y(\omega)\} \in \mathcal{A}$
2) $\{\omega \mid X(\omega) \leq Y(\omega)\} \in \mathcal{A}$
3) $\{\omega \mid X(\omega) = Y(\omega)\} \in \mathcal{A}$

Доказ: Нека је $Q = \{r_1, r_2, \ldots\}$ скуп рац. бројева.

1) $\{\omega \mid X(\omega) < Y(\omega)\} = \bigcup_{k}^{\infty} \{\omega \mid X(\omega) < r_k < Y(\omega)\} = \bigcup_{k}^{\infty} (\underbrace{\{\omega \mid X(\omega) < r_k\}}_{\text{Борелов}} \cap \underbrace{\{\omega \mid r_k < Y(\omega)\}}_{\text{Борелов}}) \in \mathcal{A}$

2) $\{\omega \mid X(\omega) \leq Y(\omega)\} = \Omega \setminus \{\omega \mid Y(\omega) < X(\omega)\} \in \mathcal{A}$

3) $\{\omega \mid X(\omega) = Y(\omega)\} = \{\omega \mid X(\omega) \leq Y(\omega)\} \cap \{\omega \mid Y(\omega) \leq X(\omega)\} \in \mathcal{A}$

* деф. Нека је $X: \Omega \to R$ сл. вел. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Функција $P_X: \mathcal{B} \to R$, $P_X(B) = P\{\omega \mid X(\omega) \in B\} = P(X^{-1}(B))$ је **расподела вероватноћа сл. вел. X.**

Напомена: Лако се проверава да P_X јесте вероватноћа.
↳по деф.

деф. Функција $F_X: R \to R$, $F_X(x) = P\{\omega \mid X(\omega) \leq x\}$ је **функција расподеле вероватноћа сл. вел. X.**

Пишемо и $F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \in (-\infty, x]\}$.

Напомена: F_X заиста јесте функција расподеле.

Доказ: стр. 41, 42

деф. Сл. вел. X има апсолутно непрекидну расподелу ако јој је ф-ја расподеле апс. непр.

Напомена: При томе, ако је f одговарајућа густина за X, онда:

$$P\{a \leq X \leq b\} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Примери: 1) Класу сл. величина које имају нормалну расподелу, означавамо $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

2) Нека X има ф-ју расподеле F_X. Занима нас каква је расподела случ. вел. $F(X)$?

Пошто $F(x)$ узима вредности из $[0,1]$, онда за $x<0$: $F_{F(x)}(x) = 0$ и $x>1$: $F_{F(x)}(x) = 1$.

За $x \in [0,1]$: $F_{F(x)}(t) = P\{F(X) \leq t\} = P\{X \leq F^{-1}(t)\} = F(F^{-1}(t)) = t$

Дакле: $F_{F(x)}(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x, & x \in [0,1] \\ 1, & x>1 \end{cases}$, па $F(X)$ има равномерну расподелу.

Класу сл. величина које имају равномерну расподелу, означавамо $\mathcal{U}[a,b]$.

13. Случајан вектор

деф. Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа и $n \geq 2$.

Функција $X: \Omega \to \mathbb{R}^n$ зове се вишедимензиона случајна величина / случајан вектор ако

$$\forall B \in \mathcal{B}^n \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Теорема 1: $X_1, \dots, X_n$ су случ. (обичне) величине $\Leftrightarrow$ $X = (X_1, \dots, X_n)$ је случ. вектор.

Доказ: $(\Rightarrow)$ $I = \prod^n (a_k, b_k] \Rightarrow X^{-1}(I) = \{\omega \mid (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in I\} = \bigcap^n \{\omega \mid X_k(\omega) \in (a_k, b_k]\} \in \mathcal{A}$.

важи за I

Дакле, инв. слика n-дим. интервала јесте догађај.

за произв. Борелов

Нека је $B \in \mathcal{B}^n$ Борелов $\Rightarrow$ може се представити преко $\overset{\infty}{\bigcap}, \overset{\infty}{\bigcup}, {}^{-}$ n-дим. инт.

$\overset{[12] T1}{\Rightarrow}$ $X^{-1}(B)$ јесте догађај

$(\Leftarrow)$ Нека је $B \in \mathcal{B}$ Борелов $\Rightarrow$ $B \times \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n-1}$ је Борелов у $\mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow X_1^{-1}(B) = \{\omega \mid X_1(\omega) \in B\} = \{\omega \mid (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in B \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}\}$$

$\overset{X \text{ случ. век.}}{=} X^{-1}(B \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}) \in \mathcal{A}$ $\Rightarrow$ X_1 јесте случ. вел. (аналогно остале)

* деф. Функција $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ зове се **Борелова функција** ако за $\forall B \in \mathcal{B}$ $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n$.

Теорема 2: Ако је $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрекидна $\Rightarrow$ f је Борелова.

Доказ: f непр. $\Rightarrow$ $\forall c \in \mathbb{R}$ $f^{-1}((-\infty, c))$ је отворен у $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $\forall c \in \mathbb{R}$ $f^{-1}((-\infty, c))$ је Борелов у $\mathbb{R}^n$.

Како се $\forall B \in \mathcal{B}$ може представити применом $\bigcap\limits^{\infty}, \bigcup\limits^{\infty}, \overline{}$ на инт. облика $(-\infty, c)$

$\overset{T1}{\Rightarrow}$ $\forall B \in \mathcal{B}$ $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n$ $\Rightarrow$ f је Борелова.

Теорема 3: Нека је $f_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ низ Борелових функција и нека $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\exists \lim\limits_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$.

Тада је и f Борелова функција.

$\exists m$ $\exists p = p_0$ $\forall k \geq p_0$

Пошто је мање,
постоји мали простор $(\frac{1}{m})$
између lim и c
↳ p, k – кад се „стабилиз."

Доказ: $\forall c \in \mathbb{R}$ $f^{-1}((-\infty, c)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < c\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim\limits_{k \to \infty} f_k(x) < c\}$

$$= \underbrace{\bigcup_{m}^{\infty} \bigcup_{p}^{\infty} \bigcap_{k=p}^{\infty}}\, \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_k(x) < c - \tfrac{1}{m}\} = \bigcup_{m}^{\infty} \bigcup_{p}^{\infty} \bigcap_{k=p}^{\infty} f_k^{-1}\left((-\infty, c - \tfrac{1}{m})\right) \in \mathcal{B}^n.$$

$f_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ су Борелове

Аналогно доказу Т2 $\Rightarrow$ $\forall B \in \mathcal{B}$ $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n$ $\Rightarrow$ f је Борелова.

Теорема 4: Нека су $X_1, \dots, X_n$ сл. вел. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Борелова.

Тада је функција $f(X_1, \dots, X_n): \Omega \to \mathbb{R}$ такође случ. величина.

Доказ: Нека је $B \in \mathcal{B}$ произв. Борелов скуп $\Rightarrow$ $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n$

$X_1, \dots, X_n$ случ. вел. $\overset{T1}{\Rightarrow}$ $(X_1, \dots, X_n)$ је случ. вектор

$\Rightarrow$ $(f(X_1, \dots, X_n))^{-1}(B) = (X_1, \dots, X_n)^{-1}(f^{-1}(B)) \in \mathcal{A}$.

Последице: 1) Ако су X, Y случ. вел. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $\Rightarrow$ cX, $X \pm Y$, $X \cdot Y$, $\sin X$ ... су случ. вел.

2) Ако $\forall \omega \in \Omega$ $Y(\omega) \neq 0$ $\Rightarrow$ X/Y је случајна величина.

уместо овог услова, може услов $P\{\omega \mid Y(\omega) = 0\} = 0$
при томе се допушта да X/Y није деф. на скупу мере нула.

* **Теорема 5:** Нека је (X_n) низ случ. вел. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и X случ. вел. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) $\{\omega: \text{ постоји } \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega)\} \in \mathcal{A}$;

2) $\{\omega: \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} \in \mathcal{A}$.

Доказ: 1) Користимо Кошијев критеријум конвергенције и својства σ-алг.

$$\{\omega: \text{ постоји } \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)\} = \underbrace{\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{i=n}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty}}}_{\forall k\ \exists n_0\ \forall i,j \geq n_0} \underbrace{\{\omega: |X_i(\omega) - X_j(\omega)| < \tfrac{1}{k}\}}_{\text{Борелов } \boxed{12} \text{ ТЗ}} \in \mathcal{A};$$

2) $$\{\omega: \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \{\omega: |X_m(\omega) - X| < \tfrac{1}{k}\} \in \mathcal{A};$$

Теорема 6: Нека је (X_n) низ случ. вел. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Тада су:

$$\sup_n X_n, \quad \inf_n X_n, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} X_n, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} X_n$$

такође случајне величине, ако постоје и ако су коначне вредности за свако $\omega \in \Omega$.

Доказ: Аналогно следи из релација:

$$\{\omega: \sup_n X_n(\omega) < x\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega: X_n(\omega) < x - \tfrac{1}{k}\} \in \mathcal{A}; \qquad \text{(критеријум за супремум)}$$

$$\{\omega: \inf_n X_n(\omega) < x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega: X_n(\omega) < x\} \in \mathcal{A};$$

$$\{\omega: \overline{\lim_{n\to\infty}} X_n(\omega) < x\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty}} \{\omega: X_m(\omega) < x - \tfrac{1}{k}\} \in \mathcal{A};$$

$$\{\omega: \underline{\lim_{n\to\infty}} X_n(\omega) < x\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty}} \{\omega: X_m(\omega) < x - \tfrac{1}{k}\} \in \mathcal{A};$$

Напомена: Ако нешто не постоји на скупу мере нула $\Rightarrow$ додефинишемо (свуда $= 0$) $\Rightarrow$ случ. вел.

* деф. Нека је $X: \Omega \to R^n$ сл. век. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Функција $P_X: \mathcal{B}^n \to R$, $P_X(B) = P\{\omega \mid X(\omega) \in B\} = P(X^{-1}(B))$ је расподела вероватноћа сл. век. X.

Напомена: Лако се проверава да P_X заиста јесте вероватноћа.

Дакле, $(\Omega, \mathcal{B}^n, P_X)$ је простор вероватноћа.

деф. Нека је $X = (X_1, \dots, X_n)$.
Функција $F_X: R^n \to R$, $F_X(x_1, \dots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n\}$ $\overset{P_X((-\infty, x_1) \times \dots \times (-\infty, x_n))}{=}$ је функција расподеле сл. век. X.

Напомена: Лако се проверава да F_X заиста јесте функција расподеле.

деф. Сл. век. X има апсолутно непрекидну расподелу ако јој је ф-ја расподеле апс. непр.

Тада се одговарајућа f зове густина расподеле сл. вектора X.

* Уводимо маргиналне расподеле: (постоје само за апс. непр.)

деф. Нека сл. век. $X = (X_1, \dots, X_n)$ има густину $f(x_1, \dots, x_n)$.
Тада и сваки сл. век. $(X_{j_1}, \dots, X_{j_k})$, $1 \le j_1 \le \dots \le j_k \le n$, такође има густину.

Нпр. $(X_1, \dots, X_k)$, $k < n$, има густину: $\underbrace{f(x_1, \dots, x_k)} = \int_{R^{n-k}} f(x_1, \dots, x_n) \underbrace{dx_{k+1} \dots dx_n}_{\text{интеграл по свим осталим}}$.

Пример: $\mathcal{N}(m_1, m_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ – стр. 48

* Трансформација случ. вектора: Нека су A и B области у R^n и $g: A \to B$ непр. диф. бијекција.
обавезно!

Ако је $g = (g_1, \dots, g_n)$ и $(x_1, \dots, x_n) \in A$, онда $\forall (y_1, \dots, y_n) \in B$ $\exists!$ решење система $\begin{cases} x_1 = x_1(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ x_n = x_n(y_1, \dots, y_n) \end{cases}$

При томе, $J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right| \neq 0$, за $(y_1, \dots, y_n) \in B$.

Нека сл. век. $X = (X_1, \dots, X_n)$ има густину (апс. непр.) $f_X(x_1, \dots, x_n)$ у области A.
Затим, нека је $f_Y(y_1, \dots, y_n)$ густина сл. век. $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, где је $Y_k = g_k(X_1, \dots, X_k)$

Тада је $P\{X \in A\} = \int_A f_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int_B f_X(\overset{x_1(y_1, \dots, y_n)}{x_1}, \dots, \overset{x_n(y_1, \dots, y_n)}{x_n})\, |J|\, dy_1 \dots dy_n = P\{Y \in B\}$.

Закључак: $f_Y(y_1, \dots, y_n) = f_X(x_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n(y_1, \dots, y_n)) \cdot |J|$, чиме смо одредили густину Y на B.
као код смене у интегралу

$\boxed{14.}$ Независност случајних величина

деф. Нека су дати $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, скуп индекса S и фамилија случ. вел. $\{X_\nu : \Omega \to \mathbb{R} \mid \nu \in S\}$.

Случ. величине те фамилије су (потпуно) независне ако:

$$(\forall k \geq 2)(\forall \nu_1, \dots, \nu_k \in S)(\forall B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}) \quad P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} \{X_{\nu_j} \in B_j\}\Big) = \prod_{j=1}^{k} P\{X_{\nu_j} \in B_j\}.$$

Теорема 1: Нека су $F_1, \dots, F_n$ ф-је расподела случ. вел. $X_1, \dots, X_n$.
Такође, нека је $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ф-ја расподеле случ. вектора $X = (X_1, \dots, X_n)$.

$$X_1, \dots, X_n \text{ су независне} \iff \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \ldots \cdot F_n(x_n).$$

Доказ: $(\Rightarrow)$ тривијално (у деф. узмемо $B_j = (-\infty, x_j]$);

$(\Leftarrow)$ Нека су $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $a_k < b_k$.

важи за $I_1 \times \dots \times I_n$

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \in (a_k, b_k]\}\Big) = \Delta_F\big((a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]\big) = \prod_{k=1}^{n} (F_k(b_k) - F_k(a_k)) = \prod_{k=1}^{n} P\{X_k \in (a_k, b_k]\}.$$

Фиксирајмо $(a_2, b_2], \dots, (a_n, b_n]$ и докажимо да за сваки Борелов $B_1 \in \mathcal{B}$ важи:

$$P\Big(\{X_1 \in B_1\} \cap \bigcap_{k=2}^{n} \{X_k \in (a_k, b_k]\}\Big) \stackrel{?}{=} P\{X_1 \in B_1\} \cdot \prod_{k=2}^{n} P\{X_k \in (a_k, b_k]\}. \qquad (*)$$

$B_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$

Нека је M фамилија свих Борелових скупова B_1 за које важи $(*)$.
Тада M садржи минималну алг. $\mathcal{B}_0$ (која садржи све инт. $(a,b]$) $\Rightarrow \mathcal{B}_0 \subset M \subset \mathcal{B}$.

Докажимо да је M монотона класа: стр. 51.

По $\boxed{4}$ Т3: $\sigma(\mathcal{B}_0) = M(\mathcal{B}_0) \Rightarrow M = \mathcal{B} \Rightarrow (*)$ важи за сваки Борелов скуп B_1.

Аналогно, и $(a_2, b_2], \dots, (a_n, b_n]$ можемо заменити произв. Бореловим скуповима $B_2, \dots, B_n$.

Теорема 2: Дискретне $X_1, \dots, X_n$ су независне $\iff \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k = x_k\}\Big) = \prod_{k=1}^{n} P\{X_k = x_k\}$.

Теорема 3: Апс. непр. $X_1, \dots, X_n$ су независне $\iff \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n)$.

Доказ: Последице Т1.

деф. Нека је (X, Y) дискретан случ. вектор чија је расподела дата са:

$$P\{(X,Y) = (x_i, y_j)\} = p_{ij} \qquad (i,j = 1,2,\dots \quad \text{и} \quad \sum_i \sum_j p_{ij} = 1)$$

Означимо $p_i = \sum_j p_{ij} \quad (i = 1,2,\dots)$ и $q_j = \sum_i p_{ij} \quad (j = 1,2,\dots)$.

Условна расподела случ. вел. X при услову $Y = y_j$, где $q_j = P\{Y = y_j\} > 0$, деф. се са:

$$P\{X = x_i \mid Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i,\ Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{q_j} \qquad (i = 1,2,\dots)$$

Аналогно: $$P\{Y = y_j \mid X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i,\ Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_i} \qquad (j = 1,2,\dots)$$

* Нека је (X, Y) случ. вектор са густином $f: R^2 \to R$.
Претпоставимо да је маргинална густина f_X непр. и позитивна у фикс. тачки x.

Тада $\forall h > 0$: $$P\{Y \le y \mid x-h < X \le x+h\} = \frac{P\{Y \le y,\ x-h < X \le x+h\}}{P\{x-h < X \le x+h\}} = \frac{\int_{-\infty}^{y} \int_{x-h}^{x+h} f(u,v)\,du\,dv}{\int_{x-h}^{x+h} f_X(u)\,du}$$

$$= \frac{\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du}{\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f_X(u)\,du}$$

За $h \to 0$: $$\lim_{h \to 0} P\{Y \le y \mid x-h < X \le x+h\} = \frac{1}{f_X(x)} \int_{-\infty}^{y} f(x,v)\,dv.$$

деф. Функција $F_{Y|X=x}: R \to R$, $F_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{f_X(x)} \int_{-\infty}^{y} f(x,v)\,dv$ зове се условна функција расподеле сл. вел. Y при услову $X = x$.

Њен извод, тј. ф-ја $f_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$ зове се густина условне расподеле сл. вел. Y при услову $X = x$.

Аналогно: $F_{X|Y=y}(x) = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{x} f(u,y)\,du$ и $f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$.

15. Математичко очекивање 1

План: 1) дефинишемо за ненегативне дискретне;
2) дефинишемо за ненегативне;
3) дефинишемо опште.

1) деф. Нека је $X(\omega) = \sum^{\infty} x_n I_{A_n}(\omega)$ дискретна сл. вел. где је $\bigsqcup^{\infty} A_n = \Omega$ разбијање, а $(x_n) \geq 0$ низ.

Математичко очекивање сл. вел. X је $E(X) := \sum^{\infty} x_n \cdot P(A_n)$.

Ако је ред са десне стране дивергентан, сматрамо $E(X) = +\infty$.

Пример: Ако $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix} \Rightarrow E(X) = \sum^{\infty} x_n p_n$.

Лема 1: $E(X)$ не зависи од избора разбијања;

Лема 2: $E(cX) = c \cdot E(X)$;

Лема 3: A, B - дисј. догађаји $\Rightarrow E(X I_{A \cup B}) = E(X I_A) + E(X I_B)$;

Лема 4: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$;

Доказ: $X = \sum^{\infty} x_n I_{A_n}$, $Y = \sum^{\infty} y_m I_{B_m}$, где $A_k := \{X = x_k\}$, $B_k := \{Y = y_k\}$.

$X + Y = \sum_n \sum_m (x_n + y_m) I_{A_n} \cdot I_{B_m} = \sum_n \sum_m (x_n + y_m) I_{A_n B_m}$

$\Rightarrow E(X+Y) = \sum_n \sum_m (x_n + y_m) \cdot P(A_n B_m) = \sum_n x_n \underbrace{\sum_m P(A_n B_m)}_{P(A_n)} + \sum_m y_m \underbrace{\sum_n P(A_n B_m)}_{P(B_m)} = E(X) + E(Y)$.

формула потпуне верov.

Лема 5: $m \leq X(\omega) \leq Y(\omega) \leq M \Rightarrow m \leq E(X) \leq E(Y) \leq M$.

Примери: 1) Индикатор: $E(I_A) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$.

2) $S_n \in \mathcal{B}(n,p)$: $E(S_n) = np$.

3) $X \in \mathcal{P}(\lambda)$: $E(X) = \lambda$. (доказ: стр. 57)

2) деф. Нека је X произвољна ненегативна случ. вел.
Нека је (X_n) низ дискретних ненег. случ. вел. ткд. на Ω равномерно важи $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$.

Математичко очекивање случ. вел. X је $E(X) := \lim\limits_{n\to\infty} E(X_n)$.

Проверавамо да ли је деф. добра кроз 4 леме:

Лема 6: За свако X постоји низ (X_n).

Доказ: За $n, k \in \mathbb{N}$ уводимо $A_{nk} = \left\{ \omega \mid \frac{k-1}{2^n} \le X(\omega) < \frac{k}{2^n} \right\}$.

За $n \in \mathbb{N}$ уводимо $X_n = \sum\limits^{\infty} \frac{k-1}{2^n} I_{A_{nk}} = \frac{k-1}{2^n}$ ако $\frac{k-1}{2^n} \le X(\omega) < \frac{k}{2^n}$.

Тада: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \omega \in \Omega\quad 0 \le X_n(\omega) \le \underset{\uparrow \text{расте}}{X_{n+1}(\omega)}$ и $0 \le X(\omega) - X_n(\omega) < \underset{\uparrow \text{тежи}}{\frac{1}{2^n}}$.

Лема 7: $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n)$ постоји као коначан број или $+\infty$.

Доказ: По Л5: $E(X_1) \le E(X_2) \le \dots$, а сваки растући низ конвергира.

Лема 8: $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n)$ не зависи од избора низа (X_n).

Доказ: Прво приметимо: Ако $\forall \omega \in \Omega\ 0 \le X_n(\omega) \uparrow X(\omega) \ge Y(\omega)$, где је Y - ненег. дискр.
онда: $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) \ge E(Y)$.

Доказ: (стр. 58)

Сада: Нека су (X_n), (Y_n) два онаква низа, дакле $X_n \uparrow X$, $Y_n \uparrow X$ (X - дато)

$$\left.\begin{array}{lll} \text{По претходном: } \forall k \in \mathbb{N} & \lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) \ge E(Y_k) \Rightarrow & \lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) \ge \lim\limits_{k\to\infty} E(Y_k) \\ \text{Аналогно: } \forall k \in \mathbb{N} & \lim\limits_{n\to\infty} E(Y_n) \ge E(X_k) \Rightarrow & \lim\limits_{n\to\infty} E(Y_n) \ge \lim\limits_{k\to\infty} E(X_k) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) = \lim\limits_{k\to\infty} E(Y_k)$$

Лема 9: Ако је X ненег. дискр. сл. вел. $\Rightarrow$ $E(X) = \sum\limits^{\infty} x_n \cdot P(A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} E(X_n)$. (ово нам говори да смо добро уопштили)

Доказ: По Л8, довољно је посматрати низ $X_n = X$, $\forall n$. На њега применимо Л7. $(3 = 1 := 2)$

3) деф. Нека је X произвољна случ. вел.

Уведимо случ. вел. $X^+ = \max\{X, 0\}$, $X^- = \max\{-X, 0\}$. Оне су ненегативне.
Оне се зову позитивни и негативни део случајне величине X.
По 2), $E(X^+)$ и $E(X^-)$ су одређени.

Ако је бар један од $E(X^+)$ и $E(X^-)$ коначан: математичко очекивање је $E(X) := E(X^+) - E(X^-)$.
Ако су оба $+\infty$, мат. очекивање не постоји.

деф. Нека је X случ. вел. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Математичко очекивање, тј. Лебегов интеграл функције X по мери P, означавамо и са:

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega)\, P(d\omega) = \int_\Omega X\, dP.$$

деф. Нека је $A \in \mathcal{A}$.
Математичко очекивање за XI_A зове се Лебегов интеграл ф-је X над скупом A по мери P.

$$E(XI_A) = \int_A X(\omega)\, P(d\omega) = \int_A X\, dP.$$

За сл. вел. X кажемо да је интеграбилна над скупом A по мери P ако $E(XI_A)$ постоји и коначно је.

деф. Ако је $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Борелова, онда је $h(X)$ такође случ. вел. (по $\boxed{13}$ Т4)

$$E(h(X)) = \int_\Omega h(X(\omega))\, P(d\omega) = \int_\Omega h(X)\, dP.$$

деф. Сл. вел. X генерише простор $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$. Нека је F_X њена ф-ја расподеле.

Помоћу P_X, претходни интег. записујемо као: $\int_\Omega h(X(\omega))\, P(d\omega) = \int_\Omega h(x)\, P_X(dx)$

Интеграл десно се записује и у облику: $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, dF_X(x)$.
То зовемо Лебег-Стилтјесов интеграл функције $h(x)$ по мери P_X одређеној ф-јом расподеле F_X.

Тражимо мат. оч. апсолутно непрекидне случ. вел.

Теорема 1: Нека је X сл. вел. са апс. непр. ф-јом расп. F, густином f и нека је $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Борелова.

Ако $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| f(x)\, dx < +\infty$, онда постоји мат. оч. за $g(X)$ и то:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\, dx. \qquad \text{(несвојствени Риманов интеграл)}$$

Последица: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx.$

Примери: Погледати извођења у скрипти (стр. 61)

1) $X \in \mathcal{U}[a,b]$: $\quad E(X) = \frac{a+b}{2}$;

2) $X \in \Gamma(\alpha, \frac{1}{\beta})$: $\quad E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$;

Спец: $\alpha = 1, \ \beta = \lambda \ \Rightarrow \ X \in \mathcal{E}(\lambda)$: $\quad E(X) = \frac{1}{\lambda}$;

3) $X \in \mathcal{N}(m, \sigma^2)$: $\quad E(X) = m$;

4) Кошијева: $\quad E(X)$ не постоји.

Теорема 2:
1) $E(cX+d) = c \cdot E(X) + d$;

2) $P(A) = 0 \ \Rightarrow \ E(XI_A) = \int_A X\, dP = 0$;

3) $\forall \omega \in \Omega \ \ X(\omega) \leq Y(\omega) \ \Rightarrow \ E(X) \leq E(Y)$;

4) $|E(X)| \leq E(|X|)$;

5) A, B - дисј. $\Rightarrow \ E(XI_{A\cup B}) = E(XI_A) + E(XI_B)$, тј. $\int_{A\cup B} X\, dP = \int_A X\, dP + \int_B X\, dP$;

6) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$;

7) $E(X)$ и $E(|X|)$ су истовремено коначни или не.

Теорема 3 (σ-адитивност):

Ако је X сл. вел. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и $\bigcup_n^{\infty} A_n = \Omega \ \Rightarrow \ E(X) = \sum_n^{\infty} E(XI_{A_n})$, тј. $\int_\Omega X\, dP = \sum_n^{\infty} \int_{A_n} X\, dP$.

При томе, ако је $E(X)$ коначно $\Rightarrow$ коначни су сви $E(XI_{A_n})$ и ред апс. конвергира.

Теорема 4 (апсолутна непрекидност):

Ако је $E(X)$ коначно, онда: $\quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall A) \ \ P(A) < \delta \ \Rightarrow \ |E(XI_A)| = \int_A X\, dP < \varepsilon$

Теорема 5: Ако су X, Y независне случ. вел. са коначним мат. очекивањем. (у оба смера важи)
Онда и случ. вел. $X \cdot Y$ има коначно мат. очекивање и важи: $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$.

Обрнуто, ако $X \cdot Y$ има коначно мат. очекивање, а ни X ни Y нису 0 са вероватноћом 1, онда и X и Y имају коначно мат. очекивање.

Доказ: ($\Rightarrow$) $1°$ X, Y - дискретне ненегативне:

$X = \sum^{\infty} x_n I_{A_n}$, $Y = \sum^{\infty} y_k I_{B_k}$, где $A_k := \{X = x_k\}$, $B_k := \{Y = y_k\}$ су разбијања Ω.

$$X \cdot Y = \sum_n^{\infty} \sum_k^{\infty} x_n y_k \cdot I_{A_n} \cdot I_{B_k} = \sum_n^{\infty} \sum_k^{\infty} x_n y_k I_{A_n B_k}.$$

X, Y - нез. сл. вел. $\Rightarrow$ $A_k := \{X = x_k\}$, $B_k := \{Y = y_k\}$ су независни догађаји

$$\Rightarrow E(XY) = \sum_n^{\infty} \sum_k^{\infty} x_n y_k P(A_n B_k) = \sum_n^{\infty} \sum_k^{\infty} x_n y_k P(A_n) \cdot P(B_k)$$
$$= \sum_n^{\infty} x_n P(A_n) \cdot \sum_k^{\infty} y_k P(B_k) = E(X) \cdot E(Y)$$

$2°$ X, Y - ненегативне:

За $n, k \in \mathbb{N}$ уводимо $A_{nk} = \left\{\omega \mid \frac{k-1}{2^n} \le X(\omega) < \frac{k}{2^n}\right\}$, $B_{nk} = \left\{\omega \mid \frac{k-1}{2^n} \le Y(\omega) < \frac{k}{2^n}\right\}$

За $n \in \mathbb{N}$ уводимо $X_n = \sum_k^{\infty} \frac{k-1}{2^n} I_{A_{nk}}$, $Y_n = \sum_k^{\infty} \frac{k-1}{2^n} I_{B_{nk}}$.

као у Л6

(X_n), (Y_n) су низови ненег. дискр. сл. вел. за које $X_n \uparrow X$, $Y_n \uparrow Y$, па и $X_n Y_n \uparrow XY$.

X, Y - нез. сл. вел. $\Rightarrow$ $\forall n$ X_n, Y_n - нез. сл. вел.

$$\Rightarrow E(XY) = \lim_{n\to\infty} E(X_n Y_n) \overset{1°}{=} \lim_{n\to\infty} E(X_n) E(Y_n) = \lim_{n\to\infty} E(X_n) \cdot \lim_{n\to\infty} E(Y_n) = E(X) \cdot E(Y).$$

$3°$ X, Y - произвољне

X, Y - нез. сл. вел. $\Rightarrow$ X^+ и X^- независне од Y^+ и Y^-.

$$\Rightarrow E(XY) = E[(X^+ - X^-)(Y^+ - Y^-)] = \underset{\text{тривијалан рачун}}{\ldots} = E(X)\, E(Y)$$

(стр. 64)

($\Leftarrow$) Знамо: $E|XY| < \infty$.
X, Y - независне $\Rightarrow$ $|X|, |Y|$ - независне и важи $E|X| > 0$, $E|Y| > 0$.

По ($\Rightarrow$) важи: $E|X| \cdot E|Y| = E|XY| < \infty$ $\Rightarrow$ $E(|X|) < +\infty$ и $E(|Y|) < +\infty$
$\Rightarrow$ $E(X) < +\infty$ и $E(Y) < +\infty$

16. Математичко очекивање 2

Нека је (X_n) низ случ. вел. деф. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и нека $\forall \omega \in \Omega$ $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$.
То означавамо краће са: $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$.

Питамо се када важи $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) = E(\lim\limits_{n\to\infty} X_n)$, тј. када $\lim\limits_{n\to\infty}$ пролази кроз E?

Теорема 1 (Теорема о монотоној конвергенцији):

Нека су X, Y случ. вел. и (X_n) низ ткд: а) $\forall \omega \in \Omega$ $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$; – монотона
б) $\forall \omega \in \Omega$ $X_n(\omega) \geq Y(\omega)$;
в) $E(Y) > -\infty$.

Тада важи: $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) = E(\lim\limits_{n\to\infty} X_n)$.

Теорема 2 (Фатуова лема):

Нека је Y случ. вел. и (X_n) низ ткд: → $\forall \omega \in \Omega$ $X_n(\omega) \geq Y(\omega)$; (б)
→ $E(Y) > -\infty$. (в)

Тада важи: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, E(X_n) \geq E(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, X_n)$

Последица:

Нека је Y случ. вел. и (X_n) низ ткд: → $\forall \omega \in \Omega$ $X_n(\omega) \leq Y(\omega)$;
→ $E(Y) < +\infty$.

Тада важи: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, E(X_n) \leq E(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, X_n)$.

Теорема 3 (Лебегова теорема о доминантној конвергенцији):

Нека су X, Y случ. вел. и (X_n) низ ткд: а) $\forall \omega \in \Omega$ $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$. – доминантна
б) $\forall \omega \in \Omega$ $|X_n(\omega)| \leq Y(\omega)$;
в) $E(Y) < +\infty$;

Тада важи: $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) = E(\lim\limits_{n\to\infty} X_n)$.

Доказ: из претходног.

17. Моменти вишег реда

деф. Нека је X произвољна случ. вел.

$E(X^n)$ зове се n-ти моменат;
$E(|X|^n)$ зове се n-ти апсолутни моменат;
$E((X-E(X))^n)$ зове се n-ти центрирани моменат случ. вел. X.

Специјално, други центрирани моменат зове се дисперзија $D(X) := E((X-E(X))^2)$

Теорема 1: 1) $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$;

2) $0 \leq D(X) \leq E(X^2)$;

3) $D(aX+b) = a^2 D(X)$;

4) X, Y - независне: $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$;

Важи и општије: $D(\sum^n X_k) = \sum^n D(X_k)$.

Доказ: 1) $D(X) = E(X-EX)^2 = E(X^2 - 2X \cdot EX + (EX)^2)$

$= E(X^2) - 2(EX)^2 + (EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2$;

2) тривијално;

3) $D(aX+b) = E(aX+b)^2 - (aEX+b)^2 = E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - a^2EX - 2ab\,EX - b^2$

$= a^2(E(X^2) - (EX)^2) = a^2 DX$;

4) $D(X+Y) = E(X+Y)^2 - (EX+EY)^2 = E(X^2 + 2XY + Y^2) - (EX+EY)^2$

$= (E(X^2) - (EX)^2) + (E(Y^2) - (EY)^2) - 2E(XY) + 2EX \cdot EY = DX + DY$.

Примери: Погледати извођења у скрипти.

1) $X = I_A$: $D(I_A) = p(1-p)$;

2) $S_n \in \mathcal{B}(n,p)$: $D(S_n) = np(1-p)$;

3) $X \in \mathcal{P}(\lambda)$: $D(X) = \lambda$;

4) $X \in \mathcal{U}[a,b]$: $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$;

5) $X \in \Gamma(\alpha, \beta)$: $D(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$

Спец: $\alpha = 1$, $\beta = \lambda \Rightarrow X \in \mathcal{E}(\lambda)$: $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

6) $X \in \mathcal{N}(m, \sigma^2)$: $D(X) = \sigma^2$.

* У наставку наводимо разне неједнакости.

Теорема 2 (Чебишовљева неједнакост):

Нека је X сл. вел. и $\varepsilon, r > 0$. Тада: $P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E|X|^r}{\varepsilon^r}$.

Специјално, за $r=2$ важи: $P\{|X-EX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$.

Доказ: $E(|X|^r) = \int_\Omega |X|^r \, dP = \int_{\{|X|\geq\varepsilon\}} + \int_{\{|X|<\varepsilon\}} \overset{\text{склонили други}}{\geq} \int_{\{|X|\geq\varepsilon\}} |X|^r \, dP \geq \varepsilon^r \int_{\{|X|\geq\varepsilon\}} dP = \varepsilon^r \cdot P\{|X|\geq\varepsilon\}$.

Теорема 3: Нека је X ненегативна сл. вел. Тада важи:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{X \geq n\} \leq EX \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\{X \geq n\}$$

Доказ: Означимо $A_k = \{\omega \mid k \leq X(\omega) \leq k+1\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Приметимо: $\sum^{\infty} P\{X \geq n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(A_k)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{X \geq n\} = \sum_{k=1}^{\infty} k P(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} k \, dP \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} X \, dP = \int_\Omega X \, dP = EX$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} (k+1) \, dP = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) P(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) + \sum_{k=1}^{\infty} k P(A_k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\{X \geq n\}$$

Теорема 4 (Буњаковски - Кошијева неједнакост):

Нека су X, Y случ. вел. са коначним другим моментима. Тада важи:

$$(E|XY|)^2 \leq E(X^2) \cdot E(Y^2).$$

Доказ: Приметимо: $2|XY| \leq X^2 + Y^2$ (увек важи), $EX^2, EY^2 < +\infty \Rightarrow E|XY| < +\infty$

Даље, за свако $t \in \mathbb{R}$: $E(|X| + t|Y|)^2 = EX^2 + 2t\, E|XY| + t^2 EY^2 \geq 0$.

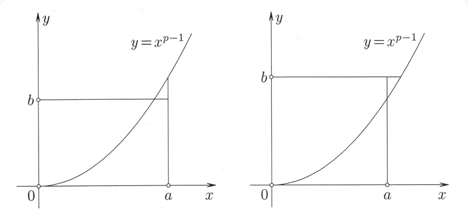
$\Rightarrow$ дискриминанта ≤ 0 $\Rightarrow (2E|XY|)^2 \leq 4 \cdot EX^2 \cdot EY^2 \Rightarrow (E|XY|)^2 \leq E(X^2) \cdot E(Y^2)$.

Теорема 5 (Хелдерова неједнакост):

Нека су $p, q \in \mathbb{R}$: $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Нека су X, Y случ. вел.ткд. $E|X|^p, E|Y|^q < +\infty$.

Тада:
$$E|XY| \leq (E|X|^p)^{1/p} \cdot (E|Y|^q)^{1/q}.$$

Доказ: Посматрајмо функцију $y = x^{p-1}$, $0 \leq x < +\infty$.
Њена инв. ф-ја је $x = y^{q-1}$, $0 \leq y < +\infty$.



Сл. 1 Сл. 2

* Са слика, за $p-1 > 1$ добијамо:

$$\underset{\text{површина правоугаоника}}{ab} \leq \int_0^a x^{p-1}\,dx + \int_0^b y^{q-1}\,dy = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Заменимо: $a = \frac{|X|}{(E|X|^p)^{1/p}}$, $b = \frac{|Y|}{(E|Y|^q)^{1/q}}$ у горњој неједнакости.

Рачунамо: $E\left(\frac{|X|}{(E|X|^p)^{1/p}} \cdot \frac{|Y|}{(E|Y|^q)^{1/q}}\right) \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{E|X|^p}{E|X|^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{E|Y|^q}{E|Y|^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

* Аналогно за $0 < p-1 \leq 1$.

Наредне неједнакости нисмо доказивали, али дата су упутства

Теорема 6 (Јенсенова неједнакост): Нека је $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Борелова, конвексна наниже и $EX < +\infty$.
$$h(EX) \leq Eh(X).$$

Теорема 7 (Љапуновљева неједнакост):

1) Нека је $0 < s < t$ и $E|X|^t < +\infty$. Тада: $(E|X|^s)^{1/s} \leq (E|X|^t)^{1/t}$.

2) Нека је $E|X|^n < +\infty$. Тада: $E|X| \leq (E|X|^2)^{1/2} \leq (E|X|^3)^{1/3} \leq \ldots \leq (E|X|^n)^{1/n}$.

Теорема 8 (Неједнакост Минковског): Нека је $E|X|^p, E|Y|^p < +\infty$, $1 \leq p < +\infty$.

1) $E|X+Y|^p < +\infty$

2) $(E|X+Y|^p)^{1/p} \leq (E|X|^p)^{1/p} + (E|Y|^p)^{1/p}$.

18. Коваријација, коефицијент корелације

* Прво дефинишемо мат. очекивање функције случајног вектора:

деф. Нека је $X=(X_1, \dots, X_n)$ случ. вектор на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и нека је $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Борелова.
Математичко очекивање сл. величине $h(X)$ је:

$$Eh(X) := \int_\Omega h(X)\,dP = \int_{\mathbb{R}^n} h(x_1, \dots, x_n)\, dP_X(x_1, \dots, x_n)$$ (Лебегов интеграл)

Напомена: Нека је $X=(X_1, \dots, X_n)$ случ. вектор са густином $f(x_1, \dots, x_n)$. Тада важи:

$$Eh(X) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x_1, \dots, x_n)\, f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$ (несвојствени вишеструки Риманов)

Пример: За $h(x_1, \dots, x_n) = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ добијамо случ. вел. $X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$.

Њено мат. очекивање зовемо мешовити момент реда $(k_1, \dots, k_n)$ случ. вектора $(X_1, \dots, X_n)$.

* Сада прелазимо на оно главно:

деф. Нека су X, Y случ. вел. ткд. $0 \neq DX, DY < +\infty$.

Коваријација случ. вел. X и Y је $cov(X,Y) := E(X-EX)\cdot E(Y-EY) = E(XY) - EX\cdot EY$.

Коефицијент корелације случ. вел. X и Y је $\rho(X,Y) := \dfrac{E(XY) - EX\cdot EY}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}$.

деф. Сл. вел. X, Y су некорелиране ако $cov(X,Y)=0$. (самим тим $\rho(X,Y)=0$).

Лема 1: X, Y независне $\Rightarrow$ X, Y некорелиране.

Доказ: X, Y нез. $\overset{\text{T5}}{\Rightarrow}$ $E(XY) = E(X)E(Y)$ $\Rightarrow$ $cov = 0$ $\Rightarrow$ X, Y некорелиране.

Напомена: X, Y некорелиране $\not\Rightarrow$ X, Y независне.

Пример: $X: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $Y = X^2: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Теорема 1: Важи: $DX, DY < +\infty \Rightarrow |\rho(X,Y)| \le 1.$

При томе: $|\rho(X,Y)| = 1 \Leftrightarrow$ зависност X, Y је линеарна.

Доказ: * Означимо: $X^* = \frac{X - EX}{\sqrt{DX}}$, $Y^* = \frac{Y - EY}{\sqrt{DY}} \Rightarrow EX^* = EY^* = 0,\ DX^* = DY^* = 1,\ \rho(X,Y) = cov(\xi, \eta).$

$$\Rightarrow D(X^* \pm Y^*) = \underset{\uparrow \text{ расписати преко } E}{\dots} = DX^* \pm 2cov(X^*, Y^*) + DY^* = 2 \pm 2\rho(X,Y) = 2(1 \pm \rho(X,Y)).$$

Како је D ненегативно $\Rightarrow |\rho(X,Y)| \le 1.$

* $\rho(X,Y) = 1 \Leftrightarrow D(X^* - Y^*) = 0 \Leftrightarrow X^* + Y^* = const$ са вероватноћом 1.

$\rho(X,Y) = -1 \Leftrightarrow D(X^* + Y^*) = 0 \Leftrightarrow X^* - Y^* = const$ са вероватноћом 1.

Лема 2: 1) $cov(X+a, Y+b) = cov(X,Y);$

2) $\rho(X+a, Y+b) = \rho(X,Y);$

Доказ: тривијално

Пример: стр. 74: За нормално расподељене X, Y, независност $\Leftrightarrow$ некорелираност.

* Прво наводимо неке деф. и ставове за матрице:

деф. Знамо шта су симетрична, дијагонална, јединична ($\nearrow E$) и транспонована ($\nearrow A^*$) матрица.

Такође, знамо да је матрица ортогонална ако $AA^* = E$.

деф. Матрица $B = [b_{kl}]_{n\times n}$ је ненегативно дефинисана ако: $\forall (\beta_1, \dots, \beta_n) \in R^n$ $\quad \sum_k^n \sum_l^n \beta_k \beta_l b_{kl} \geq 0$.

Лема 3: Матрица $B = [b_{kl}]_{n\times n}$ је симетрична и ненег. деф. $\Leftrightarrow$ $\exists A \in M_{n\times k}$, $(1 \leq k \leq n)$ $B = AA^*$.

Лема 4: За сваку сим. и ненег. деф. B, постоји ортог. матрица M ткд. $M^* B M = D$, при чему је D дијагонална матрица са ненег. елементима.

Сада уводимо нама значајан појам.

деф. Нека је $X = (X_1, \dots, X_n)$ случ. вектор ткд. $\forall k \leq n$ $EX_k^2 < +\infty$.

Матрица $B = [b_{kl}]_{n\times n}$, $b_{kl} = cov(X_k, X_l)$ зове се коваријациона матрица случ. век. X.

Критеријум када је нека матрица коваријациона или не:

Теорема 2: B је коваријациона $\Leftrightarrow$ B је симетрична и ненегативно дефинисана.

Доказ: $(\Rightarrow)$ B је ковар. $\Rightarrow$ B је симетрична

Осим тога, за $\forall (\beta_1, \dots, \beta_n)$ важи: $\sum_k^n \sum_l^n \beta_k \beta_l b_{kl} = \sum_k^n \sum_l^n \beta_k \beta_l \overset{E[(X_k - EX_k)(X_l - EX_l)]}{\overset{\shortparallel}{cov(X_k, X_l)}} = E\left(\sum_k^n (X_k - EX_k)\beta_k\right)^2 \geq 0$.

$(\Leftarrow)$ Матрица $B = [b_{kl}]_{n\times n}$ је симетрична и ненег. деф.

По Л4: $\exists$ ортог. M ткд. $M^* B M = D$, при чему $d_{kk} \geq 0$, $d_{kl} = 0$.
Тада: $B = MDM^* = \underbrace{(MD_1)}_{A} \underbrace{(D_1^* M^*)}_{A^*}$, где је D_1 матрица са елементима $\sqrt{d_{11}}, \sqrt{d_{22}} \dots$

Сада ћемо конструисати случ. вектор чија је ковар. матрица баш B:

Нека су $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{N}(0,1)$ независне и $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$, $\quad X = A \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$.

Тада: $E(XX^*) = E\left((AY)(AY)^*\right) = A \cdot \underbrace{E(YY^*)}_{=E \text{ (пример)}} \cdot A^* = A \cdot A^* = B$.

Дакле, B је ковар. матрица случ. вектора X.

19. Условно мат. очекивање (разбијање)

деф. Фамилија $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$ је разбијање сигурног догађаја ако $P(D_i) > 0$ и $\bigsqcup^{k} D_i = \Omega$.

Скупови D_i су атоми разбијања $\mathcal{D}$.

деф. Условна вероватноћа догађаја A у односу на разбијање $\mathcal{D}$ је случ. величина:

$$P(A \mid \mathcal{D})(\omega) := \sum^{k} P(A \mid D_i) \cdot \underbrace{I_{D_i}(\omega)}.$$

↳ нађемо ком D_i припада ω_0, нпр. D_1 $\Rightarrow$ $P(A|\mathcal{D})(\omega_0) = P(A|D_1)$
(само ту је 1, остали сабирци 0

Лема 1: 1) $P(A \sqcup B \mid \mathcal{D}) = P(A \mid \mathcal{D}) + P(B \mid \mathcal{D})$;

2) $\mathcal{D}_0 = \{\Omega\}$ (тривијално разбијање) $\Rightarrow$ $P(A \mid \mathcal{D}_0) = P(A)$;

3) Формула потпуне вероватноће: $E\big[P(A \mid \mathcal{D})\big] = P(A)$.

Доказ: 1) тривијално;
2) тривијално (сви I су 1);

3) $EP(A|\mathcal{D}) = E\left(\sum^{k} P(A|D_i) \cdot I_{D_i}\right) = \sum^{k} P(A|D_i)\, E(I_{D_i}) = \sum^{k} P(A|D_i)\, P(D_i) = \sum^{k} P(AD_i) = P(A)$.

деф. Нека је $Y = \sum^{k} y_j I_{D_j}$ сл. вел. која узима вредности $y_1, \dots, y_k$ са врв. $P(D_1), \dots, P(D_k)$, $D_j = \{\omega \mid Y(\omega) = y_j\}$.

Разбијање $\mathcal{D}_Y = \{D_1, \dots, D_k\}$ је разбијање генерисано случајном величином Y.

Уместо $P(A|\mathcal{D}_Y)$ пишемо $P(A|Y)$ и зваћемо је условна вероватноћа догађаја A
у односу на случ. вел. Y.

D_1 - скуп свих $\omega \in \Omega$ који иду у y_1

деф. Ако су $Y_1, \dots, Y_n$ сл. вел. које узимају коначно много вредности,
дефинишемо разбијање $\mathcal{D}_{Y_1, \dots, Y_n}$ које је генерисано овим случајним величинама.

Такође, $P(A \mid Y_1, \dots, Y_n) := P(A \mid \mathcal{D}_{Y_1, \dots, Y_n})$.

деф. Нека је $X = \sum^{n} x_j I_{A_j}$ сл. вел. која узима вредности $x_1, \dots, x_n$ и $A_j = \{\omega \mid X(\omega) = x_j\}$.
Нека је $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$ разбијање сиг. дог.

Условно математичко очекивање сл. вел. X у односу на разбијање $\mathcal{D}$ је случ. величина:

$$E(X \mid \mathcal{D}) := \sum_{j}^{n} x_j\, P(A_j \mid \mathcal{D}) = \sum_{j}^{n} x_j \sum_{i}^{k} P(A_j \mid D_i)\, I_{D_i}.$$

Лема 2: 1) $E(aX+bY \mid D) = a\,E(X|D) + b\,E(Y|D)$;

2) $E(X|\{\Omega\}) = EX$;

3) $E(c|D) = c$;

4) $X = I_A \quad \Rightarrow \quad E(X|D) = E(I_A|D) = P(A|D)$;

5) $E(E(X|D)) = EX$.

Доказ: тривијално преко деф. (стр. 78)

деф. Нека је $D = \{D_1, \dots, D_k\}$ разбијање сиг. догађаја.

Случ. вел. Y је **мерљива у односу на разбијање** D / **D-мерљива** ако:

$$Y(\omega) = \sum^{k} y_j I_{D_j}(\omega).$$

Другим речима, узима константне вредности y_j на атомима разбијања D_j.

Пример: 1) Дискр. сл. вел. Y која узима коначно много вредности, мерљива је у односу на D_Y.

2) $E(X|D)$ је мерљива у односу на X.

Теорема 1: Нека је $D = \{D_1, \dots, D_k\}$ разбијање сиг. догађаја.
Нека је Y D-мерљива, а X произвољна и узима коначно много вредности.

1) $E(XY|D) = Y \cdot E(X|D)$;

2) $E(Y|D) = Y$.

Доказ: 1) стр. 79

2) ставимо $X = 1$ у 1).

Теорема 2: Нека је $D = \{D_1, \dots, D_k\}$ разбијање сиг. догађаја.
Нека су X, Y сл. вел. које узимају коначно много вредности.

Ако су X, Y незав. и X не зависи од разбијања D $\Rightarrow E(XY|D) = E(X) \cdot E(Y|D)$;
(тј. од I_{D_l}, $1 \le l \le k$)

Доказ: стр. 80

деф. Разбијање D_2 је **финије** од разбијања D_1 ако сваки атом из D_1 унија атома из D_2.
Пишемо $D_1 \leq D_2$.

Теорема 3: Нека је $D_1 \leq D_2$ и X сл. вел. која узима коначно много вредности. Тада:

$$E(E(X|D_2)\,|\,D_1) = E(X|D_1).$$

Доказ: стр. 81

деф. Нека је X дискретна случ. вел. са коначним скупом вредности и $D = \{D_1, \dots, D_k\}$ разб.

Условна дисперзија сл. вел. X **у односу на разбијање** D је случ. величина:

$$D(X|D) := E\left[\left(X - E(X|D)\right)^2 \,\middle|\, D\right].$$

Напомена: $DX = E(D(X|D)) + D(E(X|D))$.

20. Условно мат. очекивање (σ- алгебра)

- Нека је $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ- подалгебра σ- алгебре $\mathcal{A}$

- Под проширеном случајном величином подразумевамо $Y: \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ткд. $\forall B \in \mathcal{B}$ $Y^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

деф. Условно математичко очекивање ненегативне сл. вел. X у односу на σ-алгебру $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ је ненегативна проширена случ. вел. $E(X|\mathcal{F})$ ткд:

1) $E(X|\mathcal{F})$ је $\mathcal{F}$- мерљива;

2) $\int_A X \, dP = \int_A E(X|\mathcal{F}) \, dP$.

деф. Условно математичко очекивање сл. вел. X у односу на σ-алгебру $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ се дефинише ако је $E(X^+|\mathcal{F}) < +\infty$ или $E(X^-|\mathcal{F}) < +\infty$ скоро сигурно:

$$E(X|\mathcal{F}) := E(X^+|\mathcal{F}) - E(X^-|\mathcal{F}).$$

При томе, на скупу (вероватноће 0) елем. дог. за које $E(X^+|\mathcal{F}) = E(X^-|\mathcal{F}) = +\infty$ на њему се разлика $E(X^+|\mathcal{F}) - E(X^-|\mathcal{F})$ дефинише произвољно (нпр. 0).

деф. Нека је условно мат. очекивање $E(X|\mathcal{F})$ дефинисано.

Условна дисперзија сл. вел. X у односу на σ-алгебру $\mathcal{F}$ је случ. вел:

$$D(X|\mathcal{F}) := E\left((X - E(X|\mathcal{F}))^2 \,|\, \mathcal{F}\right)$$

деф. Нека $B \in \mathcal{F}$.
$P(B|\mathcal{F}) := E(I_B|\mathcal{F})$ зове се условна вероватноћа догађаја B у односу на σ-алгебру $\mathcal{F}$.

Лема 1: 1) $P(B|\mathcal{F})$ је $\mathcal{F}$-мерљива;

2) За сваки догађај $A \in \mathcal{F}$ važи: $P(AB) = \int_A P(B|\mathcal{F}) \, dP$.

Доказ: тривијално (по деф. $E(X|\mathcal{F})$)

деф. Нека је X случ. вел. и $\mathcal{F}_Y$ σ-алгебра генерисана сл. вел. Y.

Ако је дефинисано условно мат. очекивање $E(X|\mathcal{F}_Y)$, онда се оно означава $E(X|Y)$.
Тада га зовемо условно математичко очекивање сл. вел. X у односу на сл. вел. Y.

Условна вероватноћа $P(B|\mathcal{F}_Y)$ означава се $P(B|Y)$.
Тада је зовемо условна вероватноћа догађаја B у односу на Y.

Теорема 1: Нека је $D=\{D_1, D_2, \dots\}$ коначно или пребројиво разбијање, при чему $P(D_i)>0$.
Нека је $\mathcal{F}=\sigma(D)$ σ-алг. генерисана разбијањем D.

1) Ако је $E(X)$ дефинисано, онда је $E(X|\mathcal{F})=\dfrac{E(XD_i)}{P(D_i)}$ скоро сигурно на D_i;

2) Ако је $X=\sum^{n} x_j I_{A_j}$ дискр. сл. вел. која узима коначно много вредности,
при чему је $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ такође разбијање, онда је:

$$E(X|\mathcal{F})(\omega)=\sum^{n} x_j P(A_j|D_i) \quad \text{скоро сигурно на } D_i.$$

Доказ: стр. 84

У наредним теоремама, претпостављамо да EX и EY постоје.

Теорема 2: а1) $C = const$ и $X = C$ скоро сиг. $\Rightarrow$ $E(X|\mathcal{F}) = C$ је скоро сиг;

а2) $X \leq Y$ скоро сиг. $\Rightarrow$ $E(X|\mathcal{F}) \leq E(Y|\mathcal{F})$ скоро сиг;

а3) $|E(X|\mathcal{F})| \leq E(|X| \,|\, \mathcal{F})$ је скоро сиг;

а4) $E(aX + bY \,|\, \mathcal{F}) = a\,E(X|\mathcal{F}) + b\,E(Y|\mathcal{F})$ је скоро сиг;

а5) $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ $\Rightarrow$ $E(X|\mathcal{F}_0) = E(X)$ је скоро сиг.

Теорема 3: б1) $E(X|\mathcal{A}) = X$ је скоро сиг;

б2) Телескопско својство: Ако су $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{A}$ σ-алгебре, онда скоро сиг. важи:

$$E(\,E(X|\mathcal{F}_1) \,|\, \mathcal{F}_2) = E(\,E(X|\mathcal{F}_2) \,|\, \mathcal{F}_1) = E(X|\mathcal{F}_1);$$

б3) $E(\,E(X|\mathcal{F})) = EX$;

б4) Нека X не зависи од σ-алг. $\mathcal{F}$, тј. I_B, $\forall B \in \mathcal{F}$. Тада скоро сиг. важи:

$$E(X|\mathcal{F}) = EX.$$

Теорема 4: Нека је (X_n) низ проширених сл. вел. и нека
Нека важе услови: $|X_n| \leq Y$, $EY < +\infty$ и $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ за скоро све ω.

Тада скоро сиг. важи: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n|\mathcal{F}) = E(X|\mathcal{F})$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} E(|X_n - X| \,|\, \mathcal{F}) = 0$.

Теорема 5: Нека је Y $\mathcal{F}$-мерљива и $E|X| < +\infty$, $E|XY| < +\infty$. Тада скоро сиг. важи:

$$E(XY|\mathcal{F}) = Y \cdot E(X|\mathcal{F}).$$

21. Карактеристичне функције

деф. Нека је X случ. вел. са ф-јом расподеле F.

Карактеристична функција случајне величине X је функција $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\varphi_X(t) = Ee^{itX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)$$

Напомена: $\varphi_X(t) = E(\cos tX) + i \cdot E(\sin tX)$.

Теорема 1: 1) $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$;

2) $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$;

3) φ је равномерно непрекидна;

4) $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \cdot \varphi_X(at)$.

Доказ: 1) тривијално;

2) тривијално;

3) $|\varphi(t+h) - \varphi(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i(t+h)x} - e^{itx})\, dF(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|e^{itx}|}_{\leq 1} \cdot |e^{ihx} - 1|\, dF(x)$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ihx} - 1|\, dF(x) = I$$

Како је $|e^{ihx} - 1| \leq 2$ и $\lim_{h\to 0} |e^{ihx} - 1| = 0 \overset{\text{Т.О.Д.К.}}{\Longrightarrow} \lim_{h \to 0} I = 0 \Rightarrow$ равн. непр;

4) тривијално.

* Теорема 2 (Тејлорова формула):

1) Ако постоји $n \in N$ ткд. $E|X|^n < \infty$,
онда за свако $k \le n$ постоји извод $\varphi^{(k)}(t)$ и при томе важи:

а) $\varphi^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{itx} \, dF(x)$;

б) $EX^k = \dfrac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k}$;

в) $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(it)^k}{k!} EX^k + \dfrac{(it)^n}{n!} r_n(t)$, где $|r_n(t)| \le 3E|X|^n$ и $\lim_{t \to 0} r_n(t) = 0$.

2) Ако је за свако $n \in N$ $E|X|^n < \infty$ и $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \left(E|X|^n \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R} < \infty$

онда за $|t| < R$ важи: $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(it)^n}{n!} EX^n$.

Теорема 3 (Теорема о производу): Ако су $X_1, \dots, X_n$ независне случ. вел:

$$\varphi_{X_1+\dots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_n}(t).$$

Доказ: $\varphi_{X_1+\dots+X_n}(t) = E e^{it(X_1+\dots+X_n)} = E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{itX_i} \right) \overset{\text{нез.}}{=} \prod_{i=1}^{n} E e^{itX_i} = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t)$.

Примери: Обавезно погледати извођења на стр. 89 !

Пример: стр. 91 – „линеарна комбинација нормалних је такође нормална".

* **Теорема 4:** Нека су $a<b$ тачке непрекидности ф-је расп. F и φ одг. карак. ф-ја.

$$F(b) - F(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \cdot \varphi(t)\, dt.$$

Теорема 5: Ако F_1 и F_2 имају исте карак. ф-је $\Rightarrow$ $F_1 \equiv F_2$.

Теорема 6 (Формула инверзије):

Ако је $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt < \infty$, онда је F апсолутно непрекидна и при томе:

а) $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt$ б) $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx$.

Одавде видимо да φ једнозначно одређује f.

* Сада наводимо критеријум за карак. функције.

деф. Произвољна функција $\varphi: R \to C$ је **позитивно дефинисана** ако:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_j \overline{\lambda_k} \cdot \varphi(t_j - t_k) \geq 0, \quad \forall n \in N, \quad \forall t_1, \dots, t_n \in R, \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in C.$$

Теорема 7 (Бохнерова теорема):

Произвољна функција $\varphi: R \to C$ је карактеристична за неку ф-ју расп. F акко:

→ φ је непрекидна на R;

→ $\varphi(0) = 1$;

→ φ је позитивно дефинисана.

Доказ: ($\Rightarrow$) * Прва два услова важе по Т1.

* $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_j \overline{\lambda_k} \cdot \varphi(t_j - t_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_j \overline{\lambda_k} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_j - t_k)x}\, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{it_k x} \right|^2 dF(x) \geq 0.$

($\Leftarrow$) не изводимо.

* деф. Карактеристична функција случајног вектора $(X_1, \dots, X_n)$ је функција $\varphi_X : R^n \to C$

$$\varphi_X(t) = E e^{i\sum_{k=1}^{n} t_k X_k}$$

Наводимо разне особине:

Теорема 8: Нека је $m \in N$, $k_1 + \dots + k_n \leq m$, $k_i \geq 0$, $E|X_k|^m < \infty$

1) $\varphi_X(t)$ је непрекидна и важи $\varphi_X(0, \dots, 0) = 1$;

2) Мешовити моменат је коначан: $m_X^{(k_1, \dots, k_n)} := E(X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}) < \infty$;

3) Постоји и непрекидан је парцијални извод облика: $\dfrac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial t_1^{k_1} \dots \partial t_n^{k_n}} \varphi_X(t_1, \dots, t_n)$;

4) $\varphi_X(t_1, \dots, t_n) = \sum\limits_{k_1 + \dots + k_n \leq m} \dfrac{i^{k_1 + \dots + k_n}}{k_1! \dots k_n!} m_X^{(k_1, \dots, k_n)} t_1^{k_1} \dots t_n^{k_n} + o(|t|^m)$, $|t| = |t_1| + \dots + |t_n| \to 0$;

5) Постоји $\delta > 0$ ткд. у области $|t| < \delta$ важи $\varphi_X(t) \neq 0$.

Осим тога, у тој области постоје и непрекидни су парц. изводи $\dfrac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial t_1^{k_1} \dots \partial t_n^{k_n}} \ln[\varphi_X(t_1, \dots, t_n)]$

6) (Тејлорова формула) стр. 93

7) Карактеристична функција случајног вектора једнозначно одређује његову расподелу.

22. Метод карактеристичних функција

Пример: Нека је $X_n \in \mathcal{U}[-n, n]$ низ независних случ. вел.

Тада је: $F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -n \\ \frac{x+n}{2n}, & x \in [-n, n] \\ 1, & x \geq n \end{cases}$

Приметујемо: $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Ипак, очигледно да гранична функција није функција расподеле.

Теорема 1: Нека је $\mathcal{F}$ фамилија свих функција расподеле.

Тада за сваки низ (F_n) из $\mathcal{F}$ постоји подниз (F_{n_k}) и функција F ткд:

- F је растућа;
- F је непрекидна здесна;
- $\lim\limits_{n\to\infty} F_{n_k}(x) = F(x)$, за сваку тачку непрекидности ф-је F, тј. $F_{n_k} \Rightarrow F$.

Теорема 2 (Теорема непрекидности):

1) Ако $F_n \Rightarrow F$, где је F функција расподеле $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \underbrace{\varphi(t)}_{\text{одговара } F}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

2) Ако $\forall t \in \mathbb{R} \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ и ако је $\varphi(t) := \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ непр. у нули $\Rightarrow$ $F_n \Rightarrow \underbrace{F}_{\text{одговара } \varphi}$.

Пример: стр. 95.

23. Вишедимензиона нормална расподела

деф. Нека је $B = [b_{kl}]_{n \times n}$ симетрична, ненегативно дефинисана и несингуларна матрица.
Нека је $B^{-1} = A = [a_{kl}]_{n \times n}$ њена инверзна матрица.

Нека је $m = (m_1, \dots, m_n) \in R^n$.

Густина n-димензионе нормалне расподеле је функција $f: R^n \to R$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \sum_k^n \sum_l^n a_{kl}(x_k - m_k)(x_l - m_l)}$$

Напомена: $Q(x_1, \dots, x_n) := -\frac{1}{2} \sum_k^n \sum_l^n a_{kl}(x_k - m_k)(x_l - m_l)$.

Лема 1: f заиста јесте густина расподеле вероватноћа.

Доказ: стр. 96 - 97

* Нека је $(X_1, \dots, X_n)$ случ. вектор са густином f.

јер $\frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \int \dots dx_1 \dots dx_n = 1$

Знамо да важи: $$\int_{R^n} e^{-\frac{1}{2} \sum_k^n \sum_l^n a_{kl}(x_k - m_k)(x_l - m_l)} dx_1 \dots dx_n = \frac{(2\pi)^{n/2}}{|A|^{1/2}}$$

* Ако обе стране диференцирамо по m_k, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\Rightarrow$ $E\left[\sum_{l=1}^n a_{kl}(X_l - m_l)\right] = 0$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$\Rightarrow$ $\sum_{l=1}^n a_{kl}[EX_l - m_l] = 0$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

Ово можемо посматрати као систем по промењљивим $(EX_l - m_l)$.
Како је A несингуларна $\Rightarrow$ систем хомогених једначина има само тривијално решење.

Дакле: бројеви m_l представљају математичка очекивања случ. величина X_l.

* Ако обе стране диференцирамо по a_{kl}, $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\Rightarrow -\cancel{\frac{1}{2}} \int_{R^n} (x_k - m_k)(x_l - m_l) \cdot e^{-\frac{1}{2} \sum_k^n \sum_l^n a_{kl}(x_k - m_k)(x_l - m_l)} dx_1 \dots dx_n = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \left(-\cancel{\frac{1}{2}}\right) \frac{1}{|A|^{3/2}} (-1)^{k+l} \underbrace{M_{kl}}_{\text{минор}} \quad \Big/ \cdot \frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}$$

$$\Rightarrow E[(X_k - m_k)(X_l - m_l)] = \frac{1}{|A|} \cdot (-1)^{k+l} M_{kl}, \quad \text{тј.} \quad cov(X_k, X_l) = b_{kl}, \quad k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Дакле: Матрица $B = A^{-1}$ представља коваријациону матрицу случ. вектора $(X_1, \dots, X_n)$.

* **Лема 2:** Карактеристична функција вишедим. нормално расподељеног случ. вектора је:

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = e^{\left[i \sum_{k=1}^{n} t_k m_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} b_{kl} t_k t_l \right]}$$

Доказ: стр. 99-100

Пример: стр. 100

$(m_1, \dots, m_n)$

Теорема 1: Нека је $(X_1, \dots, X_n)$ случ. вектор са n-дим. норм. расп. $\mathcal{N}(m, B)$.

Тада случ. вектор $(X_1, \dots, X_r)$, $r \le n$ има r-дим. норм. расп. са одговарајућим параметрима.

Доказ: тривијално зато што карак. ф-ја јединствено одређује расподелу.

(само ставимо $t_{r+1} = \dots = t_n = 0$ у Л2)

Теорема 2: Нека је $(X_1, \dots, X_n)$ случ. вектор са n-дим. норм. расп. $\mathcal{N}(m, B)$.

Тада случ. величина $\sum^{n} \lambda_k X_k \in \mathcal{N}\left(\sum^{n} \lambda_k m_k, \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} b_{kl} \lambda_k \lambda_l\right)$. $(\lambda_k \in R$ и бар један $\neq 0)$

↳ једнодим.

Доказ: тривијално (иста фора, само $t_k = \lambda_k t$)

Теорема 3: Нека је $(X_1, \dots, X_n)$ случ. вектор чије су компоненте независне и нормално расподељене, при чему $EX_k = 0$, $DX_k = \sigma^2$ $(k \in \{1, 2, \dots, n\})$

Тада су случ. величине $\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum^{n} X_k$ и $\bar{S}_n^2 = \frac{1}{n} \sum^{n} (X_k - \bar{X}_n)^2$ независне.

Доказ: Означимо $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, где $Y_k = \begin{cases} X_k - \bar{X}_n & 1 \le k \le n-1 \\ \bar{X}_n, & k = n \end{cases}$

Тада је $Y = MX$, где је M несингуларна матрица $\overset{T2}{\Rightarrow}$ Y има n-дим. норм. расп.

Уз то, за $k \in \{1, \dots, n-1\}$: $\operatorname{cov}(Y_k, Y_n) = E(Y_k \bar{X}_n) - 0 \cdot 0 = E\left[(X_k - \bar{X}_n) \cdot \bar{X}_n\right] = 0$

То значи $Y_n = \bar{X}_n$ не зависи од осталих $Y_1, \dots, Y_{n-1}$.

Са друге стране: $n \cdot \bar{S}_n^2 = \sum^{n-1} Y_k^2 + \left(\sum^{n-1} Y_k\right)^2 \Rightarrow \bar{S}_n^2$ зависи само од $Y_1, \dots, Y_{n-1}$.

Одавде следи наше тврђење.

24. Типови конвергенција

деф. Низ случајних величина (X_n) **конвергира у вероватноћи** $X_n \xrightarrow{P} X$ ако:

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{n\to\infty} P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} = 0.$$

деф. Низ случајних величина (X_n) **конвергира скоро сигурно** $X_n \xrightarrow{cc} X$ ако:

$$P\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1.$$

деф. Низ случајних величина (X_n) **конвергира у средњем реда p** $X_n \xrightarrow{L^p} X$ ако:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(|X_n - X|^p\right) = 0.$$

Специјално, за $p=2$ кажемо **средњеквадратна конвергенција**, у ознаци $X_n \xrightarrow{ск} X$.

деф. Низ случајних величина (X_n) **конвергира у расподели** $X_n \xrightarrow{D} X$ ако:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$ у свакој тачки непрекидности x функције F.

деф. Низ случајних величина (X_n) **слабо конвергира** ако за сваку огр. и непр. $f: \overset{\text{реална}}{R} \to R$ важи:

$$\lim_{n\to\infty} E(f(X_n)) = E(f(X)).$$

Напомена: конв. у расподели $\Leftrightarrow$ слаба конв

Пример: стр. 103 - 104

$\Omega = [0,1]$, $X_{nk}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$, $n \in N$, $k \in \{1,2,\dots,n\}$ $\Rightarrow$ $X_{nk} : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$

Овај низ конвергира D, P, L^p, али не и cc.

Закључак: 1) $D \not\Rightarrow cc$ 2) $P \not\Rightarrow cc$ 3) $L^p \not\Rightarrow cc$

25. Скоро сигурна конвергенција

деф. Низ случајних величина (X_n) конвергира скоро сигурно $X_n \xrightarrow{cc} X$ ако:

$$P\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1.$$

* Еквивалентан услов:

Теорема 1: $X_n \xrightarrow{cc} X \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0) \lim_{n\to\infty} P\{\omega : \sup_{k\geq n} |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} = 0.$

Доказ: стр. 105

* Довољан услов:

Теорема 2: $(\forall \varepsilon > 0) \sum_{k=1}^{\infty} P\{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} < +\infty \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{cc} X$

Доказ: тривијално из Т1:

$$P\{\omega : \sup_{k\geq n} |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} = P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P\{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}$$

Теорема 3: Нека је (X_n) низ независних случ. вел.

$$X_n \xrightarrow{cc} 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0) \sum_{k=1}^{\infty} P\{|X_n| \geq \varepsilon\} < +\infty$$

Доказ: тривијално из Б-К[3] + Т2

Теорема 4: $cc \Rightarrow P$.

Доказ: тривијално из Т1.

26. Средње-квадратна конвергенција

деф. Низ случајних величина (X_n) конвергира у средњем реда p $X_n \xrightarrow{L^p} X$ ако:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(|X_n - X|^p\right) = 0.$$

Специјално, за $p=2$ кажемо средњеквадратна конвергенција, у ознаци $X_n \xrightarrow{ск} X$.

Теорема 1: $L^p \Rightarrow P$

Доказ: $P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \overset{\boxed{11}\,T2 \text{ Чеб. нej.}}{\leq} \dfrac{E(|X_n - X|^p)}{\varepsilon^p} \xrightarrow{\text{због } L^p} 0$

Пример: стр. 107

$$\Omega = [0,1], \quad X_n(\omega) = \begin{cases} 2^n, & \omega \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Овај низ конвергира P, сс, али не и L^p.

Закључак: 1) $P \not\Rightarrow L^p$ 2) сс $\not\Rightarrow L^p$

Теорема 2: Нека је $p < r$. Тада: $X_n \xrightarrow{L^r} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^p} X$

Доказ: тривијално из Љапуновљеве неједнакости ($\boxed{17}$ T7).

27. Конвергенција у расподели

деф. Низ случајних величина (X_n) конвергира у расподели $X_n \xrightarrow{D} X$ ако:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$ у свакој тачки непрекидности x функције F.

деф. Низ случајних величина (X_n) слабо конвергира ако за сваку огр. и непр. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (реална) важи:

$$\lim_{n\to\infty} E(f(X_n)) = E(f(X)).$$

Напомена: конв. у расподели $\Leftrightarrow$ слаба конв

Теорема 1: $P \Rightarrow D$

Доказ: стр. 108

Пример: стр. 109

$\Omega = \{0,1\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$, $P\{0\} = P\{1\} = \frac{1}{2}$

$X_{2k}(0) = 0$ $\quad$ $X_{2k+1}(0) = 1$

$X_{2k}(1) = 1$ $\quad$ $X_{2k+1}(1) = 0$

Овај низ конвергира D, али не и P.

Закључак: $D \not\Rightarrow P$

28. Односи између типова конвергенције

У претходним питањима, видели смо да важи:

$$\begin{tikzcd}
cc \arrow[dr, Rightarrow, "25\ T4"'] & & ck \arrow[dl, Rightarrow, "26\ T1"] \\
& P \arrow[d, Rightarrow, "27\ T1"] & \\
& D &
\end{tikzcd}$$

Пример: стр. 110 - 111

Теорема 1: Нека је (X_n) низ дискретних случ. вел.

Тада $P \Rightarrow cc$.

Доказ: Нека је $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ и $P(\omega_k) = p_k > 0$.

Фиксирајмо k и $\varepsilon > 0$.

Како знамо $X_n \xrightarrow{P} X$, то значи $\exists n_0 = n_0(k, \varepsilon)$ $\forall n \geq n_0$ $P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} < p_k$.

Одавде следи да $\forall n \geq n_0$ $|X_n(\omega_k) - X(\omega_k)| < \varepsilon$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega_k) = X(\omega_k)$.

Ово важи за свако k (јер смо га фиксирали), па то значи $X_n \xrightarrow{cc} X$.

29. Кошијеви критеријуми конвергенције

деф. Низ случајних величина (X_n) је

1) фундаменталан / Кошијев у вероватноћи: $(\forall \varepsilon > 0)\ \ P\{|X_m - X_n| > \varepsilon\} \xrightarrow{m,n\to\infty} 0;$

2) фундаменталан / Кошијев скоро сигурно: $P\{\omega :\ |X_m(\omega) - X_n(\omega)| \xrightarrow{m,n\to\infty} 0\} = 1.$

3) фундаменталан / Кошијев у средњем реда p: $E(|X_m - X_n|^p) \xrightarrow{m,n\to\infty} 0;$

Теорема 1: (X_n) конвергира у вероватноћи $\Leftrightarrow$ (X_n) Кошијев у вероватноћи.

Доказ: стр. 112 - 113

Теорема 2: $X_n \xrightarrow{P} X \ \Rightarrow$ постоји подниз (X_{n_k}) ткд. $X_{n_k} \xrightarrow{cc} X.$

Доказ: По Т1 $\Rightarrow$ X_n - Кошијев у вероватноћи.

А у смеру $(\Leftarrow)$ смо нашли такав подниз.

Теорема 3: (X_n) конвергира сс $\Leftrightarrow$ (X_n) Кошијев сс.

Доказ: тривијално („обична" конв. низа реалних бројева $\Leftrightarrow$ низ је Кошијев)

Теорема 4: (X_n) конвергира у средњем реда $p \geq 1$ $\Leftrightarrow$ (X_n) Кошијев у средњем реда p.

Доказ: $(\Rightarrow)$ Знамо $E(|X_n - X|^p) \to 0$

По нej. Минковског [17]T8 : $\left[E(|X_m - X_n|)^p\right]^{1/p} \leq \left[E(|X_m - X|^p)\right]^{1/p} + \left[E(|X_n - X|^p)\right]^{1/p} \to 0.$

$(\Leftarrow)$ нисмо изводили

30. Скороходова теорема

Теорема 1 (Скороходова теорема):

Нека $F_n \Rightarrow F$.

Тада постоје случ. вел. $Y, Y_1, Y_2, \dots$ ткд:

* дефинисане су на истом простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$;
* $F, F_1, F_2, \dots$ су редом њихове функције расподела;
* $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n(\omega) = Y(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$

Доказ: стр. 114 - 115

31. Закон нула или један

* Увод: Нека је (X_n) низ независних случ. вел. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
За сваки исход $\omega \in \Omega$, ред $\sum^{\infty} X_n(\omega)$ или конвергира или дивергира.

Означимо догађај $A = \{\omega : \sum^{\infty} X_n(\omega) \text{ конвергира}\}$.
Испоставиће се да његова вероватноћа може бити само 0 или 1.

деф. $\mathcal{A}_n^{n+m}$ је σ-алгебра генерисана случ. величинама $X_n, \dots, X_{n+m}$.

Другим речима, то је минимална σ-алгебра која садржи све догађаје облика:

$$\{\omega : X_n(\omega) \leq x_n, \quad \dots, \quad X_{n+m}(\omega) \leq x_{n+m}\}, \qquad x_i \in R$$

Примећујемо да важи $\mathcal{A}_n^n \subset \mathcal{A}_n^{n+1} \subset \mathcal{A}_n^{n+2} \subset \dots$

При томе, $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_n^{n+k}$ је алгебра, али не мора бити σ-алгебра.

деф. $\mathcal{A}_n^{\infty}$ је σ-алгебра генерисана алгебром $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_n^{n+k}$.

Тада важи $\mathcal{A}_1^{\infty} \supset \mathcal{A}_2^{\infty} \supset \mathcal{A}_3^{\infty} \supset \dots$

деф. $\mathcal{A}_{\infty}^{\infty} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n^{\infty}$.

Ово јесте σ-алгебра и зове σ-алгебра генерисана репом низа случајних величина.
(као пресек σ-алгебри)

Лема 1: Нека су Q_1 и Q_2 две вероватносне мере на $(\Omega, \mathcal{A})$
и нека је $K \subset \mathcal{A}$ колекција скупова ткд:

* $A, B \in K \Rightarrow A \cap B \in K$;
* $\sigma[K] = \mathcal{A}$;

Ако важи $Q_1 = Q_2$ на $K \Rightarrow Q_1 = Q_2$ на $\mathcal{A}$.

Теорема 1: Нека је (X_n) низ независних случ. вел.
Нека су $\mathcal{A}_1 = \sigma\{X_{i_1}, X_{i_2}, \dots\}$, $\mathcal{A}_2 = \sigma\{X_{j_1}, X_{j_2}, \dots\}$. ($i, j$ - сви различити)

Тада су $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ независне σ-алгебре.

Доказ: стр. 117

Теорема 2 (Колмогоровљев закон нула или један):

1) Вероватноћа сваког догађаја из $\mathcal{A}_\infty^\infty$ једнака је 0 или 1;

2) Ако је $X: \Omega \to R$ ф-ја таква да $\sigma(X) \subset \mathcal{A}_\infty^\infty$, онда постоји c ткд. $P\{X = c\} = 1$.

Доказ: стр. 118

Примери: стр. 118 - 119

32. Закон великих бројева

* Сви закони у овом питању су облика $\frac{S_n - n\cdot m}{n} \xrightarrow{P} 0$.

Теорема 1 (Бернулијев закон великих бројева):

Нека је $S_n \in \mathcal{B}(n,p)$ биномна случ. вел.

Тада: $P\left\{ \left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right\} \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$, $\forall \varepsilon > 0$.

Другим речима: $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$

Теорема 2 (Чебишовљев закон великих бројева):

Нека су $X_1, \dots, X_n$ независне случ. вел., при чему $DX_k \leq C < +\infty$.

Тада: $P\left\{ \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) \right| \geq \varepsilon \right\} \leq \frac{C}{n\varepsilon^2}$.

Другим речима: $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) \xrightarrow{P} 0$.

Теорема 3 (Хинчинов закон великих бројева):

Нека је (X_n) низ независних и једнако расподељених случ. вел., при чему $EX_k = m < +\infty$.

Тада: $\frac{1}{n}\sum^{n} X_k \xrightarrow{P} m$, $n \to \infty$

Доказ: Користимо следећу чињеницу: (коју нисмо доказали али знамо са вежби) $X_n \xrightarrow{P} const \iff X_n \xrightarrow{D} const$

Дакле, довољно је доказати да $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum^{n} X_k$, $n = 1, 2, \dots$ конвергира у расподели ка m.

Нека је $\varphi(t)$ зај. карак. ф-ја сл. вел. из низа (X_n) (iid). Тада: (Тејлор) $\varphi(t) = 1 + imt + o(t)$, $t \to 0$.

$$\Rightarrow \varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \left(1 + im\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{imt}$$

Напомена: T2 $\not\Rightarrow$ T3, нити T3 $\not\Rightarrow$ T2

Пример: Бернштајнов полином - стр. 121.

* Показујемо примену закона великих бројева у доказу Вајерштрасове теореме о апроксимацији непр. ф-је.

деф. Нека је $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ непрекидна
Модул непрекидности је функција $\omega(f,\varepsilon) = \sup_{\substack{|x-y|\le\varepsilon \\ x,y\in[0,1]}} |f(x)-f(y)|$

Изводимо n независних експеримената, при чему је вероватноћа успеха x.
Означимо са S_n број успешних експеримената $\Rightarrow$ $P\{S_n = k\} = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

Уведимо ознаку $B_n(f,x)$ за мат. оч. случ. вел. $f(\frac{S_n}{n})$. Тада је: $B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\cdot\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.
Ово зовемо Бернштајнов полином n-тог реда придружен функцији f.

Теорема 4: Нека је $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ непрекидна и $\sup_{x\in[0,1]}|f(x)| = M < +\infty$. Тада:

$$\sup_{x\in[0,1]} |B_n(f,x) - f(x)| \le \omega(f;\varepsilon) + \frac{M}{2n\varepsilon^2}, \qquad \forall\varepsilon>0.$$

Доказ: стр. 121

33. Јаки закон великих бројева

* Јаки ЗВБ су облика $\frac{S_n - n\cdot m}{n} \xrightarrow{cc} 0$.

Прво доказујемо уопштење Чебишовљеве неједнакости:

Теорема 1 (Колмогоровљева неједнакост):

Нека су $X_1, \dots, X_n$ независне случ. вел., при чему $EX_i = 0$ и $DX_i < +\infty$. Тада:

$$P\{\max_{1\le k\le n} |S_k| \geq \varepsilon\} \leq \frac{ES_n^2}{\varepsilon^2}, \qquad \forall\varepsilon>0, \qquad S_k = \sum^{k} X_i$$

Доказ: Уводимо следеће ознаке:

$$A = \{\max_{1\le k\le n} |S_k| \geq \varepsilon\}$$

$$A_1 = \{|S_1| \geq \varepsilon\}$$
$$A_k = \{|S_1| < \varepsilon, \dots, |S_{k-1}| < \varepsilon, |S_k| \geq \varepsilon\}$$

Јасно, $A_1, A_2, \dots, A_n$ су дисјунктни, при чему $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$.

Означимо са I_k индикатор догађаја A_k.

$$\Rightarrow \quad ES_n^2 \geq E(S_n^2 I_A) = E\Big[S_n^2 \cdot \sum^{n} I_k\Big] = \sum E(S_n^2 I_k) = (*)$$

$$E(S_n^2 I_k) = E\big[(S_k + X_{k+1} + \dots + X_n)^2 I_k\big] = E(S_k^2 I_k) + 2E\Big(S_k I_k \cdot \sum_{j=k+1}^{n} X_j\Big) + E\Big[\Big(\sum_{j=k+1}^{n} X_j\Big)^2 I_k\Big]$$

$$\overset{(**)}{=} E(S_k^2 I_k) + 0 + E\Big[\Big(\sum_{j=k+1}^{n} X_j\Big)^2 I_k\Big] \geq E(S_k^2 I_k)$$

(**) Како су $X_1, \dots, X_n$ независне:
$$E\Big(S_k I_k \cdot \sum_{j=k+1}^{n} X_j\Big) \overset{\text{нез}}{=} E(S_k I_k) \cdot E\Big(\sum_{j=k+1}^{n} X_j\Big) = E(S_k I_k) \cdot 0 = 0.$$

Дакле: $ES_n^2 \geq (*) \geq \sum_{k=1}^{n} E(S_k^2 I_k) \geq \varepsilon^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \varepsilon^2 \cdot P(A)$.

Теорема 1 (Колмогоровљев закон великих бројева):

Нека је (X_n) низ независних случ. вел, при чему $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2} < +\infty$. Тада је:

$$P\left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - EX_k) = 0 \right\} = 1.$$

Доказ: Не умањујући општост, можемо претпоставити $EX_j = 0, \ \forall j$ (због лакшег рачуна).

Означимо: $Y_n = \max_{1\le k\le 2^n} \left| \sum_{j=1}^{k} X_j \right|$.

Примећујемо да за $2^{n-1} \le k \le 2^n$ важи: $\left| \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} X_j \right| \le \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \max_{1\le k\le 2^n} \left| \sum_{j=1}^{k} X_j \right| = \frac{Y_n}{2^{n-1}}$

Дакле, довољно је доказати $\lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{2^n} = 0$.

$ES_n^2 = DS_n + \cancel{ES_n}^{\,0} = \sum DX_j$

По Кол. неједнакости (T1): $P\left\{ \frac{Y_n}{2^n} > \varepsilon \right\} = P\{ Y_n > 2^n \varepsilon \} \le \frac{1}{2^{2n}\varepsilon^2} \cdot \sum_{j=1}^{2^n} DX_j$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{ \frac{Y_n}{2^n} > \varepsilon \right\} \le \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \cdot \sum_{j=1}^{2^n} DX_j = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{\infty} DX_j \cdot \sum_{2^n \ge j} \frac{1}{4^n}$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^2} \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} DX_j \cdot \frac{1}{j^2}}_{\substack{< +\infty \\ (\text{услов})}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} < +\infty$$

Одавде је јасно по критеријуму за сс конв. да је $P\left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{2^n} = 0 \right\} = 1.$

($\boxed{25}$ T2)

Пример: стр. 124 - услов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2} < +\infty$ је неопходан!

* Још један облик јаког звб:

Теорема 3:

Нека je (X_n) низ независних и једнако расподељених случ. вел., при чему $EX_k = m < +\infty$. Тада

$$P\left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = m \right\} = 1.$$

Пример: Борелов парадокс

34. Централна гранична теорема

деф. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ је низ парцијалних сума. (већ користили)

Централна гранична теорема је заједничко име за читаву фамилију теорема у којима низ парцијалних сума, одговарајуће нормиран, има асимптотски нормалну расподелу.

Потом ћемо доказати њено уопштење: Линдберг - Фелерову теорему.

Теорема 1: Нека је (X_n) низ независних и једнако расподељених случ. вел., при чему $EX_k = m$ и $DX_k = \sigma^2 < +\infty$. Тада:

$$P\left\{ \frac{S_n - n\cdot m}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \qquad \forall x, \quad n \to \infty$$

Другим речима: $\dfrac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1)$

Доказ: Нека је φ карак. ф-ја за $X_k - m$ и φ_n карак. ф-ја за $\dfrac{S_n - n\cdot m}{\sigma\sqrt{n}}$.

Тада је $\varphi(t) = 1 - \dfrac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2)$, $t \to 0$ (развој)

Узимајући у обзир $\dfrac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{X_k - m}{\sigma\sqrt{n}}$

$$\Rightarrow \varphi_n(t) = \left[\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

$$= \left[1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2\sigma^2 n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-\frac{t^2}{2}},$$ а то је карак. ф-ја $\mathcal{N}(0,1)$.

деф. Схеме серија случајних величина је:

$$\begin{matrix} X_{11}, & X_{12}, & \dots, & X_{1k_1}, \\ X_{21}, & X_{22}, & \dots, & X_{2k_2}, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1}, & X_{n2}, & \dots, & X_{nk_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{matrix}$$

(не мора исте дужине)

при чему:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = +\infty$;

б) $\forall n$, $X_{n1}, \dots, X_{nk_n}$ (у оквиру истог реда) су независне

в) $EX_{ij} = 0$;

г) $DX_{n1} + \dots + DX_{nk_n} = 1$. (у оквиру истог реда)

Теорема 2 (Линдеберг-Фелерова теорема): Дата је схема серија. Тада два услова:

$$\sum_{j=1}^{k_n} X_{nj} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \max_{1\le j\le k_n} P\{|X_{nj}| > \varepsilon\} = 0,$$

важе ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ важи Линдебергов услов:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|>\varepsilon} x^2 \, dF_{nj}(x) = 0$$

тј.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} E\left(X_{nj}^2 I_{\{|X_{nj}|>\varepsilon\}}\right) = 0$$

Доказ: ($\Rightarrow$) $\boxed{36}$

($\Leftarrow$) $\boxed{35}$

35. Довољност Линдеберговог услова

Лема 1: $\left| e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!} \right| \leq \min\left\{ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!} \right\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Специјално, за $n=2$: $\left| e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2} \right| \leq \min\left\{ \frac{|x|^3}{6}, x^2 \right\}$

Доказ: стр. 128

Лема 2: Нека $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ и модул сваког од њих је мањи или једнак од 1. Тада:

$$\left| \prod_{k=1}^{n} z_k - \prod_{k=1}^{n} w_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - w_k|.$$

Доказ: стр. 129

Лема 3: Ако је x реалан број ткд. $|x| \leq \frac{1}{2}$, онда $|e^x - 1 - x| < x^2$.

Доказ: Знамо $\ln(1+z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

$$|e^x - 1 - x| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{x^k}{k!} \right|$$

$$= x^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^{k-2}}{k!} < \frac{x^2}{2} \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}}_{= \frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = x^2.$$

Доказ довољности: стр. 129, 130, 131.

36. Неопходност Линдеберговог услова

Лема 1: Ако је $z \in \mathbb{C}$, $|z| \le \frac{1}{2}$, онда $\exists w \in \mathbb{C}$, $|w| \le 1$ и $\ln(1+z) - z = w|z|^2$.

Доказ: Знамо $\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k$

$$|\ln(1+z) - z| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k \right| \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^k}{k}$$

$$= |z|^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^{k-2}}{k} \le \frac{|z|^2}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = |z|^2$$

Одавде очигледно следи и наше тврђење. (имамо $\le$ $\Rightarrow$ $\exists w$ које смањује)

Лема 2: Дата је схема серија.

Услов равномерне асимптотске занемарљивости акко $\lim\limits_{n \to \infty} \max\limits_{1 \le j \le k_n} |\varphi_{nj}(t) - 1| = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$

Доказ: стр. 132

Доказ неопходности: стр. 133, 134, 135.

37. Последице Линдеберговог услова

деф. $B_n^2 := DS_n$.

Теорема 1: Нека је (X_n) низ независних случ. вел. ткд. $DX_n \in (0, +\infty)$.

Тада за схему серија $X_{nj} = \dfrac{X_j - EX_j}{B_n}$ важе она 4 услова.

У том случају, Линдеберг - Фелерову теорему можемо преформулисати на следећи начин:

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{и} \qquad \lim_{n\to\infty} \max_{1\le j\le n} P\{|X_j - EX_j| > \varepsilon B_n\} = 0,$$

важе ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ важи Линдебергов услов:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^{n} \int_{|x-EX_j| \ge \varepsilon B_n} (x - EX_j)^2 \, dF_j(x) = 0$$

Теорема 2: ЦГТ за случај iid је последица Линдеберг - Фелерове теореме.

Доказ: стр. 136

Теорема 3 (Муавр-Лапласова теорема):

Ако је $X_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, онда: $\dfrac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1)$.

Доказ: тривијално из претходног ($ES_n = np$, $DS_n = np(1-p)$).

Теорема 4 (Љапуновљева теорема):

Нека је (X_n) низ независних случ. вел. и за неко $\delta > 0$ важи $E|X_j|^{2+\delta} < +\infty$, $\forall j$

Претпоставимо да важи Љапуновљев услов:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \cdot \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} |x - EX_j|^{2+\delta} \, dF_j(x) = 0.$$

Тада важи ЦГТ.

Доказ: Проверимо Линдебергов услов (стр. 137)

Примери: стр. 138 - 139