Случајни процеси

Јован Самарџић, 13/2019

Професорка: Јелена Јоцковић

- 🟥 - дефиниције
- 🟪 - ознаке
- 🟧 - теореме
- 🟦 - докази
- 🟩 - примери

Година курса: 2021/22

Молим да ми све грешке пријавите
преко мејла или друштвених мрежа.

0. Увод у случајне процесе

деф. Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа и $(S, \mathcal{F})$ мерљив простор.

Функција $X: \Omega \to S$, која је мерљива у односу на σ-алг. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{F}$ $(X^{-1}(F) \in \mathcal{A}$, за $F \in \mathcal{F})$ зове се **случајни елемент** у простору S.

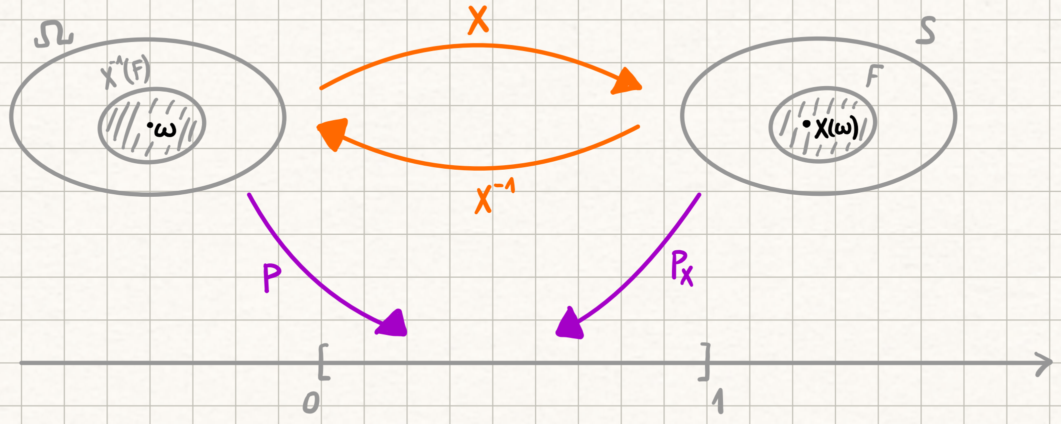
$(S, \mathcal{F})$ је **фазни простор** / **простор вредности** случајног елемента X.

Пример: Наводимо неке случајне елементе:

1) Случајна величина: $(S, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $\mathcal{B}$ - Борелова σ-алг. на $\mathbb{R}$;
2) Комплексна сл. вел: $(S, \mathcal{F}) = (\mathbb{C}, \mathcal{B}^2)$, $\mathcal{B}^2$ - Борелова σ-алг. на $\mathbb{C}$;
3) n-дим. сл. величина: $(S, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, $\mathcal{B}^n$ - Борелова σ-алг. на $\mathbb{R}^n$.

деф. **Расподела вероватноћа случајног елемента** X је вероватносна мера $P_X: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$

$$P_X(F) := P(X^{-1}(F)) = P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in F\}, \quad \text{за } F \in \mathcal{F}.$$



деф. Фамилија случајних елемената $\{X_t,\ t\in T\}$ деф на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, при чему је T бесконачан, зове се **случајни процес**.

Друге ознаке су: $\{X(t,\omega),\ t\in T\}$, $\{X_t(\omega),\ t\in T\}$ или $\{X(t),\ t\in T\}$.

Ако сви X_t имају исти фазни простор $(S, \mathcal{F})$, онда је $(S, \mathcal{F})$ **фазни простор случ. процеса**.

T се зове **параметарски / индексни скуп**.

Пример: Ако се за случ. елем. изаберу они из претх. примера, редом добијамо:

1) реални случ. процес;
2) комплексни случ. процес;
3) n-димензиони случ. процес.

Напомена: Ако није другачије наглашено,
у наставку се све односи на реални и комплексни случ. процес.

Случајне процесе делимо у зависности од парам. скупа T и скупа вредности S:

1) T дискретан, S дискретан: нпр. број људи у учионици сваке недеље;
2) T дискретан, S непрекидан: нпр. меримо висину сваке године;
3) T непрекидан, S дискретан: нпр. број људи на свету до тренутка t;
4) T непрекидан, S непрекидан: нпр. меримо температуру до тренутка t.

деф. Реални случ. процес $\{X(t, \omega),\ t \in T\}$ може се посматрати као пресликавање:

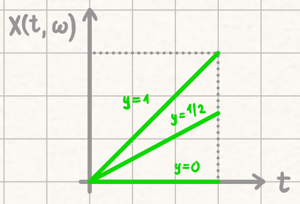
$$(t, \omega) \in T \times \Omega \quad \longmapsto \quad X(t, \omega) \in R.$$

За фикс. $t \in T$: $X(t, \cdot): \Omega \to R$ је (реална) случајна величина;

За фикс. $\omega \in \Omega$: $X(\cdot, \omega): T \to R$ је (реална) ф-ја коју зовемо траjекторија случ. процеса.

Пример: Цртамо трајекторије неких случ. процеса:

1) $X(t) = tY$, где $t \in [0,1]$ и Y има дискр. равномерну расподелу на скупу $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$:



Трајекторије су три дужи: $X(t,\omega) = 0$, $t \in [0,1]$
$X(t,\omega) = \frac{1}{2}t$, $t \in [0,1]$
$X(t,\omega) = t$, $t \in [0,1]$

Приметимо да нисмо користили информацију о расподели.
Другим речима, трајекторије су нам зависиле само од скупа вредности.

2) $X(t) = tY$, где $t \in [0,1]$ и $Y \sim \mathcal{U}[0,1]$:

Овде су трајекторије све дужи $X(t,\omega) = yt$, $t, y \in [0,1]$.

И овде важи иста примедба.

3) $X(t) = A + Bt$, где $t \in R$ и $A, B \sim \mathcal{N}(0,1)$ су независне:

Трајекторије су праве у равни.

4) $X(t) = (A\cos t,\ A\sin t)$, где $t \in R$ и $A \sim \mathcal{U}[0,1]$:

Трајекторије су кружнице са центром у $(0,0)$, а све заједно чине круг са $r=1$.

5) $X(t) = (A\cos t,\ B\sin t)$, где $t \in R$ и $A, B \sim \mathcal{N}(0,1)$ су независне:

Трајекторије су елипсе са центром у $(0,0)$, а све заједно чине целу раван.

Напомена: Случ. процес $\{X(t),\ t \in T\}$ може да се схвати и као пресликавање $X: \Omega \to R^T$.

Другим речима, сваком $\omega \in \Omega$ доделимо једну трајекторију случ. процеса.

деф. **Средња вредност / математичко очекивање случајног процеса** $\{X(t),\ t\in T\}$ је ф-ја:

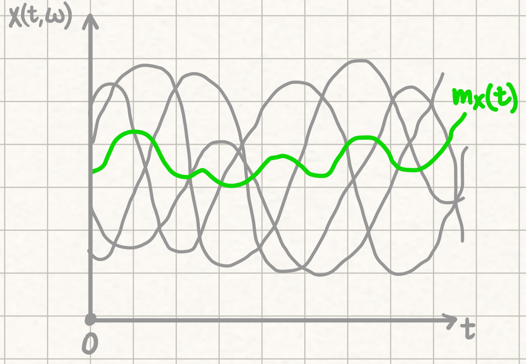
$$m_x(t) := EX(t), \quad t \in T.$$

Напомена: У општем случају, $m_x(t) = \int_\omega X(t,\omega) P\ d\omega$ је Лебегов интеграл ф-је X по мери P.

Када су познате расподеле случ. вел. $X(t)$,
онда је $m_x(t) = \int_R x\ dF_t(x)$ Лебег - Стилтјесов интеграл.

Напомена: Неформално, $m_x(t)$ представља „средњу" трајекторију око које се групишу остале.

Овде је битно коју расподелу има $X(t)$, за разлику од примера.



деф. **Коваријациона функција комплексног случајног процеса** $\{X(t),\ t\in T\}$ је ф-ја:

$$K_x(t,s) := \mathrm{cov}(X(t), X(s)) = E\Big[(X(t) - m_x(t)) \cdot \overline{(X(s) - m_x(s))}\Big], \quad t, s \in T.$$

Напомена: за реални случ. процес само нема конјугације.

деф. Нека је $\{X(t),\ t\in T\}$ реални случ. процес.
За дате $t_1, \dots, t_n \in T$, случ. вектор $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ је **n-димензиони засек процеса.**

деф. За $n=1$, кажемо само **засек.** (без једнодимензиони)

деф. Нека је $F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) = P\{X(t_1) \le x_1, \dots, X(t_n) \le x_n\}$.

Тада је $\{F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n),\ t_1,\dots,t_n \in T\}$ **фамилија n-дим. функција расподеле процеса.**

Фамилија коначнодим. ф-ја расподеле процеса је $\{F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n),\ t_1,\dots,t_n \in T,\ n\in \mathbb{N}\}$.

деф. Фамилија коначнодим. ф-ја расподеле процеса мора да задовољава:

1) **услов симетрије:** $F_{t_{j_1},\dots,t_{j_n}}(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n),\ \forall (j_1, \dots, j_n)$;

2) **услов сагласности:** $F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, +\infty) = F_{t_1,\dots,t_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1})$.

Напомена: Поента ових услова је да се задавањем свих n-дим. ф-ја расподеле, $n\ge 2$, задају и све k-дим. ф-је расподеле, $1 \le k < n$.

Теорема 1 (Данијел-Колмогоров):

Нека је T непразан, а $\{F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n),\ t_1,\dots,t_n \in T,\ n\in \mathbb{N}\}$ фамилија ф-ја расподеле, која испуњава услове симетрије и сагласности.

Тада постоји случ. процес $\{X(t),\ t\in T\}$ чија је то фамилија коначнодим. ф-ја расподеле.

Доказ: последица Колмогоровљеве теореме о егзистенцији

Неке класе случајних процеса

деф. Случајни процес $\{X(t),\ t\in T\}$ је:

1) **процес са независним вредностима:** ако су случ. вел. $X(t_1), \dots, X(t_n)$ независне $(\forall n\in N,\ t_i\in T)$;

2) **процес са некорелисаним вредностима:** ако су $X(t), X(s)$ некорелисане $(\forall t,s\in T,\ t\neq s)$;

3) **процес са ортогоналним вредностима:** ако су $X(t), X(s)$ ортогоналне $(\forall t,s\in T,\ t\neq s)$.

деф. Случајни процес $\{X(t),\ t\in T\}$ је **процес са независним прираштајима** ако су случ. вел.

$$X(t_0),\quad X(t_1)-X(t_0),\quad \dots,\quad X(t_n)-X(t_{n-1})$$

независне за сваки избор $t_0<\dots<t_n$.

деф. Комплексни случ. процес $\{X(t),\ t\in T\}$ је **процес са коначним другим моментима** / **L^2-процес** ако:

$$E|X(t)|^2<+\infty\ , \qquad \forall t\in T$$

деф. Комплексни случ. процес $\{X(t),\ t\in T\}$ је **процес са некорелисаним прираштајима** ако:

1) $E|X(t)-X(s)|^2<+\infty\ ,\qquad \forall t,s\in T\ ;$

2) $E\left[(X(t_4)-X(t_3))\overline{(X(t_2)-X(t_1))}\right] = E(X(t_4)-X(t_3))\cdot E\left(\overline{X(t_2)-X(t_1)}\right)\ ,\qquad \forall t_1\le\dots\le t_4\in T.$

деф. Комплексни случ. процес $\{X(t),\ t\in T\}$ је **процес са ортогоналним прираштајима** ако:

1) $E|X(t)-X(s)|^2<+\infty\ ,\qquad \forall t,s\in T\ ;$

2) $E\left[(X(t_4)-X(t_3))\overline{(X(t_2)-X(t_1))}\right] = 0,\qquad \forall t_1\le\dots\le t_4\in T.$

деф. Случајни процес $\{X(t),\ t\in T\}$ је **строго стационаран** ако вектори:

$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ и $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$

имају исту расподелу, $\forall n\in N$, $\forall t_1, \dots, t_n, t_1+h, \dots, t_n+h \in T$

деф. Случајни процес $\{X(t),\ t\in T\}$ је **слабо стационаран** ако:

1) $E|X(t)|^2 < +\infty$, $\forall t\in T$;

2) $m_X(t) = m = const$, $\forall t\in T$;

3) $K_X(t,s) = B(t-s)$, $\forall t,s\in T$. ($B(t-s)$ - ф-ја која зависи од $t-s$)

Напомена: услови 2 и 3 важе и за строго стационаран процес.

деф. Случајни процес $\{X(t),\ t\in T\}$ је **процес Маркова** ако:

$$P\{X(t_n) = x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_1) = x_1\} = P\{X(t_n) = x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}, \quad \forall n\in N,\ \forall t_1 < \dots < t_n \in T.$$

Другим речима, зависи само од последњег засека, тј. регистроване вредности.

деф. Случајни процес $\{X(t),\ t\in T\}$ је **гаусовски случајни процес**
ако му је произвољан n-дим. засек нормална (n-дим.) случајна величина.

деф. Случајни процес $\{X(t),\ t\in T\}$ је:

1) **мартингал:** ако $E(X(t_n) \mid X(t_1), \dots, X(t_{n-1})) = X(t_{n-1})$, $\forall t_1 < \dots < t_n \in T$;

2) **супермартингал:** ако $E(X(t_n) \mid X(t_1), \dots, X(t_{n-1})) \leq X(t_{n-1})$, $\forall t_1 < \dots < t_n \in T$;

3) **субмартингал:** ако $E(X(t_n) \mid X(t_1), \dots, X(t_{n-1})) \geq X(t_{n-1})$, $\forall t_1 < \dots < t_n \in T$.

1. Непрекидност случајних процеса

* деф. Случајни процес $\{X(t), t\in T\}$ је **стохастички непрекидан** (**непрекидан у вероватноћи**) **у тачки $t_0\in T$** ако:

$$X(t) \xrightarrow{P} X(t_0), \quad t\to t_0.$$

(тј. $(\forall \varepsilon>0)\ P\{|X(t)-X(t_0)|>\varepsilon\}\to 0, \quad t\to t_0$)

Напомена: Ово је локално својство (важи у одређеној тачки).
Може се проширити на произвољан затворени скуп.

Лема 1: Стох. непр. је једнозначно одређена дводим. расподелама случ. процеса.

Доказ: тривијално (ако су познате расподеле свих дводим. засека $(X(t), X(t_0))$, $t\in T$ могуће је проверити да ли важи услов из деф.)

Лема 2: Ако је $\{X(t), t\in T\}$ стох. непр. и f непр. ф-ја $\Rightarrow$ $\{f(X(t)), t\in T\}$ је стох. непр.

Доказ: Нека је: $A_\delta = \{\omega : |X(t,\omega)-X(t_0,\omega)|>\delta\}$, $B_\varepsilon = \{\omega : |f(X(t,\omega)) - f(X(t_0,\omega))| > \varepsilon\}$

Тада: $\underline{P(A_\delta)\to 0}$, за $t\to t_0$. (због стох. непр.)

Како је f непрекидна, важи: $\omega\notin A_\delta \Rightarrow \omega\notin B_\varepsilon$, тј. $A_\delta^c \subseteq B_\varepsilon^c$, самим тим $B_\varepsilon\subseteq A_\delta$.

$\Rightarrow \quad P(B_\varepsilon)\le P(A_\delta)$

$\Rightarrow \quad P(B_\varepsilon)\to 0$, за $t\to t_0$.

Напомена: У овом случају, $E(f(X(t)))$ је непрекидна функција од t.

(зато што је очекивање Лебегов интеграл, а f је непрекидна)

Овај услов није довољан за стох. непр.

(зато што је одређен расподелама једнодимензионих засека)

* деф. Случајни процес $\{X(t),\ t\in T\}$ је **скоро сигурно непрекидан** (**непрекидан са вероватноћом 1**) на скупу $S\subset T$ ако:

$$P\{\omega:\ X(t,\omega) \text{ прекидна на } S\} = 0.$$

(тј. ако су скоро све његове трајекторије непрекидне на скупу S)

Како је компликовано проверавати све трајекторије, уводимо следећи критеријум:

Теорема 1 (критеријум Колмогорова):

Нека је $\{X(t),\ t\in T\}$ случ. процес и $[a,b]\subset T$.

Ако постоје $p, q, K > 0$ ткд.

$$(\forall t_1, t_2 \in [a,b]) \quad E|X(t_2)-X(t_1)|^p \le K\cdot |t_2-t_1|^{q+1}$$

онда је $\{X(t),\ t\in T\}$ скоро сигурно непрекидан на $[a,b]$.

Напомена: Овом теоремом, случ. процес $\{X(t),\ t\in T\}$ је одређен до на стох. еквиваленцију. [2]

Ако је неки процес $\{Y(t)\}$ еквивалентан процесу $\{X(t)\}$,
онда би вероватноће помоћу којих се рачуна $E|X(t_2)-X(t_1)|^p$ биле једнаке,
па је и за процес $\{Y(t)\}$ испуњен услов Колмогорова.

* деф. Случајни процес $\{X(t),\ t\in T\}$ је **непрекидан у средњем реда p** (**L^p - непрекидан**) у тачки $t_0\in T$ ако:

$$E|X(t)-X(t_0)|^p \longrightarrow 0, \quad t\to t_0.$$

Специјално, за $p=2$, имамо **средње квадратну непрекидност.** [23]

Напомена: И ово је локално својство.

Напомена: Као и код конвергенција:

$$\begin{tikzcd} L^p \arrow[dr] & & cc \arrow[dl] \\ & P & \end{tikzcd}$$

Пример: Нека је $\Omega = [0,1]$, $T = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ и P је Лебегова мера.

Дат је и случ. процес: $X(t,\omega) = \begin{cases} 0, & t \in T,\ \omega \in \Omega, \quad t \le \omega \\ 1, & t \in T,\ \omega \in \Omega, \quad t > \omega \end{cases}$

1) Процес јесте стох. непрекидан:

Ако су $\varepsilon \in (0,1)$ и $t_0 \in [0,1]$ фиксирани, онда важи:

$$P\{|X(t)-X(t_0)| > \varepsilon\} = \underline{P\{|X(t)-X(t_0)| = 1\}}$$

(могу да се разликују
или за 0 или за 1)

$$= P\{(X(t)=0,\ X(t_0)=1) \lor (X(t)=1,\ X(t_0)=0)\}$$

$$= P\{\omega :\ (t \le \omega,\ t_0 > \omega) \lor (t > \omega,\ t_0 \le \omega)\}$$

$$= P\{\omega :\ t \le \omega < t_0 \lor t_0 \le \omega < t\}$$

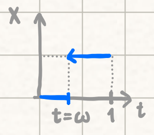
$$= \underline{|t-t_0|} \to 0, \quad \text{за } t \to t_0.$$

3) Процес јесте средње квадратно непрекидан: (аналогно за произвољно p)

$$E|X(t)-X(t_0)|^2 = 1 \cdot |t-t_0| = |t-t_0| \to 0, \quad \text{за } t \to t_0.$$

$$\hookrightarrow |X(t)-X(t_0)| : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-|t-t_0| & \underline{|t-t_0|} \end{pmatrix}$$

2) Процес није скоро сигурно непрекидан:



Зато што све трајекторије имају прекид, осим оне за $\omega = 0$ и $\omega = 1$:

(дакле имамо скроз супротно од онога што нам треба)

Приметимо: иако $E|X(t)-X(t_0)|^2 \to 0$, за $t \to t_0$, не можемо применити Т1.
Зашто? Зато што је тада $q = 0$, а мора $q > 0$.

$\boxed{2.}$ Стохастичка еквиваленција

Осим поделе у класе, случ. процеси се могу груписати и на основу тога колико им се разликују коначнодим. расподеле.

деф. Нека су реални случ. процеси $\{X(t),\ t\in T\}$ и $\{Y(t),\ t\in T\}$ дефинисани на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) $\{X(t)\}, \{Y(t)\}$ су **стохастички еквивалентни** ако:

$$P\{X(t) = Y(t)\} = 1, \quad \forall t\in T$$

2) $\{X(t)\}, \{Y(t)\}$ су **стохастички еквивалентни у ширем смислу** ако:

$$P\{X(t_1)\in B_1, \ldots, X(t_n)\in B_n\} = P\{Y(t_1)\in B_1, \ldots, Y(t_n)\in B_n\}, \quad \forall t_i,\ B_i\in\mathcal{B}$$

3) $\{X(t)\}, \{Y(t)\}$ се **не разликују** ако: $P\{X(t) = Y(t),\ \forall t\in T\} = 1$.

Напомена: *1 се може записати и као: $(\forall t\in T)\ P\{\omega : X(t,\omega) = Y(t,\omega)\} = 1$;

или: $(\forall t\in T)(\exists A_t\in\mathcal{A},\ P(A_t) = 0)\ (\forall \omega\notin A_t)\ X(t,\omega) = Y(t,\omega)$.

*2 значи да одг. n-дим. засеци имају исте расподеле;

*3 значи да се скоро све трајекторије ових процеса поклапају.

Напомена: $3 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2$.

Напомена: Ако је T дискретан: $1 \Leftrightarrow 3$.

Доказ: $P\{X(t) = Y(t),\ \forall t\in T\} = 1 \overset{T-\text{дискр.}}{\Leftrightarrow} P\{\bigcap_{t_i\in T} X(t_i) = Y(t_i)\} = 1$

$$\overset{P(AB)\le P(A)\cdot P(B)}{\Leftrightarrow} \prod_{t_i\in T} P\{X(t_i) = Y(t_i)\} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \prod_{t_i\in T} P\{X(t_i) = Y(t_i)\} = 1$$

$$\Leftrightarrow P\{X(t) = Y(t)\} = 1, \quad \forall t\in T$$

деф. Случајни процеси који су стох. екв. датом случ. процесу $\{X(t),\ t\in T\}$ зову се **верзије** тог процеса.

Разне верзије случ. процеса имају исте коначнодим. расподеле.
Ипак, по особинама трајекторија се могу разликовати:

Пример: Нека је $\Omega = [0,1]$, $T = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ и P Лебегова мера.

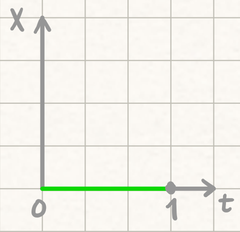
Имамо два процеса:

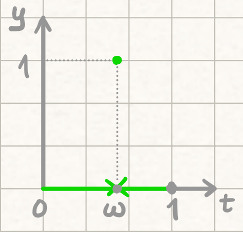
$$X(t,\omega) = 0, \quad t\in T; \qquad Y(t,\omega) = \begin{cases} 0, & t\in T,\ \omega\in\Omega,\ t\neq\omega \\ 1, & t\in T,\ \omega\in\Omega,\ t=\omega \end{cases}$$

Посматрамо догађај супротан догађају у $\overset{\text{из деф.}}{1)}$.
Тада за фиксирано $t\in T$ важи:

$$P\{\omega:\ X(t,\omega)\neq Y(t,\omega)\} = P\{\omega:\ t=\omega\} = P(\{t\}) \overset{\text{Лебегова мера}}{=} 0.$$

Дакле, имамо два стох. екв. процеса, а трајекторије су им различите.





$\boxed{3.}$ Процеси са независним прираштајима

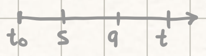
Подсетимо се, у $\boxed{0}$ смо увели процес са независним прираштајима.
То је случ. процес $\{X(t),\ t\in T\}$ ткд. су случ. вел. $X(t_0),\ X(t_1)-X(t_0),\ \dots,\ X(t_n)-X(t_{n-1})$ независне.

$X(t_0)$ је почетно стање процеса, а расподела те сл. вел. је почетна расподела процеса.

деф. Ако расподела прираштаја $X(t)-X(s)$, $t>s$, зависи само од $\underbrace{t-s}_{\text{„растојање"}}$, а не од t и s појединачно, процес $\{X(t),\ t\geq t_0\}$ је хомоген.

Кажемо и процес са стационарним прираштајима.

Лема 1: Нека је $\{X(t),\ t\in T\}$ процес са нез. прираштајима.
Случ. величине $X(s)$ и $X(t)-X(q)$ су независне за сваки избор $t_0\leq s\leq q<t$.



Доказ: тривијално $\big(X(s) = X(t_0) + (X(s)-X(t_0))\big)$

Лема 2: 1) Ако је $\{X(t),\ t\in T\}$ процес са нез. прираштајима и f неслучајна ф-ја на T, онда је и $\{X(t)-f(t),\ t\in T\}$ процес са нез. прираштајима.

2) Процес са нез. прираштајима је, скоро сигурно, процес Маркова.
Обрнуто не мора да важи. (нпр. процес гранања $\boxed{13}$)

Доказ: 1) тривијално (скрате се сви $f(t)$);

2) Важи: $X(t) = X(s) + \underbrace{(X(t)-X(s))}_{\text{не зависи од } X(u),\quad u<s}$, $s<t$

Ако ставимо $t=t_{n+1}$, а $s=t_n$ $\Rightarrow$ $X(t_{n+1})$ зависи само од $X(t_n)$ $\Rightarrow$ јесте процес Маркова.

Пример: 1) бацање новчића: стр. 14;

2) случајно лутање по правој: стр. 14;

3) Пуасонов процес;

4) Винеров процес.

4. Дефиниција Пуасоновог процеса

деф. Случајни процес $\{N(t),\ t \geq 0\}$ је **Пуасонов процес** ако:

1) $N(0) = 0$ је скоро сигурно;

2) има независне прираштаје;

3) Постоји $\mu : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ која је неопадајућа, непрекидна здесна, $\mu(0) = 0$ и

$$N(t) - N(s) \in \mathcal{P}(\mu(t) - \mu(s)), \qquad 0 < s < t;$$

Функција μ се зове **функција средње вредности** Пуасоновог процеса.

4) Трајекторије процеса $\{N(t),\ t \geq 0\}$ су скоро сигурно непрекидне здесна за $t \geq 0$ и скоро сигурно имају леву граничну вр. за $t > 0$.

деф. Ако је $\mu(t) - \mu(s) = \int_s^t \lambda(u)\,du$, за неку ф-ју $\lambda(u) \geq 0$,
ф-ја $\lambda(u)$ се зове **функција интензитета** процеса $\{N(t)\}$.

деф. Ако је $\mu(t) = \lambda \cdot t$, за неко $\lambda \geq 0$,
онда је $\{N(t)\}$ **хомогени Пуасонов процес** са **интензитетом** λ.

Специјално, за $\lambda = 1$, кажемо **стандардни хомогени Пуасонов процес.**

Теорема 1: $N(t) \in \mathcal{P}(\mu(t))$;

Доказ: Знамо: $N(t) - N(s) \in \mathcal{P}(\mu(t) - \mu(s))$.

Ако пустимо $s \to 0+$, због непр. здесна следи $\mu(0) = 0$, а важи и $N(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad N(t) - 0 \in \mathcal{P}(\mu(t) - 0) \quad \Rightarrow \quad N(t) \in \mathcal{P}(\mu(t))$$

Последица: $EN(t) = \mu(t)$ и $DN(t) = \mu(t)$.

$\downarrow$ оправдава зашто μ зовемо ф-ја ср. вр.

Теорема 2: $K_N(t,s) = \mu(\min\{s,t\})$;

Доказ: БУО $0 \leq s < t < +\infty$. Трик је да наместимо на дисјунктне прираштаје.

$$
\begin{aligned}
K_N(t,s) &= E\left[(N(t) - EN(t))(N(s) - EN(s))\right] \\
&= E[N(t) \cdot N(s)] - EN(t) \cdot EN(s) \\
&= E\left[(N(t) - N(s) + N(s)) \cdot (N(s) - N(0))\right] - EN(t) \cdot EN(s) \\
&= \underline{E\left[(N(t) - N(s)) \cdot (N(s) - N(0))\right]} + EN(s)^2 - EN(t) \cdot EN(s) \\
&\overset{\text{нез. прир.}}{=} \underline{E(N(t) - N(s))} \cdot \underline{E(N(s) - N(0))} + EN(s)^2 - EN(t) \cdot EN(s) \\
&\overset{1)}{=} (\mu(t) - \mu(s))(\mu(s) - \mu(0)) + \underbrace{\mu(s) + \mu(s)^2}_{DX = EX^2 - (EX)^2} - \mu(t)\mu(s) = \mu(s) = \mu(\min\{t,s\})
\end{aligned}
$$

Теорема 3: Може се одредити расподела n-дим. засека

Доказ: једноставно (скрипта, стр. 15)

Теорема 4: Пуасонов процес је скоро сигурно процес Маркова;

Доказ: једноставно (скрипта, стр. 16.)

Теорема 5: Ако је $\{N(t), t \geq 0\}$ станд. хом. Пуасонов процес и μ ф-ја која испуњава услове ф-је ср. вр. онда је $\{N(\mu(t)), t \geq 0\}$ (обичан) Пуасонов процес са ф-јом ср. вредности μ.

И обрнуто, ако је $\{N(\mu(t)), t \geq 0\}$ Пуасонов процес са ф-јом ср. вр. μ и постоји μ^{-1} онда је $\{N(\mu^{-1}(t)), t \geq 0\}$ станд. хом. Пуасонов процес.

Доказ: тривијално:

$(\Rightarrow)$ $N(t) - N(s) \in \mathcal{P}(t-s) \Rightarrow N(\mu(t)) - N(\mu(s)) \in \mathcal{P}(\mu(t) - \mu(s))$;

$(\Leftarrow)$ $N(t) - N(s) \in \mathcal{P}(\mu(t) - \mu(s)) \Rightarrow N(\mu^{-1}(t)) - N(\mu^{-1}(s)) \in \mathcal{P}(t-s)$.

$\boxed{5.}$ Трајекторије Пуасоновог процеса

Теорема 1: Трајекторије Пуасоновог процеса су скоро сигурно неопадајуће степенасте ф-је, са скоковима величине 1;

Доказ: Очигледно јесу неопадајуће (P)

Доказујемо за хом. Пуасонов процес, тј. $\mu(t) = \lambda t$ (једноставнији рачун).

* За почетак, фиксирајмо тренутак $s > 0$ и „растојање" $h \to 0$.

Вероватноћа да нема скока
$$P\{N(s+h) - N(s) = 0\} \overset{\in \mathcal{P}(\lambda h)}{=} \frac{(\lambda h)^0 e^{-\lambda h}}{0!} = e^{-\lambda h} \overset{\text{развој}}{=} 1 - \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2} + o(h^2), \quad h \to 0$$

скок величине 1
$$P\{N(s+h) - N(s) = 1\} = \frac{(\lambda h)^1 e^{-\lambda h}}{1!} = \lambda h e^{-\lambda h} = \lambda h - \lambda^2 h^2 + o(h^2), \quad h \to 0$$

скок већи од 1
$$P\{N(s+h) - N(s) > 1\} = 1 - e^{-\lambda h} - \lambda h e^{-\lambda h} = \frac{\lambda^2 h^2}{2} + o(h^2), \quad h \to 0$$

* Сада рачунамо вероватноћу да је неки скок > 1, али $h \not\to 0$, већ $h = t - s$

n - број подеока

t-s - дужина интервала

$$P\{\max_{1 \le k < n} [N(s + \tfrac{k}{n}(t-s)) - N(s + \tfrac{k-1}{n}(t-s))] > 1\}$$

$\max \le \sum^{n}$

$$\le \sum_{k=1}^{n} P\{[N(s + \tfrac{k}{n}(t-s)) - N(s + \tfrac{k-1}{n}(t-s))] > 1\}$$

$h = \frac{t-s}{n} \to 0$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda^2 \frac{(t-s)^2}{2n^2} + o(\tfrac{1}{n^2})\right) = n\left(\lambda^2 \frac{(t-s)^2}{2n^2} + o(\tfrac{1}{n^2})\right) = \lambda^2 \frac{(t-s)^2}{2n} + o(\tfrac{1}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

↑ не зависи од k

6. Пуасонов процес као процес бројања

* Питамо се зашто је Пуасонов процес добар модел за бројање догађаја који се дешавају на мање или више случајан начин?

Примери за то су број позива у неком интервалу, број посета на неком сајту, распад честица …

Свим овим примерима, заједничко је следеће:

1) **хомогеност у времену:** вероватноћа $P_n(t)$ да се у интервалу дужине t оствари n догађаја зависи од n и t, али не од положаја на временској оси;

2) **независност прираштаја:** бр. догађаја који се остварују у дисј. интервалима су независне вел. нпр. позиви у Фебруару су независни од позива у Марту;

3) **ординарност потока догађаја:**

У $\boxed{5}$ смо видели да је вероватноћа скока величине 1 пропорционална дужини интервала, а да је вероватноћа скока већег од 1 веома мала, занемарљива.

Дакле, вероватноћа да се у интервалу дужине $\Delta t \to 0$ оствари један догађај је $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, а да се деси више од једног догађаја је $o(\Delta t)$.

Одавде добијамо систем:

$$\begin{aligned} P_0(t+\Delta t) &= \overset{\text{нула дог. у } t}{P_0(t)} \cdot \overset{\text{нула и у } \Delta t}{P_0(\Delta t)} \\ P_n(t+\Delta t) &= \underbrace{P_{n-1}(t)\, P_1(\Delta t)} + \underbrace{P_n(t)\, P_0(\Delta t)} + o(\Delta t), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Решавањем, добијамо: $P_n = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

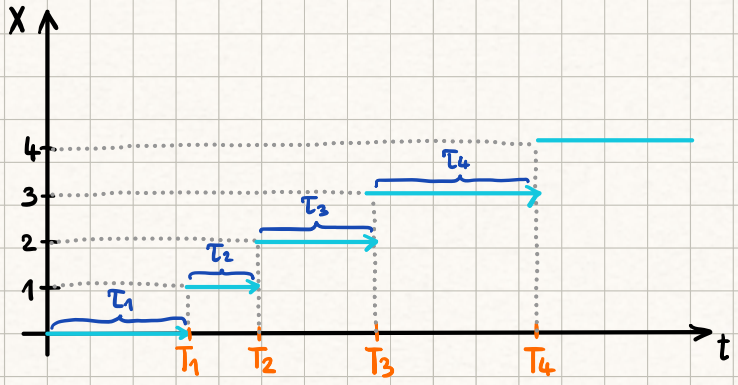
Одавде, видимо да је у питању Пуасонов процес.

деф. Случајни процес $\{X(t),\ t\geq 0\}$ је **процес бројања** ако $X(t)$ представља број догађаја истог типа који се на случ. начин реализују у интервалу $[0,t]$.

Случајни низ $(T_n)_{n\geq 0}$ деф. са: $T_0 = 0$, $T_n = \inf\{t\geq 0,\ X(t) = n\}$ се зове **низ времена долазака.**

Случајни низ $(\tau_n)_{n\geq 1}$ деф. са: $\tau_n = T_n - T_{n-1}$ се зове **низ времена чекања.**

Напомена: Пуасонов процес је један процес бројања.



(процеси бројања имају степенасте трајекторије)

Теорема 2: Нека је $\{N(t),\ t\geq 0\}$ хомогени Пуасонов процес са интензитетом λ. Тада:

1) τ_n су независне случ. вел;

2) $\tau_n \in \mathcal{E}(\lambda)$;

3) $T_n \in \Gamma(n, \lambda)$.

Доказ: 1) стр. 18 (гледати слику);

2) стр. 19;

3) тривијално (сума експ. је гама, то се доказује индукцијом).

$\boxed{7.}$ Конструкција хомогеног Пуасоновог процеса

Теорема 1 (конструкција хомогеног Пуасоновог процеса):

Нека је (Y_n) низ независних случ. вел. са $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелом, $\lambda > 0$ и $\begin{cases} T_0 = 0 \\ T_n = \sum^n Y_i \end{cases}$

Коначно, нека је $\{N(t),\ t \geq 0\}$ случ. процес деф. са $N(t) = |\{k \geq 1,\ T_k \leq t\}|$, $t \geq 0$ (*)

Тада је $\{N(t),\ t \geq 0\}$ хомогени Пуасонов процес са интензитетом λ.

Доказ: Проверавамо 4 својства из дефиниције.

3) Знамо да $T_n = \sum^n Y_i$ има $\Gamma(n, \lambda)$ расподелу (збир експоненцијалних)

Густина: $f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$.

Ф-ја расп: $F_n(x) = P\{T_n \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}$.

Доказујемо да прираштаји процеса имају $\mathcal{P}(\underline{\lambda}(t-s))$ расподелу ($\underline{\text{хом.}}$):
То радимо у 3 корака:

1. $N(t) \in \mathcal{P}(\lambda t)$, тј. расподела засека је $\mathcal{P}(\lambda t)$:

$$P\{N(t) = n\} \overset{(*)}{=} P\{T_n \leq t < T_{n+1}\} = P\{T_n \leq t\} - P\{T_{n+1} \leq t\}$$

$$\overset{\Gamma(n,\lambda)}{=} 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \left(1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \Rightarrow \in \mathcal{P}(\lambda t).$$

2. **Лема:** За $0 < s < t$ важи: $P\{\underbrace{N(s) = k}_{\text{засек}},\ \underbrace{N(t) - N(s) = l}_{\text{прираштај}}\} = \underbrace{e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!}}_{\text{зависи од } s} \cdot \underbrace{e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^l}{l!}}_{\text{зависи од } t-s}$, $k, l \in \mathbb{Z}^+$.
   ↳ доказ касније

3. Коначно, доказујемо оно шта нам треба: прираштаји процеса имају $\mathcal{P}(\lambda(t-s))$ расподелу

$$P\{N(t) - N(s) = l\} \overset{\text{фпв}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(s) = k,\ N(t) - N(s) = l\} \overset{\text{Л}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^l}{l!}$$

$$= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda(t-s))^l}{l!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \overset{\text{Тејлор}}{=} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda(t-s))^l}{l!} e^{\lambda s}$$

$$= e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^l}{l!} \Rightarrow \mathcal{P}(\lambda(t-s))$$

1) Пошто $\varepsilon(\lambda)$ скоро сиг. узима позитивне вредности: $N(0) = |\{k \geq 1, \ T_k \leq 0\}| = 0$ је скоро сиг.

2) Важи због λ (јер може да се запише одвојено);

4) Важи јер $N(t,\omega)$ узима вр. k на $[T_k(\omega), T_{k+1}(\omega)]$, а онда има скок до $k+1$ у тачки $T_{k+1}(\omega)$.

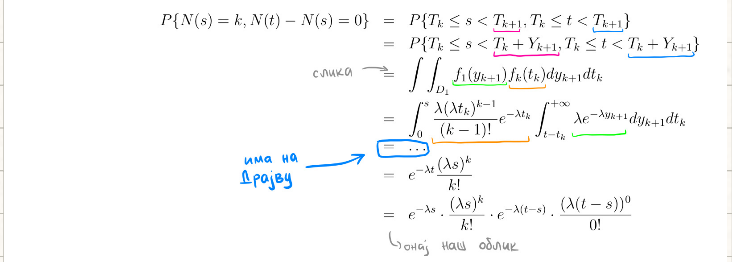
Доказ леме: 1° $k=0$, $l=0$:

$$P\{N(s)=0, \ N(t)-N(s)=0\} = P\{N(s)=0, \ N(t)=0\} = P\{s<T_1, \ t<T_1\}$$

$$\overset{s<t}{=} P\{t<T_1\} \overset{T_1=Y_1\sim\varepsilon(\lambda)}{=} e^{-\lambda t}$$

а то се може записати као: $e^{-\lambda s}\dfrac{(\lambda s)^0}{0!} \cdot e^{-\lambda(t-s)} \cdot \dfrac{(\lambda(t-s))^0}{0!}$;

2° $k>0$, $l=0$:

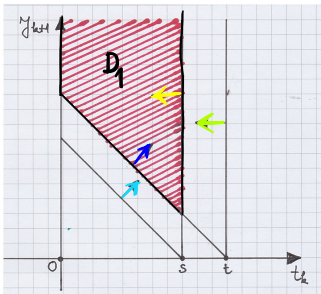


$$\begin{aligned}
P\{N(s)=k, N(t)-N(s)=0\} &= P\{T_k \leq s < \underline{T_{k+1}}, T_k \leq t < \underline{T_{k+1}}\} \\
&= P\{T_k \leq s < \underline{T_k + Y_{k+1}}, T_k \leq t < \underline{T_k + Y_{k+1}}\} \\
\text{слика} \rightarrow &= \int\int_{D_1} \underline{f_1(y_{k+1})}\underline{f_k(t_k)}dy_{k+1}dt_k \\
&= \int_0^s \underline{\frac{\lambda(\lambda t_k)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t_k}} \int_{t-t_k}^{+\infty} \underline{\lambda e^{-\lambda y_{k+1}}} dy_{k+1}dt_k \\
\text{има на драјву} \rightarrow &\boxed{= \ \dots} \\
&= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda s)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda s)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda(t-s)} \cdot \frac{(\lambda(t-s))^0}{0!}
\end{aligned}$$

↳ онај наш облик

$t_k \underline{\leq} s \ \underline{<} t_k + y_k$

$t_k \underline{\leq} t \ \underline{<} t_k + y_k$



3° $k>0$, $l>0$: стр. 22.

$\boxed{8.}$ Веза Винеровог процеса и случ. лутања

Посматрамо процес где честица полази из тачке 0 скоро сигурно.
У јединици времена Δt прави корак h у поз. или нег. смеру, са једнаким вероватноћама.

$(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ је низ корака: $P\{X_k = h\} = P\{X_k = -h\} = \frac{1}{2}$

$(Y_{t_n})_{n\geq 0}$ је низ положаја (у тренутку t_n): $Y_0 = 0$; - случајно лутање.
$Y_{t_n} = X_1 + \ldots + X_n$, $t_n = n\cdot\Delta t$.

Када $\Delta t \to 0$, $h \to 0$, добија се непрекидан процес $\{Y(t),\ t\geq 0\}$ - једнодим. Брауново кретање.

Особине:
- $Y(0) = 0$ је скоро сиг. (као и код случ. лутања)
- $\{Y(t),\ t\geq 0\}$ има хомогене незав. прираштаје (опет као код случ. лутања, по $\boxed{3}$)
- Тражимо коју расподелу има прираштај процеса $\{Y(t),\ t\geq 0\}$:

Приметимо: $DY(t+s) = DY(t) + DY(s)$. (скрипта, стр. 24)
Постављамо функционалну једначину: $f(t) = DY(t)$:

f је непрекидна, ненегативна, деф. на $[0,+\infty)$ за коју важи: $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Решавамо је корак по корак:
а) $f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$;
б) $f(nx) = n\cdot f(x)$ (индукција);
в) $f(x) = f(n\cdot\frac{x}{n}) = n\cdot f(\frac{x}{n}) \Rightarrow f(\frac{x}{n}) = \frac{1}{n}f(x)$
г) $f(\frac{mx}{n}) = mf(\frac{x}{n}) = \frac{m}{n}f(x)$;

Одавде: $f(rt) = r\cdot f(t)$, где $r\in\mathbb{Q}^+$. (*)

Означимо $f(1) = c$. Приметимо $c>0$ (ако би било $\overset{\left(\substack{\text{не може}\\ c<0}\right)}{c=0}$, онда $f(x) = f(1\cdot x) \overset{(*)}{=} x\cdot f(1) = 0$, $\forall x\in\mathbb{Q}^+$ ↯)
Како је $\mathbb{Q}^+$ густ у $\mathbb{R}^+$ $\Rightarrow (\forall x\in\mathbb{R}^+)(\exists (r_n)\in\mathbb{Q}^+)\ \lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$;

$$\Rightarrow f(x) = f(\lim_{n\to\infty} r_n) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} f(r_n\cdot 1) \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} r_n\cdot f(1) = \lim_{n\to\infty} r_n\cdot c = c\cdot\lim_{n\to\infty} r_n = cx,\quad x\in\mathbb{R}^+.$$

Закључак: $DY(t) = \sigma^2 t$ ($\sigma^2 = c > 0$ - коефицијент дифузије - „брзина промене дисперзије")

За $\Delta t\to 0$ бр. корака у лутању расте $\underset{\substack{EY(t)=0\\ DY(t)=\sigma^2 t}}{\overset{\text{ЦГТ}}{\Rightarrow}}$ $\frac{Y(t)-0}{\sqrt{\sigma^2 t}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Одавде: $Y(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$.
Из хомогености прираштаја, важи и $Y(t+s) - Y(s) \in \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$.

9. Дефиниција Винеровог процеса

деф. Случајни процес $\{W(t),\ t \geq 0\}$ је Винеров процес ако:

1) $W(0) = 0$ је скоро сигурно;

2) $\{W(t),\ t \geq 0\}$ има независне прираштаје;

3) $W(t) - W(s) \in \mathcal{N}(0,\ t-s)$, $0 \leq s < t < +\infty$ (без σ^2)

Теорема 1: 1) $W(t) \in \mathcal{N}(0, t)$;

Одавде: $EW(t) = 0$, $DW(t) = t$;

2) $K_W(t,s) = \min\{s,t\}$;

3) Расподела n-дим. засека:

$$f_{t_1,\ t_2-t_1,\ \dots,\ t_n-t_{n-1}}(x_1,\ x_2-x_1,\ \dots,\ x_n-x_{n-1}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k-t_{k-1})}} \cdot e^{-\frac{(x_k-x_{k-1})^2}{2(t_k-t_{k-1})}}, \qquad x_0 = 0;$$

4) Винеров процес је L^2- непрекидан.[1]

Доказ: 1) тривијално (наместимо прираштај);

2) БУО $0 \leq s < t < +\infty$.

$$\begin{aligned} K_W(t,s) &= E\big[(W(t) - EW(t))(W(s) - EW(s))\big] \\ &= E[W(t) \cdot W(s)] \\ &= E\big[(\underline{W(t)-W(s)} + \underline{W(s)}) \cdot \underline{W(s)}\big] \\ &= E\big[(\underline{W(t)-W(s)}) \cdot (\underline{W(s)-W(0)})\big] + \underline{EW(s)^2} \\ &\overset{\text{нез.}}{=} E(W(t)-W(s)) \cdot E(W(s)-W(0)) + \underline{DW(s)} = 0 \cdot 0 + s = \min\{t,s\}; \end{aligned}$$

3) тривијално (прираштаји су независни);

4) $E|W(t_0+h) - W(t_0)|^2 = D(W(t_0+h) - W(t_0)) = h \to 0$, за $h \to 0$.

У следећој теореми ћемо видети које трансформације „чувају" Винеров процес.

Теорема 2: Нека је $\{W(t),\ t\geq 0\}$ Винеров процес.

1) $\{W(t+a)-W(a),\ t\geq 0\}$ је Винеров процес, за $a>0$;

2) $\{\frac{1}{c}W(c^2t),\ t\geq 0\}$ је Винеров процес, за $c\neq 0$;

3) $\{-W(t),\ t\geq 0\}$ је Винеров процес;

4) Случ. процеси $\{W(t),\ t>0\}$, $\{tW(\frac{1}{t}),\ t>0\}$ имају исте фамилије коначнодим. расподела.

Доказ: 1), 2), 3) тривијално (проверимо услове из деф.);

4) Означимо други процес са W_1.

Сваки n-дим. засек за W је гаусовски случ. вектор (по Т1.1) и то са очекивањем 0 и коваријационом матрицом која је одређена са K_W.

Такође, и сваки n-дим. засек за W_1 је гаусовски случ. вектор јер је он лин. комб. компоненти нормално расп. случ. вектора.

$$\left(\text{нпр. за } n=2,\ 0<t_2<t_1:\quad t_2W(\tfrac{1}{t_2})-t_1W(\tfrac{1}{t_1}) = t_2\cdot\left(W(\tfrac{1}{t_2})-W(\tfrac{1}{t_1})\right)+(t_2-t_1)\cdot W(\tfrac{1}{t_1})\right)$$

Расподела гаусовског случ. вектора са очекивањем 0 је јединств. одређ. ковар. матрицом, тј. у овом случају са K_{W_1}.

А лако се доказује да ови процеси имају исте ковар. ф-је:

$$K_{W_1}(t,s) = E[W_1(t)W_1(s)] = E[t\cdot W(\tfrac{1}{t})\cdot s\cdot W(\tfrac{1}{s})]$$

$$= ts\cdot E[W(\tfrac{1}{t})W(\tfrac{1}{s})]$$

$$= ts\cdot K_W(\tfrac{1}{t},\tfrac{1}{s})$$

$$\overset{T1}{=} ts\cdot\min\{\tfrac{1}{t},\tfrac{1}{s}\} = \min\{s,t\} = K_W(t,s).$$

$\boxed{10.}$ Трајекторије Винеровог процеса 1

Теорема 1: Нека је $0 \le a < b < +\infty$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, $A > 0$ и $S_n = \sum_{i=1}^{n} |W(t_i) - W(t_{i-1})|$.

Ако $\delta = \max_{1 \le i \le n}(t_i - t_{i-1}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, онда $P\{S_n > A\} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. (увек га премаши)

↳ уситнимо

Напомена: Другим речима, Винеров процес има неограничену варијацију на било ком $[a,b]$.

Доказ: $E(S_n) \overset{(*)}{\ge} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{b-a}{\delta} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

$D(S_n) \overset{(**)}{=} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)(b-a)$

За довољно велико n: $E(S_n) > A \Rightarrow E(S_n) - A > 0$

Тада важи:

$$\{|S_n - E(S_n)| < E(S_n) - A\} = \{S_n - E(S_n) < E(S_n) - A,\quad E(S_n) - S_n < E(S_n) - A\}$$
$$= \{S_n - E(S_n) < E(S_n) - A,\quad S_n > A\}$$
$$\subset \{S_n > A\}$$

Одавде: $P\{S_n \le A\} = 1 - P\{S_n > A\} \le 1 - P\{|S_n - E(S_n)| < E(S_n) - A\} = P\{|S_n - E(S_n)| \ge E(S_n) - A\}$

По неједнакости Чебишева:

$$P\{S_n \le A\} \le \frac{E|S_n - E(S_n)|^2}{(E(S_n) - A)^2} = \frac{D(S_n)}{(E(S_n)-A)^2} = \frac{\left(1-\frac{2}{\pi}\right)(b-a)}{(E(S_n)-A)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

(*)

$$\begin{aligned}
\boxed{E(S_n)} &= E\sum_{i=1}^{n} |W(t_i) - W(t_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^{n} E|\overbrace{W(t_i) - W(t_{i-1})}^{\in \mathcal{N}(0,\, t_i - t_{i-1})}| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} e^{-\frac{x^2}{2(t_i - t_{i-1})}}\, dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} e^{-\frac{x^2}{2(t_i - t_{i-1})}}\, dx \\
&= \boxed{\cdots} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{t_i - t_{i-1}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i - t_{i-1}}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} \qquad (\star) \\
&\ge \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i - t_{i-1}}{\sqrt{\delta}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{b-a}{\sqrt{\delta}} \boxed{\to +\infty,} \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

(**)

$$\begin{aligned}
\boxed{D(S_n)} &= D\sum_{i=1}^{n} |W(t_i) - W(t_{i-1})| \\
\text{Тада су и } |\cdot| \text{ нез.} \leftarrow\ &\overset{\text{нез. прир.}}{=} \sum_{i=1}^{n} D|W(t_i) - W(t_{i-1})| \\
DX = EX^2 - (EX)^2 \ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\underline{E(W(t_i) - W(t_{i-1}))^2} - (E|W(t_i) - W(t_{i-1})|)^2\right) \\
DX = EX^2 - (EX)^2 \ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\underline{D(W(t_i) - W(t_{i-1})) + \cancel{(E(W(t_i)} - W(t_{i-1}))^2}_{\to 0} - (E|W(t_i) - W(t_{i-1})|)^2\right) \quad \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1}) \\
\mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1}) \ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\underline{t_i - t_{i-1}} - \underbrace{\frac{2}{\pi}(t_i - t_{i-1})}_{\text{по } (\star)}\right) \\
&= \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \\
&\boxed{= \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)(b-a).}
\end{aligned}$$

11. Трајекторије Винеровог процеса 2

Теорема 1: Нека је $0 \le a < b < +\infty$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ и $S_n = \sum_{i=1}^{n} [W(t_i) - W(t_{i-1})]^2$.

Ако $\delta = \max_{1 \le i \le n} (t_i - t_{i-1}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, онда $S_n \xrightarrow{n\to\infty} b-a$ у средње кв. смислу (L^2).

Напомена: Другим речима, Винеров процес има ограничену квадратну варијацију на било ком $[a,b]$.

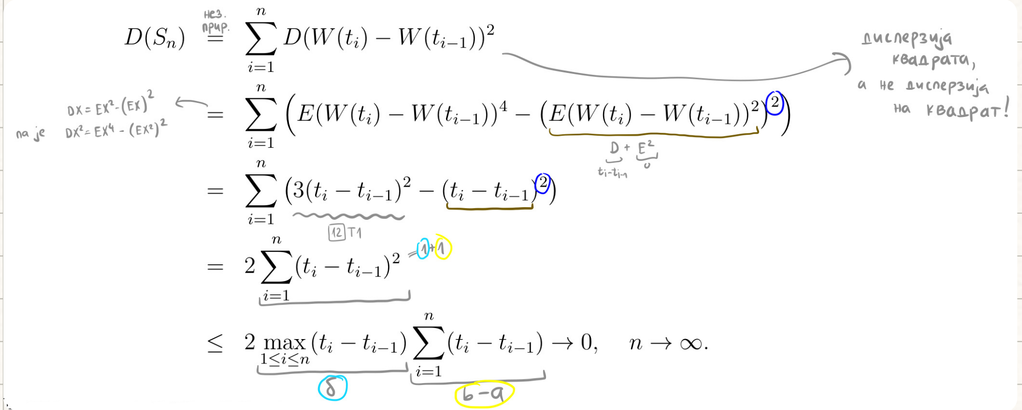
Доказ: $E(S_n) = \sum^{n} E(W(t_i) - W(t_{i-1}))^2 \overset{DX = EX^2 - (EX)^2}{=} \sum^{n} (t_i - t_{i-1}) = b-a.$

$D(S_n) \overset{(***)}{\le} 2\delta(a-b) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

Ми доказујемо: $E\left[\sum^{n} (W(t_i) - W(t_{i-1}))^2 - (b-a)\right]^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

А лева страна је једнака $D(S_n)$, а то заиста $\to 0$, за $n \to \infty$.

(***)



$DX = EX^2 - (EX)^2$

па је $DX^2 = EX^4 - (EX^2)^2$

$$\begin{aligned}
D(S_n) &\overset{\text{нез. прир.}}{=} \sum_{i=1}^{n} D(W(t_i) - W(t_{i-1}))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(E(W(t_i) - W(t_{i-1}))^4 - (\underbrace{E(W(t_i) - W(t_{i-1}))^2}_{\underbrace{D}_{t_i - t_{i-1}} + \underbrace{E^2}_{0}})^{2} \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\underbrace{3(t_i - t_{i-1})^2}_{\boxed{12}\ T1} - (\underbrace{t_i - t_{i-1}}_{})^{2}) \\
&= 2\underbrace{\sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})^2}_{} = 1 + 1 \\
&\le \underbrace{2 \max_{1 \le i \le n} (t_i - t_{i-1})}_{\delta} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})}_{b-a} \to 0, \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

дисперзија квадрата, а не дисперзија на квадрат!

12. Особине трајекторија Винеровог процеса

Теорема 1: Винеров процес је скоро сигурно непрекидан на сваком коначном интервалу.

Доказ: Нека је $0 \leq s < t < +\infty$

$$E|W(t) - W(s)|^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}\, dx = \ldots = 3(t-s)^2.$$

Можемо применити критеријум Колмогорова ($\boxed{1}$ T1) за $p=4$, $q=1$, $K \geq 3$.

Добија се да је Винеров процес скоро сигурно непрекидан на сваком $[0, a]$.

Теорема 2 (Теорема Пели - Винер - Зигмунда)

Трајекторије Винеровог процеса скоро сигурно нису диференцијабилне ни у једној тачки.

Доказ: Наводимо само идеју доказа да не може постојати извод Вин. проц. ни у једној тачки t_0.

Нека је $\dfrac{W(t_0+h) - W(t_0)}{h} \in \mathcal{N}(0, \frac{1}{h})$. **(*)**

Случ. вел. са ознаком $W'(t_0)$ је извод за W у смислу неке од три конвергенције
ако **(*)** конв. у том истом смислу ка $W'(t_0)$ када $h \to 0$.

То значи да би тај извод имао расподелу $\mathcal{N}(0, +\infty)$, што не постоји.

* Претходна 4 тврђења говорила су о локалном понашању трајекторија Винеровог процеса.
Видели смо да су то $\underbrace{\text{непрекидне линије}}_{T1}$ $\underbrace{\text{пуне шпицева}}_{T2}$.

Наредна тврђења говоре о глобалном понашању трајекторија.

Теорема 3: (Хинчинов закон поновљеног логаритма):

За Винеров процес $\{W(t),\ t \geq 0\}$ важи:

1) $\limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{W(t)}{\sqrt{2t \ln\ln t}} = 1$ је скоро сигурно;

2) $\liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{W(t)}{\sqrt{2t \ln\ln t}} = -1$ је скоро сигурно;

3) $\limsup\limits_{t\to 0^+} \dfrac{W(t)}{\sqrt{2t \ln\ln \frac{1}{t}}} = 1$ је скоро сигурно;

4) $\liminf\limits_{t\to 0^+} \dfrac{W(t)}{\sqrt{2t \ln\ln \frac{1}{t}}} = -1$ је скоро сигурно;

Доказ: 1) тешко за овај курс;

2) Следи из 1), због тога што је и $\{-W(t),\ t \geq 0\}$ Винеров процес (по $\boxed{9}$ Т2)

$$\Rightarrow \limsup \frac{-W(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1 \text{ с.с.} \quad \Rightarrow \quad -\liminf \frac{W(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1 \text{ с.с.} \quad \Rightarrow \quad \liminf = -1 \text{ с.с.}$$

4) Следи из 3) по аналогном поступку;

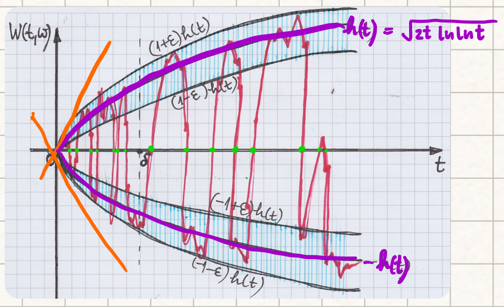
3) Следи из 1), због тога што $\{W(t)\}$ и $\{t\,W(\frac{1}{t})\}$ имају исту расп. (по $\boxed{9}$ Т2)

$$\Rightarrow \limsup_{t\to\infty} \frac{t\cdot W(\frac{1}{t})}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1 \text{ с.с.} \quad \overset{t=\frac{1}{s}}{\Rightarrow} \quad \limsup_{s\to 0+} \frac{\frac{1}{s}W(s)}{\sqrt{2\frac{1}{s}\ln\ln\frac{1}{s}}} = 1 \text{ с.с.} \quad \Rightarrow \quad \limsup_{s\to 0+} = 1 \text{ с.с.}$$

Напомена: Означимо са $h(t) = \sqrt{2t \ln\ln t}$.

Тада теорема каже: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ ткд. део трајекторије процеса $\{W(t)\}$ за $t \in [0, \delta]$
скоро сиг. ∞ пута припадају „траци" $[(1-\varepsilon)h(t),\ (1+\varepsilon)h(t)]$
и скоро сиг. ∞ пута припадају „траци" $[(-1-\varepsilon)h(t),\ (-1+\varepsilon)h(t)]$.

Одавде видимо да процес скоро сиг. ∞ пута узима вредност нула.



Теорема 4: $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{W(t)}{t} = 0$ је скоро сигурно.

Напомена: Другим речима, трајекторије Винеровог процеса расту спорије од t кад $t\to\infty$

$\boxed{13.}$ Принцип рефлексије код Винеровог процеса

Теорема 1 (принцип рефлексије):

Нека је $\{W(t),\ t \geq 0\}$ Винеров процес, $a > 0$
и нека је $T_a := \inf\{t \geq 0 : W(t) = a\}$ тренутак достизања нивоа a. (први пут)

Тада је случ. процес $W_1(t) = \begin{cases} W(t), & t \leq T_a \\ 2a - W(t), & t > T_a \end{cases}$ такође Винеров процес.

Доказ: Само идеја:

$$\{W(t),\ t \geq T_a\} = \{W(t+T_a),\ t \geq 0\} = \{W(T_a) + (W(t+T_a) - W(T_a)),\ t \geq 0\}$$

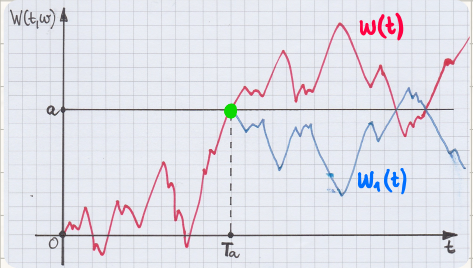
$$= \{a + \underbrace{(W(t+T_a) - a)}_{W_2},\ t \geq 0\} = \{a + \underbrace{(a - W(t+T_a))}_{-W_2},\ t \geq 0\}$$

↳ он је такође Винеров (по $\boxed{9}$)

$$= \{2a - W(t),\ t \geq T_a\}$$

Ово није цео доказ зато што не видимо везу прираштаја.

Закључак: Ако је процес $\{W(t)\}$ већ достигао ниво a,
онда су једнаке вероватноће да процес у тренутку $t > T_a$ узме вр. веће и мање од a.



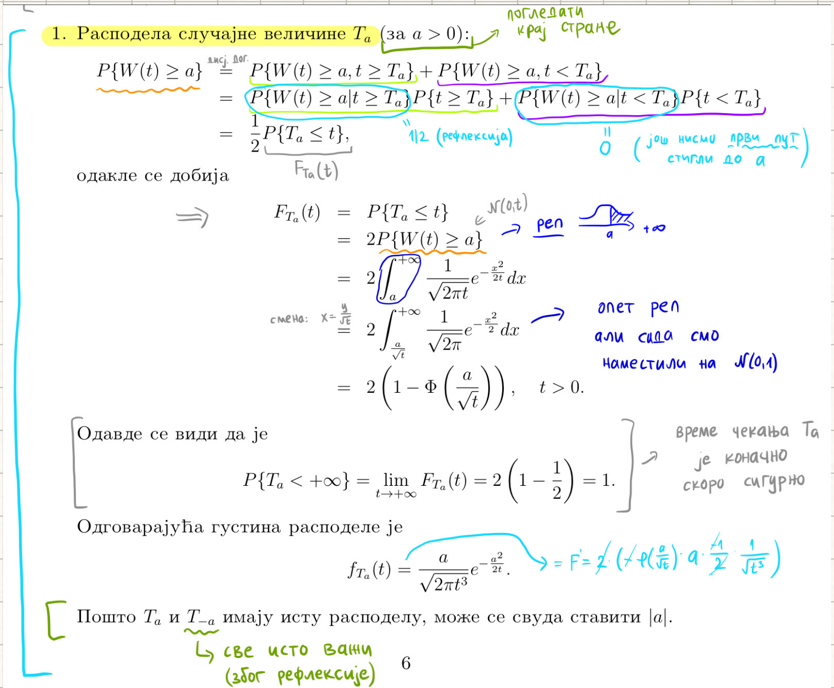
Од зелене тачке,
једнако је вероватно $\underset{W}{\text{црвено}}$ и $\underset{W_1}{\text{плаво}}$.

деф. **Максимум процеса** $\{W(t)\}$ је $M(t) := \max\limits_{0\le s\le t} W(s)$.

Теорема 2: 1) Расподела случ. вел. T_a (за $a>0$): $f_{T_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \cdot e^{-\frac{a^2}{2t}}$;

2) Расподела максимума процеса $M(t)$: $f_{M(t)}(a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-\frac{a^2}{2t}}$.

Доказ: 1)



1. Расподела случајне величине T_a (за $a > 0$): → погледати крај стране

$$
\begin{aligned}
P\{W(t) \ge a\} &\overset{\text{дисј. дог.}}{=} P\{W(t) \ge a, t \ge T_a\} + P\{W(t) \ge a, t < T_a\}\\
&= \underbrace{P\{W(t) \ge a | t \ge T_a\}}_{= 1/2 \text{ (рефлексија)}} P\{t \ge T_a\} + \underbrace{P\{W(t) \ge a | t < T_a\}}_{= 0 \text{ (још нисмо први пут стигли до } a)} P\{t < T_a\}\\
&= \frac{1}{2} \underbrace{P\{T_a \le t\}}_{F_{T_a}(t)},
\end{aligned}
$$

одакле се добија

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad F_{T_a}(t) &= P\{T_a \le t\}\\
&= 2\underbrace{P\{W(t) \ge a\}}_{\mathcal{N}(0,t)} \to \text{реп}\\
&= 2\int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}\,dx\\
&\overset{\text{смена: } x = \frac{y}{\sqrt{t}}}{=} 2\int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \to \text{опет реп али сада смо наместили на } \mathcal{N}(0,1)\\
&= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right), \quad t > 0.
\end{aligned}
$$

a $+\infty$

Одавде се види да је

$$P\{T_a < +\infty\} = \lim_{t\to+\infty} F_{T_a}(t) = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

→ време чекања T_a је коначно скоро сигурно

Одговарајућа густина расподеле је

$$f_{T_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}. \quad \to = F' = \cancel{2} \cdot \left(\cancel{-}\varphi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) \cdot a \cdot \frac{\cancel{-1}}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t^3}}\right)$$

Пошто T_a и T_{-a} имају исту расподелу, може се свуда ставити $|a|$.

↳ све исто важи (због рефлексије)

6

2) $F_{M(t)}(a) = \underbrace{P\{M(t) < a\}}_{\text{у тренутку } t \text{ још нисмо достигли } a} = \underbrace{P\{T_a \ge t\}}_{\text{морамо још да чекамо}} \overset{\text{из 1)}}{=} 1 - 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) - 1$

Одавде: $f_{M(t)}(a) = F' = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-\frac{a^2}{2t}}$.

Теорема 3: 1) $P\{\max\limits_{0\leq t<\infty} W(t) = +\infty\} = 1;$

2) $P\{\min\limits_{0\leq t<\infty} W(t) = -\infty\} = 1.$

Доказ: 1) $P\{\max\limits_{0\leq t\leq\infty} W(t) > k\} \geqslant P\{\max\limits_{0\leq s\leq t} W(t) > k\} = P\{M(t) > k\} \overset{T10}{=} 2\left(1-\Phi\left(\frac{k}{\sqrt{t}}\right)\right) \xrightarrow{t\to\infty} 1$

$P\{\max\limits_{0\leq t\leq\infty} W(t) = +\infty\} = P\{\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\{\max\limits_{0\leq t\leq\infty} W(t) > k\}\} = 1;$

2) $P\{\min\limits_{0\leq t\leq\infty} W(t) = -\infty\} = P\{-\max\limits_{0\leq t\leq\infty}(-W(t)) = -\infty\} = P\{\max\limits_{0\leq t\leq\infty} W(t) = +\infty\} = 1.$

* На крају смо навели разне модификације Винеровог процеса (стр. 33-34)

$\boxed{21.}$ L^2 - процеси

деф. Комплексни случ. процес $\{X(t),\, t\in T\}$ је L^2- процес ако је:

$$E|X(t)|^2 < \infty \,, \qquad \forall t\in T.$$

(за реалне само $EX^2(t) < \infty$)

Кажемо и процес са коначним другим моментима / процес другог реда.

Подсетимо се: комплексни случ. процес се може приказати као: $X(t) = X_1(t) + i\cdot X_2(t)$,
где су $\{X_1\}$ и $\{X_2\}$ реални случ. процеси.

За L^2- процесе ће се $\overset{\boxed{23},\ \boxed{24},\ \boxed{25}}{\text{успоставити}}$ да су нам од кључног значаја ф-је m_X и K_X.
Зато се на почетку бавимо њиховим особинама.

Лема 1: Нека је $\{X(t),\, t\in T\}$ случ. процес другог реда.

1) $m_X < +\infty$;
2) $K_X < +\infty$.

Доказ: Користимо неједнакост **Буњаковски-Коши-Шварца:** $E|XY| \le \sqrt{E|X|^2}\cdot\sqrt{E|Y|^2}$

1) $m_X(t) = EX(t),\ \ t\in T \quad\Rightarrow\quad |m_X(t)| = |EX(t)| \overset{К-Ш}{\le} \sqrt{E|X(t)|^2} \overset{L^2}{<} +\infty$;

2) $K_X(t,s) = E\Big[\big(X(t)-EX(t)\big)\overline{\big(X(s)-EX(s)\big)}\Big] \quad\overset{К-Ш}{\Rightarrow}\quad |K_X(t,s)|^2 \le E|X(t)-m_X(t)|^2\cdot E|X(s)-m_X(s)|^2 < +\infty.$

Лема 2: Нека је $\{X(t),\ t\in T\}$ L^2- процес.

1) Ако је $Y(t) = a(t)X(t) + b(t)$ (a, b - неслуч. ф-је) онда је: $K_Y(t,s) = a(t)\overline{a(s)} \cdot K_X(t,s)$;

Последица: Означимо $X^* := X(t) - m_X(t)$.
Тада X и X^* имају исту коваријациону ф-ју.

користимо у доказу Т1

$$K_X(t,s) = E\left[X^*(t) \cdot \overline{X^*(s)}\right] \qquad (*)$$

2) $D(X(t)) = K_X(t,t) \geq 0$ и коначна је;

3) $K_X(t,s) = \overline{K_X(s,t)}$ - хермитска симетрија; (за реалне је обична симетрија)

4) $|K_X(t,s)|^2 \leq K_X(t,t) \cdot K_X(s,s)$.

Доказ: тривијално (стр. 35).

Потребан и довољан услов да је произвољна функција баш ковар. ф-ја за неки процес

Теорема 1: Функција $K(t,s)$ ($t,s\in T$) је ковар. ф-ја неког процеса акко је ненегативно дефинитна.

$$(\forall n\in \mathbb{N})\ (\forall t_1,\dots,t_n\in T)\ (\forall z_1,\dots,z_n\in \mathbb{C}) \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_i\cdot \overline{z_j}\ K_X(t_i,t_j) \geq 0$$

Доказ: стр. 36.

$K_X(t,s)$ говори о јачини корелационе повезаности између два засека истог процеса.
Да бисмо испитали повезаност два различита процеса, уводимо следећи појам:

деф. Нека су $\{X(t),\ t\in T\}$ и $\{Y(t),\ t\in T\}$ два L^2- процеса.

Узајамно коваријациона / крос коваријациона функција за ова два процеса је:

$$K_{X,Y}(t,s) := E\left[(X(t) - m_X(t))(Y(s) - m_Y(s))\right], \qquad t,s\in T$$

$\boxed{22.}$ Особине класе коваријационих функција

Теорема 1: Класа ковар. ф-ја је затворена у односу на сабирање, множење и lim.

Другим речима, збир две ковар. ф-је је такође ковар. ф-ја итд.

Доказ: Ковар. ф-ја случ. процеса говори о јачини везе засека **истог** процеса.
Због тога, можемо претпоставити погодне облике повезаности засека **различитих** процеса.

1) Изаберимо процесе ткд. буду некорелисани: $E\left[X_1^*(t)\,\overline{X_2^*(s)}\right] = 0$ (тиме не мењамо ковар. ф-је)

$$\begin{aligned} K_{X_1+X_2}(t,s) &= E\left[(X_1^*(t)+X_2^*(t))\cdot\overline{(X_1^*(s)+X_2^*(s))}\right] \\ &= E(X_1^*(t)\,X_1^*(s)) + \cancelto{0}{E(X_1^*(t)\,X_2^*(s))} + \cancelto{0}{E(X_2^*(t)\,X_1^*(s))} + E(X_2^*(t)\,X_2^*(s)) \\ &= K_{X_1}(t,s) + K_{X_2}(t,s) \end{aligned}$$

2) Изаберимо процесе ткд. буду независни:

$$K_{X_1X_2}(t,s) = E\left[(X_1^*(t)X_2^*(t))\cdot(X_1^*(s)X_2^*(s))\right] \leftarrow \text{редослед небитан}$$

$$\overset{+\text{ нез.}}{=} E\left[X_1^*(t)X_1^*(s)\right]\cdot E\left[X_2^*(t)X_2^*(s)\right] = K_{X_1}(t,s)\cdot K_{X_2}(t,s).$$

3) Доказујемо да је функција $K(t,s) := \lim\limits_{m\to\infty} K_m(t,s)$ такође ковар. ф-ја. (користимо $\boxed{21}$T1)

Важи: $$\lim_{m\to\infty}\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{m} z_i\,\overline{z_j}\,K_m(t_i,t_j) = \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{m} z_i\,\overline{z_j}\,K(t_i,t_j)$$

Пошто су сви чланови са леве стране ≥ 0, онда је и десна страна ≥ 0.
То значи K је ненег. деф. $\Rightarrow$ K јесте ковар ф-ја.

Последица: $\alpha_1 K_1(t,s) + \alpha_2 K_2(t,s)$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, је такође коваријациона функција.

(овде користимо и $\boxed{21}$Л2)

Напомена: Претходно тврђење можемо и индуктивно уопштавати.

23. Непрекидност у средње квадратном смислу

Наредни појам смо већ увели у 1

деф. Случ. процес $\{X(t),\, t\in T\}$ је **непрекидан у средње квадратном смислу** у тачки $t_0\in T$ ако:

$$E|X(t)-X(t_0)|^2 \xrightarrow{t\to t_0} 0 .$$

Кажемо и **L^2- непрекидност.**

Наредно тврђење је веома битно. Аналогно ће важити и у 24 и 25.

Теорема 1: Нека је $\{X(t),\, t\in T\}$ L^2- процес чија је средња вредност m_X и коваријациона ф-ја K_X.

$\{X(t)\}$ је L^2- непр. у $t_0\in T$ $\Leftrightarrow$ m_X непр. у t_0 и K_X непр. у (t_0,t_0).

Доказ:

Доказ.

$$\begin{aligned}
E|X(t)-X(t_0)|^2 &= E(X(t)-X(t_0))(\overline{X(t)-X(t_0)})\\
\text{измножили } &= \underline{E(X(t)\overline{X(t)})} - \underline{E(X(t_0)\overline{X(t)})} - \underline{E(X(t)\overline{X(t_0)})} + \underline{E(X(t_0)\overline{X(t_0)})}\\
K_X = E - m_X\overline{m_X} \quad &= \underline{K_X(t,t)+m_X(t)\overline{m_X(t)}} - \underline{K_X(t_0,t)-m_X(t_0)\overline{m_X(t)}}\\
&\qquad \underline{-K_X(t,t_0)-m_X(t)\overline{m_X(t_0)}} + \underline{K_X(t_0,t_0)+m_X(t_0)\overline{m_X(t_0)}}\\
&= A+B,
\end{aligned}$$

све што је K_X — све што је m_X

где је

$$\underbrace{A = K_X(t,t)-K_X(t_0,t)-K_X(t,t_0)+K_X(t_0,t_0),}\quad \underbrace{B=|m_X(t)-m_X(t_0)|^2.}$$

(уводни део)

1. Смер $\leftarrow$: Претпоставимо да је m_X непрекидна функција у тачки t_0 и K_X непрекидна функција у тачки (t_0,t_0). Тада $\boxed{A\to 0}$ и $\boxed{B\to 0}$ кад $\underline{t\to t_0}$, па важи

$$E|X(t)-X(t_0)|^2 = A+B\to 0,\quad t\to t_0.$$

(јер су m_X, K_X непрекидне)

2. Смер $\rightarrow$: Претпоставимо да је процес $\{X(t)\}$ је L^2 - непрекидан у тачки $t_0\in T$, тј. $E|X(t)-X(t_0)|^2\to 0, t\to t_0$. Тада важи

уградимо увод за $X^*(t)$
добили бисмо опет
A^*+B^*
$A^*\to$ исто што и A
$B^*=0$ (скрате се сви m)

$$\begin{aligned}
\boxed{E|X^*(t)-X^*(t_0)|^2 &= A}\ \boxed{A\geq 0}\\
\underbrace{E|X(t)-X(t_0)|^2}_{\to 0,\ t\to t_0} &= A+B \underset{A\geq 0}{\geq} B = |m_X(t)-m_X(t_0)|^2,
\end{aligned}$$

→ јер је лева стр. ≥ 0

$\Rightarrow$ $$|m_X(t)-m_X(t_0)|^2\to 0,\quad t\to t_0,\ \text{тј. } m_X(t)\to m_X(t_0),\quad t\to t_0.$$

m_X непр. ✓

* Одатле следи и

$$\underline{E|X^*(t)-X^*(t_0)|^2\to 0,\quad t\to t_0.}$$

(пошто $B\to 0$, $t\to t_0$ онда $A\to 0$, $t\to t_0$)

За коваријациону функцију важи

$$\begin{aligned}
|K_X(t,s)-K_X(t_0,t_0)| &= |E(X^*(t)\overline{X^*(s)}) - E(X^*(t_0)\overline{X^*(t_0)})|\\
\text{убацили под једно } E \quad &= |E[X^*(t)\overline{X^*(s)} - X^*(t_0)\overline{X^*(t_0)}]|\\
\text{додамо и одузмемо} \quad &= |E(X^*(t)\overline{X^*(s)} \underline{- X^*(t)\overline{X^*(t_0)}} \underline{+ X^*(t)\overline{X^*(t_0)}} - X^*(t_0)\overline{X^*(t_0)})|\\
\text{наместили} \quad &= |E(X^*(t)\overline{(X^*(s)-X^*(t_0))} + \overline{X^*(t_0)}(X^*(t)-X^*(t_0)))|\\
\text{нејedн. } \Delta \quad &\leq |E(X^*(t)\overline{(X^*(s)-X^*(t_0))})| + |E(\overline{X^*(t_0)}(X^*(t)-X^*(t_0)))|\\
\text{К-Ш} \quad &\leq \sqrt{\underline{E|X^*(t)|^2}\,\underbrace{E|X^*(s)-X^*(t_0)|^2}_{\to 0}} + \sqrt{\underline{E|X^*(t_0)|^2}\,\underbrace{E|X^*(t)-X^*(t_0)|^2}_{\to 0}}\\
&\to 0,\quad t,s\to t_0,
\end{aligned}$$

на основу неједнакости Коши-Шварца. Први чланови под оба корена су коначни (зато што је у питању процес другог реда), а друга два члана теже 0 (претходно показано), па важи

$$K_X(t,s)\to K_X(t_0,t_0),\quad t,s\to t_0.$$

K_X непр. ✓

▨

Ово је помоћно тврђење које ћемо у наставку користити.

Теорема 2: Нека је $\{X(t),\ t\in T\}$ L^2- процес и $t_0 \in T$. Тада:

$$(\exists X_0)\ E|X_0|^2<+\infty, \quad E|X(t)-X_0|^2 \xrightarrow{t\to t_0} 0$$

акко

$$(\exists C\in\mathbb{C})\ \left(\forall (t_n),(s_m):\ t_n, s_m \xrightarrow{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} t_0\right) \quad E[X(t_n)\cdot\overline{X(s_m)}] \xrightarrow{n,m\to\infty} C$$

Доказ: стр. 38-39.

Напомена: $C = E[X_0\overline{X_0}]$.

Следеће тврђење је битно за стационарне процесе: 28

Теорема 3: Ако је ковар. ф-ја K непрекидна у свакој тзв. дијагоналној тачки $(t_0,t_0)\in T\times T$, онда је она непрекидна у свакој тачки $(t,s)\in T\times T$.

Доказ: стр. 39.

24. Диференцијабилност у средње квадратном смислу

Можемо разматрати три врсте диференцијабилности:

- у смислу стох. конв: има неке чудне особине, па нам не даје пуно релевантних информација; (нпр. Пуасонов процес има извод свуда, али једнак је нули)
- у смислу скоро сиг. конв: то је заправо обичан извод, па нема ништа ново;
- у смислу ср. квадратне конв: тиме се сада бавимо.

деф. L^2- процес $\{X(t),\ t\in T\}$ је средње квадратно диференцијабилан у тачки $t_0\in T$ ако постоји случ. величина $X'(t_0)$ ткд. $E\left|\frac{X(t_0+h)-X(t_0)}{h} - X'(t_0)\right|^2 \xrightarrow{h\to 0} 0$.

Кажемо и L^2- диференцијабилан у тачки $t_0\in T$.

$X'(t_0)$ је средње квадратни извод / L^2- извод процеса $\{X(t_0)\}$ у тачки $t_0\in T$.

Лема 1: Нека је $\{X(t),\ t\in T\}$ L^2- процес који је L^2- диф. Тада:

1) Постоји $(m_X(t))'$ и важи: $(m_X(t))' = m_{X'}(t)$;

2) $EX(t)=0,\ t\in T \Rightarrow E[X'(t)\overline{X(s)}] = \frac{\partial K_X(t,s)}{\partial t}$;

3) $EX(t)=0,\ t\in T \Rightarrow E[X'(t)\overline{X'(s)}] = \frac{\partial^2 K_X(t,s)}{\partial t\, \partial s}$.

Доказ: стр. 40-41.

Теорема 1: Нека је $\{X(t),\ t\in T\}$ L^2- процес чија је средња вредност m_X и коваријациона ф-ја K_X.

$\{X(t)\}$ је L^2-диф. у $t_0\in T$ $\Leftrightarrow$ постоји $m_X'(t_0)$ и постоји уопштени други извод $\frac{\partial^2 K_X(t,s)}{\partial t\, \partial s}$ у (t_0,t_0).

Доказ: стр. 41

Последица: Пошто $E|X'(t_0)|^2 = \frac{\partial^2 K_X(t,s)}{\partial t\, \partial s}\Big|_{(t_0,t_0)} + |m_X'(t_0)|$, онда важи $E|X'(t_0)|^2 < \infty$

Другим речима, L^2-извод је такође L^2- процес.

25. Интеграбилност у средње квадратном смислу

деф. Нека је $\{X(t),\ t\in T\}$ L^2-процес, $[a,b]\subset T$, $a=t_0<\ldots<t_n=b$ разбијање интервала, $\phi_k\in(t_{k-1},t_k)$
и нека је $\max_{1\le k\le n}(t_k-t_{k-1})\xrightarrow{n\to\infty}0$.

↳ избор

Нека је $S_n=\sum_{k=1}^{n}X(\phi_k)\cdot(t_k-t_{k-1})$ интегрална сума.

Ако за низ (S_n) важи $E|S_n-S|^2\xrightarrow{n\to\infty}0$, тада је S **средње квадратни Риманов интеграл** за $\{X(t)\}$ у ознаци $\int_a^b X(t)\,dt$.

Кажемо и **L^2-интеграл.**

Напомена: Може се доказати да S не зависи од избора ϕ.

Напомена: Ако је $a=-\infty$ или $d=+\infty$,
такве интеграле дефинишемо као ср. кв. граничне вредности L^2-интеграла.

Лема 1: Нека су $\{X(t),\ t\in T\}$, $\{X_1(t),\ t\in T\}$, $\{X_2(t),\ t\in T\}$ L^2-интеграбилни на $[a,b]$. Тада:

1) $\int_a^b X(t)\,dt=\int_a^c+\int_c^b,\qquad a<c<b;$

2) $\int_a^b(\alpha_1X_1(t)+\alpha_2X_2(t))\,dt=\alpha_1\int_a^bX_1(t)\,dt+\alpha_2\int_a^bX_2(t)\,dt;$

3) $E\left[\int_a^bX_1(t)\,dt\cdot\overline{\int_a^bX_2(t)\,dt}\right]=\int_a^b\int_a^bE\left[X_1(t)\overline{X_2(s)}\right]dt\,ds.$

Специјално $\left(X_2(t)=\frac{1}{b-a}\right)$: $E\left[\int_a^bX_1(t)\,dt\right]=\int_a^bEX_1(t)\,dt.$ (E пролази кроз $\int$)

Доказ: једноставно (стр. 43 - идеја)

Теорема 1: $\int_a^bX(t)\,dt$ постоји $\Leftrightarrow$ постоје $\int_a^bm_X(t)\,dt$ и $\int_a^b\int_a^bK_X(t,s)\,dt\,ds$.

Доказ: стр. 43.

Последица: $E|S|^2<\infty$

Другим речима, L^2-интеграл је такође L^2-процес.

деф. Нека је $\{X(t), t\in T\}$ L^2- процес, $[a,b]\subset T$, $a=t_0<\ldots<t_n=b$ разбијање интервала, $\phi_k\in(t_{k-1},t_k)$ и нека је $\max_{1\le k\le n}(t_k-t_{k-1})\xrightarrow{n\to\infty}0$.

Затим, нека је f неслучајна функција на $[a,b]$.

Такође, нека је $m_X(t)=0$.

Нека је $S_n=\sum_{k=1}^{n} f(\phi_k)\cdot(X(t_k)-X(t_{k-1}))$ интегрална сума.

Ако за низ (S_n) важи $E|S_n-S|^2\xrightarrow{n\to\infty}0$, тада је S ср. кв. Риман-Стилтјесов интеграл за $\{X(t)\}$ у ознаци $\int_a^b f(t)\,dX(t)$.

Напомена: Може се доказати да S не зависи од избора ϕ.

$\boxed{14.}$ Ланци Маркова

Већ смо поменули у $\boxed{0}$: то су они процеси чија будућност зависи само од садашњости.

Процеси Маркова могу имати дискретан и непрекидан параметарски скуп,
а прво разматрамо само оне са дискретним, тзв. ланце.

Зашто кажемо ланац? То се каже за процесе којима је фазни простор дискретан скуп.

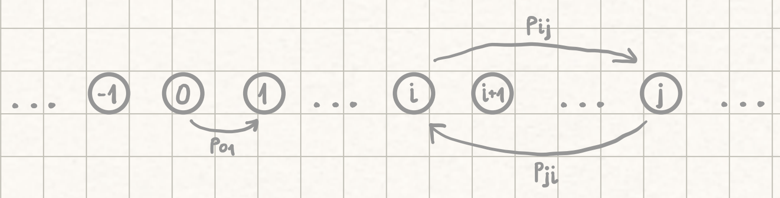
* Посматрамо систем који у дискретним временским тренуцима прелази из једног стања у друго.
Претпоставимо:

1) скуп стања је пребројив и може се претпоставити да је то скуп $\mathbb{Z}$;

2) важи и својство Маркова: (за дискретан случај)

$$P\{X_{t+1}=j \mid X_0=i_0, \dots, X_{t-1}=i_{t-1}, X_t=i\} = P\{X_{t+1}=j \mid X_t=i\} \qquad (i, j, i_0, \dots \text{ - нека стања})$$

3) вероватноћа преласка из стања i у стање j $\left(p_{ij} = P\{X_{t+1}=j \mid X_t=i\}\right)$ не зависи од t.



Запишимо све ово у облику дефиниције:

деф. Случајни низ $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ је **хомогени ланац Маркова** са скупом стања $\mathbb{Z}$

ако му је фазни простор пребројив (може се нумерисати скупом $\mathbb{Z}$) и важи **својство Маркова**:

$$(\forall t \in \mathbb{N}_0)(\forall\, i, j, i_0, \dots, i_{t-1} \in \mathbb{Z}) \; P\{X_{t+1}=j \mid X_0=i_0, \dots, X_{t-1}=i_{t-1}, X_t=i\} = P\{X_{t+1}=j \mid X_t=i\} = p_{ij}.$$

Број p_{ij} је **вероватноћа преласка из стања i у стање j.**

Напомена: Ланац је нехомоген ако p_{ij} зависи од t.

Ми разматрамо само хомогене.

деф. Матрица $P := [p_{ij}]_{|\mathbb{Z}|\times|\mathbb{Z}|}$ је матрица вероватноћа преласка.

Напомена: Ова матрица је стохастичка: $p_{ij} \geq 0$ и $\sum_j p_{ij} = 1$.

збир по редовима

негде мора отићи

деф. Почетна расподела је $p_i^{(0)} = P\{X_0 = i\}$ вероватноћа да процес у почетном тренутку заузео стање i.

Напомена: $\sum_i p_i^{(0)} = 1$. (јер на почетку систем мора бити у неком од стања i)

деф. Нека је $p_{ij}(n) = P\{X_{t+n} = j \mid X_t = i\}$.
Матрица вероватноћа преласка у n корака је $P_n := [p_{ij}(n)]_{|\mathbb{Z}|\times|\mathbb{Z}|}$.

Теорема 1: Ланац Маркова је потпуно одређен почетном расподелом и вероватноћама преласка, тј:

$$P\{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} = p_{i_0}^{(0)} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}.$$

Доказ: (би)

- $P\{X_0 = i_0\} \overset{деф.}{=} p_{i_0}^{(0)}$
- $P\{X_1 = i_1, X_0 = i_0\} = P\{X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0\} \cdot P\{X_0 = i_0\} = p_{i_0}^{(0)} \cdot p_{i_0 i_1}$;

(ик) $P\{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} = P\{X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0\} \cdot P\{X_0 = i_0\}$

$$P\{X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0\} \cdot p_{i_0}^{(0)} \overset{(ик)}{=} p_{i_0}^{(0)} \cdot p_{i_0 i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n}$$

Напомена: Када проверавамо да ли је у питању ланац Маркова, довољно је да проверимо да ли важи својство Маркова.

Примери:

1) систем са два стања;
2) миш у лавиринту;
3) размножавање грашка;
4) случајно лутање по правој;
5) низ независних случајних величина са истом расподелом;
6) најдужи непрекинути низ код бацања новчића.

бесконачни

Лема 1: $P(AB|C) = P(A|BC) \cdot P(B|C).$

Доказ: $$P(AB|C) = \frac{P(ABC)}{P(C)} = \frac{P(A|BC) \cdot P(B|C)}{P(C)} = P(A|BC) \cdot P(B|C).$$

Наредна теорема нам показује како рачунамо $p_{ij}(n)$, за коначне матрице P:

Теорема 2 (Једначине Колмогоров - Чепмена):

$$p_{ij}(m+n) = \sum_k p_{ik}(m) \cdot p_{kj}(n), \qquad m, n \in \mathbb{N}.$$

Доказ: $$\begin{aligned} p_{ij}(m+n) &= P\{X_{m+n}=j \mid X_0=i\} \\ &= \sum_k P\{X_{m+n}=j,\ X_m=k \mid X_0=i\} \\ &\overset{\text{Л1}}{=} \sum_k P\{X_{m+n}=j \mid X_m=k,\ X_0=i\} \cdot P\{X_m=k \mid X_0=i\} \\ &= \sum_k P\{X_{m+n}=j \mid X_m=k\} \cdot P\{X_m=k \mid X_0=i\} = \sum_k p_{ik}(m) \cdot p_{kj}(n) \end{aligned}$$

Ово је заправо расписано матрично множење.

Последица: 1) $P_{m+n} = P_m P_n$;

2) $P_n = P^n$.

15. Потребан и довољан услов за повратна стања

деф. Нека је $\{X_t,\ t \in \mathbb{N}_0\}$ ланац Маркова.

Стање i је **повратно** ако: $P\{X_n = i,\ \text{за неко } n \geq 1 \mid X_0 = i\} = 1$ (скоро сигурно се враћа)

Стање i је **пролазно** ако: $P\{X_n = i,\ \text{за неко } n \geq 1 \mid X_0 = i\} < 1$ (није сигурно да се враћа)

деф. Вероватноћа да систем први пут дође у стање j у тренутку n, ако је при томе почео из стања i:

$$v_{ij}(n) := P\{X_1 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j \mid X_0 = i\}$$

Напомена: (додефинишемо) $v_{ij}(0) := 0$

деф. Вероватноћа да систем некад дође у стање j, ако је при томе почео из стања i:

$$v_{ij} := \sum_{n=1}^{\infty} v_{ij}(n)$$

Напомена: 1) i повратно: $v_{ii} = 1$;
2) i пролазно: $v_{ii} < 1$.

Наводимо потребан и довољан услов да би неко стање било повратно:

Теорема 1: Стање i је повратно $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = +\infty$.

Доказ: стр. 52-53

Пример: грашак: AA, aa – повратна;
Aa – пролазно;

16. Разлагање скупа стања

деф. Нека је $\{X_t,\ t \in \mathbb{N}_0\}$ ланац Маркова са скупом стања Z.

Стање $j \in Z$ је достижно из стања i ако је $V_{ij} > 0$. Кажемо и да i комуницира са j.

Ако уз то и $V_{ji} > 0$, онда i и j међусобно комуницирају.

деф. Нека је E подскуп скупа свих стања.

Скуп E је затворен ако је за свако $i \in E$, $j \notin E$: $p_{ij} = 0$. (не може ван)

Специјално, ако E садржи само једно стање, онда су то стање и тај скуп апсорбујући.

деф. Скуп је неразложив ако свака два стања из тог скупа међусобно комуницирају.

деф. Период стања i је: $d(i) := NZD\{n : p_{ii}(n) > 0\}$. (НЗД оних бројева корака у којима је могуће вратити се у i)

Ако је $d(i) > 1$, стање је периодично.
Ако је $d(i) = 1$, стање је непериодично.

Теорема 1: Нека су i, j стања која међусобно комуницирају.

Стање i је пролазно $\Leftrightarrow$ стање j пролазно.
повратно повратно.

Доказ: стр. 54-55

Теорема 2: Скуп стања се јединствено може представити у облику $E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup \dots$

где је E_0 скуп пролазних стања,
а $E_1, E_2, \dots$ су неразложиви, затворени скупови повратних стања.

Доказ: стр. 55.

17.

Стационарне расподеле

деф. **Стационарна расподела** за хомогени ланац Маркова $\{X_t,\ t\in N_0\}$ са скупом стања Z је расподела вероватноћа (π_i), $i\in Z$, $\sum_{i\in Z}\pi_i = 1$ за коју важи:

$$p_i^{(0)} = P\{X_0 = i\} = \pi_i,\quad i\in Z \qquad \Rightarrow \qquad p_i^{(n)} = P\{X_n = i\} = \pi_i,\quad i\in Z,\ n\in N$$

Напомена: Стационарна расподела даје пропорцију времена коју систем проводи у појединачним стањима, до тренутка n. (за велике n)

нпр. имамо 3 стања: $P\{X_n=1\} = \pi_1$,
$P\{X_n=2\} = \pi_2$,
$P\{X_n=3\} = \pi_3$.

Пропорција: $\pi_1 : \pi_2 : \pi_3$

Напомена: (π_i), $i\in Z$ је стационарна расподела $\Leftrightarrow$ $\pi_j = \sum_{i\in Z}\pi_i\cdot p_{ij}(n)$, $j\in Z,\ n\in N$.

Ово даје практичан начин да се одреди стац. расп: решавањем матричне једначине $\pi = \pi\cdot P$

$+$ услов $\sum_{i\in Z}\pi_i = 1$

Напомена: Стационарна расподела не мора да постоји.

Стационарна расподела не мора да буде јединствена.

Примери: стр. 56

18. Довољан услов за ергодичност

деф. Хомогени ланац Маркова $\{X_t,\ t\in N_0\}$ са скупом стања S је ергодичан ако постоји

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j, \qquad \forall i,j\in S$$

при чему p_j не зависи од i и важи $\sum_{j\in S} p_j = 1$.

Такође, уводимо ознаку $\pi^* := (p_j)_{j\in Z}$ – гранична расподела.

Напомена: У практичном смислу, ово значи да „гранична матрица" (P^n, $n\to\infty$) има једнаке све врсте.
Није битно из ког стања i се полази, већ у које стање j се стиже.

Напомена: Гранична расподела јесте јединствена.

Напомена: Ако постоји оваква гранична расподела $\Rightarrow$ она је и стационарна.

Доказ: $\underset{\substack{\downarrow\\ \pi^*}}{P_{n+1}} = \underset{\substack{\downarrow\\ \pi^*}}{P_n}\cdot P \ \overset{/\lim}{\Rightarrow}\ \pi^* = \pi^*\cdot P$, тј. π^* испуњава услов да буде стац. расп.

Сада наводимо довољан (не и потребан) услов за ергодичност када је скуп стања коначан:

Теорема 1: Нека је $\{X_t,\ t\in N_0\}$ хомогени ланац Маркова са коначним скупом стања $S=\{1,2,\dots,m\}$, за који $(\exists\delta>0)(\forall i,j\in S)\ p_{ij}\geq\delta$.

Тада је ланац $\{X_t,\ t\in N_0\}$ ергодичан.

Доказ: стр. 57, 58.

Сада наводимо последицу која ће да олабави довољан услов: (Т1 тврди за $r=1$)

Теорема 2: Нека је $\{X_t,\ t\in N_0\}$ хомогени ланац Маркова са коначним скупом стања $S=\{1,2,\dots,m\}$, за који $(\exists\delta>0)\ (\exists r\in N)(\forall i,j\in S)\ p_{ij}(r)\geq\delta$.

Тада је ланац $\{X_t,\ t\in N_0\}$ ергодичан.

Доказ: стр. 58.

Пример: стр. 59 - 61.

19. Вероватноћа изумирања код простог процеса гранања

Процеси гранања су спец. случај процеса Маркова.
Постоје посебне технике за рад са њима, па их посебно изучавамо.

деф. Нека је $\{Y_{nj},\ n,j \in \mathbb{N}\}$ фамилија независних сл. вел. са вредностима у $\mathbb{N}_0$ и истом расподелом:

$$p_k := P\{Y_{n,j} = k\}, \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

Прост процес гранања је случ. проц. $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ дефинисан са:

$$\begin{aligned} X_0 &= 1 \\ X_1 &= Y_{11} \\ X_2 &= Y_{21} + Y_{22} + \dots + Y_{2,X_1} \\ &\vdots \\ X_n &= Y_{n,1} + Y_{n,2} + \dots + Y_{n,X_{n-1}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

При томе, Y_{nj} представља број јединки у n-тој генерацији
које су потомци j-те јединке из n-1-ве генерације.

Пример: Слика 1, стр. 65

Питања која се постављају су:

1) вероватноћа догађаја да популација опстане до n-те генерације: $P\{X_n \neq 0\}$ – ?
2) вероватноћа догађаја да популација опстане кроз беск. генерација: $P\left(\bigcap^{\infty}\{X_n \neq 0\}\right)$ – ?
3) вероватноћа догађаја да популација изумре до n-те генерације: $P\{X_n = 0\}$ – ?
4) вероватноћа догађаја да популација изумре некад у будућности: $P\left(\bigcup^{\infty}\{X_n = 0\}\right)$ – ?

За то користимо **генераторне функције**: $G_X(t) = Et^X = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \cdot P\{X=k\}$.

Лема 1: Нека су $X_1, \dots, X_n$ iid, N - случ. вел. са вредностима у $\mathbb{N}_0$ и $S_N = \sum^{N} X_i$, $S_0 = 0$.

$$G_{S_N}(s) = G_N\left(G_{X_1}(s)\right).$$

Лема 2: $ES_N = EN \cdot EX_1$.

* Као што смо рекли, прост процес гранања је процес Маркова. (стр. 65, слика 2)

При томе, p_{ij} се рачуна преко ген. ф-је:

$$p_{ij} = P\{X_n=j \mid X_{n-1}=i\} = P\{Y_{n,1}+\dots+Y_{n,i}=j\} \overset{S_N}{=} \frac{1}{j!}\cdot\frac{\partial^j\,(G_{Y_{1,1}}(s))^i}{(\partial^s)^j}\Bigg|_{s=0}$$

* Сада се бавимо питањем 4: вероватноћа да популација изумре некад у будућности: $P\left(\bigcup\limits^{\infty}\{X_n=0\}\right)$

Лема 3: Нека су $G(s)$ и $G_{X_n}(s)$ ген. ф-је случ. вел. $Y_{1,1}$ и X_n редом.

Нека је и $A_n=\{X_n=0\}$ и $A=\bigcup\limits^{\infty}\{X_n=0\}$ (ми тражимо $P(A)$).

1) $G_{X_n}(s) = G(G_{X_{n-1}}(s))$;

2) $EX_n = (G'(1))^n$;

3) $$\lim_{n\to\infty} EX_n = \begin{cases} 0, & G'(1)<1 \\ 1, & G'(1)=1 \\ \infty, & G'(1)>1 \end{cases}$$

4) $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$.

Доказ: стр. 68.

Теорема 1: Вероватноћа изумирања популације код простог процеса гранања је:

$$P(A) = \begin{cases} 1, & G'(1)\le 1 \\ p:\quad G(p)=p,\quad p\in[0,1), & G'(1)>1 \end{cases}$$

↳ p је решење ове једначине

Доказ: стр. 68-69.

20. Ланци Маркова са непрекидним временом

деф. Случ. процес $\{X(t),\ t \geq 0\}$ са скупом стања Z за који важи **својство Маркова:** (непрекидна верзија)

$$P\{X(t_n)=j \mid X(t_1)=i_1, \ldots, X(t_{n-1})=i\} = P\{X(t_n)=j \mid X(t_{n-1})=i\}, \quad \forall n \ \forall i,j,i_1,\ldots \in Z \quad \forall 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots$$

зове се **ланац Маркова у непрекидном времену са пребројивим скупом стања.**

Вероватноће преласка су $p_{ij}(s,t) = P\{X(t)=j \mid X(s)=i\}$, $0 \leq s \leq t$

Ако оне зависе само од дужине интервала, ланац је **хомоген.**

Напомена: Расподеле произвољних засека рачунају се исто као пре.

Теорема 1 (Једначине Колмогоров - Чепмена): $p_{ij}(s+t) = \sum_k p_{ik}(s) \cdot p_{kj}(t)$

Примери: стр. 69, 70.

* Пошто се бавимо непр. процесима, можемо да радимо диференцијално - интегрални рачун.

$$\lambda_{ii} := p_{ii}'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ii}(h) - p_{ii}(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h} \leq 0$$

$$\lambda_{ij} := p_{ij}'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ii}(h)}{h} \geq 0$$

Теорема 2: Нека је $\{X(t),\ t \geq 0\}$ ланац Маркова са непр. временом и коначним скупом стања S.

1) **Обрнути систем дј Колмогорова:** $p_{ij}'(t) = \sum_{k \in S} \lambda_{ik} \cdot p_{kj}(t)$;

2) **Директни систем дј Колмогорова:** $p_{ij}'(t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) \cdot \lambda_{kj}$.

Доказ: стр. 70, 71.

$\boxed{26.}$ Случајни процеси са ортогоналним прираштајима

Подсетимо се из $\boxed{0}$:

деф. Комплексни случ. процес $\{X(t),\ t\in T\}$ је **процес са ортогоналним прираштајима** ако:

1) $E|X(t)-X(s)|^2 < +\infty$, $\quad \forall t,s\in T$;

2) $E\left[(X(t_4)-X(t_3))\overline{(X(t_2)-X(t_1))}\right] = 0$, $\quad \forall t_1\le \ldots \le t_4 \in T$.

деф. Комплексни случ. процес $\{X(t),\ t\in T\}$ је **процес са некорелисаним прираштајима** ако:

1) $E|X(t)-X(s)|^2 < +\infty$, $\quad \forall t,s\in T$;

2) $E\left[(X(t_4)-X(t_3))\overline{(X(t_2)-X(t_1))}\right] = E\big(X(t_4)-X(t_3)\big)\cdot E\big(\overline{X(t_2)-X(t_1)}\big)$, $\quad \forall t_1\le \ldots \le t_4 \in T$.

Пример: 1) Винеров процес има и ортогоналне и некорелисане прираштаје;

2) Пуасонов процес има само некорелисане прираштаје.

исто као пре

Напомене: 1) Ако $X(t)$ има некор. прир. $\Rightarrow$ $X^*(t) := X(t) - EX(t)$ такође има некорелисане прираштаје.

Зато ћемо често претпостављати $EX(t) = 0$.

2) Ако L^2-процес $X(t)$ има независне прир. $\Rightarrow$ има и некорелисане прираштаје.

* деф. Нека је $\{X(t),\ t\in T\}$ случ. проц. са ортогоналним прираштајима и $t_0\in T$.

Структурна функција процеса $\{X(t)\}$ у односу на почетну тачку t_0 је:

$$F_{t_0}(t) = \begin{cases} +\ E|X(t)-X(t_0)|^2, & t\geq t_0 \\ -\ E|X(t)-X(t_0)|^2, & t< t_0 \end{cases}$$

Лема 1: $F_{t_0}(t) - F_{t_0}(s) = F_s(t)$;

Доказ: стр. 73

Напомена: Пошто резултат не зависи од избора t_0, користимо запис:

$$F(t) - F(s) = \begin{cases} +\ E|X(t)-X(s)|^2, & t\geq s \\ -\ E|X(t)-X(s)|^2, & t< s \end{cases}$$

То краће записујемо $dF(t) = E|dX(t)|^2$.

Лема 2: Структурна ф-ја је неслучајна, ограничена и неопадајућа ф-ја.

Доказ: Следи из Л1.

Последица: Структурна ф-ја има леву и десну граничну вредност у свакој тачки.

Лема 3: L^2-процес је L^2-непрекидан у t_0 здесна акко је структурна ф-ја непр. здесна у t_0.
слева слева

Напомена: Ово не важи за L^2-диференцијабилност. (нпр. Винеров, Пуасонов)

1) деф. H је Хилбертов простор случ. величина за које: $E|X|^2 < \infty$ и $EX = 0$.

2) деф. $H(X)$ је подпростор простора H који је линеарно генерисан случ. величинама $X(t)$, где је $\{X(t),\ t \in T\}$ L^2- процес.

Овај простор се састоји од лин. комб. $\alpha_1 X(t_1) + \dots + \alpha_n X(t_n)$ и њихових L^2- граничних вредности.

Ако процес $\{X(t)\}$ замислимо као криву у простору H
$\Rightarrow$ $H(X)$ је најмањи подпростор од H који садржи ту криву.

Напомена: У простору H (самим тим и у подпростору $H(X)$) важи: $P\{X = Y\} = 1 \Rightarrow X, Y$ идентичне.

У овом простору:
- скаларни производ: $(X, Y) = E(X\bar{Y})$;
- норма: $\|X\| = \sqrt{E|X|^2}$;
- одговарајуће растојање: $d(X,Y) = \|X - Y\|$.

Такође, својства L^2- процеса се могу изразити преко норме:

- L^2- непр: $\|X(t) - X(t_0)\| \to 0$, $t \to t_0$;
- L^2- диф: $\left\| \frac{X(t) - X(t_0)}{h} - X'(t_0) \right\| \to 0$, $h \to 0$;
- L^2- инт: $\|S_n - S\| \to 0$, $n \to \infty$.

3) деф. $L^2(X)$ ($\curvearrowright$ наслеђује ск. пр, норму) је подпростор простора H који се састоји од случ. вел. облика $X(b_k) - X(a_k)$, ($1 \le k \le n$, $-\infty < a_1 < b_1 < \dots < a_n < b_n < \infty$) као и њихових лин. комб. и граничних вредности,

при чему $E[X(b_k) - X(a_k)] = 0$ и $\{X(t)\}$ има ортог. прираштаје.

4) деф. $L^2(F)$ (структурна φ-ја) је Хилбертов простор који се састоји од комплексних φ-ја ϕ ткд. $\int_a^b |\phi(t)|^2\, dF(t) < +\infty$,

при чему је $\{X(t)\}$ процес са ортог. прир, непрекидан слева (здесна), и (a,b) коначни или бесконачни интервал.

У овом простору:
- скаларни производ: $(\phi, \psi)_F = \int_a^b \phi(t) \cdot \overline{\psi(t)}\, dF(t)$;
- норма: $\|\phi\|_F = \sqrt{\int_a^b |\phi(t)|^2\, dF(t)}$;
- одговарајуће растојање: $d_F(\phi, \psi) = \sqrt{\int_a^b |\phi(t) - \psi(t)|^2\, dF(t)}$;

Лема 4: Свако $\phi \in L^2(F)$ можемо апроксимирати низом степенастих φ-ја $\phi_n \in L^2(F)$: $\|\phi_n - \phi\|_F \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

$\boxed{27.}$ Стохастички интеграл неслучајне функције

деф. Нека је $\{X(t),\ t\in T\}$ случ. проц. са ортог. прираштајима ткд. $EX(t)=0$.

Дефинишемо интеграл: $J = \int_a^b \phi(t)\,dX(t)$, $\boxed{25}$ Р-С где је ϕ неслучајна ф-ја из $L^2(F)$, деф. на $[a,b]$.

Посебно нам је интересантан случај када процес није L^2-диф, нпр. Винеров,
зато што се у супротном своди на већ деф. интеграл: $\int_a^b \phi(t)\,X'(t)\,dt$

деф. **Стохастички интеграл** неслуч. ф-је ϕ (у односу на процес $\{X(t)\}$) је:

а) ϕ- степенаста ф-ја: $\phi(t)=\begin{cases} c_1, & a=t_0\le t\le t_1\\ c_2, & t_1\le t\le t_2\\ \vdots & \vdots \\ c_n, & t_{n-1}\le t\le t_n=b\end{cases}$ $\quad J(\phi) := \sum_{k=1}^{n} c_k\cdot\left[X(t_k)-X(t_{k-1})\right]$

б) ϕ - било која из $L^2(F)$: по $\boxed{26}$ л4 можемо апроксимирати низом степенастих ф-ја ϕ_n.

Зато $J(\phi)$ дефинишемо као L^2-граничну вредност низа ϕ_n, тј:

$$E|J(\phi_n)-J(\phi)|^2 = \int_a^b |\phi_n(t)-\phi(t)|^2\,dF(t) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Напомена: Деф. је добра (стр. 77) и не зависи од избора низа ϕ_n.

Теорема 1:
1) $EJ(\phi) = 0$;
2) $E|J(\phi)|^2 < \infty$;
3) $J(\alpha\phi+\beta\psi) = \alpha J(\phi) + \beta J(\psi)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$;
4) $\mathrm{cov}(J(\phi), J(\psi)) = \int_a^b \phi(t)\cdot\overline{\psi(t)}\,dF(t)$.

Доказ: стр. 76 (доказујемо за степенасте, али важи и иначе).

Лема 1: Пресликавање $J: L^2(F)\to L^2(X)$ је изометрија ова два простора.

Доказ: Довољно је показати да се чува скаларни производ, а то је тривијално:

$$(J(\phi), J(\psi)) := E(J(\phi)\,\overline{J(\psi)}) = \int_a^b \phi(t)\cdot\overline{\psi(t)}\,dF(t) =: (\phi,\psi)_F.$$

$\boxed{28.}$ Строго и слабо стационарни процеси

Подсетимо се из $\boxed{0}$:

деф. Случајни процес $\{X(t),\ t\in T\}$ je строго стационаран ако вектори:

$$(X_{t_1},\ \dots,\ X_{t_n}) \quad \text{и} \quad (X_{t_1+h},\ \dots,\ X_{t_n+h})$$

имају исту расподелу, $\forall n\in\mathbb{N},\ \ \forall t_1,\dots,t_n,\ t_1+h,\ \dots,\ t_n+h\ \in T$

деф. Случајни процес $\{X(t),\ t\in T\}$ je слабо стационаран ако:

1) $E|X(t)|^2 < +\infty$, $\quad \forall t\in T$;

2) $m_X(t) = m = const$, $\quad \forall t\in T$;

3) $K_X(t,s) = B(t-s)$, $\quad \forall t,s\in T$. $\quad$ ($B(t-s)$ - ф-ја која зависи од $t-s$)

Напомена: 1) строга $\not\Rightarrow$ слаба $\quad$ (не важи својство 1)
2) слаба $\not\Rightarrow$ строга $\quad$ (контрапример: стр. 78: $X_n = A\cos(n\frac{\pi}{3}) + B\sin(n\frac{\pi}{3})$, $A,B\in\mathcal{U}[-1,1]$)

Напомена: Пуасонов и Винеров нису стационарни.

Теорема 1: За коваријациону функцију слабо стационарног случ. процеса важи:

$$K_X(t,s) = K_X(t-s,\ 0) = K_X(t-s).$$

Следеће особине знамо од раније, [21] али их записујемо мало другачије.

Теорема 2: 1) $K_x(0) \geq 0$;

2) $K_x(-h) = \overline{K_x(h)}$ – хермитска симетрија; (за реалне: без црте)

3) $|K_x(h)| \leq K_x(0)$;

4) $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall t_1, \dots, t_n \in T)\ (\forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C})\quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} z_i \cdot \overline{z_j}\, K_x(t_i - t_j) \geq 0$ – ненегативна дефинитност;

5) Ако је ковар. ф-ја непрекидна у нули (тј. у свакој дијагоналној тачки (t_0, t_0))
онда је онда непрекидна у свакој тачки.

Примери: обавезно прочитати све: стр. 79 – 80

29. Ергодичност слабо стационарног процеса

Често је потребно оценити нпр. средњу вредност на основу само једне $\overset{\omega}{\text{реализације}}$ процеса.

Нека су реализоване вредности $x(t)$, $t \in [-T, T]$.
Пошто је код стац. процеса средња вредност константна, природно је оценити је са: $\hat{m}_T := \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, dt$.

У многим случајевима, ова оцена је L^2-конвергентна ка неком m, за $T \to +\infty$.
Ту појаву зовемо ергодичност.

Тада се трајекторије за различите реализ. вр. „групишу" око неке „централне" трајекторије.

деф. Слабо стационарни случ. проц. $\{X(t),\ t \in R\}$ је **ергодичан у односу на средњу вредност** ако:

$$\lim_{T\to\infty} E\left|\hat{m}_T - m\right|^2 = 0.$$

Показујемо потребан и довољан услов:

Теорема 1: $\{X(t)\}$ ергодичан у односу на средњу вредност $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|t|}{2T}\right) K_x(t)\, dt = 0.$

Доказ: стр. 82

Напомена: Ако је парам. скуп $t \in [0, +\infty)$ $\Rightarrow$ $\hat{m}_T = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} x(t)\, dt$ и добија се исти услов.

А сада само довољан услов:

Теорема 2: Ако за слабо стац. процес важи $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} |K_x(t)|\, dt = 0$ $\Rightarrow$ процес је ергодичан у односу на ср. вр.

Доказ: тривијално из Т1: $\left|\left(1 - \frac{|t|}{2T}\right) \cdot K_x(t)\right| \leq |K_x(t)|.$

* Аналогно, можемо да гледамо за коваријациону функцију:

деф. Слабо стационарни случ. проц. $\{X(t),\ t \in R\}$ je ергодичан у односу на коваријациону ф-jу ако:

$$\lim_{T\to\infty} E\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X^*(t+s)\cdot X^*(s)\,ds - K_x(t)\right|^2 = 0.$$

Теорема 3: $\{X(t)\}$ ергодичан у односу на коваријациону ф-jу $\Leftrightarrow$ $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|t|}{2T}\right)K^*(t)\,dt = 0.$

где je $K^*(t)$ ковар. ф-ja за $Y_s(t) = X^*(t+s)\,X^*(s)$, $t \in R$.

Примери: обавезно прочитати све: стр. 83-84.

30. Спектрална репрезентација

Спектрална репрезентација случајног процеса, у најопштијем смислу, је представљање тог процеса као лин. комб. синуса и косинуса различитих углова.

Нпр: $X(t) = A\cdot\cos(\lambda t) + B\cdot\sin(\lambda t) = \sqrt{A^2+B^2}\cdot\sin(\lambda t+\phi)$, $\phi = \text{arctg}\,\frac{A}{B}$, A, B - случ. величине.

Тада је $\sqrt{A^2+B^2}$ **случајна амплитуда**, а $\lambda t+\phi$ **случајна фаза**.

Погодно је изабрати A, B ткд. буду $\overset{E(AB) = EA\cdot EB}{\text{некорелисане}}$ (тада лакше рачунамо K_x):

$$EX(t) = m_x(t) = \cos(\lambda t)\,EA + \sin(\lambda t)\,EB;$$

$$K_x(t,s) = E\big[X(t)\cdot X(s)\big] - m_x(t)\cdot m_x(s) = \cos(\lambda t)\cos(\lambda s)\,EA^2 + \sin(\lambda t)\sin(\lambda s)\,EB^2 - m_x(t)\,m_x(s).$$

Дакле, ако је у питању $\overset{\text{не само 2}}{\text{општа}}$ сума чланова овог облика, погодно је за коеф. узети скуп ортог. случ. вел.

Слично разматрање важи и за ковар. ϕ-ју таквог процеса.

Ако се ради о комплексним случ. процесима,
у тој суми ће се појављивати чланови облика $C\cdot e^{i\lambda t}$, тј. $C\cdot\cos(\lambda t) + i\cdot C\sin(\lambda t)$.

Због тога:

Теорема 1 (Херглоц):

Функција $K: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ је ковар. ф-ја неког слабо стац. случ. низа $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$, $EX_n = 0$

ако и само ако постоји коначна мера F на $\mathcal{B}_{[-\pi,\pi]}$ ткд: $K(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \, dF(\lambda)$.

Доказ: стр. 85-86.

Наводимо и одговарајуће тврђење које се односи на непрекидне случ. процесе:

Теорема 2 (Бохнер - Хинчин):

Функција $K: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ непр. у нули је ковар. ф-ја неког слабо стац. случ. проц. $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ $EX(t) = 0$

ако и само ако постоји коначна мера F на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ткд: $K(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} \, dF(\lambda)$.

и у Т1
и у Т2

деф. Функција F зове се **спектрална функција/расподела** одговарајућег слабо стац. процеса.

Ако постоји $f(\lambda) = F'(\lambda)$, ту функцију зовемо **спектрална густина**.

Лема 1: 1) $F(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f(t) \, dt$ (тј. $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f(t) \, dt$ за непр.)

2) Коваријациона функција је Фуријеова трансформација спектралне густине:

$$K(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \cdot e^{i\lambda t} \, d\lambda \qquad \left(\text{тј. } \int_{-\infty}^{\infty} \text{ за непр.}\right)$$

И обрнуто, спектр. густина је инверзна Фуријеова трансформација ковар. ф-је.

3) За реалне процесе, спектрална густина је симетрична: $f(-\lambda) = f(\lambda)$.

* Сада гледамо спектралне репрезентације специфичних случ. процеса.

Теорема 3: Слабо стац. случ. низ $\{X_n,\ n\in\mathbb{Z}\}$, $EX_n = 0$, са спектр. ф-јом F има спектралну репрезентацију следећег облика:

$$X_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\, dZ(\lambda)$$

где је $\{Z(\lambda),\ \lambda\in[-\pi,\pi]\}$ неки случ. процес са ортогоналним прир. и $E|dZ(\lambda)|^2 = dF(\lambda)$.

деф. $\{Z(\lambda)\}$ је **спектрални процес** који одговара низу $\{X_n\}$.
Он је одређен до на адитивну случ. вел.

Приметимо и да је управо F структурна функција процеса $\{Z(\lambda)\}$.

Последица: $K_x(n-m) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\lambda}\, dF(\lambda)$.

Доказ: стр. 88

Теорема 4: Нека је $\{X(t),\ t\in R\}$, $EX(t)=0$ слабо стац. процес са спектралном ф-јом F.

Ако је K_x непр. у нули, онда тај процес има спектралну репрезентацију:
↳ $X(t)$ је L^2-непр.

$$X_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{in\lambda}\, dZ(\lambda)$$

где је $\{Z(\lambda),\ \lambda\in R\}$ неки случ. процес са ортогоналним прир. и $E|dZ(\lambda)|^2 = dF(\lambda)$.

Последица: $K_x(t-s) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t-s)\lambda}\, dF(\lambda)$.

* Алтернативна интерпретација спектралне густине: стр. 88, 89.

$\boxed{31.}$ Мартингали

У $\boxed{0}$ смо дали поједностављене дефиниције, а сада ћемо бити прецизнији.

Нека је $\{X(t),\ t\in T\}$ случ. процес деф. на простору $(\Omega, \overset{\sigma\text{-алг.}}{\mathcal{F}}, P)$.

При томе: 1) ако је T непрекидан: $T=[0,a]$ или $T=[0,+\infty)$.

T- ненегативан

2) ако је T дискретан: $T=\mathbb{N}$ или $T=\mathbb{N}_0$ или је неки њихов подскуп;

деф. **Филтрација** на простору $(\Omega, \mathcal{F})$ је фамилија σ-алгебри $\{\mathcal{F}_t,\ t\in T\}$ за коју важи:

1) $t_1 \le t_2 \Rightarrow \mathcal{F}_{t_1} \subseteq \mathcal{F}_{t_2}$ (растућа);

2) $\sigma\left(\bigcup_{t\in T} \mathcal{F}_t\right) \subseteq \mathcal{F}$

↳ мин. σ-алг. генерисана свим елем.

деф. **Природна филтрација** случ. процеса $\{X(t),\ t\in T\}$ је фамилија σ-алгебри $\{\mathcal{G}_t,\ t\in T\}$ за коју важи:

$$\mathcal{G}(t) = \sigma\{X(s),\ s\le t\}$$

То је „скуп информација о догађају до тренутка t".

Специјално: 1) $T=\emptyset \Rightarrow \mathcal{G}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$;

2) $T=[0,a] \Rightarrow \mathcal{G}_a = \mathcal{F}$.

Напомена: За фиксирано $t\in T$, $\mathcal{G}_t$ је мин. σ-алг. на Ω која садржи све скупове облика:

$$\{\omega : X(s)\le x\},\quad 0\le s\le t,\quad x\in \mathbb{R}$$

деф. Случајни процес $\{X(t),\ t\in T\}$ је **адаптиран** у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_t,\ t\in T\}$ ако је за свако фиксирано $t\in T$, случајна величина $X(t)$ мерљива у односу на σ-алгебру $\mathcal{F}_t$.

Другим речима: $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t$.

Напомена: Сваки процес јесте адаптиран у односу на своју природну филтрацију.

1) **деф.** Случајни процес $\{X(t), \overset{\text{непрекидан}}{t\in T}\}$ је **мартингал** у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_t, t\in T\}$ ако:

(за поређење) 1) $\{X(t)\}$ је адаптиран у односу на $\{\mathcal{F}_t\}$;

(да би постојало мат. очек.) 2) $E|X(t)| < +\infty$;

3) $E(X(t) \mid \mathcal{F}_s) = X(s)$ је скоро сигурно, за све $0 \le s \le t$.

Ако у 3) ставимо $\le$, то је **супермартингал.**
$\geq$ **субмартингал**

2) **деф.** Случајни процес $\{X_n, n\in \mathbb{N}_0\}$ је **мартингал** у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_n, n\in \mathbb{N}_0\}$ ако:

1) $\{X_n\}$ је адаптиран у односу на $\{\mathcal{F}_n\}$;

2) $E|X_n| < +\infty$;

3) $E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$ је скоро сигурно.

Ако у 3) ставимо $\le$, то је **супермартингал.**
$\geq$ **субмартингал**

Наводимо особине мат. оч. које су згодне када проверавамо да ли је нешто мартингал:

Лема 1: Нека је X случ. вел. и $\mathcal{F}$ произвољна σ-алг.

1) $E[E(X|\mathcal{F})] = EX$;

2) X независно од $\mathcal{F}$ $\Rightarrow$ $E(X|\mathcal{F}) = EX$;

3) X мерљиво у односу на $\mathcal{F}$ $\Rightarrow$ $E(X|\mathcal{F}) = X$.

Теорема 1:
1) мартингал $\Rightarrow$ $EX(t) = const$;
2) супермартингал $\Rightarrow$ $EX(t)$ је опадајућа ф-ја;
3) субмартингал $\Rightarrow$ $EX(t)$ је растућа ф-ја.

Примери: обавезно прочитати све: стр. 92, 93, 94.

32. Дубова декомпозиција субмартингала

деф. Случајни процес $\{X_n,\ n\in N_0\}$ је **предвидив** у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_n,\ n\in N_0\}$ ако је за свако фиксирано $n\in N$, случајна величина X_n мерљива у односу на σ-алгебру $\mathcal{F}_{n-1}$.

Наредну теорему формулишемо и доказујемо само за дискретан случај, и то само за субмартингале.

Постоје и слична тврђења за непрекидни случај, али и за мартингале и супермартингале.

Теорема 1 (Дубова декомпозиција субмартингала):

Нека је $\{X_n,\ n\in N_0\}$ субмартингал у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_n,\ n\in N_0\}$.

Тада постоје случајни низови $\{M_n,\ n\in N_0\}$ и $\{A_n,\ n\in N_0\}$ ткд. важе услови:

1) $\{M_n\}$ је мартингал у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_n\}$;

2) $\{A_n\}$ је растући скоро сигурно;

3) $\{A_n\}$ је предвидив;

4) $X_n = M_n + A_n$.

Доказ: * Означимо $D_n = E[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}]$. Видимо да D_n јесте $\mathcal{F}_{n-1}$ мерљиво.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Како је } \{X_n\} \text{ субмартингал} & \Rightarrow & E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \geq X_{n-1} \text{ је скоро сиг.} \\ \text{(адаптираност) } X_{n-1} \text{ јесте } \mathcal{F}_{n-1} \text{ мерљиво.} & \Rightarrow & E(X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow D_n \geq 0.$$

Означимо: $A_0 = 0$, $A_n = \sum^{n} D_k$. Оно испуњава услове 2) и 3)

* Означимо $M_n = X_n - A_n$. Докажимо да M_n заиста јесте мартингал:

$$E(M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(X_n - A_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) - A_n = E(X_{n-1} + D_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) - A_n$$

$$= X_{n-1} + D_n - \sum^{n} D_k = X_{n-1} - \sum^{n-1} D_k = X_{n-1} - A_{n-1} = M_{n-1}.$$

Дакле, испуњени су и услови 1) и 4)