Јован Самарџић

13/2019

Линеарна алгебра, професор: Марко Радовановић

🟪 - дефиниције

🟨 - ставови / теореме / тврђења

🟦 - докази

① Поља - основна својства и примери

деф. Нека је A скуп, $n \in N \cup \{0\}$. Тада свако пресликавање $\omega : A^n \to A$ називамо **n-арна операција** на скупу A

деф. Нека је F скуп на коме су дефинисане бинарне операције $+$ и $\cdot$

Тада је $\mathbb{F} = (F, +, \cdot)$ **поље** ако важи

1) $(x+y)+z = x+(y+z)$

2) $x+y = y+x$

3) $\exists\, 0 \in F \quad x+0 = 0+x = x$

4) $\forall x \in F \ \exists -x \in F \quad x+(-x) = (-x)+x = 0$

5) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

6) $x \cdot y = y \cdot x$

7) $\exists\, 1 \in F \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

8) $\forall x \in F \setminus \{0\} \ \exists x^{-1} \quad x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$

9) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

деф. **Сабирање по модулу** n : $x+y = n \cdot q_1 + (x +_n y)$
Множење по модулу n : $x \cdot y = n \cdot q_1 + (x \cdot_n y)$

Став: Z_n је поље $\Leftrightarrow$ n је прост број

Доказ: 1) Доказујемо $(x +_n y) +_n z = x +_n (y +_n z)$

$(x+y)+z = n \cdot q_1 + (x +_n y) + z = n \cdot q_1 + n \cdot q_2 + ((x +_n y) +_n z)$
$x+(y+z) = n \cdot q_3 + (y +_n z) + x = n \cdot q_3 + n \cdot q_4 + (x +_n (y +_n z))$

Дају исти остатак при дељењу са n, а једнаки су

2) $x+y = n \cdot q_1 + (x +_n y)$
$y+x = n \cdot q_2 + (y +_n x)$

3) $0 +_n x = x +_n 0 = x$

4) $x \neq 0 : \quad -x = n-x \quad , \quad x = 0 : \quad -x = 0$

5) исто као 1
6) исто као 2

7) $1 \cdot_n x = x$

8) важи ако и само ако је n прост

$(\Leftarrow)$ $x \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$, а посматрамо бројеве $x \cdot_n 0, x \cdot_n 1, \ldots, x \cdot_n (n-1)$

Претпоставимо да $\exists i,j \quad x \cdot_n i = x \cdot_n j \quad (i \neq j)$

$x \cdot i = n \cdot q_1 + x \cdot_n i \quad ; \quad x \cdot j = n\, q_2 + x \cdot_n j$

$\Rightarrow x(i-j) = n(q_1 - q_2) + \cancelto{0}{x \cdot_n i - x \cdot_n j}$

$x \cdot (i-j) = n(q_1 - q_2) \quad : \quad n \mid x \quad \vee \quad n \mid i-j$ ↯ $(n>x, n>i, n>$

Сви бројеви које смо посматрали су различити, а има их n
$\Rightarrow$ постоји неко i, ткд. $x \cdot_n i = 1$

$(\Rightarrow)$ ппс. n - сложен, тј. $n = ab \quad (1 < a, b < n)$

пп. да постоји c ткд. $a \cdot_n c = 1$
$a \cdot c = n \cdot q + a \cdot_n c = abq + 1 \quad \Rightarrow \quad a(c - bq) = 1$ ↯ $(a \nmid 1)$

9) $x \cdot (y+z) = n \cdot q_1 + x \cdot_n (y+z) = n \cdot q_1 + x \cdot_n (n \cdot q_2 + (y +_n z))$
$= n \cdot q_1 + x \cdot_n (y +_n z)$

$x \cdot y + x \cdot z = nq_1 + (x \cdot_n y) + nq_2 + (x \cdot_n z) = n \cdot Q_1 + n \cdot q_3 + ((x \cdot_n y) +_n (x \cdot_n z))$

деф. $a - b = a + (-b)$ $\qquad a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$

$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} \quad (b \neq 0)$ $\qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Теорема:
1) $a \cdot 0 = 0$
2) $|F| \geq 2 \Rightarrow 0 \neq 1$
3) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(ab)$
4) $(-a)(-b) = ab$
5) $(a-b) \cdot c = ac - bc$
6) $(ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$
7) 0 и $-x$ су јединствени
8) 1 и x^{-1} су јединствени

Доказ:

1) $0 + a = a$ (прескачем мини кораке)
$a(0 + a) = a \cdot a$
$a \cdot 0 + a \cdot a = a \cdot a \quad / - a \cdot a$
$a \cdot 0 = 0$

2) ппс. $0 = 1$
$x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$
$x \cdot 1 = x$ ↯ $(|F| \geq 2)$

3) $b + (-b) = 0 \quad / a \cdot$
$ab + a(-b) = 0 \quad / -ab$
$a(-b) = -ab$

$a + (-a) = 0 \quad / \cdot b$
$ab + (-a)b = 0$
$(-a)b = -ab$

4) Користимо 3: $(-a)(-b) = -(a\cdot(-b)) = -(-(ab)) = ab$

5) $(a-b)\cdot c = (a+(-b))c = ac + (-b)c = ac - bc$

6)

$$\begin{aligned} ab\cdot(ab)^{-1} &= 1 \quad / a^{-1}\cdot \\ b\cdot(ab)^{-1} &= a^{-1} \quad / b^{-1}\cdot \\ (ab)^{-1} &= b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1} \end{aligned}$$

7)

$$\left.\begin{aligned} 0 + x = x &\Rightarrow 0 + 0' = 0' \\ 0' + x = x &\Rightarrow 0' + 0 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 = 0'$$

$$\left.\begin{aligned} x + (-x) &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x + (-x) = x + y \Rightarrow -x = y$$

8)

$$\left.\begin{aligned} 1\cdot x = x &\Rightarrow 1\cdot 1' = 1 \\ 1'\cdot x = x &\Rightarrow 1'\cdot 1' = 1' \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 = 1'$$

$$\left.\begin{aligned} x\cdot x^{-1} &= 1 \\ x\cdot y &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x\cdot x^{-1} = x\cdot y \Rightarrow x^{-1} = y$$

② Системи линеарних једначина и Гаусов метод

деф. **Линеарна једначина** је једначина облика $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=b$

Партикуларно решење једначине је n-торка $(s_1,\ldots,s_n)\in F^n$ за коју $a_1s_1+\ldots+a_ns_n=b$

Опште решење једначине је скуп свих партикуларних решења

деф. **Систем линеарних једначина** по непознатима $x_1,\ldots,x_n$ је низ од m лин. једн. по истим тим непознатима

Партикуларно решење система једначина је n-торка $s\in F^n$ која је партикуларно решење сваке једначине овог система

Опште решење система једначина је скуп свих партикуларних решења система

пр.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1\\ \vdots\qquad\quad \vdots\qquad\quad\ \vdots\quad &\ \ \vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n&=b_n \end{aligned}$$

деф. Нека је дат систем лин. једн. чије су једначине $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n$.
Гаусове (елементарне) операције су:

1° $\rho_i\leftrightarrow\rho_j$ - замена i-те и j-те једначине

2° $\rho_i\to\alpha\rho_i$ - множење i-те једначине са $\alpha\in F\setminus\{0\}$

3° $\rho_i\to\rho_i+\alpha\rho_j$ - додавање j-те једн. помножене са α на i-ту

Теорема: Ако је систем лин једн σ добијен применом операције на σ', тада се и систем σ' може добити применом операције на σ

Доказ:
1° применом исте операције
2° применом операције $\rho_i\to\alpha^{-1}\rho_i$
3° применом операције $\rho_i\to\rho_i+(-\alpha)\rho_j$

Теорема: Ако је систем лин. једн. σ' добијен применом (коначно много) операција на систем σ, тада су општа решења ова два система иста

Доказ: Довољно је доказати да се опште решење не мења применом једне операције

1° Скуп једначина се није променио, па се не мења ни опште решење

2° Доказујемо $(s_1,\ldots,s_n)\in F_n$ решење σ акко је решење σ'
Променила се само i-та једначина, па је за остале сигурно тачно

(⇒) $a_{i1}s_1+\ldots+a_{in}s_n=b_i \overset{\cdot\alpha}{\Longrightarrow} a_{i1}\alpha s_1+\ldots+a_{in}\alpha s_n=\alpha b_i$
(⇐) множи се са α^{-1}

3° слично

деф. Системи лин. једн. су **еквивалентни** ако имају исто опште решење.

деф. У једначини $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b_n$ променљива x_i је **водећа** ако је $a_1 = \dots = a_{i-1} = 0 \neq a$

деф. Сис. лин једн. је у **степенастој форми** ако за i-ту једначину важи или $i=1$ или за њену водећу променљиву x_j и водећу променљиву x_t претходне једначине важи $j > t$ или су та једначина и све после облика $0 = a$

деф. Променљиве које се у сис. лин једн не појављују као водеће су **слободне променљиве**

Теорема: Сваки сис. лин. једн. се Гаусовим операцијама може свести на степенасту форму

Доказ: Почетни систем је

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\} \text{ систем } ⓑ$$

Нека је у 1-тој једн. водећа променљива са најмањим индексом j. Доведимо је на почетак $(\rho_i \leftrightarrow \rho_j)$

$$\begin{aligned} b_{1j}x_j + \dots + b_{1n}x_n &= c_1 \\ &\vdots \\ b_{nj}x_j + \dots + b_{nn}x_n &= c_n \end{aligned}$$

(све x_t, $t<j$ не пишемо)

Затим применимо операцију $\rho_k \to \rho_k + (-b_{kj}b_{1j}^{-1})\rho_j$ (на сваку једначину, $k \in [2,n]$)

$$\begin{aligned} b_{1j}x_j + b_{1j+1}x_{j+1} + \dots + b_{1n}x_n &= c_1 \\ c_{2j+1}x_{j+1} + \dots + c_{2n}x_n &= d_2 \\ &\vdots \\ c_{nj+1}x_{j+1} + \dots + c_{nn}x_n &= d_n \end{aligned}$$

Поступак се понавља све док не остану једначине облика $0 = a$.

Систем који је у степенастој форми решавамо одоздо нагоре

деф. За сваки сис. лин. јед. ⓑ одговарајући **хомогени систем линеарних једначина** је:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ систем } ⓗ$$

Теорема: Нека је $p \in F^n$ партик. реш. система ⓑ. Тада је опште решење система ⓑ скуп:

$$\{\, p + h \mid h \text{ припада општем решењу система } ⓗ \,\}$$

Доказ: A - опште решење ⓑ, B - скуп свих $p+h$. Треба доказати $A = B$.

$p = (p_1, \dots, p_n)$. Тада важи:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}p_1 + \dots + a_{1n}p_n &= b_1 \\ a_{n1}p_1 + \dots + a_{nn}p_n &= b_n \end{aligned}\right\} (a)$$

$\boxed{\subseteq}$ Нека $s = (s_1, \dots, s_n) \in A$. Знамо

$$\left.\begin{aligned} a_{11}s_1 + \dots + a_{1n}s_n &= b_1 \\ a_{n1}s_1 + \dots + a_{nn}s_n &= b_n \end{aligned}\right\} (b)$$

$(b) - (a)$:

$$\begin{aligned} a_{11}(s_1 - p_1) + \dots + a_{1n}(s_n - p_n) &= 0 \\ a_{n1}(s_1 - p_1) + \dots + a_{nn}(s_n - p_n) &= 0 \end{aligned}$$

Дакле, $h = s - p$ је решење ⓗ, $\Rightarrow s = p + h \Rightarrow s \in B$

$\boxed{\supseteq}$ Слично: Нека $s=(s_1,\dots,s_n)\in B$. Дакле $s=p+h$, где је $h=(h_1,\dots,h_n)$ решење ⓗ

$$\left.\begin{aligned} a_{11}h_1+\dots+a_{1n}h_n&=0\\ &\vdots\\ a_{1n}h_1+\dots+a_{nn}h_n&=0\end{aligned}\right\}\ (c)$$

$(a)+(c)$:
$$\begin{aligned} a_{11}(p_1+h_1)+\dots+a_{1n}(p_n+h_n)&=b_1\\ &\vdots\\ a_{n1}(p_1+h_1)+\dots+a_{nn}(p_n+h_n)&=b_n\end{aligned}$$

Дакле $p+h$ је решење ⓑ, а $s=p+h \Rightarrow s\in A$

Теорема: За хомогени сис. лин. једн. ⓗ важи:
1) $0\in F^n$ је партикуларно реш.
2) Ако су $u,v\in F^n$ решења, онда је и $u+v$
3) Ако је $u\in F^n$ решење, онда је и αu

Доказ:

1) Тривијално (уврстимо)

2)
$$\begin{aligned} a_{11}u_1+\dots+a_{1n}u_n&=0\\ &\vdots\\ a_{n1}u_1+\dots+a_{nn}u_n&=0\end{aligned}\quad,\quad \begin{aligned} a_{11}v_1+\dots+a_{1n}v_n&=0\\ &\vdots\\ a_{n1}v_1+\dots+a_{nn}v_n&=0\end{aligned}$$

Сабирањем
$$\begin{aligned} a_{11}(u_1+v_1)+\dots+a_{1n}(u_n+v_n)&=0\\ &\vdots\\ a_{n1}(u_1+v_1)+\dots+a_{nn}(u_n+v_n)&=0\end{aligned}$$

Дакле $u+v=(u_1+v_1,\dots,u_n+v_n)$ је решење ⓗ

3)
$$\left.\begin{aligned} a_{11}u_1+\dots+a_{1n}u_n&=0\\ &\vdots\\ a_{n1}u_1+\dots+a_{nn}u_n&=0\end{aligned}\ \right|\cdot\alpha \Rightarrow \begin{aligned} a_{11}(\alpha u_1)+\dots+a_{1n}(\alpha u_n)&=0\\ &\vdots\\ a_{n1}(\alpha u_1)+\dots+a_{nn}(\alpha u_n)&=0\end{aligned}$$

Дакле $\alpha u=(\alpha u_1,\dots,\alpha u_n)$ је решење ⓗ

③ Векторски простори - дефиниција, примери и основне особине.

деф. Нека је F поље и V скуп на коме су дефинисане бинарне операције $+$ и $\cdot$ мн. скаларом
Тада је $\mathbb{V} = (V, +, \cdot)$ **векторски простор** над F ако важи

1) $(u+v)+w = u+(v+w)$

2) $u+v = v+u$

3) $\exists\, 0 \in V \quad u+0 = 0+u = u$

4) $\forall u \in V \ \exists -u \in V \quad u+(-u) = (-u)+u = 0$

5) $(\alpha+\beta)\cdot u = \alpha\cdot u + \beta\, u \qquad (\alpha, \beta \in F)$

6) $\alpha\cdot(u+v) = \alpha\cdot u + \alpha\cdot v$

7) $(\alpha\cdot\beta)\cdot u = \alpha\cdot(\beta u)$

8) $1\cdot u = u$

деф. Нека је F поље и $n \in \mathbb{N}$. Тада је $F^n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in F \}$

деф. За $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in F^n$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in F^n$ и $\alpha \in F$

$u+v = (u_1+v_1, u_2+v_2, \dots, u_n+v_n)$
$\alpha\cdot u = (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n)$

деф. $0 = (0, 0, \dots, 0) \in F^n$
$-u = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n) \in F^n$

Теорема: F^n је векторски простор над F

Доказ: **1)** $(u+v)+w = (u_1+v_1, \dots, u_n+v_n)+w = ((u_1+v_1)+w_1, \dots, (u_n+v_n)+w_n)$
$u+(v+w) = u+(v_1+w_1, \dots, v_n+w_n) = (u_1+(v_1+w_1), \dots, u_n+(v_n+w_n))$

2) $u+v = (u_1+v_1, \dots, u_n+v_n) = (v_1+u_1, \dots, v_n+u_n) = v+u$

3) $0+u = u+0 = (u_1+0, \dots, u_n+0) = (u_1, \dots, u_n) = u$

4) $(-u)+u = u+(-u) = (u_1+(-u_1), \dots, u_n+(-u_n)) = (0, 0, \dots, 0) = 0$

5) $(\alpha+\beta)\cdot u = ((\alpha+\beta)u_1, \dots, (\alpha+\beta)u_n) = (\alpha u_1+\beta u_1, \dots, \alpha u_n+\beta u_n) = \alpha u + \beta u$

6) $\alpha\cdot(u+v) = (\alpha(u_1+v_1), \dots, \alpha(u_n+v_n)) = (\alpha u_1+\alpha v_1, \dots, \alpha u_n+\alpha v_n) = \alpha u + \alpha v$

7) $(\alpha\beta)u = ((\alpha\beta)u_1, \dots, (\alpha\beta)u_n) = (\alpha(\beta u_1), \dots, \alpha(\beta u_n)) = \alpha\cdot(\beta u)$

8) $1\cdot u = (1\cdot u_1, \dots, 1\cdot u_n) = (u_1, \dots, u_n) = u$

Примери:
1) F^n
2) Скуп решења хом сис лин. једн
3) Еуклидски простори
4) $F[x]$ - скуп полинома
5) $F^k[x]$ - скуп полинома степена до k (без k)

Особине:
1) $\vec{0}$ и $-u$ су јединствени
2) $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$ и $0 \cdot u = \vec{0}$
3) $\alpha \cdot u = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0$ (за $u \neq 0$)
4) $\alpha \cdot (-u) = -\alpha \cdot u$
5) $\alpha (u_1 + \ldots + u_n) = \alpha u_1 + \ldots + \alpha u_n$
6) $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) \cdot u = \alpha_1 u + \ldots + \alpha_n u$

Доказ:

1) Нека и $\vec{0}'$ задовољава услове за $\vec{0}$ и $-u'$ задовољава услове $-u$

$\vec{0}' + \vec{0} = \vec{0}'$, али $\vec{0}' + \vec{0} = \vec{0} + \vec{0}' = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} = \vec{0}'$

$-u' + u = 0 \quad / + (-u) \Rightarrow -u' = u$

2) $\alpha \cdot \vec{0} = \alpha \cdot (\vec{0} + \vec{0}) = \alpha \vec{0} + \alpha \cdot \vec{0} \quad / - \alpha \cdot \vec{0} \Rightarrow \alpha \vec{0} = \vec{0}$

$0 \cdot u = (0 + 0) \cdot u = 0 \cdot u + 0 \cdot u \quad / - 0 \cdot u \Rightarrow 0 \cdot u = \vec{0}$

3) ппс. $\alpha \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha^{-1}$

$\alpha \cdot u = \vec{0} \quad / \cdot \alpha^{-1} \Rightarrow u = \vec{0}$ ↯

4) Доказујемо: а) $\alpha \cdot (-u) + \alpha u = \vec{0}$ и б) $-\alpha \cdot u + \alpha u = \vec{0}$

а) $\alpha (-u) + \alpha u = \alpha (-u + u) = \alpha \cdot 0 = \vec{0}$
б) $-\alpha \cdot u + \alpha u = (-\alpha + \alpha) u = 0 \cdot u = \vec{0}$

5) Индукција по n:

(Б) $n = 1$: $\alpha u_1 = \alpha u_1$
(ИК) $n-1 \to n$: $\alpha \cdot (u_1 + \ldots + u_n) = \alpha \cdot (u_1 + \ldots + u_{n-1}) + \alpha u_n = \alpha u_1 + \ldots + \alpha u_{n-1} + \alpha u_n$

6) (Б): $n = 1$: $\alpha_1 u = \alpha_1 u$
(ИК): $n-1 \to n$: $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) u = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}) u + \alpha_n u = \alpha_1 u + \ldots + \alpha_{n-1} u + \alpha_n u$

④ Векторски потпростори ; линеарни омотач

деф. Нека је V в.п. над K за $n \in N$; $v_1, \ldots, v_n \in V$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$

Вектор $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$ је **линеарна комбинација** вектора $v_1, \ldots, v_n$

деф. За дати скуп $S \subseteq V$, скуп свих лин. комб. вектора из S је **линеарни омотач** скупа S

$$\mathcal{L}(S) = \{ \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \mid n \in N, v_i \in S, \alpha_i \in K \}$$

по договору $\mathcal{L}(\emptyset) = \{\vec{0}\}$

Теорема: Нека је V в.п. над K и $A, B \subseteq V$. Тада важи:

1) $A \subseteq \mathcal{L}(A)$
2) $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{L}(B)$
3) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(A)) = \mathcal{L}(A)$
4) $A \subseteq B \subseteq \mathcal{L}(A) \Rightarrow \mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$

Доказ: 1) $v \in A \Rightarrow 1 \cdot v \in \mathcal{L}(A) \Rightarrow v \in \mathcal{L}(A)$

2) $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ ($v_i \in A$, тј. $v \in \mathcal{L}(A)$)

$\Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ ($A \subseteq B \Rightarrow v_i \in B$, тј. $v \in \mathcal{L}(B)$)

3) $\boxed{\subseteq}$ $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(A))$

$$\Rightarrow v_1 = \beta_{11} u_1 + \ldots + \beta_{1m} u_m \in \mathcal{L}(A)$$
$$\vdots$$
$$v_n = \beta_{n1} u_1 + \ldots + \beta_{nm} u_m \in \mathcal{L}(A)$$

(не мора сваки v_i помоћу истих вектора да се изрази, па онда напишемо помоћу свих m који се користе за све)

Дакле, $v = \alpha_1(\beta_{11} u_1 + \ldots + \beta_{1m} u_m) + \ldots + \alpha_n(\beta_{n1} u_1 + \ldots + \beta_{nm} u_m)$

$= \alpha_1(\beta_{11} + \ldots + \beta_{n1}) u_1 + \ldots + \alpha_n(\beta_{1m} + \ldots + \beta_{nm}) u_m$

$\Rightarrow v \in \mathcal{L}(A)$

$\boxed{\supseteq}$ директно из 1)

4) $A \subseteq B \overset{2)}{\Rightarrow} \mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{L}(B)$

$B \subseteq \mathcal{L}(A) \underset{2)}{\Rightarrow} \mathcal{L}(B) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{L}(A)) \underset{3)}{=} \mathcal{L}(A)$

деф. Нека је V в.п. над K. За $U \subseteq V$ ($U \neq \emptyset$) кажемо да је **векторски потпростор** од V ако испуњава следеће услове:

1° $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$
2° $\alpha \in K, u \in U \Rightarrow \alpha u \in U$

Теорема: За непразан $U \subseteq V$, следећа тврђења су еквивалентна

1) $U \leq V$ (по деф.)
2) $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in U$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in K$; $u_1, u_2 \in U$)
3) $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n \in U$ ($\alpha_i \in K$; $u_i \in U$; $n \in N$)

1⇒2 $u_1 \in U \Rightarrow \alpha_1 u_1 \in U$
$u_2 \in U \Rightarrow \alpha_2 u_2 \in U$ $\Rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in U$

2⇒3 индукцијом

3⇒1 Доказујемо 1) и 2) из дефиниције потпростора

1) Изаберемо $n=2,\ \alpha_1=\alpha_2=1 \ : \ 1\cdot u_1 + 1\cdot u_2 = u_1 + u_2 \in U$
2) Изаберемо $n=1,\ \alpha_1=\alpha \ : \ \alpha_1 u = \alpha u \in U$

последица: $U \leq V \iff U = \mathcal{L}(U)$
$S \subseteq V \Rightarrow \mathcal{L}(S) \leq V$

деф. **Систем вектора**, у ознаци $e=[e_1,\dots,e_n]$ је уређена n-торка вектора $e_1,\dots,e_n \in V$

деф. **Елементарне операције** ϕ на систему вектора e су:

1° $K_i \leftrightarrow K_j$ - замена места i-тог и j-тог вектора
2° $K_i \leftrightarrow \alpha K_i$ - множење i-тог вектора скаларом $\alpha \neq 0$
3° $K_i \rightarrow K_i + \alpha K_j$ - додавање j-тог вектора помноженог са α i-том вектору

За систем вектора f који се добија након примене операције пишемо $f=\phi(e)$

деф. Системи вектора су **елементарно еквивалентни**, у ознаци $e \sim f$, ако се f може добити применом коначно много операција на систем e

Став: Ако за $e=[e_1,\dots,e_n]$ и $f=[f_1,\dots,f_n]$ важи $e\sim f$, онда $\mathcal{L}(\{e_1,\dots,e_n\}) = \mathcal{L}(\{f_1,\dots,f_n\})$

Доказ: Довољно је доказати да тврђење важи након примене једне операције

1° скуп вектора се не мења
2° Треба доказати $\mathcal{L}(\{e_1,\dots,e_i,\dots,e_n\}) = \mathcal{L}(\{e_1,\dots,\alpha e_i,\dots,e_n\})$

Лема: $A \subseteq \mathcal{L}(B) \wedge B \subseteq \mathcal{L}(A) \Rightarrow \mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$

Доказ:
$$\left.\begin{aligned} A \subseteq \mathcal{L}(B) &\Rightarrow \mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{L}(B)) = \mathcal{L}(B) \\ B \subseteq \mathcal{L}(A) &\Rightarrow \mathcal{L}(B) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{L}(A)) = \mathcal{L}(A) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$$

$\{e_1,\dots,e_i,\dots,e_n\} \subseteq \mathcal{L}(\{e_1,\dots,\alpha e_i,\dots,e_n\})$ - јер $e_k = e_k \ (k\neq i),\ (e_i) = \alpha^{-1}(\alpha e_i)$
$\{e_1,\dots,\alpha e_i,\dots,e_n\} \subseteq \mathcal{L}(\{e_1,\dots,e_i,\dots,e_n\})$ - јер $e_k = e_k \ (k\neq i),\ (\alpha e_i) = \alpha(e_i)$

па тврђење следи из леме

3° $\{e_1,\dots,e_i,\dots,e_n\} \subseteq \mathcal{L}(\{e_1,\dots,e_i+\alpha e_j,\dots,e_n\})$ - $e_i = (1)\cdot(e_i+\alpha e_j) + (-\alpha)\cdot e_j$
$\{e_1,\dots,e_i+\alpha e_j,\dots,e_n\} \subseteq \mathcal{L}(\{e_1,\dots,e_i,\dots,e_n\})$ - $(e_i+\alpha e_j) = (e_i) + \alpha(e_j)$

(остали исти)

па тврђење следи из леме

⑤ Линеарна независност

Деф. Нека је V вп над K. За скуп вектора $S \subseteq V$ кажемо да је:

линеарно зависан – постоји $v \in S$ ткд. $v \in \mathcal{L}(S \setminus \{v\})$ (може да се изрази помоћу осталих)

линеарно независан – иначе

Теорема: $S \subseteq V$ је линеарно независан акко за сваки коначан скуп $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq S$ важи.

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

Доказ: ($\Rightarrow$) Нека је $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$. Треба доказати да су $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

ппс. нека је $\alpha_i \neq 0$. Ако пребацимо $\alpha_i v_i$ на другу страну:

$$-\alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \dots + \alpha_n v_n \quad / \cdot (-\alpha_i)^{-1}$$

$$v_i = (-\alpha_i^{-1}\alpha_1)v_1 + \dots + (-\alpha_i^{-1}\alpha_{i-1})v_{i-1} + (-\alpha_i^{-1}\alpha_{i+1})v_{i+1} + \dots + (-\alpha_i^{-1}\alpha_n)v_n$$

$$\Rightarrow v_i \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n) = \mathcal{L}(S \setminus \{v_i\}) \text{ ↯ } (S \text{ - лин. нез.})$$

($\Leftarrow$) ппс S - лин. зависан

То значи да постоји $v \in S$ ткд. $v \in \mathcal{L}(S \setminus \{v\})$

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$\Rightarrow 0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + (-1) \cdot v$$

Када применимо услов на $\{v_1, \dots v_n, v\} \subseteq S$ (важи за сваки подскуп од S)

добијамо $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = -1 = 0$ ↯

Леме: 1) $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S \cup \{v\}) \Leftrightarrow v \in \mathcal{L}(S)$

2) S - лин. нез. и $v \notin S$. Онда је: $S \cup \{v\}$ лин. нез. $\Leftrightarrow v \notin \mathcal{L}(S)$

Доказ: 1) ($\Rightarrow$) $v \in \mathcal{L}(S \cup \{v\}) = \mathcal{L}(S)$

($\Leftarrow$) $\boxed{\subseteq}$ $S \subseteq S \cup \{v\} \Rightarrow \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(S \cup \{v\})$

$\boxed{\supseteq}$ $S \subseteq \mathcal{L}(S),\ v \in \mathcal{L}(S) \Rightarrow S \cup \{v\} \subseteq \mathcal{L}(S) \Rightarrow \mathcal{L}(S \cup \{v\}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{L}(S)) = \mathcal{L}(S)$

2) ($\Rightarrow$) ппс. $v \in \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S \cup \{v\} \setminus \{v\})$

Дакле постоји $v \in S \cup \{v\}$ ткд. $v \in \mathcal{L}((S \cup \{v\}) \setminus \{v\})$

$\Rightarrow S \cup \{v\}$ је линеарно зависан ↯

($\Leftarrow$) Нека је $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ за неке $v_1, \dots, v_n \in S \cup \{v\}$

1° $\forall i\ v_i \in S$, тј $\forall i\ v_i \neq v$, тада је $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ јер је S лин. нез

2° (БУО) $v_n = v$: 2_1° $\alpha_n = 0$, опет је $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ јер је S лин. нез.

2_2° Можемо v_n да изразимо помоћу осталих из S

а $v_n = v$

$\Rightarrow v \in \mathcal{L}(S)$ ↯

Теорема: За сваки коначан $S \subseteq V$ постоји $T \subseteq S$, ткд. је T линеарно независан и $\mathcal{L}(S) : \mathcal{L}(T)$

Доказ: Индукцијом по броју елемената скупа S

(Б) $n = 0$: $S = \emptyset$, па је и $T = \emptyset$ $(\mathcal{L}(\emptyset) = \{\vec{0}\})$

(ИК) $n-1 \to n$: 1° S - лин. нез., узмемо $T = S$

2° S - лин. зав. $\exists v \in S$, $v \in \mathcal{L}(S \setminus \{v\})$

Пошто је $|S \setminus \{v\}| = n-1$, по (ИХ) постоји:

$T' \subseteq S \setminus \{v\}$ ткд. $\boxed{T' \text{ - лин. нез}}$ и $\mathcal{L}(S \setminus \{v\}) = \mathcal{L}(T')$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$

$\boxed{T' \subseteq S}$

$v \in \mathcal{L}(S \setminus \{v\}) \overset{\text{Л1}}{\Rightarrow} \mathcal{L}(S \setminus \{v\}) = \mathcal{L}(S) \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(T') = \mathcal{L}(S)}$

Дакле, узмемо $T = T'$

Теорема: **1)** Подскуп линеарно независног скупа је линеарно независан

2) Надскуп линеарно зависног скупа је линеарно зависан

Доказ: **1)** Нека је S лин. нез. скуп и $T \subseteq S$

ппс $\exists v \in T$, $v \in \mathcal{L}(T \setminus \{v\})$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$v \in S$, $v \in \mathcal{L}(S \setminus \{v\})$ ↯ (S треба да буде лин. нез.)

2) Нека је S лин. зав. скуп и $T \supseteq S$

$\exists v \in S$, $v \in \mathcal{L}(S \setminus \{v\})$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$v \in T$, $v \in \mathcal{L}(T \setminus \{v\}) \Rightarrow T$ - лин. зав.

⑥ База и димензија векторског простора

Деф. За систем вектора $e = [e_1, \dots, e_n]$ дефинишемо $\underline{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$

Деф. Кажемо да је e **линеарно независан систем вектора** ако су у њему сви вектори различити и $\underline{e}$ је лин. нез. скуп

Деф. Скуп $S \subseteq V$ је **генератриса** векторског простора V ако $V = \mathcal{L}(S)$

Систем вектора e је генератриса за V ако $V = \mathcal{L}(\underline{e})$

Деф. Систем вектора e из в.п. V је **база** за V ако је e лин. независан и ако је e генератриса V

Теорема: Сис. вектора $e = [e_1, \dots, e_n]$ је база за V акко за свако $v \in V$ постоји јединствена n-торка $v_e = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ткд $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

Доказ: ($\Rightarrow$) Постоји, јер је e генератриса. Докажимо јединственост

ппс. $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$, $v = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$ $(\alpha_i \neq \beta_i)$

$$(\alpha_1 - \beta_1) e_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) e_n = 0$$

Пошто је e лин. нез $\Rightarrow \alpha_i - \beta_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_i$ ↯

($\Leftarrow$) * Јесте генератриса, јер $\forall v \in V \quad v \in \mathcal{L}(\underline{e})$

* Сви елементи у e су различити: ппс. $\exists i, j \quad e_i = e_j$

Тада изражавање e_i није јединствено: $e_i = 0 \cdot e_1 + \dots + 1 \cdot e_i + \dots + 0 e_n$
$= 0 e_1 + \dots + 1 e_j + \dots 0 e_n$

* Докажимо и да је $\underline{e}$ лин. нез.

Нека је: $\left.\begin{aligned} \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n \cdot e_n &= \vec{0} \\ 0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_n &= \vec{0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ пошто се сваки вектор, па и $\vec{0}$, може записати на јединствен начин

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0 \Rightarrow \underline{e}$ је лин. нез. скуп

$\rightarrow$ e је лин. независан систем вектора

Теорема: Нека је e систем различитих вектора из V. Тада је следеће еквивалентно:

1) e је база (по деф.)
2) $\underline{e}$ је минимална генератриса за V
3) $\underline{e}$ је максимални линеарно независни скуп у V

(минимално и максимално у односу на релацију инклузије)

Доказ: **1 ⟺ 2**

(⟹) $\underline{e}$ очигледно јесте генератриса. Докажимо и да је минимална.

пдс. $\exists S \subset \underline{e}$ $(S \neq \underline{e})$ и S је генератриса $(V = \mathcal{L}(S))$

Дакле, пошто $\forall v \in V, v \in \mathcal{L}(S)$, онда и за $v \in \underline{e} \setminus S$ $v \in \mathcal{L}(S)$
(вектори које смо „избацили из базе" могу се записати преко оних преосталих)

То значи да је $S \cup \{v\}$ линеарно зависан, па је и сваки његов надскуп лин. зав., а $\underline{e} \supseteq S \cup \{v\}$ ↯ ($\underline{e}$ - лин. нез.)

(⟸)
- Сви вектори у $\underline{e}$ су различити (услов теореме)
- Јесте генератриса
- Остаје да докажемо да је лин. нез.

пдс. Нека је e лин. зависан, тј. $\exists v \in \underline{e}$ ткд. $v \in \mathcal{L}(\underline{e} \setminus \{v\})$

$$\mathcal{L}(\underline{e} \setminus \{v\}) = \mathcal{L}(\underline{e} \setminus \{v\} \cup \{v\}) = \mathcal{L}(\underline{e}) = V$$

Дакле и $\underline{e} \setminus \{v\}$ је генератриса за V ↯ ($\underline{e}$ је минимална генератриса)

1 ⟺ 3

(⟹) Јесте линеарно независан. Докажимо да је максимални

пдс. $\exists S \supset \underline{e}$ $(S \neq \underline{e})$ и S је лин. нез.

$$\forall v \in S \quad v \in \mathcal{L}(\underline{e}) \subseteq \mathcal{L}(S \setminus \{v\}) \Rightarrow S \text{ је лин. зав.} \quad ↯$$

(⟸)
- Сви вектори у $\underline{e}$ су различити
- Јесте лин. независан
- Остаје да докажемо да је $\underline{e}$ генератриса

пдс. Нека је $v \in V$ $v \notin \mathcal{L}(\underline{e})$

(лема) $\Rightarrow$ $\underline{e} \cup \{v\}$ је лин. нез. скуп ↯ ($\underline{e}$ је максимални лин. нез. скуп)

деф. V је **коначнодимензиони** ако има коначну генератрису

Лема: Ако је e линеарно независан и $e \sim f$, онда је и f линеарно независан

Доказ: Довољно је доказати да је тврђење тачно кад се примени једна операција

1) не мења се скуп вектора, па остаје лин. нез.

2) $f = [e_1, \dots, \alpha e_i, \dots e_n]$

- Сви вектори у f су различити, јер да је $e_j = \alpha e_i$, онда e не би било лин. независно

- Докажимо да је $\underline{f}$ лин. независан скуп

$$\underbrace{\alpha_1}_{\beta_1} e_1 + \dots + \underbrace{\alpha_i \alpha}_{\beta_i} e_i + \dots + \underbrace{\alpha_n}_{\beta_n} e_n = 0 \quad \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_i \alpha = \alpha_n = 0$$

(пошто је $\underline{e}$ лин. нез.)

Пошто је $\alpha_i \cdot \alpha = 0$, а $\alpha \neq 0$ $\Rightarrow \alpha_i = 0$

3) аналогно

Лема: У $\mathcal{L}(\underline{e})$, где је $e = [e_1, \dots, e_n]$ може бити највише n лин. нез. вектора

Доказ: Индукцијом по n

(Б) $n=1$: $\mathcal{L}(\underline{e_1}) = \{\alpha e_1 \mid \alpha \in K\}$, па су свака два вектора из $\mathcal{L}(\underline{e_1})$ лин. зав.

(ИК) $n-1 \Rightarrow n$: Нека је $\{f_1, \dots, f_m\}$ скуп лин. нез. из $\mathcal{L}(\underline{e})$

$$f_1 = \alpha_{11} e_1 + \dots + \alpha_{1n} e_n$$
$$\vdots$$
$$f_m = \alpha_{m1} e_1 + \dots + \alpha_{mn} e_n$$

, и урадимо први корак ка степенастој форми

$$f_1' = \alpha_{11}' e_1 + \alpha_{12}' e_2 + \dots + \alpha_{1n}' e_n$$
$$\vdots$$
$$f_m' = \alpha_{m2}' e_2 + \dots + \alpha_{mn}' e_n$$

(мож да нису остале једначине у истом редоследу, тако да се све можда промени)

По претходној леми, сис. вектора $[f_1', \dots, f_m']$ је лин нез
Подскуп лин. нез. скупа је лин. нез. $\Rightarrow [f_2', \dots, f_m']$ је лин. нез.

Такође $f_2', \dots, f_m' \in \mathcal{L}(\{e_2, \dots e_n\})$ (погледај сис. једначина)

По (ИХ) $\Rightarrow$ у скупу $\{f_2', \dots, f_m'\}$ има највише $n-1$ лин. нез. вектора

$$\Rightarrow m-1 \leq n-1$$

$$\Rightarrow m \leq n$$

Теорема: (1) Сваки коначнодимензиони в.п. V над K има базу.

(2) Сваки лин. нез. систем вектора се може допунити до базе.

(3) Сваки систем вектора из V који је генератриса садржи базу.

Доказ: (3) Нека је S коначан скуп вектора, $\mathcal{L}(S) = V$

По теореми да за сваки скуп постоји подскуп који је независан
$\exists T \subseteq S$ и T је лин. нез. и $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(S)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}(T) = V$, T - лин. нез $\Rightarrow$ T је база

(2) Нека је f лин. нез. систем вектора из V. V је коначнодим.
$\Rightarrow$ има коначну генератрису g, па $\mathcal{L}(\underline{g}) = V$ има највише $|\underline{g}| = M$ лин. нез. елем.

Додајемо векторе из $V \setminus \mathcal{L}(\underline{f}')$ у систем f, све док $|\underline{f}'| \leq M$
(f' - резултат додавања)

Дакле: $\underline{f}'$ је максимални скуп лин. нез. вектора из V

$\Rightarrow$ f је база

(1) Пошто је V коначнодим., из деф. он има коначну генератрису g

Базу увек можемо добити поступком из (2)

Теорема: Сваке две базе коначнодим. простора имају исти број елемената

Доказ: Нека су e, f базе. e има n елемената, а f има m елемената

e је лин. нез. систем садржан у $\mathcal{L}(\underline{f}) = V$, па због леме $n \leq m$
Слично, $m \leq n$

$\Rightarrow$ $n = m$

деф. **Димензија** коначнодимензионог простора је број елемената његове базе

у ознаци **$\dim V$**

Теорема: За сваки сис. вектора e из в.п. V, $\dim V = n$, следеће је еквивалентно

1) e је база за V
2) e је лин. независно и $|\underline{e}| = n$
3) e је генератриса за V и $|\underline{e}| = n$

Доказ: **1⇔2** (⇒) из дефиниције

(⇐) По теореми e можемо допунити до базе f $(\underline{e} \subseteq \underline{f})$

Истовремено: $|\underline{f}| = n = |\underline{e}| \Rightarrow e = f$

1 ⇔ 3 (⇒) из дефиниције

(⇐) По теореми e садржи неку базу f $(\underline{f} \subseteq \underline{e})$

Истовремено. $|\underline{f}| = n = |\underline{e}|$

Теорема: Нека је V в.п, $\dim V < +\infty$. Тада за $U \leq V$ важи:

1) $\dim U \leq \dim V$
2) $\dim U = \dim V \Rightarrow U = V$

Доказ: Нека је e максимални лин. нез. скуп у U. (e - база за U)
Пошто је $e \subseteq V$, а V коначнодим. $\Rightarrow \dim U = |\underline{e}|$ - коначно

1) $\dim U = |\underline{e}| \leq \dim V$

(директно)

2) e - лин. нез. и $|\underline{e}| = \dim U = \dim V$, па по претходној теореми

e је база за V $\Rightarrow$ $U = \mathcal{L}(\underline{e}) = V$

деф. Нека је V в.п. и $S \subseteq V$. Ако је $\mathcal{L}(S)$ коначне димензије, тада је

ранг скупа S, у ознаци $\rho(S) = \dim \mathcal{L}(S)$

деф. Нека је e систем вектора из V. Ако је $\mathcal{L}(\underline{e})$ коначне димензије тада је

ранг система вектора e, у ознаци $\rho(e) = \dim \mathcal{L}(\underline{e})$

(Ранг је највећи број лин. нез. вектора у S, тј. e)

⑦ Пресек, сума и директна сума векторских потпростора. Грасманова формула.

деф. Нека је V в.п и $U, W \leq V$. Тада је **пресек потпростора** U и W скуп

$$U \cap W = \{ v \mid v \in U \wedge v \in W \}$$

Став: Ако је $U, W \leq V$, онда је и $U \cap W \leq V$

Доказ: По дефиницији, доказујемо два својства

1° $u, w \in U \cap W \Rightarrow u, w \in U \wedge u, w \in W \Rightarrow \begin{matrix} u+w \in U \\ u+w \in W \end{matrix} \Rightarrow u+w \in U \cap W$

2° $u \in U \cap W \Rightarrow u \in U \wedge u \in W \Rightarrow \begin{matrix} \alpha u \in U \\ \alpha u \in W \end{matrix} \Rightarrow \alpha u \in U \cap W$

последица: Важи и општије: $U_i \leq V \Rightarrow \bigcap U_i \leq V \quad (i \in I)$

Став: Нека је V в.п и $U, W \leq V$. Тада је $U \cup W \leq V \Rightarrow U \subseteq W$ или $W \subseteq U$

(важи и $\Leftarrow$)

Доказ: ппс. $U \nsubseteq W \wedge W \nsubseteq U \wedge U \cup W \leq V$

$U \nsubseteq W \Rightarrow \exists u \in U \setminus W$, $u \in U \cup W$

$W \nsubseteq U \Rightarrow \exists w \in W \setminus U$, $w \in U \cup W \Rightarrow u+w \in U \cup W$

$\Rightarrow 1^\circ$ $u+w \in U$ $\lightning (w \notin U)$ $\vee$ 2° $u+w \in W$ $\lightning (u \notin W)$

деф. Нека је V в.п. и $U, W \leq V$. Тада је **сума потпростора** U и W скуп:

$$U + W = \{ u + w \mid u \in U \wedge w \in W \}$$

НАПОМЕНА: Пошто $U \subseteq U+W$ и $W \subseteq U+W$, онда $U \cup W \subseteq U+W$
(унија и сума нису исто, јер код суме можда можемо добити нове векторе)

Став: Нека је V в.п. и $U, W \leq V$. Тада је $U+W \leq V$

Доказ: 1° $v', v'' \in U+W \Rightarrow \begin{matrix} v' = u' + w' \\ v'' = u'' + w'' \end{matrix} \Rightarrow v' + v'' = (u'+u'') + (v'+w'') \Rightarrow v'+v'' \in U+W$

2° $v \in U+W \Rightarrow v = u + v \Rightarrow \alpha v = \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v \Rightarrow \alpha v \in U+W$

Став: Нека је V в.п., $S, T \leq V$ и $\mathcal{L}(S) = U$, $\mathcal{L}(T) = W$. Онда је $U+W = \mathcal{L}(S \cup T)$

Доказ: $v \in U+W \Rightarrow v = u + w = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_m w_n \Rightarrow v = \mathcal{L}(S \cup T)$

Грасманова формула: $\dim U + \dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap W)$ $\left(U, W \leq V, \dim V < \infty \right.$

Доказ:

- Нека је $e = [e_1, \dots, e_k]$ база за $U \cap W$.
  e је лин. нез. сис. вектора из U $\Rightarrow$ можемо га допунити до базе за U
  Аналогно, можемо га допунити до базе за W.

  $f = [e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_n]$ - база за U ; $g = [e_1, \dots, e_k, g_1, \dots, g_m]$

  $\Rightarrow \dim U = k+n$; $\dim W = k+m$, $\dim U \cap W = k$

  Дакле, довољно је доказати да је $h = [e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m]$ база за $U+W$,
  јер ће онда $\dim U+W = k+n+m$, што је исто као $(k+n)+(k+m)-(k)$

- Пошто је $\underline{h} = \underline{f} \cup \underline{g}$ (f,g - садрже и e-ове) и $U = \mathcal{L}(\underline{f})$, $W = \mathcal{L}(\underline{g})$

  $\Rightarrow$ $U+W = \mathcal{L}(\underline{f} \cup \underline{g})$, тј. $U+W = \mathcal{L}(\underline{h})$

  Докажимо да је h лин. независно:

  $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_n f_n + \gamma_1 g_1 + \dots + \gamma_m g_m = 0$

  $\underbrace{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_n f_n}_{\in U} = \underbrace{(-\gamma_1) g_1 + \dots + (-\gamma_m) g_m}_{\in W}$ означимо то са $v \in U \cap W$

  Значи $\delta_1 e_1 + \dots \delta_k e_k = (-\gamma_1) g_1 + \dots + (-\gamma_m) g_m$
  тј. $\delta_1 e_1 + \dots + \delta_k e_k + \gamma_1 g_1 + \dots + \gamma_m g_m = 0$

  Пошто је g лин. нез. $\Rightarrow \delta_1 = \dots = \delta_k = \gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0 \Rightarrow v = 0$
  $\hookrightarrow$ Пошто је f лин. нез. $\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_n = 0$

  $\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_n = \gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0$.
  $\Rightarrow$ h је линеарно независно, па је оно и база за $U+W$

деф. Нека је V в.п. и $U, W \leq V$. Тада је сума $U+W$ **директна сума**, у ознаци $U \oplus W$
ако је $U \cap W = \{\vec{0}\}$

Теорема: Сума $U+W$ је директна $\Leftrightarrow$ Сваки вектор v се може на јединствен начин записати
у облику $u+w$, $u \in U$, $w \in W$

Доказ: $(\Rightarrow)$ Може се записати (по деф.). Докажимо да је запис јединствен.

$v = u+w = u'+w' \Rightarrow \underbrace{u-u'}_{\in U} = \underbrace{w'-w}_{\in W} \Rightarrow u = u'$, $w = w'$
$(U \cap W = \{0\})$

$(\Leftarrow)$ Доказујемо: $v \in U \cap W \Rightarrow v = 0$

$v = \underset{\in U}{v} + \underset{\in W}{0} = \underset{\in U}{0} + \underset{\in W}{v}$, па због јединствености записа $\Rightarrow v = 0$

⑧ Матрице. Векторски простор матрица.

деф. **$m \times n$** $= \{(r,s) \mid 1 \le r \le m, 1 \le s \le n\}$

деф. **Матрица** домена $m \times n$ над пољем K је систем $A = (a_i \mid i \in m \times n)$ елемената из K.

ознаке:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{1\rightarrow} \\ \vdots \\ A_{n\rightarrow} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{1\downarrow} & \dots & A_{n\downarrow} \end{bmatrix}$$

$$A = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

Елемент у пресеку i-те врсте и j-те колоне: $[A]_{i,j}$

деф. **$M_{m,n}(K)$** је скуп свих матрица домена $m \times n$ над пољем K

деф. **Транспонована матрица** за $A \in M_{m,n}(K)$ је матрица $A^T \in M_{n,m}(K)$ ткд. $[A^T]_{i,j} = [A]_{j,i}$ $\quad 1 \le i \le n, \; 1 \le j \le m$

деф. **Дијагонална матрица** је свака матрица $A \in M_{m,n}(K)$ ткд. $[A]_{i,j} = 0$ за $i \neq j$

деф. **Горње-троугаона матрица** је свака матрица $A \in M_{m,n}(K)$ ткд. $[A]_{i,j} = 0$ за $i > j$

Доње-троугаона матрица је свака матрица $A \in M_{m,n}(K)$ ткд. $[A]_{i,j} = 0$ за $i < j$

Операције: За $A, B \in M_{m,n}(K)$ и $\alpha \in K$ дефинишемо следеће матрице:

1) $[A+B] \in M_{m,n}(K) \rightarrow [A+B]_{i,j} = [A]_{i,j} + [B]_{i,j}$
2) $[\alpha A] \in M_{m,n}(K) \rightarrow [\alpha A]_{i,j} = \alpha [A]_{i,j}$

Теорема: Скуп $M_{m,n}(K)$ у односу на сабирање и множење скаларом је векторски простор над K

Такође, $\dim(M_{m,n}(K)) = m \cdot n$

Доказ:
- Јесте векторски простор зато што задовољава свих 8 својстава

  деф. **Нула матрица** је матрица $\mathbf{0} \in M_{m,n}(K)$ ткд. $[A]_{i,j} = 0$ за $\forall i,j$

  деф. Матрица $-A \in M_{m,n}(K)$ за $A \in M_{m,n}(K)$ је матрица ткд. $[-A]_{i,j} = -1 \cdot [A]_{i,j}$

- За $M_{m,n}(K)$, скуп $\{E_{ij} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$, где је на месту i,j 1, а свуда остало 0 је његова база (зато што му је генератриса и сви они су лин. независни)

  $\Rightarrow \dim M_{m,n}(K) = m \cdot n$ (толико их има у скупу)

⑨ Множење матрица - дефиниција и основне особине

Деф. За $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,l}(K)$ дефинишемо **матрицу производа** $A \cdot B \in M_{m,l}(K)$ са

$$[A \cdot B]_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} [A]_{i,s} [B]_{s,j} \quad , \text{за} \quad 1 \le i \le m \ , \quad 1 \le j \le l$$

Особине: За матрице A, B, C над K и $\alpha, \beta \in K$ важи да ако је дефинисан израз са леве стране, онда је дефинисан и израз са десне стране и они су једнаки:

1) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
2) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
3) $(\alpha A) \cdot (\beta B) = (\alpha \beta)(A \cdot B)$
4) $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$
5) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

Доказ:

1) • $(A \cdot B)^T$ је дефинисано $\Leftrightarrow$ $A \cdot B$ дефинисано $\Leftrightarrow$ $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,l}(K)$

$B^T \cdot A^T$ је дефинисано $\Leftrightarrow$ $B^T \in M_{l,n}(K)$, $A^T \in M_{n,m}$ $\Leftrightarrow$ $B \in M_{n,l}(K)$, $A \in M_{m,n}(K)$

• $$[(AB)^T]_{i,j} = [AB]_{j,i} = \sum_{s=1}^{n} [A]_{j,s} [B]_{s,i}$$

$$[B^T A^T]_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} [B^T]_{i,s} [A^T]_{s,j} = \sum_{s=1}^{n} [B]_{s,i} [A]_{j,s}$$

2) • $(A \cdot B) \cdot C$ деф. $\Leftrightarrow$ колоне A = редови B , $\underset{\substack{\| \\ \text{колоне } B}}{\text{колоне } AB}$ = редови C

$A \cdot (B\,C)$ деф. $\Leftrightarrow$ колоне A = $\overset{\substack{\text{редови } B \\ \|}}{\text{редови } BC}$, колоне B = редови C

• $A \in M_{m,n}$, $B \in M_{n,l}(K)$, $C \in M_{l,t}$

$$[(AB)C]_{i,j} = \sum_{s=1}^{l} [AB]_{i,s} [C]_{s,j} = \sum_{s=1}^{l} \left(\sum_{r=1}^{n} [A]_{i,r} [B]_{r,s} \right) [C]_{s,j} =$$

$$= \left([A]_{i,1} [B]_{1,1} + [A]_{i,2} [B]_{2,1} + \dots + [A]_{i,n} [B]_{n,1} \right) [C]_{1,j} + \dots$$
$$\dots + \left([A]_{i,1} [B]_{1,l} + [A]_{i,2} [B]_{2,l} + \dots + [A]_{i,n} [B]_{n,l} \right) [C]_{l,j}$$

$$[A(BC)]_{i,j} = \sum_{r=1}^{n} [A]_{i,r} [BC]_{r,j} = \sum_{r=1}^{n} [A]_{i,r} \left(\sum_{s=1}^{l} [B]_{r,s} [C]_{s,j} \right)$$

$$= [A]_{i,1} \left([B]_{1,1} [C]_{1,j} + \dots + [B]_{1,l} [C]_{l,j} \right) + \dots$$
$$\dots + [A]_{i,n} \left([B]_{n,1} [C]_{1,j} + \dots + [B]_{n,l} [C]_{l,j} \right)$$

сви сабирци се скраћују

3) * $(\alpha A)(\beta B)$ деф $\Leftrightarrow (\alpha A) \in M_{m,n}(K),\ (\beta B) \in M_{n,\ell}(K) \Leftrightarrow A \in M_{m,n}(K),\ B \in M_{n,\ell}(K)$

$(\alpha\beta)(AB)$ деф $\Leftrightarrow A \in M_{m,n}(K),\ B \in M_{n,\ell}(K)$

* $[(\alpha A)(\beta B)]_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} [\alpha A]_{i,s} [\beta B]_{s,j} = \alpha\beta \sum_{s=1}^{n} [A]_{i,s} [B]_{s,j}$

$[(\alpha\beta)(AB)]_{i,j} = \alpha\beta [AB] = \alpha\beta \sum_{s=1}^{n} [A]_{i,s} [B]_{s,j}$

4) * $(A+B) \cdot C$ деф $\Leftrightarrow A, B \in M_{m,n}(K),\ C \in M_{n,\ell}(K)$

$(A \cdot C) + (B \cdot C)$ деф $\Leftrightarrow A \in M_{m,n}(K),\ C \in M_{n,\ell}(K),\ B \in M_{m,n}(K)$

* $[(A+B) \cdot C]_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} [A+B]_{i,s} [C]_{s,j} = \sum_{s=1}^{n} \left([A]_{i,s} + [B]_{i,s}\right) [C]_{s,j}$

$[(AC)+(BC)]_{i,j} = [AC]_{i,j} + [BC]_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} [A]_{i,s} [C]_{s,j} + \sum_{s=1}^{n} [B]_{i,s} [C]_{s,j} = \sum_{s=1}^{n} \left([A]_{i,s} + [B]_{i,s}\right) [C]_{s,j}$

5) исто као 4

деф. **$M_n(K)$** је скуп свих матрица домена $n \times n$ над пољем K

деф. **Јединична матрица** је матрица **E_n** $\in M_n(K)$ ткд. $[E_n]_{i,j} = 1 \quad (i = j)$

$[E_n]_{i,j} = 0 \quad (i \neq j)$

Став: За сваку матрицу $A \in M_{m,n}$ важи: **1)** $A \cdot E_n = A$

2) $E_m \cdot A = A$

Доказ: **1)** $[A \cdot E_n]_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} [A]_{i,s} [E_n]_{s,j} \Rightarrow s = j : [A \cdot E_n]_{i,j} = [A]_{i,j}$

$s \neq j : [A \cdot E_n]_{i,j} = 0$

$$\Rightarrow \sum_{s=1}^{n} [A]_{i,s} [E_n]_{s,j} = [A]_{i,j}$$

2) слично

⑩ Инверз матрице

деф. Нека је V в.п. над K и $X \in M_{m,n}(K)$. За систем вектора $e=[e_1, \dots, e_m]$ из V дефинишемо систем вектора $f=[f_1, \dots, f_n]$ из V са $e \cdot X$ као

$$f_i = [X]_{1,i}\, e_1 + [X]_{2,i}\, e_2 + \dots + [X]_{m,i}\, e_m$$

eX

Став: За $e=[e_1, \dots, e_m]$, $X \in M_{m,n}(K)$, $Y \in M_{n,l}(K)$ важи: $(e \cdot X) \cdot Y = e \cdot (X \cdot Y)$

Доказ: • димензије се очигледно слажу

• $f_i = [X]_{1,i}\, e_1 + \dots + [X]_{m,i}\, e_m$

$h = f \cdot Y$

$h_i = [Y]_{1,i}\, f_1 + \dots + [Y]_{n,i}\, f_n =$

$$= \sum_{s=1}^{n} [Y]_{s,i} \sum_{r=1}^{m} [X]_{r,s}\, e_r$$

исто

$$g_i = \sum_{r=1}^{m} [XY]_{r,i}\, e_r = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} [X]_{r,s} [Y]_{s,i}\, e_r$$

Став: Нека је V в.п. над K, $e=[e_1, \dots, e_m]$ је лин. нез. систем вектора из V. Онда за све $X, Y \in M_{m,n}(K)$ важи:

1) $e \cdot X = 0 \Rightarrow X = 0$

2) $e \cdot X = e \cdot Y \Rightarrow X = Y$

Доказ: 1) $e \cdot X = f = 0 \Rightarrow f_i = [X]_{1,i}\, e_1 + \dots + [X]_{m,i} e_m = 0$

Пошто је e лин. нез. $\Rightarrow [X]_{1,i} = \dots = [X]_{m,i} = 0$ $(\forall i)$ $\Rightarrow X = 0$

2) $e \cdot X = e \cdot Y \Rightarrow e \cdot X - e \cdot Y = 0 \Rightarrow e\,(X - Y) = 0 \Rightarrow X - Y = 0 \Rightarrow X = Y$

НАПОМЕНА: $e \cdot (X+Y) = e \cdot X + e \cdot Y$ се доказује као и претходни став

* Посматрамо специјални случај дефиниције $e \cdot X$ када је $V = K^n$ (е се записује са n вектора)

Тада векторе e_i пишемо као колоне: $e_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$

Зато систем m вектора e можемо да посматрамо као матрицу $m \times n$

$$e = [e_1, \dots, e_m] = [A_{*1} \dots A_{*m}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = A$$

Дакле, у овом специјалном случају, свакм систему вектора одговара једна матрица

Директном провером, можемо се уверити да систему вектора $f = e \cdot X$ одговара баш матрица која се добије као производ $A \cdot X$

последица: Колоне матрице A су лин. нез. када за све $X \in M_{m,1}$ важи: $AX = 0 \Rightarrow X = 0$

↳ због дефиниције лин. нез, доказ као став

деф. Матрица A је **регуларна слева** ако за све $l \in N$, $X, Y \in M_{n,l}(K)$ важи: $AX = AY \Rightarrow X = Y$

Матрица A је **регуларна здесна** ако за све $l \in N$, $X, Y \in M_{l,m}(K)$ важи: $XA = YA \Rightarrow X = Y$

Лема: Матрица A је регуларна слева акко је A^T регуларна здесна

Доказ: $(\Rightarrow)$ $XA^T = YA^T \quad / ^T$

$AX^T = AY^T$, па пошто је A рег. слева $\Rightarrow X^T = Y^T \Rightarrow X = Y$

$(\Leftarrow)$ слично

деф. Матрица $A \in M_{m,n}(K)$ има **леви инверз** ако постоји $P \in M_{n,m}(K)$, ткд. $P \cdot A = E_n$

Матрица $A \in M_{m,n}(K)$ има **десни инверз** ако постоји $Q \in M_{n,m}(K)$, ткд. $A \cdot Q = E_m$

Лема: Ако A има леви инверз, онда је регуларна слева
Ако A има десни инверз, онда је регуларна здесна

Доказ: $A \in M_{m,n}(K)$. Постоје $P, Q \in M_{n,m}(K)$ ткд $PA = E_n$ и $AQ = E_m$

$$AX = AY \Rightarrow P(AX) = P(AY) \Rightarrow (PA)X = (PA)Y \Rightarrow E_nX = E_nY \Rightarrow X = Y$$
$$XA = YA \Rightarrow (XA)Q = (YA)Q \Rightarrow X(AQ) = Y(AQ) \Rightarrow XE_m = YE_m \Rightarrow X = Y$$

деф. Матрица $A \in M_n(K)$ је **инвертибилна** ако има и леви и десни инверз

Лема: Ако је A инвертибилна, онда су јој леви и десни инверз једнаки и јединствене

Доказ: Нека је P неки леви, а Q неки десни инверз

$$\left.\begin{array}{l} PA = E_n \Rightarrow PAQ = E_n \cdot Q \Rightarrow PAQ = Q \\ AQ = E_n \Rightarrow PAQ = P \cdot E_n \Rightarrow PAQ = P \end{array}\right\} \Rightarrow P = Q \quad (\forall P, Q)$$

деф. Матрицу P (тј. Q) из доказа зовемо **инверз матрице** A, у ознаци A^{-1}

$$(A^{-1}A = AA^{-1} = E_n)$$

Лема: Ако су A, B инвертибилне, онда су и A^{-1}, AB и A^T такође инвертибилне

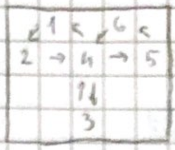
Доказ: (A^{-1}) $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$

(AB)
$$\left.\begin{array}{l} AB \cdot B^{-1}A^{-1} = AE_nA^{-1} = AA^{-1} = E_n \\ B^{-1}A^{-1} \cdot AB = B^{-1}E_nB = B^{-1}B = E_n \end{array}\right. \Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(A^T)
$$\left.\begin{array}{l} A^{-1}A = AA^{-1} = E_n \quad / ^T \\ A^T(A^{-1})^T = (A^{-1})^TA^T = E_n \end{array}\right. \Rightarrow (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Теорема: Нека је $A \in M_{m,n}(K)$. Тада су следећа тврђења еквивалентна

1) A има леви и десни инверз
2) A је квадратна и има десни инверз
3) A је квадратна и има леви инверз
4) A је инвертибилна
5) A је регуларна слева и здесна
6) Колоне, односно врсте, матрице A су лин. нез.



Доказ: **4 ⇒ 5** инвертибилна ⇒ има леви и десни инв ⇒ рег. здесна и слева

4 ⇒ 1 из дефиниције

4 ⇒ 3 из дефиниције

1 ⇒ 2 $A \in M_{m,n}(K)$

* Нека је $e = [e_1, \dots, e_m]$ база за K^m, а $f = e \cdot A$

Нека је P десни инверз: $AP = E_m$ Онда је $f \cdot P = eAP = e$

То значи да $\underline{e} \subseteq \mathcal{L}(\underline{f})$, па је $|e| \leq |f|$ (e-лин нез) $\Rightarrow m \leq n$

* Нека је $g = [g_1, \dots, g_n]$ база за K^n, Q леви инверз. $QA = E_n$

а нека је $h = gQ$ Онда је $hA = gQA = g$

То значи да $\underline{g} \subseteq \mathcal{L}(\underline{h})$, па је $|g| \leq |h| \Rightarrow n \leq m$

Дакле, $n = m$

2 ⇒ 4 $A \in M_m(K)$

Нека је $e = [e_1, \dots, e_m]$ база за K^m и $f = e \cdot A$ (f - систем m вектора)
Нека је P десни инверз $AP = E_m$, па је $fP = eAP = e \Rightarrow \underline{e} \subseteq \mathcal{L}(\underline{f})$

То значи $K^m = \mathcal{L}(\underline{e}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{L}(\underline{f})) = \mathcal{L}(\underline{f}) \Rightarrow f$ је генератриса за K
а пошто је и $|\underline{f}| = m$, онда је f база $\Rightarrow f$ је лин. нез.

$fP = e \Rightarrow fPA = eA = f = f E_m \xRightarrow[f\text{-лин нез}]{} PA = E_m$

Дакле P је и леви инверз

3 ⇒ 4 слично

5 ⇒ 6 колоне: Нека су колоне матрице вектори система $a = [a_1, \dots ; a_n]$

$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0$, означимо $X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$

$aX = 0$ је исто што и $A \cdot X = 0$, а истовремено $A \cdot 0 = 0$
Пошто је A регуларна здесна, онда је $X = 0$

Дакле (по последици), a је линеарно независно

врсте: Пошто је A регуларна слева, онда је и A^T регуларна здесна
па су колоне у A^T лин. нез., а то су управо врсте у A

6 ⇒ 5 * Посматрамо колоне из A као векторе из K^m.
Пошто A има n колона (које су лин. нез.), онда је $n \leq m$

Посматрамо врсте из A као векторе из K^n
Пошто A има m врста (које су лин. нез.), онда је $m \leq n$

$\Rightarrow m = n$, дакле матрица је квадратна

* Колоне чине базу за K^m (има их $\overset{m}{n}$ и лин. независне су)
Нека оне чине систем вектора e.
То значи да сваки вектор v може да се представи помоћу вектора из e

$[e_1 \dots e_n] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = v$, означимо са $v_e^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$

Пошто постоји v_e^T за сваки вектор, постоје и за векторе канонске базе.
Ако спојимо све такве векторе (колоне) v_e^T, добићемо матрицу P
Ако спојимо све векторе канонске базе, добићемо матрицу E_n

Дакле, $A \cdot P = E_n \Rightarrow$ постоји десни инверз

* Аналогно, добијамо матрицу $A^T \cdot Q = E_n \;/^T$
$Q^T \cdot A = E_n \Rightarrow$ постоји леви инверз

Дакле, матрица је инвертибилна

слично:

$$\underbrace{[e_1 \dots e_n] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} , \dots [e_1 \dots e_n] \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{A}{[e_1 \dots e_n]} \cdot \underset{P}{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \omega_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \dots & \omega_n \end{bmatrix}} = \underset{E_n}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

⑪ Промена базе векторског простора

Лема: Нека је $e_n = [e_1, \dots, e_n]$ база за V над K. Тада за произвољан систем вектора f постоји матрица A ткд. $eA = f$

Доказ: Нека је $f = [f_1, \dots, f_k]$. Пошто је e база, то значи $\underline{f} \subseteq \mathcal{L}(\underline{e})$

То значи да за $\forall i$ $f_i = \alpha_{1i} e_1 + \dots + \alpha_{ni} e_n$. ($f$ се јединствено може представити)
Дакле матрица A се добије „спајањем" свих α.

последица: Ако је и f база, онда је $|\underline{f}| = |\underline{e}| = n$ и постоји јединств. $A \in M_n(K)$ ткд. $eA = f$

деф. Нека су e и f базе в.п. V. Тада матрицу A из леме (јединствена је) називамо

матрица прелаcка са базе e на базу f, у ознаци $[f]_e$

Став: Нека су e, f, g базе в.п. над K. Тада је $[f]_e \cdot [g]_f = [g]_e$

Доказ: $f = e \cdot [f]_e$, а такође је $g = e \cdot [g]_e$

$g = f \cdot [g]_f \Rightarrow g = e \cdot [f]_e \cdot [g]_f$, па због јединствености следи тврђење.

Теорема: Нека је e база в.п. V над K и $\dim V = n$, и нека $A \in M_n(K)$.

Тада је $f = e \cdot A$ база акко је матрица A инвертибилна и тада $[e]_f = A^{-1}$

Доказ: ($\Rightarrow$) Пошто је f база, по леми постоји B ткд. $e = fB \Rightarrow e = eAB$

Пошто је e лин. нез., онда је $E = AB$, па A има десни инверз
A је такође и квадратна, па по великој теореми A је инвертибилна
а очигледно је $[e]_f = B = A^{-1}$

($\Leftarrow$) $f = e \cdot A \Rightarrow f \cdot A^{-1} = e \Rightarrow |\underline{f}| = n$

Дакле $\underline{e} \subseteq \mathcal{L}(\underline{f})$. Следи $V = \mathcal{L}(\underline{e}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{L}(\underline{f})) = \mathcal{L}(f)$
Пошто је f генератрица V и $|\underline{f}| = n \Rightarrow f$ је база

Промена координата: Нека је $e = [e_1, \dots e_n]$ база в.п. V над K.

(до сад смо гледали шта се дешава са базом, а сад и за остале)

Сваки вектор се јединствено може записати у бази, уз коеф. $\alpha_1 \dots \alpha_n$

$$v = e \cdot \underbrace{V_e^T}_{\to \text{ координате}}$$

Ако је $f = [f_1, \dots, f_n]$ нека друга база за V и $A = [f]_e$

$v = e \cdot \boxed{V_e^T} = f \cdot V_f^T$, а пошто је $f = e[f]_e \Rightarrow v = e \boxed{[f]_e V_f^T}$

Пошто је e лин. нез. сис. вектора $V_e^T = [f]_e \cdot V_f^T \quad / [e]_f \cdot$

$$[e]_f V_e^T = [e]_f \cdot [f]_e \cdot V_f^T$$

$$\Rightarrow V_f^T = [e]_f V_e^T$$

⑫ Елементарне операције матрица ; ранг матрице

деф. **Елементарна операција на колони** ϕ је једна од следећих:

1° $C_i \leftrightarrow C_j$ - замена места i-те и j-те колоне

2° $C_i \rightarrow \alpha C_i$ - множење елемената i-те колоне скаларом $\alpha \neq 0$

3° $C_i \rightarrow C_i + \alpha C_j$ - додавање i-тој колони j-ту помножену са α

Аналогно дефинишемо **елементарну операцију на врсти** ψ

Теорема: Ако је $\phi(\psi)$ елементарна операција на колонама (врстама) од $A \in M_{m,n}(K)$

тада је $\phi(A) = A \cdot \phi(E_n)$, тј. $\psi(A) = \psi(E_m) \cdot A$ (редова има m
колоне има n
зато овакав редосл)

Доказ: Доказаћемо само за операцију 1°. За остале се ради јако слично

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1j} \cdots a_{1i} \cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mj} \cdots a_{mi} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \quad а \quad A \cdot \phi(E) = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots 1 & & 0 \\ 0 & & 1 & \cdots 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1i} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mi} \cdots a_{mj} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1j} \; a_{1i} \; a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mj} \cdots a_{mi} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

па се $\phi(A)$ и $A \cdot \phi(E)$ заиста поклапају

$*$ $\phi(E)$ за 2° : $\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \alpha & & \\ 0 & & & 1 & \\ & & & & \ddots \; 1 \end{bmatrix}$, $\phi(E)$ за 3° $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & \alpha & 1 & \\ & & & \ddots \; 1 \end{bmatrix}$

Аналогно се доказује и за врсте

Лема: $\phi(E)$ је инвертибилна матрица , и то $(\phi(E))^{-1} = \phi^{-1}(E)$, где је ϕ^{-1} супр. опер. за ϕ
$\psi(E)$ је инвертибилна матрица , и то $(\psi(E))^{-1} = \psi^{-1}(E)$, где је ψ^{-1} супр. операција за ψ

Доказ: $E\,\phi^{-1}(E)\,\phi(E) = E \Rightarrow \phi^{-1}(E) \cdot \phi(E) = E \Rightarrow (\phi(E))^{-1} = \phi^{-1}(E)$

аналогно и за врсте

деф. **Ранг колона** матрице A, у ознаци $\rho(A, \downarrow) = \dim \mathcal{L}(A_{\downarrow})$ (скуп колона)
Ранг врста матрице A, у ознаци $\rho(A, \rightarrow) = \dim \mathcal{L}(A_{\rightarrow})$ (скуп врста)

деф. Матрице A, B су **елементарно еквивалентне** ако постоји коначан низ операција којима се од A може добити B. Пишемо $A \sim B$

НАПОМЕНА: $A \sim B$ је релација еквиваленције

Теорема: За матрицу $A \in M_{m,n}(K)$ и инвертибилне матрице $P \in M_m(K)$, $Q \in M_n(K)$

важи: $\rho(A, \downarrow) = \rho(PA, \downarrow)$ и $\rho(A, \rightarrow) = \rho(AQ, \rightarrow)$

Доказ: * Докажимо да A и PA имају исти ранг колона. Довољно је доказати да за произвољне колоне $x_1, \dots, x_\ell$ су лин. нез. $\Leftrightarrow$ $Px_1, \dots, Px_\ell$ су лин. нез

$(\Rightarrow)$ Нека је $\alpha_1 Px_1 + \dots + \alpha_\ell Px_\ell = 0$ / дистрибутивност мн. матрица

$P(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_\ell x_\ell) = 0$ / P - инвертибилна

$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_\ell x_\ell = 0$ / $x_1, \dots, x_\ell$ су лин. нез.

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_\ell = 0$

$(\Leftarrow)$ Нека је $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_\ell x_\ell = 0$ / $P \cdot$

$P(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_\ell x_\ell) = P \cdot 0$

$\alpha_1 Px_1 + \dots + \alpha_\ell Px_\ell = 0$ / $Px_1, \dots, Px_\ell$ - лин. нез.

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_\ell = 0$

* За врсте: $\rho(A, \rightarrow) = \rho(A^T, \downarrow) \underset{\uparrow}{=} \rho(Q^T A^T, \downarrow) = \rho(AQ, \rightarrow)$

смемо ово да урадимо јер је и Q^T инвертибилна, па потом применимо колоне

Последица: $\rho(A, \rightarrow) = \rho(\phi(A), \rightarrow)$ и $\rho(A, \downarrow) = \rho(\Psi(A), \downarrow)$ (исто важи за $A \sim B$)

Доказ: $\phi(A) = A \cdot \underbrace{\phi(E_m)}_{Q}$, $\Psi(A) = \underbrace{\Psi(E_n)}_{P} \cdot A$

По леми $\phi(E)$ и $\Psi(E)$ су инвертибилне

деф. Матрица је у **редукованој степенастој форми** ако је у степенастој форми (иста деф. као код сис. лин. јед.) и има водеће јединице.

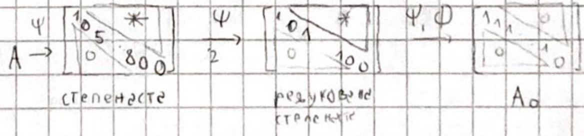
Теорема: За свако $A \in M_{m,n}(K)$ постоји јединствен ненегативан цео број r за који је

$A \sim A_0$ и $r = \rho(A, \rightarrow) = \rho(A, \downarrow)$

Доказ: $$A_0 = \left[\begin{array}{cc|c} \overbrace{1 \quad}^{r} & & 0 \\ & 1 & \\ \hline 0 & & 0 \end{array}\right]\}r$$

Сличним поступком као код сис. лин. једначина, користећи само операције над врстема на A добијамо ред. степ. форму,

и а онда применимо оп. на колонама: (како бисмо добили A_0)



Дакле r постоји. (пошто A_0 постоји) Такође $A \sim A_0 \Rightarrow$ $\rho(A, \downarrow) = \rho(A_0, \downarrow) = r$ $\Rightarrow$ r је јединствено

$\rho(A, \rightarrow) = \rho(A_0, \rightarrow) = r$

$\Downarrow$

$\rho(A, \downarrow) = \rho(A, \rightarrow)$

деф. **Ранг матрице** $A \in M_{m,n}(K)$ је $\rho(A, \rightarrow)$, тј. $\rho(A, \downarrow)$ (једнаки су)

деф. A_0 је **канонска форма** матрице A

⑬ Еквивалентност матрица

деф. Матрице су **елементарно еквивалентне** ако се могу добити једна од друге применом елементарних операција. Пишемо **$A \sim B$**
(већ дефинисано раније)

Лема: Нека су $A, B \in M_{m,n}(K)$. Тада су следећа тврђења еквивалентне.

1) $A \sim B$ **2)** $\rho(A) = \rho(B)$ **3)** $A_0 = B_0$

Доказ: **1⇔2** (⇒) $A \sim B \;\wedge\; B \sim B_0 \Rightarrow A \sim B_0$, а канонска форма је јединствена
(⇐) $\rho(A) = \rho(B) = r \Rightarrow A \sim A_0 = B_0 \sim B$

2⇔3 очигледно

(најава за следећу теорему)

* Посматрајмо $A \in M_m(K)$ која је инвертибилна $\overset{(6)}{\Longrightarrow}$ A има m лин. нез. колона и врста
$\Rightarrow \rho(A) = m$

То значи да је (у овом спец. случају) $A_0 = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}}_{m} = E_m$

То значи да је $A \sim E_m$ и може се добити само помоћу операција врсти
(када дођемо до редуковане степенасте већ тад морају бити у канонској форми јер их има m)

$\Psi_k(E_m) \cdot \ldots \cdot \Psi_2(E_m) \cdot \Psi_1(E_m) A = A_0 = E_m$ Означимо $\Psi_i(E) = P_i$

$\underbrace{P_k \cdot \ldots \cdot P_2 \cdot P_1}_{P} A = E$

Дакле $A^{-1} = P = \Psi_k(E) \cdot \ldots \cdot \Psi_1(E) \cdot E$

⇒ инверзну матрицу добијамо применом операција на врстама

$$[A \mid E] \xrightarrow{\Psi} [E \mid A^{-1}]$$

Ψ - исте операције које користимо да добијемо A_0 (тј E) од A
- постоје само ако је A инвертибилна

Теорема: **1)** Матрица $A \in M_m(K)$ је инвертибилна акко се опер. на врстама може довести на E_m

2) Исте те операције трансформишу E_m у A^{-1}

3) A је инвертибилна акко је производ матрица елементарних операција

Доказ: **1)** (⇒) доказано у „најави теореме"

(⇐) $\rho(A) = \rho(A_0) = \rho(E_m) \Rightarrow$ има m лин нез врста и колона
$\Rightarrow$ (б) инвертибилна је

2) такође доказано

3) (⇒) Знамо $A^{-1} = P_k \cdot \ldots \cdot P_1$, па је $A = (P_k \cdot \ldots \cdot P_1)^{-1} = P_1^{-1} \cdot \ldots \cdot P_k^{-1}$

$P_i^{-1} = (\Psi_i(E))^{-1} = \Psi_i^{-1}(E)$, па је и P_i матрица елем. операције

(⇐) $A = Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_l$, па пошто су $Q_1, \ldots, Q_l$ инвертибилне,

онда је и $Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_l = A$ инвертибилно

последица: $A, B \in M_{m,n}(K)$ су елем. екв. акко постоје инвертибилне $P \in M_m(K)$, $Q \in M_n(K)$ тк

(НАПОМЕНА)

$$B = PAQ$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & E_m \\ \hline E_n & \end{array}\right] \xrightarrow{\phi,\ \Psi} \left[\begin{array}{c|c} B & P \\ \hline Q & \end{array}\right]$$

$$B = \underbrace{P_k \ldots P_1}_{\text{врсте}} A \underbrace{Q_1 \ldots Q_l}_{\text{колоне}}$$

⑭ Линеарна пресликавања - основне особине и примери

деф. Нека су U, W в.п. над K. Тада је $L: V \to W$ **линеарно пресликавање** ако

1) $L(u+w) = L(u) + L(w)$
2) $L(\alpha u) = \alpha L(u)$

примери:
1) $0: U \to W$, $0(u) = \vec{0}$
2) $\underline{I}: U \to U$, $\underline{I}(u) = \vec{u}$
3) $f: R \to R$, $f(x) = ax + b$ под условом $b = 0$ (због 1)
4) $L: R^3 \to R^4$, $L(x, y, z) = (3x + z, 2x + 5y + z, x + y, y + 2z)$

5) $f: R \to R$, $f(x) = x^2$ није лин. пресликавање

Особине: Нека је $L: U \to W$ линеарно пресликавање, он да је:

1) $L(0) = 0$
2) $L(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m) = \alpha_1 L(u_1) + \ldots + \alpha_m L(u_m)$

Доказ: **1)** $L(\alpha u) = \alpha L(u) \quad / \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad L(0) = 0$

2) Индукцијом по m

(БИ) $L(\alpha_1 u) = \alpha_1 L(u)$ → тачно по дефиницији

(ИК) $L(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{m-1} u_{m-1} + \alpha_m u_m) = L(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{m-1} u_{m-1}) + L(\alpha_m u_m)$

$$= \underbrace{\alpha_1 L(u_1) + \ldots \alpha_{m-1} L(u_{m-1})}_{\text{их}} + \underbrace{\alpha_m L(u_m)}_{2}$$

деф. **Хомоморфизам** векторског простора је свако линеарно пресликавање

- ↳ **Мономорфизам** векторског простора је свако **1-1** линеарно пресликавање
- ↳ **Епиморфизам** векторског простора је свако **НА** линеарно пресликавање
- ↳ **Изоморфизам** векторског простора је свако **бијективно** лин. пресликавање

Теорема: За линеарно пресликавање $L: U \to W$ важи:

1) L је мономорфизам в.п. $\Leftrightarrow$ „чува" линеарну независност

2) L је епиморфизам в.п. $\Leftrightarrow$ „чува" генератрисе

3) L је изоморфизам в.п. $\Leftrightarrow$ „чува" базе

Доказ: **1)** $(\Rightarrow)$ Нека је $\{e_1, \dots, e_k\}$ лин нез. скуп вектора

Пошто је L 1-1 $\Rightarrow L(e_1) \neq \dots \neq L(e_n)$

$\alpha_1 L(e_1) + \dots + \alpha_k L(e_k) = L(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k) = 0$

$\overset{1-1}{\Rightarrow} \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ (e - лин нез)

$(\Leftarrow)$ $L(u) = L(u') \Rightarrow L(u) - L(u') = 0 \Rightarrow L(u - u') = 0$

ппс. $u \neq u' \Rightarrow \{u - u'\}$ - лин. нез $\Rightarrow \{L(u-u')\}$ - лин нез. $\Rightarrow L(u-u') \neq 0$ ↯
$\Rightarrow u = u'$

2) $(\Rightarrow)$ Нека је $\{e_1, \dots, e_k\}$ генератриса за U и нека $\omega \in W$

Пошто је L НА $\Rightarrow \exists u \in U \; L(u) = \omega$

$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k = u \Rightarrow \omega = L(u) = L(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k) = \alpha_1 L(e_1) + \dots + \alpha_k L(e_k)$

$(\Leftarrow)$ Нека је $\omega \in W$. Изаберимо произвољну генератрису S за V
Тада је $S' = \{L(v) \mid v \in S\}$ генератриса за W, па $\omega \in \mathcal{L}(S')$

$\omega = \alpha_1 L(u_1) + \dots + \alpha_k L(u_k) = L(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k) = L(u)$ (неко $u \in U = \mathcal{L}(S)$

3) $(\Rightarrow)$ последица 1) и 2)
$(\Leftarrow)$ НА: исти доказ као 2)$\Leftarrow$, само је S база, а не само генератриса

1-1: Нека је $L(u) = L(u')$ и нека је $\{e_1, \dots, e_k\}$ база за U

$u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k$ и $u' = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k$

$L(u) - L(u') = L(u - u') = L((\alpha_1 - \beta_1) e_1 + \dots + (\alpha_k - \beta_k) e_k) = 0$

$(\alpha_1 - \beta_1) L(e_1) + \dots + (\alpha_k - \beta_k) L(e_k) = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 - \beta_1 = \dots = \alpha_k - \beta_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_k = \beta_k \Rightarrow u = u'$

⑮ Одређеност и матрица линеарног пресликавања

Лема: Нека је $L: V \to W$ лин. пресл. , $e = [e_1, \dots, e_n]$ база за V. Тада је $L(v) = L(e) \cdot V_e^T$

Доказ: Пошто је е база: $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \quad / L$

$$L(v) = L(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 L(e_1) + \dots + \alpha_n L(e_n)$$

$$L(v) = [L(e_1) \ \dots \ L(e_n)] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$L(v) = L(e) \cdot V_e^T \quad \in W$$ (координате се не мењају)

Теорема: **1)** За сваку базу $e = [e_1, \dots, e_n]$ в.п. V над K и систем вектора $f = [f_1, \dots f_n]$ из в.п. W над K постоји јединств. лин. пресликавање $L: V \to W$, ткд. $L(e_i) = f_i$ и тада је $L(v) = f \cdot V_e^T$

2) L је изоморфизам в.п. $\iff$ f је база W
L је мономорфизам в.п. $\iff$ f је лин. нез. систем вектора из W
L је епиморфизам в.п. $\iff$ f је генератриса W

Доказ: **1)** * Посматрајмо пресликавање $L: V \to W$, $L(v) = f \cdot V_e^T$
Докажимо да је то пресликавање линеарно

$$L(u+v) = f \cdot (u+v)_e^T = f\,(u_e^T + v_e^T) = f u_e^T + f v_e^T = L(u) + L(v)$$

$$L(\alpha v) = f \cdot (\alpha v)_e^T = f \cdot (\alpha \cdot v_e^T) = \alpha f \cdot v_e^T = \alpha L(u)$$

За то пресликавање очигледно важи $L(e_i) = f_i$

* Докажимо јединственост. Нека су L и L' лин. прес. за које $L(e_i) = f_i$

$$L(v) = L(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 L(e_1) + \dots + \alpha_n L(e_n) = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$$
$$L'(v) = L'(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 L'(e_1) + \dots + \alpha_n L'(e_n) = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$$

2) последица својства L да „чува" базу, лин. нез. и генератрису

* Нека је $e = [e_1, \dots, e_n]$ база за V и $f = [f_1, \dots, f_m]$ база за W. Тада $L(e_i) \in W = \mathcal{L}(\underline{f})$

$$L(e_i) = \alpha_{1i} f_1 + \dots + \alpha_{mi} f_m .$$

$$L(e) = [L(e_1), \dots, L(e_n)] = [\alpha_{11} f_1 + \dots + \alpha_{m1} f_m, \dots, \alpha_{n1} f_1 + \dots + \alpha_{mn} f_m] = [f_1 \ \dots \ f_m] \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & & \alpha_{mn} \end{bmatrix}}_{A}$$

Скраћено: $L(e) = f \cdot [L]_{e,f}$

деф. Матрицу A зовемо **матрица линеарног пресликавања** L у односу на пар база (e, f)

$$L(v) = L(e) \cdot V_e^T \implies L(v) = f \cdot [L]_{e,f} \cdot V_e^T \quad , \quad [L]_{e,f} = [(L(e_1))_f^T, \dots (L(e_n))_f^T]$$

Теорема: **1)** Матрица $[L]_{e,f}$ лин. пресл. $L: V \to W$ у односу на пар база (e,f) је јединствена

тј. то је једина матрица која задовољава услов $L(v) = f \cdot A \cdot v_e^T$, $\forall v \in V$

(обрнуто) **2)** Ако је $|e| = n$, $|f| = m$ и $A \in M_{mn}(K)$ је било која матрица, онда је са

$L(v) = f A v_e^T$ одређено једно лин. пресликавање $L: V \to W$ за које $A = [L]_{e,f}$

Доказ: **1)** ппс. постоје две различите матрице лин. пресл. A и B

Нека се оне разликују у колони K

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1k} & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{mk} & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots \; \beta_{1k} & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \beta_{mk} & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

(остали могу и не морају бити једнаки)

$L(e_k) = \alpha_{1k} f_1 + \dots + \alpha_{mk} f_m$ по A

$L(e_k) = \beta_{1k} f_1 + \dots + \beta_{mk} f_m$ по B

Пошто је f база, сваки вектор из W, па и $L(e_k)$ је одређен јединств. лин. комб.

$\Rightarrow \alpha_{ik} = \beta_{ik} \Rightarrow A = B$

2) $L(u+v) = f A (u+v)_e^T = f A (u_e^T + v_e^T) = f (A u_e^T + A v_e^T) = f A u_e^T + f A v_e^T = L(u) + L(v)$

$L(\alpha v) = f A (\alpha v)_e^T = f A (\alpha v_e^T) = f \alpha A v_e^T = \alpha f A v_e^T = \alpha L(u)$

Дакле L јесте лин. пресл. па је његова $[L]_{e,f}$ јединствена (по 1)

Матрица A „задовољава услов" да буде матрица пресл. $\Rightarrow A = [L]_{e,f}$

($L(v) = f A v_e^T$ јесте пресликавање $V \to W$, а доказујемо да је линеарно)

(16.) Слика, језгро, ранг и дефект линеарног пресликавања

деф. Нека је $L : V \to W$ линеарно пресликавање

Слика од L је $\mathrm{Im}\,L = \{ L(v) \mid v \in V \} \subseteq W$
Језгро од L је $\mathrm{Ker}\,L = \{ v \in V \mid L(v) = 0 \} \subseteq V$

Став: Нека је $L : V \to W$ линеарно пресликавање. Тада је:

1) $\mathrm{Im}\,L \leq W$
2) $\mathrm{Ker}\,L \leq V$

Доказ: 1) $u, v \in \mathrm{Im}\,L \Rightarrow \exists u', v' \quad L(u') = u, \; L(v') = v$

$$u + v = L(u') + L(v') = L(u' + v') \Rightarrow u + v \in \mathrm{Im}\,L$$
$$\alpha u = \alpha L(u') = L(\alpha u') \Rightarrow \alpha u \in \mathrm{Im}\,L$$
$$L(0) = 0 \Rightarrow 0 \in \mathrm{Im}\,L \Rightarrow \mathrm{Im}\,L \neq \emptyset$$

2) $u, v \in \mathrm{Ker}\,L \Rightarrow L(u) = 0, \; L(v) = 0$

$$L(u+v) = L(u) + L(v) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow u + v \in \mathrm{Ker}\,L$$
$$L(\alpha u) = \alpha L(u) = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha u \in \mathrm{Ker}\,L$$
$$L(0) = 0 \Rightarrow 0 \in \mathrm{Ker}\,L \Rightarrow \mathrm{Ker}\,L \neq \emptyset$$

деф. Нека је $L : V \to W$ линеарно пресликавање, а V, W су коначнодимензиони в.п.

Дефект од L је $\delta(L) = \dim \mathrm{Ker}\,L$
Ранг од L је $\rho(L) = \dim \mathrm{Im}\,L$

(доказ да ово може је у сл. питању)

↳ Изаберимо базу e за V и f за W ткд. је $[L]_{e,f}$ канонска
Нека је $\rho([L]_{e,f}) = k$ (дакле $k < n$), а нека је $f = [f_1, \ldots, f_n]$
Тада је база за $\mathrm{Im}\,L$ баш $[f_1, \ldots, f_k]$, зато што $\dim \mathrm{Im}\,L = \dim \mathcal{L}([L]_{\downarrow}) = k$ (*)

$$\Rightarrow \rho([L]_{e,f}) = \rho(L) = \dim \mathrm{Im}\,L$$

(Ранг матрице пресликавања је исто што и ранг пресликавање)
(деф. у следећем питању)

(*) Пресликавање у $\mathrm{Im}\,L$ је НА $\Rightarrow$ чува генератрисе

$\Rightarrow L(e_1), \ldots, L(e_n)$ - генератрисе за $V \Rightarrow \mathrm{Im}\,L = \mathcal{L}([L]_{e,f}\downarrow)$

$$[L]_{e,f} = \begin{array}{ccc} \Bigg[\; \big(\;\big) & \cdots & \big(\;\big) \; \Bigg] \\ L(e_1) & \cdots & L(e_n) \end{array}$$

Теорема о рангу и дефекту: Нека је $L: V \to W$ лин. пресликавање. $\rho(L) + \delta(L) = \dim V$

Доказ: Нека је $e = [e_1, \dots, e_k]$ база за $\operatorname{Ker} L$ $\delta(L) = k$

Допунимо e до базе за V : $f = [e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_n]$ $\dim V = n+k$

Дакле довољно је доказати $\rho(L) = \dim(\operatorname{Im} L) = n$, а то ћемо урадити тако што доказујемо да је $g = [L(f_1), \dots, L(f_n)]$ база за $\operatorname{Im} L$

1° Докажимо да је g генератриса за $\operatorname{Im} L$

$w \in \operatorname{Im} L \Rightarrow \exists v \in L \quad w = L(v)$

$\Rightarrow v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_n f_n$ / L лин. оп

Дакле $w = L(v) = \underbrace{\alpha_1 L(e_1) + \dots + \alpha_k L(e_k)}_{e \text{ је база за } \operatorname{Ker} L} + \beta_1 L(f_1) + \dots + \beta_n L(f_n)$

$\Rightarrow w = \beta_1 L(f_1) + \dots + \beta_n L(f_n)$

2° Докажимо да је g лин. независно. Нека је $\alpha_1 L(f_1) + \dots + \alpha_n L(f_n) = 0$

$L(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n) = 0 \Rightarrow \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n \in \operatorname{Ker} L$ (e је база за $\operatorname{Ker} L$)

$\Rightarrow \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = \beta_1 e_1 + \dots \beta_k e_k$

$\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n + (-\beta_1) e_1 + \dots + (-\beta_k) e_k = 0$, па пошто је f база за V

$\Rightarrow \beta_1 = \dots = \beta_k = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

* $a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0$

$\vdots$

$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = 0$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Овај систем можемо да запишемо $AX = 0$

Ако је f канонска база за K^m, онда пишемо $fAX = 0$

Ако посматрамо вектор $v = (x_1, \dots, x_n)$ и канонску базу e за K^n, онда је $X = v_e^T$

Решавање система $\Leftrightarrow$ одређивање свих $v \in K^n$ т.к.д. $fAv_e^T = 0$

Ако посматрамо $L: K^n \to K^m$, решавање система $\Leftrightarrow$ тражење $\operatorname{Ker} L$

По теореми о рангу и дефекту, **димензија простора решења** $\delta(L) = n - \rho(L)$

$\delta(L) = n - \rho(A)$

⑰ Промена матрице линеарног пресликавања

Теорема: Нека је $L: V \to W$ линеарно пресликавање, e и g базе за V, f и h базе за W.

Ако је $\underbrace{A = [L]_{e,f},\ B = [L]_{g,h}}_{\text{матрице лин. преслик.}}$, $\underbrace{P = [g]_e,\ Q = [h]_f}_{\text{матрице промене базе}}$, онда је $B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$

Доказ: $g = e \cdot [g]_e$, $h = f \cdot [h]_f$; $L(v) = f[L]_{e,f} V_e^T$, $L(v) = h[L]_{g,h} V_g^T$, $V_e^T = [g]_e V_g^T$

$$L(v) = f[L]_{e,f} V_e^T = h\left([h]_f^{-1} [L]_{e,f} [g]_e\right) V_g^T$$

Показано је да постоји јединствено B тк.д. $L(v) = hBV_g^T$

$$\Rightarrow \quad B = [L]_{g,h} = [h]_f^{-1} [L]_{e,f} [g]_e = Q^{-1} A P$$

* Матрице $[L]_{e,f}$ и $[L]_{g,h}$ су елем. еквив. (зато што су Q^{-1} и P инверт.) за $\forall e,f,g,h$

Зато имају исти ранг. То значи да које год базе e,f,g,h изабрали, матрица L има исти ранг.

деф. **Ранг матрице линеарног пресликавања** је ранг било које матрице пресликавања L и означава се $\rho([L]_{e,f})$

Став: За лин. пресликавање $L: V \to W$ постоје базе e и f тк.д. је $[L]_{e,f}$ у канонској форми

Доказ: $e = [e_1, \dots, e_n]$ за V
$f = [f_1, \dots, f_m]$ за W и нека је $[L]_{e,f} = A$

$$A_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^{k} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{n}$$

$k = \rho(L)$

Показано је (питање 13) да за $A_0 \sim A$ важи $A_0 = QAP$ где су P, Q инвертибилне матрице

Пошто P и Q постоје (јер $A \sim A_0$), онда постоје и тражене базе e' и f'.

То су базе такве да: $Q^{-1} = [f']_f$, $P = [e']_e$

(добијамо све као у теореми)

⑱ Алгебра линеарних пресликавања

деф. Нека су $F, G : V \to W$ линеарна пресликавања (V, W в.п. над K). Дефинишемо операције:

$$F+G(v) = F(v) + G(v)$$
$$\alpha F(v) = \alpha(F(v))$$

Лема: 1) $F+G$ је линеарно пресликавање
2) αF је линеарно пресликавање

Доказ: 1) $(F+G)(v+w) = F(v+w) + G(v+w) = (F+G)(v) + (F+G)(w)$
$(F+G)(\alpha v) = F(\alpha v) + G(\alpha v) = \alpha((F+G)(v))$

2) слично

Лема: Нека је $\mathcal{L}(V,W) = \{L : V \to W \mid L - \text{линеарно пресликавање}\}$ (скуп свих лин. пр. из V у W)

Тада је $\mathcal{L}(V,W)$ векторски простор над K у односу на претх. дефинисане операције

Доказ: Довољно је доказати 8 особина из деф векторског простора

1) $[(A+B)+C](v) = (A+B)(v) + C(v) = A(v) + B(v) + C(v) = A(v) + (B+C)(v) = [A+(B+C)](v)$

остало се ради слично. За нулу биремо пресликавање $O(v) = \vec{0}$

Лема: Ако су $G : U \to W$, $F : V \to W$ лин. пресл. онда је и $F \circ G : U \to W$ линеарно пресликавање

Доказ: $(F \circ G)(u+v) = F(G(u) + G(v)) = F(G(u)) + F(G(v)) = (F \circ G)(u) + (F \circ G)(v)$

$(F \circ G)(\alpha u) = F(\alpha G(u)) = \alpha(F(G(u))) = \alpha(F \circ G)(u)$

Теорема: 1) $(L_1 \circ L_2) \circ L_3 = L_1 \circ (L_2 \circ L_3)$
2) $(\alpha L_1) \circ (\beta L_2) = (\alpha\beta)(L_1 \circ L_2)$
3) $L_1 \circ (L_2 + L_3) = (L_1 \circ L_2) + (L_1 \circ L_3)$
4) $(L_1 + L_2) \circ L_3 = (L_1 \circ L_3) + (L_2 \circ L_3)$

Доказ: 1) важи за сва пресликавања, па и линеарна

2) $(\alpha L_1) \circ (\beta L_2)$ је дефинисано акко је $(\alpha\beta)(L_1 \circ L_2)$ дефинисано

$((\alpha L_1) \circ (\beta L_2))(v) = (\alpha L_1)((\beta L_2)(v)) = \beta(\alpha L_1)(L_2(v)) = (\alpha\beta)(L_1 \circ L_2)(v)$

3) слично као 2)

4) слично као 2)

Теорема: Нека су g,e,f редом базе за U,V,W над K и $F: U \to V$, $G, H: V \to W$. Тада је:

1) $[G+H]_{e,f} = [G]_{e,f} + [H]_{e,f}$
2) $[\alpha G]_{e,f} = \alpha [G]_{e,f}$
3) $[G \circ F]_{g,f} = [G]_{e,f} \cdot [F]_{g,e}$

Доказ: **1)** $(G+H)(v) = f\,[G+H]_{e,f}\,V_e^T$ — јединствено

$(G+H)(v) = G(v) + H(v) = f\,[G]_{e,f}V_e^T + f[H]_{e,f}V_e^T = f\big([G]_{e,f} + [H]_{e,f}\big)V_e^T$

2) слично

$\left(\begin{array}{l} v = e \cdot V_e^T \\ e\underbrace{[F]_{g,e}U_g^T} = e \cdot V_e^T \end{array}\right)$

3) $(G \circ F)(u) = f[G \circ F]_{g,f}U_g^T$

$(G \circ F)(u) = G(F(u)) = G(\overbrace{e\,[F]_{g,e}U_g^T}^{v}) = f \cdot [G]_{e,f}V_e^T = f \cdot \big([G]_{e,f}[F]_{g,e}\big)U_g^T$

деф. Ако је $L: V \to W$ изоморфизам в.п., онда су V и W **изоморфни**, у ознаци $V \cong W$

Теорема: $\dim V = n \Rightarrow V \cong K^n$

Доказ: Нека је $e = [e_1, \dots, e_n]$ база за V. Тада је $\forall v \in V$, $v = e \cdot V_e^T$

Дефинишимо пресл. $L(v) = V_e$. Јасно је да $L: V \to K^n$.

* Докажимо да је L линеарно пресликавање

$L(u+v) = u_e + v_e = L(u) + L(v)$
$L(\alpha u) = (\alpha u)_e = \alpha \cdot u_e = \alpha L(u)$

- Очигледно, L је бијекција (1-1, НА), па је L изоморфизам век. пр.

Теорема: Нека су V, W в.п. над K. $\dim V = n$, $\dim W = m$, а e, f су базе за V, W.

Тада је пресликавање $\Phi: \mathcal{L}(V,W) \to M_{m,n}(K)$, $\Phi(L) = [L]_{e,f}$ изоморфизам в.п.

Доказ: * Докажимо да је Φ линеарно пресликавање

$\Phi(G+H) = [G+H]_{e,f} = [G]_{e,f} + [H]_{e,f}$
$\Phi(\alpha G) = [\alpha G]_{e,f} = \alpha [G]_{e,f}$

- Φ је 1-1 зато што је већ доказано да је $[L]_{e,f}$ јединствена матрица пресл. за L
- Φ је НА зато што је већ доказано да је сваком матрицом одређено лин. пресл.

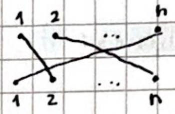
⑲ Дефиниција детерминанте ; $\det(A) = \det(A^T)$

деф. Са $[n]$ означавамо скуп првих n природних бројева $\{1, 2, \dots, n\}$

деф. **Пермутација** непразног скупа X је свака бијекција $\pi : X \to X$

Скуп пермутација скупа $[n]$ означава се са S_n. Јасно, $|S_n| = n!$

Пермутацију $\pi \in S_n$ записујемо $\pi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & & \pi(n) \end{pmatrix}$ или



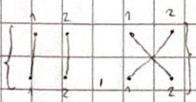
деф. **Знак пермутације** $\pi \in S_n$ је $\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^k$, где је k **број инверзија** за π,

тј. број парова (i, j), $1 \leq i \leq j \leq n$, $\pi(i) > \pi(j)$. (Ако се дужи секу, пар је инверзија)

деф. Нека је $A \in M_n(K)$. Тада је **детерминанта** матрице A једнака

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) [A]_{1,\pi(1)} \dots [A]_{n,\pi(n)}$$

примери: $n = 2$

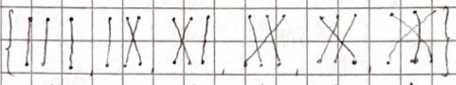
$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $S_2 = \{$  $\}$

$\mathrm{sgn}(\pi_1) = 1$

$\mathrm{sgn}(\pi_2) = -1$

$\det A_2 = 1 \cdot a_{11} a_{22} + (-1) \cdot a_{12} a_{22} \Rightarrow \det A_2 = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

$n = 3$:

$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $S_3 = \{$  $\}$

sgn: 1, −1, −1, 1, 1, −1

$$\det A_3 = 1 \cdot a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

Лема: $\mathrm{sgn}(\pi) = \mathrm{sgn}(\pi^{-1})$

Доказ: Графички приказ π^{-1} је исти као π (само се обрну редови), па је број пресека исти

Теорема: $\det(A) = \det(A^T)$

Доказ:

$$\det(A^T) = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) [A^T]_{1,\pi(1)} \dots [A^T]_{n,\pi(n)}$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) [A]_{\pi(1),1} \dots [A]_{\pi(n),n}$$

$$= \sum_{\pi^{-1} \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi^{-1}) [A]_{1,\pi^{-1}(1)} \dots [A]_{n,\pi^{-1}(n)} = \det(A)$$

⑳ Особине детерминанте

Лема: Нека је пермутација π' добијена од π заменом вредности за i и j

Тада је $\mathrm{sgn}(\pi) = -\,\mathrm{sgn}(\pi')$

Доказ:

(тип дужи)

почетак	крај	промена тачака пресека
1	4	и даље 0 пресека
1	5	и даље 1 пресек
1	6	и даље 2 пресека
2	4	и даље 1 пресек
2	5	пре 2, после 0 пресека
2	6	и даље 1 пресек
3	4	и даље 2 пресека
3	5	и даље 1 пресек
3	6	и даље 0 пресека

За дужи са слике: пре 1 пресек, после 0 пресека

Дакле, укупно постоји непарно мање/више пресека. Зато је $\mathrm{sgn}(\pi) = -\,\mathrm{sgn}(\pi')$

Теорема: Нека је B матрица која се добија од A **заменом** врсте/колоне.

Тада је $\det B = -\det A$

Доказ: Довољно је доказати за редове $(\det A = \det A^T)$

Заменимо i, j врсту

$$\det(B) = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi)\,[A]_{1,\pi(1)} \dots [A]_{n,\pi(n)}$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi)\,[A]_{1,\pi(1)} \dots [A]_{j,\pi(i)} \dots [A]_{i,\pi(j)} \dots [A]_{n,\pi(n)}$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi)\,[A]_{1,\pi'(1)} \dots [A]_{n,\pi'(n)} = -\sum_{\pi' \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi')\,[A]_{1,\pi'(1)} \dots [A]_{n,\pi'(n)}$$

$$= -\det(A)$$

Теорема: $$\det \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & \dots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{B} = \det \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} + \det \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a'_{i1} & \dots & a'_{in} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A'}$$

Доказ: $$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, [B]_{1,\pi(1)} \dots [B]_{n,\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \dots (a_{i\pi(i)} + a'_{i\pi(i)}) \dots a_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1\pi} \dots a_{i\pi(i)} \dots a_{n\pi(n)} + \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1\pi} \dots a'_{i\pi(i)} \dots a_{n\pi(n)} \\ &= \det A + \det A' \end{aligned}$$

Теорема: $$\det \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ K\cdot a_{i1} & \dots & K\cdot a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{B} = K \cdot \det \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A}$$

Доказ: $$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \dots (K a_{i\pi(i)}) \dots a_{n\pi(n)} \\ &= K \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \dots a_{i\pi(i)} \dots a_{n\pi(n)} = K \cdot \det A \end{aligned}$$

Лема: Ако $A \in M_n(K)$ има **две исте врсте**, тада важи $\det A = 0$

Доказ: Нека су матрици A једнаке i-те и j-те врста
Ако јој заменимо те две реда, матрица се не мења,
али се мења знак детерминанте $\Rightarrow \det A = -\det A \Rightarrow \det A = 0$

Теорема: $$\det \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1}+Ka_{j1} & \dots & a_{in}+Ka_{jn} \\ & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{B} = \det \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A}$$

Доказ: Користећи претходне две теореме и лему:

$$\det B = \det A + K \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & & a_{jn} \\ a_{j1} & & a_{jn} \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix} = \det A + K \cdot 0 = \det A$$

Напомена: Сва тврђења важе и за операције над **колонама**

Доказ: $\det A = \det A^T$

деф. Матрица је **троугаона** уколико је горње-троугаона или доње-троугаона

Теорема: Ако је A **троугаона** матрица, онда је $\det(A) = [A]_{1,1} \cdot [A]_{2,2} \cdot \ldots \cdot [A]_{n,n}$

Доказ: $$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \underbrace{[A]_{1,\pi(1)} \ldots [A]_{n,\pi(n)}}_{P}$$

Нека је A горње троугаона

Да производ P не би био 0 из последњег реда бирамо $[A]_{n,n}$, а из претпоследњег $[A]_{n-1,n-1}$, пошто су $[A]_{n-1,n}$ и $[A]_{n,n}$ у истој колони итд.

Добијамо да је у целој суми једини сабирак различит од 0 управо $[A]_{1,1} \ldots [A]_{n,n}$. Том сабирку одговара пермутација $\pi(n)=n$ (који нема инверзије)

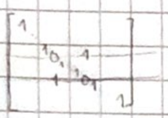
$\Rightarrow \det(A) = [A]_{1,1} \ldots [A]_{n,n}$

За доње троугаону доказ је аналоган, само крећемо од врха

㉑ Бине-Кошијева теорема

- Тражимо детерминанте **матрица елементарних операција**

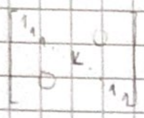
1)



Матрица операције замене врсти се добија тако што се замене i-та и j-та врста од E_n (која је троугаона)

$\Rightarrow \det P_{i,j} = -\det E \Rightarrow$ **$\det P_{i,j} = -1$**

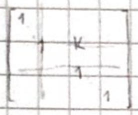
2)



Матрица множења врсте скаларом k се добија тако што се на место $[E_n]_{i,i}$ уместо 1 упише k

$\Rightarrow \det P_i^k = k \cdot \det E \Rightarrow$ **$\det P_i^k = k$**

3)



Матрица оп. додавања једне врсте помножене са k другој се добија тако што на место $[E_n]_{i,j}$ уместо 0 упишемо k

$\Rightarrow \det P_{i,j}^k = \det E \Rightarrow$ **$\det P_{i,j}^k = 1$**
(и даље је троугаона)

Лема: Нека је на матрици A примењена операција на врстама/колонама којој одговара матрица P и добијена је матрица $B = P \cdot A \,/\, B = A \cdot P$. Тада је $\det B = \det P \cdot \det A$

Доказ: Провером за свако P и користећи доказане теореме уверавамо се у тачност.

Лема: Матрица A је **инвертибилна** $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Доказ: A је инвертибилна $\Leftrightarrow A_0 = E \Leftrightarrow \det(A_0) = 1$

$\det(A_0) = \det(P_k \dots P_1 A Q_1 \dots Q_\ell) = \det P_k \dots \det P_1 \cdot \det A \cdot \det Q_1 \cdot \dots \cdot \det Q_\ell$

Пошто $\forall i \; P_i, Q_i \in \{-1, k, 1\}$, па $\det(P_k \dots P_1 A Q_1 \dots Q_\ell) \neq 0 \Leftrightarrow \det A \neq 0$

Теорема Бине-Коши: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Доказ: 1° $\det A \neq 0$

Тада је A инвертибилна $\Leftrightarrow$ A је производ матрица елем. операција

$\det(AB) = \det(P_k \ldots P_1 B) \overset{\dots}{=} \det P_k \ldots \det P_1 \det B \overset{\dots}{=} \det(P_k \ldots P_1) \det B = \det A \cdot \det B$

2° $\det A = 0$

Довољно је доказати $\det(AB) = 0$, тј. довољно је доказати да AB није инвертибил

тј. да су колоне AB лин. зав.

Дакле, доказујемо $\dim \mathcal{L}(\{AB_{\downarrow 1} \ldots , AB_{\downarrow n}\}) < n$

$(AB)_{\downarrow i} = A \cdot B_{\downarrow i} \overset{T}{=} b_{1i} A_{\downarrow 1} + \ldots + b_{ni} A_{\downarrow n} \in \mathcal{L}(\{A_{\downarrow 1}, \ldots , A_{\downarrow n}\})$

$\Rightarrow \dim \mathcal{L}(\{(AB)_{\downarrow 1}, \ldots , (AB)_{\downarrow n}\}) \leq \dim \mathcal{L}(\{A_{\downarrow 1}, \ldots , A_{\downarrow n}\}) < n$ (A није инвертибилн

$\Rightarrow$ AB није инвертибилна

㉒ Лапласов развој детерминанте

деф. За $A \in M_n(K)$ матрица **M_{ij}** $\in M_{n-1}(K)$ је матрица која се добија **брисањем** i-те врсте и j-те колоне

деф. **Минор** матрице $A \in M_n(K)$ је **m_{ij}** $= \det(M_{ij})$

деф. **Кофактор** матрице $A \in M_n(K)$ је **A_{ij}** $= (-1)^{i+j} m_{ij}$

Лапласов развој детерминанте: Нека је $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, $1 \leq i, j \leq n$. Тада је:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$
– развој по i-тој врсти детерминанте

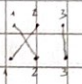
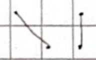
$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$
– развој по j-тој колони детерминанте

Доказ: Довољно је доказати за врсте, јер је тада тачно и за колоне ($\det A^T = \det A$)

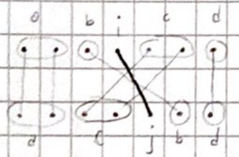
$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot a_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot \underline{a_{i\pi(i)}} \cdot \ldots \cdot a_{n\pi(n)}$$

Нека је $\pi(i) = j$. Тада су сви остали чланови производа исти они који учествују у производу $\det M_{ij}$. Преостаје да докажемо да је знак одговарајући

Тачније, доказујемо $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^{i+j} \operatorname{sgn} \pi'$, где је π' „одговарајућа" пермутација за M_{ij}

нпр. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, M_{21} $(i=2, j=1)$, π:  , π': 

(очигледно важи $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^{i+j} \operatorname{sgn} \pi'$



Када из π избацимо дуж ij, уз „шифтовање" добијамо π'

Дакле $\operatorname{sgn} \pi = \operatorname{sgn} \pi' \cdot (-1)^k$, где је k број пресека осталих дужи са ij

(зато што брисањем i,j бришемо k пресека)

Постоје 4 типа дужи:

$a \to 0$ пресека
$b \to b$ пресека
$c \to c$ пресека
$d \to 0$ пресека

$\Big\}$ $k = 0 + b + c + 0 = b + c$

Јасно, $a + b = i - 1$, $a + c = j - 1$, дакле $b + c = i + j - 2 - 2a$

То значи $(-1)^k = (-1)^{b+c} = (-1)^{i+j\underset{\text{парн}}{-2(a+1)}} = (-1)^{i+j}$

㉓ Адјунгована матрица и инверз матрице

деф. **Адјунгована матрица** за $A \in M_n(K)$ је матрица **$\text{adj}\,A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$**

(Дакле, то је транспонована матрица кофактора)

Теорема Лапласа: $\text{adj}(A) \cdot A = A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot E_n$

Доказ: Доказујемо $\text{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot E_n$, друга једнакост се доказује аналогно

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix} \\ \text{adj}(A) \cdot A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & & A_{nn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \det A & & \\ & B & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$i = j$: $[B]_{i,i} = a_{1i} A_{1i} + \dots + a_{ni} A_{ni} = \det A$ (развој i-те колоне)

$i \neq j$ $[B]_{i,j} = a_{1j} A_{1i} + \dots + a_{nj} A_{ni}$

а то је исто што и развој по i-toj колони од $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = C$

Та матрица има две исте колоне, дакле $[B]_{i,j} = \det C = 0$

Последица: Ако је A инвертибилна, тада је $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$

Доказ: A инвертибилна $\Rightarrow \det A \neq 0$, па је то директна последица претходног

Последица: A је инвертибилна $\Leftrightarrow$ $\text{adj}(A)$ је инвертибилна

Доказ: $(\Rightarrow)$ A инвертибилна $\Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \text{adj}^{-1}(A) = \frac{1}{\det A} \cdot A$

$(\Leftarrow)$ ппс. A није инвертибилна $\Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow \text{adj}\,A \cdot A = 0 \quad / \text{adj}^{-1}(A)$

$E \cdot A = 0$

Дакле $A = 0$, па је онда и $\text{adj}\,A = 0$ ↯

Последица: $\det(\text{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}$

Доказ: $\text{adj}(A) \cdot A = \det A \cdot E_n \Rightarrow \det(\text{adj}(A) \cdot A) = \det(\text{adj}(A)) \cdot \det A$

Такође $\det A \cdot E_n$ је троугаона матрица, па $\det(\det(A) \cdot E_n) = (\det A)^n$

1° $\det A \neq 0$, поделимо

2° $\det A = 0 \Rightarrow$ A није инв $\Rightarrow \text{adj}\,A$ није инв

Дакле $\det(\text{adj}(A)) = 0 = (\det A)^{n-1}$

㉔ Крамерово правило

деф. Нека је $A \cdot X = B$ сис. лин једначина, $\begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

Уводимо ознаке $\Delta = \det A$

i-та колона

$\Delta_i = \det A_i$, где је $A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Крамерово правило: **1)** Систем лин. једн има јединствено решење акко $\Delta \neq 0$

У том случају је решење $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $1 \leq i \leq n$

2) Ако је $\Delta = 0$ и сис. лин. једн. има решење, онда је $\Delta_i = 0$ $(\forall i)$

Доказ: **1)** $(\Rightarrow)$ Пошто је решење јединствено, одговарајући хомогени систем има тачно једно решење $(x_i = 0)$, па је дим. простора решења 0.

Показали смо да је дим. простора реш исто што и $n - \rho(A)$, (питање 16)
па је $\rho(A) = n$, па је A инвертибилна, па је зато $\Delta \neq 0$

$(\Leftarrow)$ Покажимо да је $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ једино решење система лин. једн

$AX = B \quad / \mathrm{adj}(A)$

$\mathrm{adj}(A) \cdot A \cdot X = \mathrm{adj}(A) \cdot B$

$\det(A) \cdot E_n \cdot X = \mathrm{adj}(A) \cdot B \overset{\Delta \neq 0}{\Longrightarrow} X = \dfrac{1}{\Delta} \mathrm{adj}(A) \cdot B = \dfrac{1}{\Delta} \cdot C$

$\begin{bmatrix} \mathrm{adj}\, A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix}$

$C_i = b_1 A_{1i} + \dots + b_n A_{ni}$ → развој по i-тој колони A_i

$\Rightarrow C_i = \det A_i = \Delta_i$

Дакле $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$

2) Истим поступком као у $(\Leftarrow)$: $\Delta X = \mathrm{adj}(A) \cdot B$

Пошто је $\Delta = 0$: $\mathrm{adj}(A) \cdot B = 0$, тј. $C = 0$

$\Rightarrow \Delta_i = 0$, за $1 \leq i \leq n$

Закључак: 1° $\Delta \neq 0$: јединствено решење

2° $\Delta = 0$

- 2°_1 $\Delta_i \neq 0$ (за неко i) : нема решење
- 2°_2 $\Delta_i = 0$ (за све i) : нема решења или има више решења

(нпр. у $\mathbb{R}$ има бесконачно, али нпр. у $\mathbb{Z}_5$ их има коначно)

㉕ Линеарни оператори и сличност матрица

деф. **Линеарни оператор** је свако линеарно пресликавање $L : V \to V$

За базу e век. пр. V, уместо $[L]_{e,e}$ пишемо $[L]_e$

Уместо $\mathcal{L}(V,V)$ пишемо $\mathcal{L}(V)$, али не смемо то мешати са линеарним омотачем

деф. $L^m : V \to V$, $L^m = \overbrace{L \circ L \circ .. \circ L}^{m}$

$id_V : V \to V$, $id_V(v) = v$, $\forall v \in V$

деф. Нека је V в.п. над K, $p(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$ полином из $K[x]$ и нека је $L \in \mathcal{L}(V)$

Тада је $p(L) : V \to V$, $p(L) = a_m L^m + .. + a_1 L + a_0 id_V$ ($p(L)$ је оператор)

Аналогно се за $A \in M_n(K)$ дефинише $p(A) = a_m A^m + \ldots + a_1 A + a_0 E_n$ ($p(A)$ је матрица)

Лема: Ако за $p, q, r \in K[x]$ важи $p(x) = q(x) \cdot r(x)$ онда за све $L \in \mathcal{L}(V)$ и $A \in M_n(K)$ је:

1) $p(L) = q(L) \circ r(L) = r(L) \circ q(L)$
2) $p(A) = q(A) \cdot r(A) = r(A) \cdot q(A)$

Доказ: 1) Пошто су сви сабирци у $p(L)$ заправо лин. оп., доказ се изводи користећи већ доказана својства $(L+G) \circ H = L \circ H + G \circ H$ и $L + G = G + L$ (из питања 18)

2) Користимо $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ и $A + B = B + A$ (из питања 9)

деф. Матрице $A, B \in M_n(K)$ су **сличне** ако постоји инвертибилна матрица P ткд. $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$
и пишемо $A \sim_s B$
(очигледно, $A \sim_s B \Rightarrow A \sim B$)

Лема: $\sim_s$ је релација еквиваленције

Доказ: (Р) $P = E$

(С) Постоји Q, ткд. $A = Q^{-1} B Q$, а то је $Q = P^{-1}$

(Т) $B = P^{-1} A P$
$C = Q^{-1} B Q = Q^{-1} P^{-1} A P Q = (PQ)^{-1} A PQ$

Лема: За лин оператор $L : V \to V$ и базе e, f за V важи $[L]_e \sim_s [L]_f$

Доказ: Нека је $P = [f]_e$ $(f = e[f]_e$

$$[L]_f = \underbrace{[f]_e^{-1} [L]_e [f]_e}_{\text{доказано у питању 17}} = P^{-1} [L]_e P$$

Теорема: Нека су $A, B \in M_n(K)$ сличне. Тада:

1) $\det A = \det B$

2) $\forall p \in K[x] \quad p(A) \sim_s p(B)$

Доказ: **1)** $\det B = \det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \det A \det P = \det(P^{-1}P) \det A = \det A$

2) $p(B) = a_m B^m + \dots + a_1 B + a_0 E_n = a_m (P^{-1}AP)^m + \dots + a_1 (P^{-1}AP) + a_0 E_n$

$= a_m (P^{-1}APP^{-1}AP \dots P^{-1}AP) + \dots + a_1 (P^{-1}AP) + a_0 E_n = a_m (P^{-1}A^m P) + \dots + a_1 (P^{-1}AP) + a_0 E_n$

$= P^{-1}(a_m A^m + \dots + a_1 A + a_0 E_n) P = P^{-1} p(A) P$

㉖ Сопствене вредности и сопствени вектори линеарних оператора

деф. За матрицу $A \in M_n(K)$, ненула колона $X \in K^n$ је **сопствени вектор** који одговара **сопственој вредности** $\lambda \in K$ ако је $AX = \lambda X$

За лин. оп. $L \in \mathcal{L}(V)$, ненула вектор $v \in V$ је **сопствени вектор** који одговара **сопственој вредности** $\lambda \in K$ ако је $L(v) = \lambda \cdot v$

Теорема: $\lambda \in K$ је сопствена вредност за L акко је λ сопствена вредност за $[L]_e$ (за сваку базу e)

Доказ: $(\Rightarrow)$ $L(v) = \lambda v$ за неко $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$

$$e \cdot [L]_e v_e^T = \lambda v = \lambda e v_e^T = e(\lambda v_e^T) \overset{e\text{-лин. нез}}{\Longrightarrow} [L]_e v_e^T = \lambda v_e^T$$

Пошто је $v_e^T \neq 0 \Rightarrow \lambda$ је сопствена вредност за $[L]_e$

$(\Leftarrow)$ За неку колону X важи $[L]_e \cdot X = \lambda X \quad / e\cdot$

$$e \cdot [L]_e \cdot X = e \lambda X = \lambda (eX)$$

Означимо са $v = e \cdot X$, тада је $X = v_e^T$. $e[L]_e v_e^T = \lambda \cdot v \Rightarrow L(v) = \lambda v$

Теорема: Сличне матрице имају исте сопствене вредности

Доказ: $B = P^{-1} A P$

Пошто је $\sim_s$ симетрична, довољно је доказати да ако је λ сопствена вредност за A да је онда λ и сопствена вредност за B

$$AX = \lambda X \quad / P^{-1}\cdot$$
$$P^{-1} A X = P^{-1} \lambda X = \lambda (P^{-1} X)$$
$$\underbrace{P^{-1} A P}\underbrace{P^{-1} X} = \lambda \underbrace{(P^{-1} X)} \Rightarrow BY = \lambda Y \quad (X \neq 0 \Rightarrow Y \neq 0)$$

деф. **Карактеристични полином матрице** $A \in M_n(K)$ је $\varphi_A(x) = \det(A - xE)$

Теорема: $A \sim_s B \Rightarrow \varphi_A(x) = \varphi_B(x)$

Доказ: $B = P^{-1} A P$

$$\varphi_B = \det(B - xE) = \det(P^{-1}AP - xP^{-1}P) = \det(P^{-1}(A - xE)P) = \det P^{-1} \det(A - xE) \det P = \varphi_A(x)$$

деф. **Карактеристични полином линеарног оператора** $L \in \mathcal{L}(V)$ је карактеристични полином за $[L]_e$ за неку базу e (пошто су све $[L]_e \sim_s [L]_f$, по претх. теореми је свеједно коју базу биремо)

Теорема: $\lambda \in K$ је **сопствена вредност** за L $\iff$ λ је **нула карактеристичног полинома**

Доказ: Доказујемо: λ је сопс. вр. $[L]_e = A \overset{?}{\iff} \varphi_A(\lambda) = 0$

$AX = \lambda X \iff AX - \lambda X = 0$. Пошто је $X \neq 0$, дим. решења није 0

$\rho(A - \lambda E) < n \iff A - \lambda E$ није инвертибилна $\iff \det(A - \lambda E) = \varphi_A(\lambda) = 0$

деф. **Траг матрице** $A \in M_n(K)$ је збир елемената на главној дијагонали

$$\mathbf{tr(A)} = [A]_{1,1} + \dots + [A]_{n,n} = \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,i}$$

пр.

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \varphi_{A_2}(x) = \det\begin{bmatrix} a_{11}-x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-x \end{bmatrix} = (a_{11}-x)(a_{22}-x) - a_{12}a_{22} = x^2 - \overbrace{(a_{11}+a_{22})}^{\operatorname{tr} A}x + \overbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{2}}^{\det A}$$

Теорема: Нека је $A \in M_n(A)$. Тада важи:

1) Степен полинома $\varphi_A(x)$ је n
2) Коефицијент уз x^n је $(-1)^n$
3) Коефицијент уз x^{n-1} је $(-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$
4) Слободни члан је $\det A$

Доказ: **1)** Сваки сабирак у $\det(A - xE)$ је производ n чинилаца степена највише 1 (по x)

2) Једини сабирак који садржи x^n је онај из идентичке пермутације ($\operatorname{sgn} \mathrm{id} = 1$), т.ј. када изаберемо само елементе са главне дијагонале

То је сабирак $t = (a_{11}-x)\dots(a_{nn}-x)$, па је зато коеф. уз x^n управо $1 \cdot (-1)^n$

3) Једини сабирак који садржи x^{n-1} је опет t (изаберемо $n-1$ са дијагонале, морамо и n-ти)

Дакле, коеф. уз x^{n-1} је $a_{11}(-1)^{n-1} + \dots + a_{nn}(-1)^{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$

4) Слободни члан је $\varphi_A(0) = \det(A \cdot 0 \cdot E) = \det A$

Последица: Сличне матрице имају исти траг (исти коеф. уз x^{n-1})

деф. Нека је $L \in \mathcal{L}(V)$ линеарни оператор и λ његова сопствена вредност.
Тада је **сопствени потпростор** који одговара λ скуп $V_\lambda = \{v \in V \mid L(v) = \lambda v\}$ (скуп сопс. век. за λ)

НАПОМЕНА $L(v) = \lambda v \iff L(v) - \lambda v = 0 \iff (L - \lambda \mathrm{id}_V)(v) = 0 \iff V_\lambda = \mathrm{Ker}(L - \lambda \mathrm{id}_V)$

Пошто је језгро потпростор, зато је $V_\lambda \leq V$

Теорема: Ако су $v_1, \dots, v_k$ сопс. вектори који одговарају сопс. вредностима $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ лин. оп. $L \in \mathcal{L}(V)$

онда је $\{v_1, \dots, v_k\}$ линеарно независан

Доказ: Важи $L(v_i) = \lambda_i v_i$, $1 \leq i \leq k$. Доказ индукцијом по k

(БИ) $k = 1$ - тачно, јер $v_i \neq 0$
(ИК) $k-1 \to k$

Нека је $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ $\quad \cdot(-\lambda_k)$

$$L(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = L(0)$$
$$\alpha_1 L(v_1) + \dots + \alpha_k L(v_k) = 0$$
$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k = 0 \quad (1) \qquad -\alpha_1 \lambda_k v_1 - \dots - \alpha_k \lambda_k v_k = 0 \quad (2)$$

$$(1)+(2) \quad \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \dots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} = 0$$

По (ИХ) $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ је лин. нез. па $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) = \dots = \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0$
Пошто $\lambda_i - \lambda_k \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$

Када то уврстимо у почетну једначину $\Rightarrow \alpha_k = 0$ (јер је $v_k \neq 0$)

деф. **Геометријска вишеструкост сопствене вредности** λ је $\dim V_\lambda$

Алгебарска вишеструкост сопствене вредности λ је њена вишеструкост као нула P_L

(27.) Минимални полином. Кејли-Хамилтонова теорема.

деф. **Минимални полином матрице** $A \in M_n(K)$ је полином $\mu_A(x)$ најмањег степена ткд

1) $\mu_A(A) = 0$
2) μ_A је моничан (водећи коеф. му је 1)

\+ Минимални полином увек **постоји**: Нека је $L \in \mathcal{L}(V)$, $p \in K[x]$ $p(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$

Ако је e база од V, тада је $[p(L)]_e$ једнака $a_m [L]_e^m + \dots + a_1 [L]_e + a_0 E_n$, тј. $[p(L)]_e = p([L]_e)$

Пошто је $\dim(M_n(K)) = n^2$ онда је скуп $\{E_n, [L]_e, \dots, [L]_e^{n^2}\}$ лин. зависан (има их n^2+1)
Самим тим, постоје $a_0, \dots, a_{n^2} \in K$ који нису сви нуле ткд. $a_0 E_n + \dots + a_{n^2} [L]_e^{n^2} = 0$

Дакле постоји ненула полином ткд. $q([L]_e) = [q(L)]_e = 0$

Теорема: **1)** Свака матрица $A \in M_n(K)$ има **јединствен** минимални полином
2) $A \sim B \Rightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x)$

Доказ: **1)** Већ смо доказали да постоји, па докажимо јединственост
Нека су $\mu_A(x)$ и $\tilde{\mu}_A(x)$ мин. пол. за A

$\mu_A = x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $\tilde{\mu}_A = x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$

Важи и $\mu_A(A) = \tilde{\mu}_A(A) = 0$
Њихова разлика $d(A) = \mu_A(A) - \tilde{\mu}_A(A) = 0$ и она је степена мањег од m

Уколико d није нула полином, „дељењем" водећим коеф. добили бисмо „мањи" мин. пол
Дакле $d(x) = 0 \Rightarrow \mu_A(x) = \tilde{\mu}_A(x)$

2) $B = P^{-1} A P$, $\mu_A(x) = x^k + \dots + a_1 x + a_0$ $\mu_A(A) = 0$
$\mu_B(x) = x^l + \dots + b_1 x + b_0$ $\mu_B(B) = 0$

$\mu_A(B) = (P^{-1} A P)^k + a_{k-1} P^{-1} A^{k-1} P + \dots + a_0 P^{-1} E P = P^{-1} \mu_A(A) P = 0 \Rightarrow l \leq k$
Слично, $\mu_B(A) = 0 \Rightarrow k \leq l$

$\Rightarrow k = l$, а пошто је мин. пол. јединствен $\Rightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x)$

деф. **Минимални полином линеарног оператора** $L \in \mathcal{L}(V)$ је полином $\mu_L(x)$ најмањег степена ткд

1) $\mu_L(L) = 0$
2) μ_L је моничан

последица: Минимални полином лин. оп. увек постоји и јединствен је

Лема 1: $p_A(A) = 0$

Доказ: $p_A(x) = \det(A - xE_n)$

Важи и $\det(A - xE_n) \cdot E_n = (A - xE_n)\, adj(A - xE)$

Пошто је $adj(A-xE)$ матрица која као елементе има полиноме, онда ову матрицу можемо записати у облику $x^k C_k + \dots + xC_1 + C_0$ $\quad (C_i \in M_n(K))$

Дакле: $p_A(x) E_n = (A - xE_n)(x^k C_k + \dots + xC_1 + C_0)$

$$p_A(A) \cdot E_n = (A - AE_n)(A^k C_k + \dots + AC_1 + C_0) = 0 \Rightarrow p_A(A) = 0$$

Лема 2: $p(A) = 0 \Rightarrow \mu_A | p$

Доказ: $p = \mu_A \cdot q + r \qquad (\deg r \le \deg \mu_A)$

$p(A) = \mu_A(A) \cdot q(A) + r(A) \Rightarrow r(A) = 0$ - минимални полином мањег степена

$\Rightarrow r(x) = 0 \Rightarrow \mu_A | p$

Лема 3: Нека је λ сопств. вр. $A \in M_n(K)$. $p(A) = 0 \Rightarrow p(\lambda) = 0$

Доказ: $AX = \lambda X \quad$ (за неко $X \in K^n \setminus \{0\}$)

Нека је $p(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$, тада је $p(A) = a_m A^m + \dots + a_1 A + a_0 E$

$A^2 X = AAX = A\lambda X = \lambda AX = \lambda^2 X$. Индуктивно $A^k X = \lambda^k X$

$0 = p(A) \cdot X = a_m A^m X + \dots + a_1 AX + a_0 X = a_m \lambda^m X + \dots + a_1 \lambda X + a_0 X = p(\lambda) X$

Пошто $X \neq 0$, онда је $p(\lambda) = 0$

Теорема Кејли-Хамилтон: Нека је V в.п. над K и $L \in \mathcal{L}(V)$ линеарни оператор

Ако је $p_L(x) = c(x - \lambda_1)^{a_1} \dots (x - \lambda_k)^{a_k}$ $\quad (c, \lambda_i \in K$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ за $i \neq j$ и $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N})$

тада је $\mu_L(x) = (x - \lambda_1)^{b_1} \dots (x - \lambda_k)^{b_k}$ $\quad (1 \le b_i \le a_i$, за $1 \le i \le k)$

Доказ: $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ су (све) сопствене вредности L (ако је λ нула p_L, онда је то сопс. вр.

$p_L(L) = 0$ (по леми 1), па зато μ_L / p_L (по леми 2)

Дакле $\mu_L(x) = (x - \lambda_1)^{b_1} \dots (x - \lambda_k)^{b_k}$, где $0 \le b_i \le a_i$

Пошто су λ_i сопс. вредности за L и $\mu_L(L) = 0 \overset{Л3}{\Longrightarrow} \mu_L(\lambda_i) = 0$

По Безуовој теореми $x - \lambda_i / \mu_L \Rightarrow 1 \le b_i \le a_i$

НАПОМЕНА: Ако је $K = \mathbb{C}$, онда по осн. теореми алгебре свако p_L може да се растави, па увек важи ова теорема

Лема: $p(A) = 0 \Rightarrow$ постоји матрица Q са елем. из $K[x]$ ткд $p(x) \cdot E = (A - xE)\, Q$

Доказ: Нека је $p(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$, тада је $p(A) = a_m A^m + \ldots + a_1 A + a_0 E$

Тада је и $p(x) \cdot E = a_m x^m E + \ldots + a_1 x E + a_0 E$

$$-p(x) \cdot E = \underbrace{p(A)}_{0} - p(x) \cdot E = a_m (A^m - x^m E) + \ldots + a_1 (A - xE) = (A - xE) \cdot R$$

$$A^m - x^m E = (A - xE)(A^{m-1} + A^{m-2}(xE) + \ldots + A(xE)^{m-2} + (xE)^{m-1})$$

па је тражено Q заправо $-R$

Теорема: Нека је V век. пр. над K и $L \in \mathcal{L}(V)$, и нека је $\dim V = n$. Тада је:

1) $\mu_L \mid \varphi_L$
2) $\varphi_L \mid \mu_L^n$

Доказ: 1) Доказано у оквиру Кејли - Хамилтона

2) $\mu_L(x) \cdot E = (A - xE)\, Q \quad / \det \qquad (A = [L]_e)$

$$\underbrace{\det(\mu_L(x) \cdot E)}_{\mu_L^n(x)} = \det((A - xE)\, Q) = \det(A - xE) \cdot \det Q$$

$$\mu_L^n(x) = \varphi_L(x) \cdot \det Q \Rightarrow \varphi_L \mid \mu_L^x$$

деф. **Дијагонализабилни оператор** је оператор $L : V \to V$ за који постоји база e за V ткд. је $[L]_e$ дијагонална матрица

Теорема: Лин. оператор $L : V \to V$ је дијагонализабилан ако и само ако постоји база $e = [e_1, \ldots, e_n]$ и скалари $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ ткд $L(e_i) = \lambda_i e_i \; (1 \leq i \leq n)$

Доказ: L је дијагонализабилно $\overset{\text{деф.}}{\Longleftrightarrow}$ постоји e ткд је $[L]_e$ дијагонална

Лакше $[L]_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \Longleftrightarrow L(e_1) = \lambda_1 e_1, \ldots, L(e_n) = \lambda_n e_n$

Коментар: $v = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$

$$L(v) = \alpha_1 \overset{\Downarrow}{\lambda_1} e_1 + \ldots + \alpha_n \lambda_n e_n$$

Теорема: Ако лин. оп. $L: V \to V$, где је $\dim V = n$, има n различитих сопс. вр.

Тада је L дијагонализабилан

Доказ: За сваку сопс. вр. постоји сопс. вектор тк д. $L(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$

При томе, $\{v_1, \dots, v_n\}$ је лин. независно (већ доказано), па је то база

По претходном, L је дијагонализабилан

㉘ Нилпотентни оператори

деф. Нека је $L: V \to V$ лин оп и $S \subseteq V$

Тада је $L|_S : S \to V$ **рестрикција** L на S

Специјално, ако је $S \leq V$, онда је $L|_S$ линеарно пресликавање

деф. Линеарни оператор је **нилпотентан** ако постоји $k \in N$ ткд. $L^k = 0$

Матрица је **нилпотентна** ако постоји $k \in N$ ткд. $A^k = 0$

У оба случаја, најмање такво k се назива **индекс нилпотенције**

деф. Нека је $L: V \to V$ лин. оп, $v \in V$ и $k \in N_0$ ткд. $v, L(v), \dots, L^{k-1}(v) \neq 0$, а $L^k(v) = 0$

Тада кажемо да је $[L^{k-1}(v), \dots, L(v), v]$ **L-низ генерисан са v**

За неку базу од V кажемо да је **база L-низова** ако је добијена надовезивањем неких L-низова

НАПОМЕНА: $L^0(v) = v$

Теорема: Нека је $L: V \to V$ лин. оператор и нека је e база L-низова за V.

Тада је L нилпотентан и његов индекс је једнак дужини најдужег L-низа у e

Доказ: Нека је $e = [\underbrace{L^{k_1-1}(v_1), \dots, L(v_1), v_1}_{k_1}, \underbrace{L^{k_2-1}(v_2), \dots, L(v_2), v_2}_{k_2}, \dots, \underbrace{L^{k_r-1}(v_r), \dots, L(v_r), v_r}_{v_r}]$

и нека је $k = \max\{k_1, \dots, k_r\}$. Доказујемо $L^{k-1} \neq 0$, $L^k = 0$

* Нека је $k_i = k$. Важи да је $L^{k_i-1}(v_i)$ елем. базе, па $L^{k_i-1} \neq 0$

* $v = \alpha_{11} L^{k_1-1}(v_1) + \dots + \alpha_{1k_1} v_1 + \dots + \alpha_{r1} L^{k_r-1}(v_r) + \dots + \alpha_{rk_r} v_r \quad / L^k$

$$L^k(v) = \underbrace{\alpha_{11} L^{k_1-1+k}(v_1)}_{0} + \dots + \underbrace{\alpha_{1k_1} L^k(v_1)}_{0} + \dots + \underbrace{\alpha_{r1} L^{k_r-1+k}(v_r)}_{0} + \dots + \underbrace{\alpha_{rk_r} L^k(v_r)}_{0} = 0$$

Теорема: За сваки нилпотентан оператор $L: V \to V$ постоји база L-низова за V

Доказ: Индукцијом по индексу нилпотенције k

(БИ) $k = 1$, дакле $L = 0$, па је L-низ генерисан са v само вектор v

То значи да је свака база састављена од L-низова
(тј. сваки елемент базе је посебан низ)

(ик) $L^k(v) = L^{k-1}(L(v)) = 0$

Посматрајмо пресликавање $G : \mathrm{Im} L \to \mathrm{Im} L$ задато са $G(v) = L(v)$

тражимо неки лин. оп. да на њега применимо (их)

- За $v \in \mathrm{Im} L$ важи $v = L(w)$, где $w \in V$, а такође важи и $G^{k-1}(v) = L^{k-1}(L(w)) = L^k(w) = 0$
- Такође, ако је $L^{k-1}(w) \neq 0 \Rightarrow L^{k-2}(L(w)) = G^{k-2}(\underbrace{L(w)}_{\in \mathrm{Im} L}) \neq 0$

Дакле, G је нилпотентан са индексом $k-1$

По (их) постоји база G-низова за Im L, означимо ту базу са

$f = [G^{k_1-1}(v_1), \dots, G(v_1), v_1, \dots, G^{k_r-1}(v_r), \dots, G(v_r), v_r]$, јасно $k-1 = \max\{k_1, \dots, k_r\}$

Посматрајмо $\mathrm{Ker}\, G = \mathrm{Ker}\, L \cap \mathrm{Im} L$. За вектор $v \in \mathrm{Ker}\, G$ важи:

$v = \alpha_{11} G^{k_1-1}(v_1) + \dots + \alpha_{1k_1} v_1 + \dots + \alpha_{r1} G^{k_r-1}(v_r) + \dots + \alpha_{rk_r} v_r$; $G(v) = 0$

/G

$G(v) = \underbrace{\alpha_{11} G^{k_1}(v_1)}_{0} + \alpha_{12} G^{k_1-1}(v_1) + \dots + \alpha_{1k_1} G(v_1) + \dots + \underbrace{\alpha_{r1} G^{k_r}(v_r)}_{0} + \alpha_{r2} G^{k_r-1}(v_r) + \dots + \alpha_{rk_r} G(v_r)$

ово је лин. комб. елем. из базе f, а $G(v) = 0$. Дакле преостали коефицијенти су 0

па је $g = [G^{k_1-1}(v_1), \dots, v_1, \dots, G^{k_r-1}(v_r), \dots, v_r]$ база за Ker G

Допунимо g до базе за Ker L : $h = [g, u_1, \dots, u_s]$

Пошто $u_i \in \mathrm{Ker} L \Rightarrow L(u_i) = 0 \Rightarrow$ сваки u_i је сам за себе L-низ (као у (БИ))

Доказујемо да је $e = [L^{k_1}(w_1), \dots, L(w_1), w_1, \dots, L^{k_r}(w_r), \dots, L(w_r), w_r, u_1, \dots, u_s]$ база за V

$$* \ |\underline{e}| = k_1 + 1 + \dots + k_r + 1 + s = \underbrace{k_1 + \dots + k_r}_{\substack{\text{бр. елем. } \underline{f} \\ \parallel \\ \dim(\mathrm{Im} L) \\ \parallel \\ \rho(L)}} + \underbrace{r + s}_{\substack{\text{бр. елем. } \underline{h} \\ \parallel \\ \dim(\mathrm{Ker} L) \\ \parallel \\ \delta(L)}} = \dim V$$

(теорема о рангу и дефекту)

* Дакле довољно је доказати да је e лин. нез. систем

$$(*) \ \alpha_{11} \underline{L^{k_1}(w_1)} + \dots + \alpha_{1k_1+1} w_1 + \dots + \alpha_{r1} \underline{L^{k_r}(w_r)} + \dots + \alpha_{rk_r+1} w_r + \beta_1 \underline{u_1} + \dots + \beta_s \underline{u_s} = 0$$

/L

подвучени су у KerL

$L^k(w) = G^{k-1}(v)$

$$\alpha_{12} \underbrace{L^{k_1}(w_1)}_{G^{k_1-1}(v_1)} + \dots + \alpha_{1k_1+1} \underbrace{L(w_1)}_{v_1} + \dots + \alpha_{r2} \underbrace{L^{k_r}(w_r)}_{G^{k_r-1}(v_r)} + \dots + \alpha_{rk_r+1} \underbrace{L(w_r)}_{v_r} = 0$$

Пошто је то лин. комб. вектора из g $\Rightarrow \alpha_{12} = \dots = \alpha_{rk_r+1} = 0$

Када то уврстимо у почетни израз (*), остају само вектори из h

па је $\alpha_{11} = \dots = \alpha_{r1} = \beta_1 = \dots = \beta_s = 0$

па је зато e лин. независан

- Посматрајмо $L: V \to V$ који је нилпотентни линеарни оператор и нека је

$$e = [\overbrace{\underset{e_1}{L(v_1)}, \underset{e_2}{v_1}}, \overbrace{\underset{e_3}{L^3(v_2)}, \underset{e_4}{L^2(v_2)}, L(v_2), v_2}, \overbrace{L^2(v_3), L(v_3), v_3}, \overbrace{v_4}] \ldots$$ база L-низова за V

Јасно, $L(e_1) = L(L(v_1)) = L^2(v_1) = 0$ (зато што је то L-низ)

Слично, $L(e_2) = L(v_1) = e_1$

$L(e_3) = 0$

$L(e_4) = e_3$

$\vdots$

Матрица лин. оп. (по питању 15) се може добити када координате базе пишемо као колоне

па је:

$$[L]_e = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cccc|ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccccccccc} \downarrow & \downarrow & & & & & & \downarrow & & \\ L(e_1) & L(e_2) & & & & & & L(e_8) & & \end{array} \end{array}$$

(примећујемо да 4 L-низа $\Rightarrow$ 4 „блока")

Закључак: Свака нилпотентна матрица слична је матрици која има све нуле осим неколико јединица на дијагонали изнад главне

Теорема: Нека је V векторски простор димензије n. Тада важи:

$L: V \to V$ је нилпотентан $\Leftrightarrow$ $\varphi_L(x) = (-1)^n x^n$

Доказ: $(\Rightarrow)$ Нека је $L^k = 0$ (такво k постоји јер је L нилпотентан)

Тада за $p(x) = x^k$ важи $p(L) = 0$. По Л2 код Кејли-Хамилтона

важи $\mu_L \mid p$, па је $\mu_L(x) = x^s$, где је $s \leq k$

Како $\mu_L \mid \varphi_L$ и $\varphi_L \mid \mu_L^n = x^{ns}$, па је $\varphi_L(x) = c \cdot x^t$

Од раније знамо $c = (-1)^n$ и $t = \deg \varphi_L = n$

$(\Leftarrow)$ Пошто $\mu_L \mid \varphi_L \Rightarrow \mu_L(x) = x^k \Rightarrow \mu_L(L) = L^k = 0$

Последица: Нека је V в.п. над K, $\dim V = n$, $\lambda \in K$ и $L: V \to V$ лин. оп. Тада:

$\underbrace{L - \lambda \mathrm{Id}_V}_{\text{ово је лин. оп.}} : V \to V$ је нилпот. $\Leftrightarrow$ $\varphi_L(x) = (-1)^n (x-\lambda)^n$

Доказ: Означимо $G = L - \lambda \mathrm{Id}_V$. По теореми: G - нилп. $\Leftrightarrow \varphi_G(x) = (-1)^n x^n$

$$\varphi_G = \det(A - xE) = \det([L]_e - (x+\lambda)E) = \varphi_L(x+\lambda) \underset{x=t-\lambda}{\overset{t=x+\lambda}{\Leftrightarrow}} \varphi_L(x) = \varphi_G(x-\lambda) \overset{\text{``}}{=} (-1)^n (x-\lambda)^n$$

$A = [L]_e - \lambda E$

Последица: Нека је $A \in M^n(K)$, $\lambda \in K$. Ако је $\varphi_A(x) = (-1)^n (x-\lambda)^k$,

(уопштење)

тада је A слична матрици из „закључка"

Доказ: комбинација претходне последице и закључка

㉙ Жорданова нормална форма

Лема: Нека је $L: V \to V$ лин. оп. Важи: $v \in Ker(L^k) \Rightarrow L(v) \in Ker(L^k)$

Доказ: $L^k(v) = 0 \Rightarrow L^k(L(v)) = L(L^k(v)) = L(0) = 0$

деф. **G:** $Ker(L^k) \to Ker(L^k)$, $G(v) = L(v)$, тј $G = L|_{Ker(L^k)}$
↳ лин. оп.

Лема: Нека је $L: V \to V$ лин. оп. Важи $v \in Im(L^k) \Rightarrow L(v) \in Im(L^k)$

Доказ: слично

деф. **H:** $Im(L^k) \to Im(L^k)$, $H(v) = L(v)$, тј $H = L|_{Ker(L^k)}$

Теорема: Нека је $L: V \to V$ лин. оп. Важи:
1) $V \supseteq Im L \supseteq Im L^2 \supseteq \ldots$
2) $\{0\} \subseteq Ker L \subseteq Ker(L^2) \subseteq \ldots$

Доказ: **1)** $Im(L^{k+1}) = Im(L|_{Im(L^k)}) \subseteq Im(L^k)$

2) $v \in Ker(L^k) \Rightarrow L^k(v) = 0 \Rightarrow L(L^k(v)) = 0 \Rightarrow L^{k+1}(v) = 0 \Rightarrow v \in Ker(L^{k+1})$

Лема: Нека је $L: V \to V$ лин. оп. Важи:
1) $Im(L^k) = Im(L^{k+1}) \Rightarrow Im(L^{k+1}) = Im(L^{k+2})$
2) $Ker(L^k) = Ker(L^{k+1}) \Rightarrow Ker(L^{k+1}) = Ker(L^{k+2})$

Доказ: **1)** $\boxed{\supseteq}$ по теореми

$\boxed{\subseteq}$ $v \in Im(L^{k+1}) \Rightarrow v = L^{k+1}(w) = L(\underbrace{L^k(w)}_{\in Im(L^k) = Im(L^{k+1})}) = L(L^{k+1}(w')) \Rightarrow v \in Im(L^{k+2})$

2) $\boxed{\subseteq}$ по теореми

$\boxed{\supseteq}$ $v \in Ker(L^{k+2}) \Rightarrow L^{k+2}(v) = 0 \Rightarrow L^{k+1}(L(v)) = 0 \Rightarrow L(v) \in Ker(L^{k+1}) = Ker(L^k)$

$\Rightarrow L^{k+1}(v) = 0 \Rightarrow v \in Ker(L^{k+1})$

Теорема: Нека је $n = dim V$. За лин. оп. $L: V \to V$ важи:
1) $Im(L^n) = Im(L^{n+1}) = \ldots$
2) $Ker(L^n) = Ker(L^{n+1}) = \ldots$

Доказ: **1)** Посматрајмо најмање k т.д. $Im(L^k) = Im(L^{k+1})$

По леми, довољно је доказати $k \leq n$

$V \supset Im(L) \supset Im(L^2) \supset \ldots \supset Im(L^k)$

$\Rightarrow dim V > dim Im(L) > dim Im(L^2) > \ldots > dim Im(L^k) \Rightarrow k \leq n$

2) слично

Теорема: **1)** G је нилпотентан, где $G: Ker(L^n) \to Ker(L^n)$

2) H је 1-1 и НА, где $H: Im(L^n) \to Im(L^n)$

Доказ: **1)** $v \in Ker(L^n) \Rightarrow L^n(v) = G^n(v) = 0 \Rightarrow G^n = 0 \Rightarrow$ нилпотентан

2) $\cdot$ $Im(L^{n+1}) = Im(L^n) = Im(H) \Rightarrow H$ је НА

$\cdot$ $dim(Im(L^n)) = \rho(H) + \delta(H) = dim(Im(H)) + dim(Ker(H)) = dim(Im(L^n)) + dim Ker(H))$

$\Rightarrow \delta(H) = 0 \Rightarrow Ker(H) = \{0\} \Rightarrow H$ је 1-1

већ коришћено

Теорема: Нека је $L: V \to V$, $dim V = n$, лин оп. Важи: $V = Ker(L^n) \oplus Im(L^n)$

Доказ: Грасман: $dim(Ker(L^n)) + dim(Im(L^n)) = dim(Ker(L^n) \cap Im(L^n)) + dim(Ker(L^n) + Im(L^n))$

Т.о р.н.д.: $\delta(L^n) + \rho(L^n) = dim V$

$\Rightarrow dim V = dim(Ker \cap Im) + dim(Ker + Im)$. Знамо и $Ker + Im \leq V$

$\cdot$ Докажимо $dim(Ker \cap Im) = 0$ и $dim(Ker + Im) = dim V$

Нека је $v \in Ker \cap Im$. $L^n(v) = 0 \Rightarrow H^n(v) = 0$, а композ. 1-1 је 1-1

Пошто важи $L^n(0) = 0 \Rightarrow H^n(0) = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow dim V = dim(Ker + Im)$
$\Rightarrow V = Ker + Im$

деф: Век. простор V је **директна сума** својих потпростора $W_1, \dots, W_k$ ако

1) $W_1 + \dots + W_k = V$
2) $(W_1 + \dots + W_{i-1}) \cap W_i = \{0\}$, за $1 \leq i \leq k$

Лема: V је директна сума потпр. $W_1, \dots, W_k \iff \forall v \in V$ се може јединств. зап. $v = w_1 + \dots + w_k$

Доказ: $(\Rightarrow)$ Постоји по деф, докажимо јединственост

$$v = w_1 + \dots + w_k = w_1' + \dots + w_k' \Rightarrow \left.\underbrace{w_1 - w_1' + \dots + w_{k-1} - w_{k-1}'}_{\in W_1 + \dots + W_{k-1}} = \underbrace{w_k' - w_k}_{\in W_k}\right\} \Rightarrow w_k = w_k'$$

(слично и остали w_i)

$(\Leftarrow)$ Доказујемо по деф.

1) тривијално

2) $v \in (W_1 + \dots + W_{i-1}) \cap W_i$

$v = w_1 + \dots + w_{i-1} + 0 = 0 + \dots + 0 + w_i + 0 + \dots + 0$

$\Rightarrow w_1 = \dots = w_i = 0 \Rightarrow v = 0$

због јединств.

деф. Нека је $L: V \to V$ лин. оп. и $W \leq V$. Ако за све $w \in W$ важи $L(w) \in W$, тада је W један **L-инваријантан потпростор** од V, тј. $L[W] \leq W$

НАПОМЕНА: $\mathrm{Ker}(L^k)$ и $\mathrm{Im}(L^k)$ су L-инвар. за $\forall k$

Лема: Ако је W један L-инв. потпр. од V $(L: V \to V)$, тада за свако $p \in K[x]$ важи да је W $p(L)$-инв. потпр. од V

Доказ: $p(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$, и нека је $w \in W$.

Знамо $L(w) \in W \Rightarrow L^2(w) \in W, \ldots, L^k(w) \in W$

$$(p(L))(w) = \underbrace{a_m L^m(w)}_{\in W} + \ldots + \underbrace{a_1 L(w)}_{\in W} + \underbrace{a_0 w}_{\in W} \in W \Rightarrow W \text{ је } p(L)\text{-инв.}$$

Теорема: Нека је $V = U \oplus W$ и нека је e база за V добијена надовезивањем база f и g од U и W редом. Нека је $L: V \to V$ лин. оп. ткд. су U и W L-инв.

Тада је $[L]_e = \begin{bmatrix} [G]_f & 0 \\ 0 & [H]_g \end{bmatrix}$, где је $\underset{G(u)=L(u)}{G: U \to U}$, $\underset{H(w)=L(w)}{H: W \to W}$

Доказ: $f = [f_1, \ldots, f_k]$, $g = [g_1, \ldots, g_k] \Rightarrow e = [f_1, \ldots f_k, g_1, \ldots, g_k]$. Посматрајмо $L(f_i) \in U$

$$\Rightarrow L(f_i)_e = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_k f_k + 0 \cdot g_1 + \ldots + 0 \cdot g_k = [G]_f$$

(i-та колона $[L]_e$ се добија од i-те колоне $[G]_e$ са додатним нулама)

(исто и за $L(g_i)$)

Теорема: Нека је $T \in M_n(K)$, $S \in M_s(K)$, $R \in M_r(K)$ и $T = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \Rightarrow \det T = \det S \cdot \det R$

Доказ:

$$T = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & E_r \end{bmatrix} \overset{\begin{bmatrix} E_s & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}}, \text{ по Бине-Кошију } \det T = \underbrace{\det \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & E_r \end{bmatrix}}_{\det S} \cdot \underbrace{\det \begin{bmatrix} E_s & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}}_{\det R}$$

$(\dim V = n)$

Лема: Ако је λ сопс. вр. лин. оп. $L: V \to V$, тада је λ једина сопс. вр. за $\underset{G(v) = L(v)}{G: \mathrm{Ker}(L - \lambda id_v)^n \to \mathrm{Ker}(L - \lambda id_v)^n}$,

Доказ: Доказано је да је $G - \lambda id_v$ нилпот. и важи $\mathrm{Ker}(L - id_v)^n \neq 0$
$(\mathrm{Ker}(L - id_v)^n \geq \mathrm{Ker}(L - id_v) \neq \{0\})$

Знамо и $p_G = (-1)^k (x - \lambda)^k$, $k = \dim(L - \lambda id_v)^n > 0$

$\Rightarrow \lambda$ је једина сопс. вр. за G

Лема: Ако је λ сопс. вр. лин. оп. $L: V \to V$, $\dim V = n$, $\lambda' \neq \lambda$, тада је линеарни оп.

$G - \lambda' id_V : Ker(L - \lambda id_V)^n \to Ker(L - \lambda id_V)$ 1-1

$G(v) = L(v)$

Доказ: Нека је $(G - \lambda' id_V)(v) = 0 \iff G(v) = \lambda' v$

Ако је $v \neq 0$, онда је λ' сопс. вр. ↯ $\Rightarrow v = 0 \Rightarrow G - \lambda' id_V$ је 1-1

Теорема: Ако је λ сопс. вр. лин. оп. $L: V \to V$. Тада за неко $\lambda' \neq \lambda$ важи

$$Ker(L|_{Im(L-\lambda id)^n} - \lambda' id)^n = Ker(L - \lambda' id)^n$$

Доказ: $\boxed{\subseteq}$ $v \in Ker(\underbrace{L|_{Im(L-\lambda id_V)^n} - \lambda' id_V}_{G : Im(L-\lambda id_V)^n \to Im(L-\lambda id_V)^n})^n$

$\iff v \in Im(L - \lambda id_V)^n$ и $v \in Ker(L - \lambda' id)^n \subseteq W$

$\boxed{\supseteq}$ $v \in Ker(L - \lambda' id)^n$, па је довољно да $v \in Im(L - \lambda id)^n$

Знамо да $v = v' + v''$, где $v' \in Ker(L - \lambda id)^n$, $v'' \in Im(L - \lambda id)^n$

$$0 = (L - \lambda' id)^n(v) = \underbrace{(L - \lambda' id)^n(v')}_{w'} + \underbrace{(L - \lambda' id)(v'')}_{w''}$$

Знамо да $Ker(L - \lambda id)^n$ је $(L - \lambda id)$ - инваријантан и
$Ker(L - \lambda' id)^n$ је $(L - \lambda' id)$ - инваријантан

Дакле, $w' \in Ker(L - \lambda id)^n$ и слично $w'' \in (L - \lambda' id)^n$, а пошто

$0 = w' + w''$, а због јединств. приказа $\Rightarrow w' = 0 \overset{\text{Лема}}{\Longrightarrow} (L - \lambda' id)^n$ је 1-1
$w' = 0$

Јасно $v' = 0 \Rightarrow v = v'' \in Im(L - \lambda id)^n$

Теорема: Ако је $L: V \to V$, $\dim V = n$, лин. оп. и $\varphi_L(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{d_1} \dots (x - \lambda_k)^{d_k}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$

Тада $V = Ker(L - \lambda_1 id)^n \oplus \dots \oplus Ker(L - \lambda_k id)^n$, уз то $\dim(Ker(L - \lambda_i id)^n) = d_i$

Доказ: Индукцијом по k

(БИ) $k = 1$: $\varphi_L(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^n \Rightarrow L - \lambda_1 id$ је нилпотентан

$\Rightarrow (L - \lambda_1 id)^n = 0 \Rightarrow Ker(L - \lambda_1 id)^n = V$

…→

(ик) $k-1 \to k$: Знамо $V = \mathrm{Ker}(L-\lambda_1 id)^n \oplus \mathrm{Im}(L-\lambda_1 id)^n$, као и да L има матрицу облика $\begin{bmatrix}[G] & 0 \\ 0 & [H]\end{bmatrix}$, где $G = L\restriction_{\mathrm{Ker}(L-\lambda_1 id)^n}$, $H = L\restriction_{\mathrm{Im}(L-\lambda_1 id)^n}$

При томе, $\varphi_L(x) = \varphi_G(x) \cdot \varphi_H(x)$

$G-\lambda_1 id$ је нилп. оп. $\Rightarrow \varphi_G = (-1)^{b_1}(x-\lambda_1)^{b_1}$, па докажимо $b_1 = a_1$

Знамо да $F = (L-\lambda_1 id)\restriction_{\mathrm{Im}(L-\lambda_1 id)^n}$ је 1-1, па $F(v) \neq 0$ за $v \neq 0$

па 0 није сопс. вр. за F, тј. λ_1 није сопс. вр. за H

Пошто $\varphi_L = \varphi_G \varphi_H$, а $x-\lambda_1 \nmid \varphi_H(x) \Rightarrow a_1 = b_1 \Rightarrow \varphi_H(x) = (-1)^{n-a_1}(x-\lambda_2)^{a_2} \dots (x-\lambda_k)^{a_k}$

$H: \mathrm{Im}(L-\lambda_1 id)^n \to \mathrm{Im}(L-\lambda_1 id)^n \xrightarrow[(их)]{} W = \mathrm{Ker}(H-\lambda_2 id)^m \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}(H-\lambda_k id)^m$

Како је $\mathrm{Ker}(H-\lambda_i id)^m = \mathrm{Ker}(H-\lambda_i id)^k \Rightarrow k \geq m$

Жорданова нормална форма: Нека је $L: V \to V$ лин. оп. при чему је V в.п. над $\mathbb{C}$ (полином се може раставити). Тада постоји база e за V, т.д. је $[L]_e$ збир дијаг. матрице и матрице која има све нуле осим неких јединица на дијаг. изнад главне.

Последица: Свака матрица $A \in M_n(K)$ је слична матрици описаној горе

Доказ: По претходном, $V = \mathrm{Ker}(L-\lambda_1 id)^n \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}(L-\lambda_k id)^n$, $\lambda_1 \neq \dots \neq \lambda_k$, $n = \dim V$

Знамо да је $(L-\lambda_i id)\restriction_{\mathrm{Ker}(L-\lambda_i id)^n}$ нилпот. оп., па постоји база e_i за $\mathrm{Ker}(L-\lambda_i id)^n$ т.д. $[G_i]_{e_i}$ има све нуле осим неколико 1 изнад дијаг.

Тада за $L_i = G_i + \lambda_i id$ важи $[L_i]_{e_i} = [G_i]_{e_i} + \begin{bmatrix}\lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i\end{bmatrix}$.

Ако је e база за V настала надовезивањем $e_1, \dots, e_k$ добијамо жељени облик

$$[L]_e = \begin{bmatrix}[L_1]_{e_1} & & \\ & \ddots & \\ & & [L_k]_{e_k}\end{bmatrix}$$

деф. **Жорданов блок** је матрица $J(\alpha, m) = \begin{bmatrix}\alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \alpha\end{bmatrix}$

деф. **Жорданова нормална форма** за A је матрица облика $J(A) = \begin{bmatrix}J(\alpha_1, m_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\alpha_k, m_k)\end{bmatrix}$

Лема: Нека су $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in C$ све разл. сопс. вр. лин. оп. $L: V \to V$ (V је в.п. над C)

Тада за свако $v \in V$ важи: $(L - \lambda_1 id)^{a_1} \circ \ldots \circ (L - \lambda_k id)^{a_k}(v) = 0$

акко за $v_i \in Ker(L - \lambda_i id)^n$ важи $(L - \lambda_i id)^{a_i}(v_i) = 0$

Доказ: ($\Rightarrow$) пп. $(L - \lambda_i id)^{a_i}(v_i) = w_i \neq 0$

Тада је $(L - \lambda_1 id)^{a_1} \circ \ldots \circ (L - \lambda_k id)^{a_k} \circ (L - \lambda_i id)^{a_i}(v_i)$

$= (L - \lambda_1 id)^{a_1} \circ \overset{\text{нема } i\text{-тог}}{\ldots} \circ (L - \lambda_k id)^{a_k}(w_i)$ и важи $w_i \in Ker(L - \lambda_i id)^n$

Знамо $(L - \lambda_j id)|_{Ker(L - \lambda_i id)^n}$ је 1-1 за $j \neq i$, а комп. 1-1 је 1-1

па је то $\lightning$ ($F(w) = 0$ за неко $w \neq 0$)

($\Leftarrow$) За $v \in V$ смо доказали $v = v_1 + \ldots + v_k$, $v_i \in Ker(L - \lambda_i id)^n$

Да бисмо доказали $G(v) = 0$ довољно је доказати $G(v_i) = 0 \ \forall i$

а то следи из $G(v_i) = (L - \lambda_1 id)^{a_1} \circ \underset{\text{нема } i\text{-тог}}{\ldots} \circ (L - \lambda_k id)^{a_k} \circ (L - \lambda_i id)^{a_i}(v_i) = 0$

Последица: Полином $(x - \lambda_1)^{a_1} \ldots (x - \lambda_k)^{a_k}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $\lambda_i \in C$ је минимални

за $L: V \to V$ (V је в.п. над C) акко $\forall i$ $(x - \lambda_i)^{a_i}$ је мин. за $L|_{Ker(L - \lambda_i id)^n}$

Теорема: Нека је $A \in M_n(\mathbb{C})$. Мин. пол. за A је облика $(x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_k)$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ акко је матрица дијагонализабилна

Доказ: Нека је L лин. оп. чија је матрица A (у односу на неку базу)

(⇒) по претходном, мин. пол. за $L|_{\ker(L-\lambda_i id)^n}$ је $(x-\lambda_i)$,

па $L|_{\ker(L-\lambda_i id)^n} = \lambda_i id$.

Самим тим, матрица за L у бази добијеној надовезивањем база за $\ker(L-\lambda_i id)^n$ је $\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_1\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix}\lambda_k & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k\end{matrix}\end{array}\right]$, тј. дијагонализабилна

(⇐) Нека се на главној дијагонали у дијаг. облику налазе $\lambda_1, \dots, \lambda_k$

тј. нпр. да је облика као ова изнад

$$([L]_e - \lambda_1 E)\dots([L]_e - \lambda_k E) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}0 & \\ & 0\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix}\ddots & & \\ & \lambda_k-\lambda_1 & \\ & & \lambda_k-\lambda_1\end{matrix}\end{array}\right] \dots \begin{bmatrix}\lambda_1-\lambda_k & & & \\ & \lambda_1-\lambda_k & & \\ & & \ddots \; 0 & \\ & & & 0\end{bmatrix} = 0$$

Јасно $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ су сопс. вр. па како по Кејли-Хамилтону

$(x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_k) \mid \mu_L \Rightarrow \mu_L = (x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_k)$

㉚ Редукција реалних матрица

Лема: Ако су реалне матрице A, B сличне над $\mathbb{C}$, онда су сличне и над $\mathbb{R}$

Доказ: Нека је $S \in M_n(\mathbb{C})$ ткд. $S^{-1}AS = B \iff AS = SB$, $S = P + iQ$ $(P, Q \in M_n(\mathbb{R}))$

Тада је $AP + iAQ = PB + iQB \iff AP = PB$ и $AQ = QB \;/\cdot\alpha$ (по. $Q \neq 0$)

(Ако би P или Q биле инв. то би био крај доказа)

$$AP + \alpha AQ = PB + \alpha QB$$
$$A(P + \alpha Q) = (P + \alpha Q)B$$

Даље довољно је доказати да постоји α ткд. $P + \alpha Q$ је инв. $\iff \det(P + \alpha Q) \neq 0$

Посматрајмо $f(x) = \det(P + xQ)$, $\deg f \leq n$. Знамо $f(i) \neq 0$ (S је инв.)

Зато f није нула полином, па има највише n нула, па зато постоји α ткд $f(\alpha) \neq 0 \Rightarrow P + \alpha Q$ је инв.

Теорема: Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$. Тада је A слична матрици B облика

$$B = \begin{bmatrix} E(P_1, m_1) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & E(P_k, m_k) & & & \\ & & & J(\alpha_1, n_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & J(\alpha_t, n_t) \end{bmatrix}, \text{ где је } E(P, m) = \underbrace{\begin{bmatrix} P & E & & \\ & P & E & \\ & & \ddots & E \\ & & & P \end{bmatrix}}_{m}, \quad P = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Доказ: Нека је C Жорданова нормална форма од A (посматрамо као $A \in M_n(\mathbb{C})$)

Тада постоји $S \in M_n(\mathbb{C})$ ткд. $S^{-1}AS = C \Rightarrow \overline{S^{-1}}\,\overline{A}\,\overline{S} = \overline{C}$

Пошто је $A = \overline{A} \Rightarrow \overline{S^{-1}}\,A\,\overline{S} = \overline{C}$.

Пошто је $\overline{C}$ Ж.Н.Ф., а Ж.Н.Ф. је јединствена $\Rightarrow C$ и $\overline{C}$ су једнаке (до на распореда блокова)

То значи да за сваки блок $J(z, m)$ матрице C, исти такав има у матрици $\overline{C}$, па се у C налази и блок $J(\overline{z}, m)$.

Закључујемо да се блокови матрице C могу пермутовати у облик

$$C' = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} z & 1 & \\ & \ddots & \\ & & z \end{matrix}}_{m} & 0 \\ 0 & \underbrace{\begin{matrix} \overline{z} & 1 & \\ & \ddots & \\ & & \overline{z} \end{matrix}}_{m} \end{bmatrix}, \quad z = \alpha + i\beta, \; \beta \neq 0, \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Питање је како од овог облика добити $E(P, m)$?

Нека је Φ_r замена места r-те и $(r-1)$-ве врсте
Ψ_r замена места r-те и $(r-1)$-ве колоне, $\Psi_r^{-1} = \Phi_r$

Посматрајмо $\Psi_3^{-1} \dots \Psi_m^{-1} \Psi_{m+1}^{-1} \cdot C' \cdot \Phi_{m+1} \Phi_m \dots \Phi_3$

$$\begin{bmatrix} z & 1 & & & & \\ & z & 1 & & & \\ & & z & 0 & & \\ & & & \bar z & 1 & \\ & & & & \bar z & 1 \\ & & & & & \bar z \end{bmatrix}_m \sim \begin{bmatrix} z & 1 & 0 & 0 & & \\ & 0 & 0 & \bar z & 1 & \\ & z & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & z & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \bar z & 1 \\ & & & & & \bar z \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|cccc} z & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & z & 1 & & \\ & & & z & & \\ & & & & \bar z & 1 \\ & & & & & \bar z \end{array}\right]$$

Даље, применимо $\Psi_5^{-1} \dots \Psi_{m+1} C' \Phi_{m+2} \dots \Phi_5$ (јер у горњем-левом блоку имамо нешто што личи на тражено)

Питање је како $\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar z \end{bmatrix} \overset{?}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$

тј. $G^{-1} \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar z \end{bmatrix} G = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$. Ако је $G = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow G^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Решавањем система $\dots \; ad+bc=0, \; \frac{2bdi}{ad-bc} = 1 \quad \frac{-2aci}{ad-bc} = 1$

$\dots \; a^2+b^2=0$, па можемо узети $a=bi$, $c=di$

Дакле можемо узети $G = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix}$

Посматрајмо матрицу $H = \begin{bmatrix} G & & \\ & \ddots & \\ & & G \end{bmatrix}$, $H^{-1} = \begin{bmatrix} G^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & G^{-1} \end{bmatrix}$

Треба проверити да ли је $H^{-1} T H$ жељеног облика?

Нека је $Z = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar z \end{bmatrix}$ и $P = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$. Тада је $G^{-1} Z G = P$, па

$$\begin{bmatrix} G^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z & E & & \\ & Z & & \\ & & & E \\ & & & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & & \\ & \ddots & \\ & & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{-1}Z & G^{-1} & & \\ & G^{-1}Z & G^{-1} & \\ & & \ddots & \\ & & & G^{-1}Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & & \\ & \ddots & \\ & & G \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|cc} G^{-1}ZG & E & \\ & \ddots & E \\ & & G^{-1}ZG \end{array}\right] = \begin{bmatrix} P & E & \\ & \ddots & E \\ & & P \end{bmatrix}$$

Овим је $A \sim B$ над $\mathbb{C}$, па по леми су ове матрице сличне и над $\mathbb{R}$

Јединственост ЖНФ

- Корак 1°: тврђење важи у случају нилпот. оп. $[e_1, L(e_1), L^2(e_1), e_2, L(e_2), e_3, L(e_3)]$

Дужина најдужег L низа је индекс нилпотенције, нека је то m

$$\left.\begin{aligned}
\dim \operatorname{Ker} L &= \text{број блокова (свих дужина)} &&= k_1 \\
\dim \operatorname{Ker} L^2 &= k_1 + \text{број блокова дужине бар } 2 &&= k_2 \\
\dim \operatorname{Ker} L^3 &= k_2 + \text{број блокова дужине бар } 3 &&= k_3 \\
&\vdots \\
\dim \operatorname{Ker} L^n &= k_{m-1} + \text{број блокова дужине бар } m &&= k_m
\end{aligned}\right\} \text{не зависе од форме}$$

- Општи случај

Нека је α нула карак. полинома P_L

Тада је вишеструкост од α у P_L $\dim \operatorname{Ker}(L-\alpha\, id)^n$

а $L-\alpha\, id$ је нилпотентан на $\operatorname{Ker}(L-\alpha\, id)^n$

Знамо колико заузима α укупно / унутар блокова знамо по 1°

㉛ Еуклидски векторски простори: норма и угао

деф. Нека је V в.п. над R. **Скаларни производ** на V је свако пресликавање $\circ : V \times V \to R$ ткд за $\forall u,v,w \in V$, $\alpha \in R$ важи:

1) $(u+v) \circ w = u \circ w + v \circ w$
2) $(\alpha u) \circ v = \alpha (u \circ v)$
3) $u \circ v = v \circ u$
4) $u \neq 0 \Rightarrow u \circ u > 0$

деф. **Канонски скаларни производ** у R^n је $(x_1, \dots, x_n) \circ (y_1, \dots, y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

Својства:

1) $u \circ (v+w) = u \circ v + u \circ w$
2) $u \circ \vec{0} = \vec{0} \circ u = 0$
3) $(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k) \circ v = \alpha_1 (u_1 \circ v) + \dots + \alpha_k (u_k \circ v)$

Доказ:

1) $u \circ (v+w) = (v+w) \circ u = v \circ u + w \circ u = u \circ v + u \circ w$
2) $u \circ \vec{0} = \vec{0} \circ u = (0 \cdot \vec{0}) \circ \vec{u} = 0 \cdot (\vec{0} \circ \vec{u}) = 0$
3) индукцијом по k

деф. Нека је V в.п. над R коначне димензије, а $\circ$ ск. производ на V

Тада је $(V, \circ)$ **Еуклидски векторски простор**

деф. Нека је $(V, \circ)$ еуклидски в.п и $v \in V$. **Норма** од v је $|v| = \sqrt{v \circ v}$

Особине:

1) $|\alpha u| = |\alpha| \cdot |u|$
2) $u' = \frac{u}{|u|}$, где $u \neq \vec{0}$. Тада је $|u'| = 1$ (јединични вектор)

Доказ:

1) $|\alpha u| = \sqrt{(\alpha u) \circ (\alpha u)} = \sqrt{\alpha^2 (u \circ u)} = |\alpha| \sqrt{u \circ u} = |\alpha| \cdot |u|$
2) $|u'| = \left| \frac{1}{|u|} \cdot u \right| = \frac{1}{|u|} \cdot |u| = 1$

Коши-Шварц: Нека је $(V,\circ)$ е.в.п, $u,v \in V$. Тада: $|u \circ v| \leq |u| \cdot |v|$

Једнакост важи акко $u=0$ или $v=\alpha u$ $(\alpha \in R)$

Доказ: Знамо $(\alpha u - v) \circ (\alpha u - v) \geq 0$ (за произвољно $\alpha \in R$)

$f(\alpha) = \alpha^2 |u|^2 - 2\alpha (u \circ v) + |v|^2 \geq 0$

Раздвајамо два случаја: 1) $u = \vec{0}$: тривијално $(0 \geq 0)$

(по α)

2) $u \neq \vec{0} \Rightarrow |u| \neq 0 \Rightarrow f$ - квадратна ф-ја

Пошто је $f(\alpha) \geq 0$ за свако $\alpha \in R$, то значи $D \leq 0$

$D = 4(u \circ v)^2 - 4|u|^2 |v|^2 \leq 0 \overset{\sqrt{}}{\Rightarrow} |u| \cdot |v| \geq |u \circ v|$

Минковски: Нека је $(V,\circ)$ е.в.п., $u,v \in V$ Тада: $|u+v| \leq |u| + |v|$

Једнакост важи акко $u=0$ или $v=\alpha u$ $(\alpha \geq 0)$

Доказ: $|u+v|^2 = (u+v) \circ (u+v) = |u|^2 + 2(u \circ v) + |v^2|$

$\leq |u|^2 + 2|u|\,|v| + |v|^2 = (|u| + |v|)^2$

деф. **Угао између вектора** u и v је $\cos\theta = \dfrac{u \circ v}{|u| \cdot |v|}$, у ознаци $\measuredangle(u,v)$

НАПОМЕНА: Ако $u,v \in V \setminus \{\vec{0}\}$, тада $-1 \leq \dfrac{u \circ v}{|u| \cdot |v|} \leq 1$ (по К-Ш),

па зато $\theta \in [0,\pi]$ увек постоји

㉜ Ортогоналност. Грам-Шмитов поступак.

деф. Нека је $(V, \circ)$ е.в.п. **Вектори** u, v су **ортогонални** акко $u \circ v = 0$

у ознаци $u \perp v$

НАПОМЕНА: $u \circ v = 0 \iff u = 0 \lor v = 0 \lor \measuredangle(u, v) = \frac{\pi}{2}$

Теорема: Нека је V е.в.п. и $u, v \in V$. Тада важи:

$$u \perp v \iff |u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 \quad (\text{Питагора у } R^2)$$

Доказ: $(\Rightarrow)$ $u \perp v \Rightarrow u \circ v = 0$

$$|u+v|^2 = (u+v) \circ (u+v) = |u|^2 + 2\overset{0}{u \circ v} + |v|^2 = |u|^2 + |v|^2$$

$(\Leftarrow)$ $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 \Rightarrow (u+v) \circ (u+v) = |u|^2 + |v|^2$

$$\Rightarrow |u|^2 + |v|^2 + 2u \circ v = |u|^2 + |v|^2 \Rightarrow u \circ v = 0$$

деф. Нека је $(V, \circ)$ е.в.п., $A \subseteq V$ и $v \in V$. Тада кажемо да је вектор **v ортогоналан на A** ако је $\forall u \in A$ $v \perp u$, у ознаци $v \perp A$

деф. **Ортогонала скупа** A је скуп $A^\perp = \{u \in V \mid u \perp A\}$ (за $A = \emptyset \Rightarrow A^\perp = V$)

Став: $A^\perp \leq V$

Доказ: Доказујемо по дефиницији потпростора

1° $A^\perp \neq \emptyset$, јер је $\vec{0} \perp v$ $(\forall v \in V)$, па $\vec{0} \in A^\perp$

2° $u_1, u_2 \in A^\perp \Rightarrow \forall v \in A$ $u_1 \perp v$, $u_2 \perp v$ $\Rightarrow u_1 \circ v = 0$, $u_2 \circ v = 0$

$$\Rightarrow \alpha_1(u_1 \circ v) + \alpha_2(u_2 \circ v) = 0 \Rightarrow (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \circ v = 0$$

деф. Скуп $S \subseteq V$ је **ортогоналан** ако $\forall u, v \in S$, $u \neq v \Rightarrow u \perp v$

деф. База e за е.в.п. V је **ортонормирана** ако:
$\underline{e}$ ортогоналан скуп
$\underline{e}$ не садржи нулу
$\forall i$ $|e_i| = 1$

Лема: Сваки ортогоналан скуп који не садржи $\vec{0}$ је линеарно независан

Доказ: $S \subseteq V$ - ортогоналан, $0 \notin S$, $v_1, \dots, v_n \in S$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \quad / \circ v_i$$

$$0 = (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \circ v_i = \alpha_1 \overset{0}{(v_1 \circ v_i)} + \dots + \alpha_i (v_i \circ v_i) + \dots + \alpha_n \overset{0}{(v_n \circ v_i)}$$

$$\alpha_i \underbrace{|v_i|^2}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$$

(аналогно за остале)

Грам - Шмит: За сваку базу $g=[g_1,\dots,g_n]$ е.в.п. $(V,\circ)$ **постоји тачно једна ортонормирана база** $e=[e_1,\dots,e_n]$ ткд. $\forall r\in[n]\ e_r\circ g_r>0$

и $\mathcal{L}(\{e_1,\dots,e_n\})=\mathcal{L}(\{g_1,\dots,g_n\})$

НАПОМЕНА: Специјално, сваки е.в.п. има ортонормирану базу

Доказ: Индукцијом по r

(ИБ) $r=1$. Јасно $\mathcal{L}(\{e_1\})=\mathcal{L}(\{g_1\}) \iff e_1=\lambda g_1 \quad (\lambda\neq0)$

$e_1\circ g_1=\lambda g_1\circ g_1=\lambda|g_1|^2>0$. То је испуњено акко $\lambda>0$

$1=|e_1|=|\lambda g_1|=|\lambda||g_1|=\lambda|g_1| \Rightarrow \lambda=1/|g_1|$, па $e_1=\frac{g_1}{|g_1|}$

(ИК) Желимо да „конструишемо" u ткд: | Тада из (их) имамо:

$r\Rightarrow r+1$

1) $\mathcal{L}(\{e_1,\dots,e_r,u\})=\mathcal{L}(\{g_1,\dots,g_r,g_{r+1}\})$ $\Rightarrow$ e је генератриса V

2) $u\circ e_i=0 \quad (\forall i\in[r])$ $\Rightarrow$ e је лин. нез. (лема)

3) $|u|=1$ $\underset{+2}{\Rightarrow}$ e је ортонормирана

4) $u\circ g_{r+1}>0$ (додатни услов због јединств.)

другачије формулишемо 1)

* Докажимо $\overbrace{\mathcal{L}(\{e_1,\dots,e_r,u\})=\mathcal{L}(\{g_1,\dots,g_r,g_{r+1}\})}^{1)} \iff u=\lambda_1e_1+\dots+\lambda_re_r+\lambda g_{r+1}$

$\lambda\neq0$

$(\Rightarrow)$ $u\in\mathcal{L}(\{g_1,\dots,g_{r+1}\}) \Rightarrow u=\underbrace{\alpha_1g_1+\dots+\alpha_rg_r}_{\in\mathcal{L}(\{g_1,\dots,g_r\})\overset{(их)}{=}\mathcal{L}(\{e_1,\dots,e_r\})}+\lambda g_{r+1}$

па $u=\lambda_1e_1+\dots+\lambda_re_r+\lambda g_{r+1}$ (први део доказан, треба још $\lambda\neq0$)

$g_{r+1}\in\mathcal{L}(\{e_1,\dots,e_r,u\}) \Rightarrow g_{r+1}=\beta_1e_1+\dots+\beta_re_r+\beta u$

$=\underbrace{(\beta_1+\beta\lambda_1)e_1+\dots+(\beta_r+\beta\lambda_r)e_r}_{\in\mathcal{L}(\{e_1,\dots,e_r\})\overset{(их)}{=}\mathcal{L}(\{g_1,\dots,g_r\})}+\beta\lambda g_{r+1}$

$g_{r+1}=\gamma_1g_1+\dots+\gamma_rg_r+\beta\lambda g_{r+1}$

$0=\gamma_1g_1+\dots+\gamma_rg_r+(\beta\lambda-1)g_{r+1} \overset{g\text{ - лин. нез.}}{\Longrightarrow} \beta\lambda=1 \Rightarrow \lambda\neq0$

$(\Leftarrow)$ $\boxed{\subseteq}$ e_i ✓ (по их), u ✓ (по претпоставци са десне стране)

$\boxed{\supseteq}$ g_i ✓ (по их),

$g_{r+1}=-\frac{\lambda_1}{\lambda}e_1-\dots-\frac{\lambda_r}{\lambda}e_r+\frac{1}{\lambda}u$ ✓ (искористили ово десно) конструкција

* I, II) Одредимо свако u ткд задовољава 1) и 2).

Тј. за $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r + \lambda g_{r+1}$ важи $u \circ e_i = 0$ $(i \in [r])$

Тј $(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r + \lambda g_{r+1}) \circ e_i = \lambda_1 (e_1 \circ e_i) + \dots + \lambda_r (e_r \circ e_i) + \lambda (g_{r+1} \circ e_i)$

$$\overset{их}{=} \lambda_i |e_i|^2 + \lambda (g_{r+1} \circ e_i) \overset{их}{=} \lambda_i + \lambda (g_{r+1} \circ e_i) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_i = -\lambda (g_{r+1} \circ e_i) \Rightarrow u = \lambda \big(\underbrace{g_{r+1} - (g_{r+1} \circ e_1) e_1 - \dots - (g_{r+1} \circ e_r) e_r}_{v} \big)$$

III) Да би важила прва 3, узмемо $\lambda = \pm \frac{1}{|v|}$ $(v \neq 0$ јер $u \neq 0)$

IV) Преостала су само два могућа кандидата за u $(u_1 = u,\ u_2 = -u)$

Тачно један од u_1, u_2 задовољава 4, јер $u \circ g_{r+1} = -((-u) \circ g_{r+1})$

$u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n + \lambda g_{r+1}$ $/\circ u$, $\overset{1}{u \circ u} = \lambda (g_{r+1} \circ u)$ $\Rightarrow$ $u \circ g_{r+1} = 1/\lambda \neq 0$

Теорема: Нека је $(V, \circ)$ е в п и $A \leq V$. Тада је $A \oplus A^\perp = V$

Доказ: Треба да докажемо: 1) $A \cap A^\perp = \{0\}$, 2) $A + A^\perp = V$

1) $v \in A \cap A^\perp \Rightarrow v \in A \wedge v \in A^\perp \Rightarrow v \perp v \Rightarrow v \circ v = 0 \Rightarrow |v|^2 = 0$

Дакле, $v = \vec{0}$

2) Нека је $e = [e_1, \dots, e_k]$ ортонормирана база за A

Допунимо је до базе за V: $g = [e_1, \dots, e_k, g_1, \dots, g_l]$

Ортонормирајмо g Грам-Шмитом $\Rightarrow f = [e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_l]$

* Докажимо да је $[f_1, \dots, f_l]$ база за $A^\perp$

Јасно $\{f_1, \dots, f_l\} \subseteq A^\perp$ (јер $f_i \circ (\underbrace{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k}_{\in A}) = 0$)

Самим тим $\mathcal{L}(\{f_1, \dots, f_l\}) \leq A^\perp$, па је $\dim A^\perp \geq l$

Из Грасманове формуле: $\dim(A + A^\perp) + \overset{\to 0}{\cancel{\dim(A \cap A^\perp)}} = \dim A + \dim A^\perp$

$$\overset{A + A^\perp \leq V}{\vee} \qquad \geq k + l = \dim V$$

па отуд $A + A^\perp = V$ (самим тим $\dim A^\perp = l$)

㉝ Фуријеови коефицијенти. Ортогонална пројекција. Беселова неједнакост.

деф. За векторе $u, v \in V$, $u \neq 0$, **Фуријеов коефицијент** вектора v у односу на u је $\alpha = \frac{v \circ u}{|u|^2}$

Став: Ако је $e = [e_1, \dots, e_n]$ ортогонална база е.в.п. $(V, \circ)$ и $V_e = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ онда је α_i Фуријеов коеф од v у односу на e_i

Доказ: $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \quad / \circ e_i$

$$v \circ e_i = \alpha_i e_i \circ e_i = \alpha_i |e_i|^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = \frac{v \circ e_i}{|e_i|^2}$$

деф. Нека је $(V, \circ)$ е.в.п. и $U \leq V$. **Ортогонална пројекција** вектора $v \in V$ на U, у ознаци **$proj_U(v)$** је (јединствен) вектор $\overline{v} \in U$, ткд. $v = \overline{v} + v'$ ткд. $v' \in U^\perp$

Угао између вектора v и потпростора U је $\measuredangle(v, \overline{v})$

Став: Ако је $e = [e_1, \dots, e_k]$ ортогонална база за U, онда $proj_U(v) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$, $\alpha_i = \frac{v \circ e_i}{|e_i|^2}$

Доказ: Допунимо e до базе за V: $f = [e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_l]$

Тада је $[f_1, \dots, f_l]$ база за $U^\perp$ (по теореми из претх. питања)

Самим тим, ако је $v = \sum^{k} \alpha_i e_i + \sum^{l} \beta_i f_i$, тада је $proj_U(v) = \sum^{k} \alpha_i e_i \in U$

а $v' = \sum^{l} \beta_i f_i \in U^\perp$

При томе $\alpha_i = \frac{v \circ e_i}{|e_i|^2}$ (по ставу)

Теорема: Нека је $\{w_1, \dots, w_k\}$ ортог. скуп вектора из е.в.п. $(V, \circ)$ и нека је $v \in V$

Тада за $\alpha_i = \frac{v \circ w_i}{|w_i|^2}$ и произвољне $\beta_i \in R$ важи:

$$|v - \sum^{k} \alpha_i w_i| \leq |v - \sum^{k} \beta_i w_i|$$, самим тим и $\mathbf{|v - proj_U(v)| \leq |v - u|}$ $\left(\begin{matrix} U = \mathcal{L}(\{w_1, \dots, w_k\}) \\ u \in U \end{matrix} \right)$

Доказ: Тражена неједнакост је еквивалентна са:

$$|v - \sum \alpha_i w_i|^2 \leq |v - \sum \beta_i w_i|^2 \iff (v - \sum \alpha_i w_i) \circ (v - \sum \alpha_i w_i) \leq (v - \sum \beta_i w_i) \circ (v - \sum \beta_i w_i)$$

$$\iff \cancel{|v|^2} - 2 v \circ \sum \alpha_i w_i + \sum \alpha_i w_i \circ \sum \alpha_i w_i \leq \cancel{|v|^2} - 2 v \circ \sum \beta_i w_i + \sum \beta_i w_i \circ \sum \beta_i w_i$$

$$\iff -2 \sum \alpha_i^2 |w_i|^2 + \sum \alpha_i^2 |w_i|^2 \leq -2 \sum \alpha_i \beta_i |w_i|^2 + \sum \beta_i^2 |w_i|^2$$

$$\iff 0 \leq \sum \alpha_i^2 |w_i|^2 - 2 \sum \alpha_i \beta_i |w_i|^2 + \sum \beta_i^2 |w_i|^2 = \sum (\alpha_i - \beta_i)^2 |w_i|^2$$

Пошто је последњи ред тачан, враћањем уназад добија се тражена неједн.

Беселова неједнакост: Нека је $\{w_1, \dots, w_k\}$ ортонормирани скуп из е.в.п. $(V, \circ)$ и $v \in V$

Тада за $\alpha_i = \frac{v \circ w_i}{|w_i|^2} = v \circ w_i$ важи: $\sum \alpha_i^2 \leq |v|^2$

Доказ: Важи $\sum \alpha_i w_i = proj_U(v)$, где је $U = \mathcal{L}(\{w_1, \dots, w_k\})$

Тада $|proj_U(v)|^2 = \sum \alpha_i w_i \circ \sum \alpha_i w_i = \sum \alpha_i^2$

Такође, $v = proj_U(v) + v'$, где $v' \in U^\perp \Rightarrow v' \perp U \Rightarrow v' \perp proj_U(v)$

$$\Rightarrow |v|^2 = |proj_U(v) + v'|^2 \underset{\text{Питагора}}{=} |proj_U(v)|^2 + |v'|^2 \geq |proj_U(v)|^2 = \sum \alpha_i^2$$

㉞ Симетричне матрице и симетрични оператори

деф. **Матрица** $A \in M_n(K)$ је **симетрична** ако важи : $A^T = A$

Лема 1: Карактеристични полином симетричне матрице $A \in M_n(R)$ има све нуле у R

Доказ: Све нуле φ_A су комплексне

Зато посматрајмо A као да је у $M_n(C)$, тада су нуле φ_A сопс. вр за A, па за сваку нулу λ постоји $X \in C^n$ ткд. $AX = \lambda X$

Желимо да докажемо да $\lambda \in R$.

$\overline{AX} = \overline{\lambda X}$, тј. $A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$ $/^T$ (надвучено је поглашавање да $\in R$)

$\overline{X}^T A^T = \overline{\lambda}\,\overline{X}^T$ $/ A = A^T$

$\overline{X}^T A = \overline{\lambda}\,\overline{X}^T$ $/ \cdot X$

$\overline{X}^T \left(AX\right) = \overline{\lambda}\,\overline{X}^T X \Rightarrow \overline{X}^T \lambda X = \overline{\lambda}\,\overline{X}^T X \Rightarrow \lambda \overline{X}^T X = \overline{\lambda}\,\overline{X}^T X$

$(\lambda - \overline{\lambda})\,\overline{X^T} X = 0$. Знамо да $\overline{X^T} X = [\overline{z_1} \; \overline{z_n}] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_n \end{bmatrix} = |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 > 0$ (за $x \neq 0$)

Зато онда $\lambda - \overline{\lambda} = 0$, тј. $\lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in R$

Лема 2: Различитим сопс. вр. симетричне матрице $A \in M_n(R)$ одговарају ортогонални сопствени вектори

Доказ: Нека су λ_1 и λ_2 разл. сопств. вр. за A и X_1, X_2 одг. сопс. вектори

$AX_1 = \lambda_1 X_1$, $AX_2 = \lambda_2 X_2$

$X_1^T A = \lambda_1 X_1^T$ $/ \cdot X_2$

$\lambda_1 X_1^T X_2 = X_1^T (AX_2) = X_1^T \lambda_2 X_2 = \lambda_2 X_1^T X_2 \Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} X_1^T X_2 = 0$

Дакле, $X_1^T X_2 = 0$, па су та два вектора ортогонална

$\hookrightarrow x_{11} x_{21} + \ldots + x_{1n} x_{2n}$ → скаларни производ

(прочитати следеће питање, па се вратити овде)

Шурова тријангулација: Нека је $A \in M_n(R)$ т.д. су све нуле $\varphi_A(x)$ реалне

Тада постоји ортогонална матрица P т.д. $P^T A P$ је

горње-троугаона матрица

Доказ: Индукцијом по n

(БИ) тривијално

(ИК) $n-1 \to n$ Нека је $A \in M_n(R)$, λ_1 нула од φ_A, $X_1 \in R^n$ одговарајући сопс. век.

и $X_2, \dots, X_n$ колоне такве да је $[X_1, \dots, X_n]$ ортонорм. база за R^n

и P_0 матрица чије су X_i колоне, тј. $P_0 = [X_1 | \dots | X_n]$

$$P_0^T A P_0 = \begin{bmatrix} X_1^T \\ \vdots \\ X_n^T \end{bmatrix} A \, [X_1 \dots X_n] = \begin{bmatrix} X_1^T \\ \vdots \\ X_n^T \end{bmatrix} [\underset{\lambda_1 X_1}{\underset{\parallel}{\boxed{AX_1}}} | \dots | AX_n]$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1^T \lambda_1 X_1 = \lambda_1 \\ X_2^T \lambda_1 X_1 = 0 \end{array}\right\} \to = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & V_1 \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right] = B$$

P_0 је ортогонална матрица $\Rightarrow \varphi_A(x) = \varphi_B(x)$ (јер $A \sim_s B$)

$$\varphi_B(x) = \left|\begin{array}{c|c} \lambda_1 - x & V_1 \\ \hline 0 & \\ & A_1 - xE_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right| = (\lambda_1 - x) \cdot \det(A_1 - xE_{n-1}) = (\lambda_1 - x)\,\varphi_{A_1}(x)$$

↖ Лапласов развој

Значи све нуле $\varphi_{A_1}(x)$ су реалне, па можемо применити (ИХ) на A_1

Дакле, постоји ортог. матрица P_1 т.д. је $P_1^T A P$ горње-троугаона

Узмимо за $P = P_0 \cdot P_1'$, где је $P_1' = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$

$$P^T A P = P_1'^T \overset{B}{\overset{\parallel}{\boxed{P_0^T A P_0}}} P_1' = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & V_1 P_1 \\ \hline 0 & \\ \vdots & P_1^T A_1 P_1 \\ 0 & \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & V_1 & \\ 0 & \lambda_2 & V_2 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

Дакле, пронашли смо P.

Спектрална теорема: Нека је $A \in M_n(R)$ симетрична матрица. Тада постоји ортогонална матрица $P \in M_n(R)$ т.к.д. је $P^T A P$ дијагонална

Доказ: По Л1, све нуле од $p_A(x)$ су реалне

По Т, постоји ортог. матрица P т.к.д. $B = P^T A P$ горње троугаона

$$B^T = (P^T A P)^T = P^T A^T P = P^T A P = B \Rightarrow B \text{ је дијагонална}$$

Посљедица: Нека је $A \in M_n(R)$ симетрична матрица. Тада постоји ортонормирана база за R^n која се састоји од сопс. вектора матрице A (у односу на канонски скаларни производ)

Доказ: Докажимо да колоне матрице P чине такву базу.

- По теореми из сљедећег питања, колоне чине ортонорм. базу (P - ортогонална), т.к.д. довољно је доказати да су колоне сопс. вектори за A)
- Нека је $P = [X_1 \dots X_n]$

(λ_1 - сопс вр.)

$$P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad ; \quad \underbrace{P \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}} = P P^T A P = AP = A [X_1 \dots X_n]$$

$$[X_1 \dots X_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = A [X_1 \dots X_n]$$

$$[\lambda_1 X_1 \quad \dots \quad \lambda_n X_n] = [AX_1 \dots AX_n]$$

$\Rightarrow X_i$ - сопствени вектори

Алгоритам за дијагонализацију симетричне матрице

1. Израчунамо и раставимо $p_A(x)$
2. За сваку сопс. вр. λ одредимо сопствени потпростор V_λ
3. За свако λ изаберемо базу за V_λ и њу ортонормирамо (нпр Г-Ш)
4. Надовежемо све базе из 3. Тако добијамо ортонормирану базу за R^n
5. Матрица P чије су колоне надовезане базе је ортогонална и испуњава услов да је $P^T A P$ дијагонална

Деф. Нека је $L: V \to V$ **линеарни оператор**, где је $(V, \circ)$ е.в.п.

L је **симетричан** ако за $\forall u, v \in V$ $\quad L(u) \circ v = u \circ L(v)$

Теорема: L је симетричан $\Longleftrightarrow$ $[L]_e$ је симетрична (за сваку ортонормирану базу e за V)

Доказ: $L(u) \circ v = u \circ L(v)$

$$\Longleftrightarrow \quad e[L]_e u_e^T \circ e v_e^T = e u_e^T \circ e[L]_e v_e^T$$

$$\left(e u_e^T \circ e v_e^T = u \circ v = (u_e^T)^T \cdot v_e^T \right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad ([L]_e u_e^T)^T v_e^T = (u_e^T)^T ([L]_e v_e^T)$$

$$\Longleftrightarrow \quad u_e [L]_e^T v_e^T = u_e [L]_e v_e^T \qquad (\forall u, v \in V)$$

$$\overset{?}{\Longleftrightarrow} \quad [L]_e^T = [L]_e \qquad (\text{тј } [L]_e \text{ је симетрична})$$

$(\Leftarrow)$ тривијално (помножимо)

$(\Rightarrow)$ Изаберемо $u_e = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0)$ и $v_e = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \ldots, 0)$

$$\left.\begin{aligned} u_e A v_e^T &= u_e A_{\downarrow j} = [A]_{i,j} \\ u_e A^T v_e^T &= u_e A^T_{\downarrow j} = [A^T]_{i,j} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A^T = A \Rightarrow [L]_e = [L]_e^T$$

㉟ Ортогоналне матрице и ортогонални оператори - основна својства

деф. **Матрица** $A \in M_n(R)$ је **ортогонална** ако $A^T = A^{-1}$ (тј. $A^T A = E_n$)

Теорема: Матрица преласка са ортонормиране базе e на базу f је ортогонална акко је f ортонормирана

Доказ: Нека је $P = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ Важи $f = eP$ и $P^T P = E_n$

$$f_k = a_{1k} e_1 + \dots + a_{nk} e_n = \sum^n a_{ik} e_i$$

$$f_k \circ f_l = \sum a_{ik} e_i \circ \sum a_{il} e_l = \sum a_{ik} a_{il}$$

Знамо и $[P^T P]_{kl} = \sum_{i=1}^n a_{ik} a_{il} = f_k \circ f_l = \begin{cases} 1 & , k = l \\ 0 & , k \neq l \end{cases}$

што је еквивалентно ортонормираности базе f

Теорема: Ако су $P, Q \in M_n(R)$ ортогоналне, онда су ортогоналне **1)** P^{-1}
2) PQ

Доказ: **1)** $P^{-1} = P^T \Rightarrow (P^{-1})^T P^{-1} = P P^T = E_n$

2) $P^T P = Q^T Q = E_n \Rightarrow (PQ)^T PQ = Q^T \underbrace{P^T P}_{E_n} Q = Q^T Q = E_n$

Теорема: Ако је $P \in M_n(R)$ ортогонална, онда је $\det(P) \in \{-1, 1\}$

Доказ: $P^T P = E \Rightarrow \det(P^T P) = (\det P)^2 = 1 \Rightarrow \det(P) = \pm 1$

Теорема: $P \in M_n(R)$ је ортогонална акко колоне матрице чине ортонорм. базу за R^n

Доказ: $[P^T P]_{ij} = P_{\downarrow i}^T P_{\downarrow j}$, па је јасно да је P ортогонална акко колоне чине ортонормиран скуп, самим тим и ортонормирану базу

Теорема: Ако је $P \in M_n(R)$ ортогонална $\Rightarrow$ $|PX| = |X|$ за свако $X \in R^n$

Доказ: $|PX|^2 = (PX)^T PX = X^T \boxed{P^T P} X = X^T X = |X|^2$

НАПОМЕНА: $X^T X = X \circ X =$ - често се примењује

деф. Нека је $L: V \to V$ **линеарни оператор**, где је $(V, \circ)$ е.в.п.

L је **ортогоналан** ако $\forall v \in V \quad |L(v)| = |v|$

Теорема: Нека је $L: V \to V$ ортогонални оператор. Тада за све $u, v \in V$ важи:

1) $L(u) \circ L(v) = u \circ v$ (ово је еквивалентно дефиницији)
2) $L(u) \perp L(v) \iff u \perp v$
3) $|L(u) - L(v)| = |u - v|$

Доказ: **1)** $|L(u) + L(v)|^2 = |L(u+v)|^2 = |u+v|^2$

$$\cancel{|L(u)|^2} + 2\, L(u) \circ L(v) + \cancel{|L(v)|^2} = \cancel{|u|^2} + 2\, u \circ v + \cancel{|v|^2}$$

$$\Rightarrow \quad L(u) \circ L(v) = u \circ v$$

2) тривијално из 1) $(L(u) \circ L(v) = 0 = u \circ v)$

3) тривијално из дефиниције

Теорема: Нека је $L: V \to V$ ортогонални оператор и e ортонормирана база за V. Тада је и $L(e)$ ортонормирана база за V.

Доказ: $e = [e_1 \ \ldots \ e_n]$, $L(e) = [L(e_1) \ \ldots \ L(e_n)]$

Довољно је доказати $L(e_i) \perp L(e_j)$: важи због 2) и $e_i \perp e_j$

$|L(e_i)| = 1$: важи по дефиницији и $|e_i| = 1$

Теорема: Нека је $L: V \to V$ линеарни оператор и e ортонормирана база за V. Тада је $[L]_e$ ортогонална матрица акко је L ортогоналан оператор.

Доказ: L - орт. оп. $\iff L(u) \circ L(v) = u \circ v$

$$\iff e[L]_e u_e^T \circ e[L]_e v_e^T = e u_e^T \circ e v_e^T$$

$x^T Y = x \circ y$ $\quad \iff u_e [L]_e^T [L]_e v_e^T = u_e v_e^T$

$$\iff [L]_e^T [L]_e = E \iff [L]_e \text{ - ортогонална}$$

㊱ Ортогонални оператори - канонска матрица

Теорема: Нека је $L: V \to V$ ортогонални оператор, где је (V, φ) е.в.п димензије n

Тада постоји ортонормирана база e за V ткд.

$$[L]_e = \begin{bmatrix} R_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & R_k & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & \pm 1 \end{bmatrix}, \text{ где је } R_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}, \ \theta_i \in R$$

овај део не мора да постоји

Доказ: Индукцијом по n, користимо леме из наставка питања

$n = 1$: $[L]_e = [\pm 1]$ јер су то једине ортогоналне

$n = 2$ директно из Л4

$n-2, n-1 \to n$:

- Л2 $\Rightarrow$ постоји L-инваријантан потпростор U димензије 1 или 2
- Л3 $\Rightarrow$ $U^\perp$ је L-инваријантан и $U \oplus U^\perp = V$
- Л4 $\Rightarrow$ постоји база B_1 за U ткд. $[L|_U]_{B_1}$ облика R_1 или $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- Нека је $G = L|_{U^\perp}$. Пошто је $\dim U^\perp = \dim V - \dim U \in \{n-1, n-2\}$

$\overset{(ux)}{\Rightarrow}$ постоји база B_2 за $U^\perp$ ткд. $[G]_{B_2}$ има жељени облик

и нека је e база добијена надовезивањем B_1 и B_2
(она је ортонормирана јер $B_1 \subseteq U$, $B_2 \subseteq U^\perp$)

$$\text{Тада је } [L]_e = \begin{bmatrix} [L|_U]_{B_1} & 0 \\ 0 & [L|_{U^\perp}]_{B_2} \end{bmatrix}$$

Пермутацијом елемената базе (колона матрице) добијамо жељени облик

осим ако се обе завршавају са -1, али

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{bmatrix}.$$

тако да увек добијамо жељени облик матрице.

Лема 1: Нека је $L: V \to V$ ортогонални оператор и $z \in C$ нула карakт. полинома φ_L

Тада је $z = \cos\theta + 1 \cdot \sin\theta$, $\theta \in R$

Доказ: Нека је $A = [L]_e$ за неку ортонорм. базу за e в.п. V.
По последњој теореми из претх. питања $\Rightarrow$ A је ортогонална и реална матрица

Посматрајмо је, ипак, као комплексну матрицу, тада су све нуле њеног

карак. полинома уједно и сопс. вр, па за $z \in C$ постоји $X \in C^n \setminus \{0\}$ т.д. $AX = zX$

$\bar{A}\bar{X} = \bar{z}\bar{X} \iff A\bar{X} = \bar{z}\bar{X}$ Такође $X^T A^T = zX^T$ $\xleftarrow{T}$

Множењем, добијамо $X^T \boxed{A^T A} \bar{X} = z X^T \bar{z} \bar{X}$

$$X^T \bar{X} = z\bar{z} X^T \bar{X}$$

Пошто је $X^T \bar{X} > 0$, онда је $z\bar{z} = |z|^2 = 1$, па отуда следи тврђење

Лема 2: Нека је $L: V \to V$ ортогонални оператор, где је V в.п. над R, $\dim V \geq 1$

Тада L има барем један **инваријантни потпростор** димензије 1 или 2

Доказ: Нека је e база за V. Исто као пре, $A = [L]_e$ посматрамо као комплексну

Свака нула карак. пол. је сопс. вр. за A, постоји $X \in C^n \setminus \{0\}$ т.д. $AX = \lambda X$

Нека је $X = X_1 + iX_2$ $(X_1, X_2 \in R^n)$: $A(X_1 + iX_2) = (\alpha + i\beta)(X_1 + iX_2)$
$AX_1 + iAX_2 = \alpha X_1 - \beta X_2 + i(\alpha X_2 + \beta X_1)$

Дакле $\begin{cases} AX_1 = \alpha X_1 - \beta X_2 \\ AX_2 = \alpha X_2 + \beta X_1 \end{cases}$, нека је $v = eX_1$, $w = eX_2$

$$\begin{matrix} eAX_1 = \alpha eX_1 - \beta eX_2 \\ eAX_2 = \alpha eX_2 + \beta eX_1 \end{matrix} \iff \begin{matrix} L(v) = \alpha v - \beta w \\ L(w) = \alpha w + \beta v \end{matrix}$$

Нека је $\mathcal{L}(\{v, w\}) = U$ и нека $u \in U$

$u = \gamma v + \delta w \Rightarrow L(u) = L(\gamma v + \delta w) = \alpha\gamma v - \beta\gamma w + \alpha\delta w + \beta\delta v \in U$

$\Rightarrow$ U је инваријантан у односу на L

Такође, јасно је $1 \leq \dim U \leq 2$, јер не могу и v и w бити 0

(иначе би X био 0)

(деф V је инваријантан у односу на L ако је $L(V) \subseteq V$)

Лема 3: Нека је $L\ V \to V$ ортогоналан оператор и $U \leq V$. Тада је

$$U \text{ L-инваријантан} \iff U^{\perp} \text{ L-инваријантан}$$

Доказ: Довољно је доказати један смер, зато што $(U^{\perp})^{\perp} = U$

Дакле знамо $L(U) \subseteq U$, доказујемо $L(U^{\perp}) \overset{?}{\subseteq} U^{\perp}$, ?

$v \in U^{\perp} \Rightarrow L(v) \in U^{\perp}$

тј. за свако $u \in U$ $L(v) \perp u$

Знамо $U \oplus U^{\perp} = V$, а пошто је L изоморфизам $\Rightarrow L(U \oplus U^{\perp}) = L(V) = V$

Са друге стране $L(U \oplus U^{\perp}) = L(U) + L(U^{\perp})$, па је $L(U) + L(U^{\perp}) = V$

Пошто је $L(U) \subseteq U \Rightarrow \dim L(U) \leq \dim U$

По Грасману: $\dim V = \dim(L(U)) + \dim(L(U^{\perp})) - \dim(L(U) \cap L(U^{\perp}))$

$$\dim V \leq \dim(L(U)) + \dim(L(U^{\perp})) \leq \dim U + \dim(L(U^{\perp}))$$

$$\dim V = \dim U + \dim U^{\perp} \leq \dim U + \dim(L(U^{\perp})) \Rightarrow \dim U^{\perp} \leq \dim(L(U^{\perp}))$$

- За $v \in L(U^{\perp})$ важи $v = L(w)$ где $w \in U^{\perp}$
  $u \in L(U)$ важи $u = L(u')$ где $u' \in U$, па $u' \perp w \Rightarrow L(u') \perp L(w)$
  $\Rightarrow v \perp u$

  Следи $L(U)^{\perp} \supseteq L(U^{\perp})$

- Из $L(U) \oplus L(U)^{\perp} = V \Rightarrow \dim V = \dim L(U) + \dim L(U)^{\perp} \leq \dim U + \dim L(U^{\perp})$

- Дакле $\left.\begin{array}{l} L(U)^{\perp} \supseteq L(U^{\perp}) \\ \dim L(U)^{\perp} \leq \dim L(U^{\perp}) \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{L(U)^{\perp} = L(U^{\perp})}$

* Нека је сад $W \leq V \Rightarrow \dim W \leq \dim V$

Пошто је L изоморфизам, $\left.\begin{array}{l} \dim U = \dim L(U) \\ L(U) \subseteq U \end{array}\right\} \Rightarrow U = L(U) \Rightarrow L(U)^{\perp} = U^{\perp}$

Дакле $U^{\perp} = L(U)^{\perp} = L(U^{\perp}) \Rightarrow U^{\perp}$ је L-инваријантан

Лема 4: Нека је $(V, \circ)$ е.в.п димензије 2 и $L: V \to V$ ортогоналан оператор. Тада постоји (бар један) ортонормирана база e за V таква да је $[L]_e$ облика $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ или $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Доказ: За произв. ортонормирану базу e важи $[L]_e^T [L]_e = E$, $[L]_e = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$

$$A^T A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = a^2 + c^2 & (1) \\ 0 = ab + cd & (2) \\ 1 = b^2 + d^2 & (3) \end{cases}$$

(1) Пошто $a^2 + c^2 = 1 \Rightarrow -1 \le a \le 1 \Rightarrow \exists \theta \in R$ $a = \cos\theta$, $c^2 = \sin^2\theta$

$c = \pm\sin\theta$

$\underset{(=\cos(-\theta))}{a = \cos\theta}$, $c = \sin(\pm\theta)$

Изаберимо θ ткд. $a = \cos\theta$, $c = \sin\theta$

(3) Слично бирамо $\varphi \in R$, ткд. $b = -\sin\varphi$, $d = \cos\varphi$

(2) $0 = ab + cd = -\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi = \sin(\theta - \varphi) = 0$

па следи $\varphi = \theta - k\pi$ (тј. два случаја: $\varphi = \theta$ и $\varphi = \theta - \pi$)

То значи да може да буде: $A_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ или $A_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$

За случај A_1: матрица је жељена, па може да се изабере баш база e

За случај A_2: Матрица A_2 је симетрична.

(по питању 34) То значи да је слична дијаг. матрици $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

$$\varphi_{A_2}(x) = \begin{vmatrix} \cos\theta - x & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - x \end{vmatrix} = -\cos\theta^2 + x^2 - \sin\theta^2 = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, па је $A_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Опет, постоји база ткд. је A жељеног облика.

㊲ Изометрије еуклидских векторских простора

деф. Нека је $(V, \circ)$ еуклидски векторски простор.

Изометрија простора V је пресликавање $\beta : V \to V$ ткд

за свако $u, v \in V$ важи $|\beta(u) - \beta(v)| = |u - v|$

Став: **1)** Сваки ортогонални оператор је изометрија

2) Ако је изометрија линеарно пресликавање, онда је β ортогоналан

Доказ: **1)** већ доказано у питању 35 (прва теорема под 3)

2) $|\beta(v)| = |\beta(v) - \beta(0)| = |v - 0| = |v|$

$\uparrow = 0$, пошто је β линеарно

деф. Нека је $(V, \circ)$ е.в.п. и $a \in V$. **Транслација за a** је $\tau_a : V \to V$

задато са $\tau_a(v) = v + a$.

* Јасно, транслација је изометрија

Теорема: Изометрија β е.в.п. $(V, \circ)$ је линеарно пресликавање акко $\beta(0) = 0$

Доказ: $(\Rightarrow)$ по дефиницији лин. пресл.

$(\Leftarrow)$ Доказујемо два својства из деф. лин. пресл.

$$* \; |\beta(u) - \beta(v)| = |u - v| \; /^2 \quad \Rightarrow \quad |\beta(u) - \beta(v)|^2 = |u - v|^2$$

$$(\beta(u) - \beta(v)) \circ (\beta(u) - \beta(v)) = (u - v) \circ (u - v)$$

$$\cancel{|\beta(u)|^2} + \cancel{|\beta(v)|^2} - 2\beta(u) \circ \beta(v) = \cancel{|u|^2} + \cancel{|v|^2} - 2 u \circ v$$

$$\left(\text{за } v = 0 \quad \begin{array}{l} |\beta(u) - \beta(0)| = |u - 0| = |u| \\ |\beta(u) - \underbrace{\beta(0)}_{0}| = |\beta(u) - 0| = |\beta(u)| \end{array} \right\} \Rightarrow |u| = |\beta(u)| \Bigg)$$

$$\Rightarrow \quad \beta(u) \circ \beta(v) = u \circ v$$

по деф.

$$1) \; |\beta(u+v) - \beta(u) - \beta(v)|^2 = (\beta(u+v) - \beta(u) - \beta(v)) \circ (\beta(u+v) - \beta(u) - \beta(v))$$

$$= |\beta(u+v)|^2 + |\beta(u)|^2 + |\beta(v)|^2 + 2\beta(u) \circ \beta(v) - 2\beta(u) \circ \beta(u+v) - 2\beta(u+v) \circ \beta(v)$$

(само се распише)

$$= |u+v|^2 + |u|^2 + |v|^2 - 2(u+v) \circ u - 2(u+v) \circ v + 2(u \circ v) = |u + v - u - v|^2 = 0$$

$$2) \; |\beta(\alpha u) - \alpha\beta(u)|^2 = |\beta(\alpha u)|^2 + |\alpha\beta(u)|^2 - 2\beta(\alpha u) \circ (\alpha\beta(u))$$

$$= |\alpha u|^2 + |\alpha|^2 |u|^2 - 2\alpha (\alpha u) \circ u$$

$$= 2|\alpha|^2 |u|^2 - 2\alpha^2 |u|^2 = 0$$

Теорема: Композиција две изометрије е.в.п. $(V,\circ)$ је изометрија е.в.п. $(V,\circ)$

Доказ: $|(\mathfrak{b}_1\circ\mathfrak{b}_2)(u) - (\mathfrak{b}_1\circ\mathfrak{b}_2)(v)| = |\mathfrak{b}_1(\mathfrak{b}_2(u)) - \mathfrak{b}_1(\mathfrak{b}_2(v))| = |\mathfrak{b}_2(u) - \mathfrak{b}_2(v)| = |u-v|$

најава

* Нека је $\mathfrak{b}: V \to V$ изометрија и $\mathfrak{b}(0) = a$. По претходном $\mathcal{T}_a \circ \mathfrak{b} = L$ је изометрија

Такође, $L(0) = 0 \Rightarrow L$ - лин. пр. $\Rightarrow$ **L - ортогонални оператор**

$$\mathfrak{b}(u) = L(u) + a \quad , \text{тј} \quad \mathfrak{b} = \mathcal{T}_a \circ L$$

Теорема: Свака изометрија $\mathfrak{b}: V \to V$, где је $(V,\circ)$ е.в.п. се може представити као композиција транслације и ортогоналног оператора

Обрнуто, композиција транслације и ортогоналног оператора је изометрија

Доказ: све већ доказано у најави

пр. Одредимо све изометрије у R^2. За њега постоји ортонорм. база $[f_1, f_2]$ у којој $[L]_f$ има неки од наведених облика:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1° R_θ - ротација за θ (спец. случај $\theta = 0 \Rightarrow id$)

2° осна симетрија у односу на f_1

пр. Слично важи и у R^3, ортонорм. базу $[f_1, f_2, f_3]$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

㊳ Дуал векторског простора

деф. Нека је V в.п. над K. **Линеарна форма** је свако линеарно пресликавање **$L: V \to K$** (K посматрамо као векторски простор димензије 1, тј. као K^1)

деф. **Дуал векторског простора** V је **V^*** $= \mathcal{L}(V, K)$

пр. $L: R[x] \to R$ задато са $L(p) = p(1)$

* Нека је $\dim V = n$. Тада је $\mathcal{L}(V,K) = V^* \cong M_{1,n}(K)$, а $\dim M_{1,n}(K) = n$

Пошто су свака два в.п. исте коначне дим. $\cong$, онда је **$V^* \cong V$**

деф. Ако је $e = [e_1, \dots, e_n]$ база за V, онда дефинишемо **$e_1^*, \dots, e_n^*$** $\in V^*$

са **$e_r^*(e_s)$** $= \begin{cases} 1, & r = s \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Ако је $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in V \Rightarrow$ **$e_r^*(v)$** $= \alpha_1 e_r^*(e_1) + \dots + \alpha_r \underbrace{e_r^*(e_r)}_{1} + \dots + \alpha_n e_r^*(e_n)$

$e_r^*(v) = \alpha_r$

па је $v = \sum_{r=1}^{n} e_r^*(v) \cdot e_r$

Због свега, јасно је да је матрица пресликавања e_r^* у бази e $[e_r^*]_e = [0, \dots, \overset{r}{1}, \dots, 0]$

па се зато **e^*** $= [e_1^*, \dots, e_n^*]$ зове **дуална база** у односу на базу e.

Јасно, e^* је база за V^*. Њен елемент e_r^* се зове **r-та координатна форма** у односу на базу e

* Нека је $F \in V^*$, тј. $F: V \to K$ и $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

$F(v) = \alpha_1 \underbrace{F(e_1)}_{\in K} + \dots + \alpha_n \underbrace{F(e_n)}_{\in K} = e_1^*(v)\, F(e_1) + \dots + e_n^*(v)\, F(e_n)$

Дакле **$F(v) = \sum_{r=1}^{n} F(e_r) \cdot e_r^*(v)$** $\in K$

слично као $L(v) = L(e)\, v_e^T$

пр / напомена Нека је $V = Z_2[x]$, $e = [1, x, x^2, \dots]$

$F : Z_2[x] \to Z_2$ које слика тако што $x^k \to \varepsilon_k$

тј. F је одређено низом $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots)$, $\varepsilon_i \in Z_2$

→ Тада важи $F(a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) = a_n \varepsilon_n + \dots + a_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_0$ – то је лин. оп.

Међутим, $V \ncong V^*$ јер $|V| = |N_0|$, $|V^*| = |R|$

㊴ Бидуал векторског простора

деф. За в.п. V над K **бидуал** је $V^{**} = (V^*)^* = \mathcal{L}(\mathcal{L}(V, K), K)$

Ако је $\dim V < +\infty$, онда важи: $V \cong V^* \cong V^{**}$

деф. За $v \in V$, $F: V \to K$ дефинишемо $\hat{v}: V^* \to K$ где $\hat{v}(F) = F(v)$ $(\hat{v} \in V^{**})$

↳ лин. пресл. лин. форма

$P: V \to V^{**}$ где $P(v) = \hat{v}$

Теорема: За сваки в.п. V, $P: V \to V^{**}$ је линеарно и 1-1

Ако је $\dim V < +\infty$, тада је P и 'НА' (самим тим и изоморфизам)

Доказ: * P је линеарно?

Знамо: $P(u+v) = \widehat{u+v}$, $P(u) + P(v) = \hat{u} + \hat{v}$

$$\widehat{u+v}(F) = F(u+v) = F(u) + F(v) = \hat{u}(F) + \hat{v}(F) = (\hat{u} + \hat{v})(F)$$

$$\Rightarrow P(u+v) = P(u) + P(v)$$

* P је 1-1?

$$P(u) = P(v) \Leftrightarrow \hat{u} = \hat{v} \Rightarrow \underline{\underline{\forall F}}\ \hat{u}(F) = \hat{v}(F) \Leftrightarrow F(u) = F(v)$$
$$\Leftrightarrow F(u-v) = 0$$

[свако пресликав. је јед. одређено оним у шта се слика база]

ппс. $u - v \neq 0$, тада постоји база за V која садржи $u-v$

Пошто ово важи за $\forall F$, изаберимо $F: V \to K$, такво да се

$F(e_i) = 0$ (сви остали из базе), $F(u+v) = 1$ ↯

Дакле, ако $P(u) = P(v)$ онда је $u = v$ $\Rightarrow$ P је 1-1

НАПОМЕНА: Уопште не мора овакво F. Само је битно да наместимо да је $F(u-v) \neq 0$. Остали могу како год.

* P је НА $(\dim V < +\infty)$

Довољно је приметити да је свако линеарно 1-1 из V у V аутоматски и НА

$$\rho(P) + \underbrace{\delta(P)}_{0} = \dim V \Rightarrow \rho(P) = \dim V = \dim V^{**} \quad (V \cong V^{**})$$

$0 \to$ због лин. и 1-1, само $L(0) = 0$ и ништа више се не слика у 0

Такође, $\operatorname{Im} L \leq V^{**}$

$\operatorname{Im} L = V^{**} \Rightarrow L$ је НА $\Rightarrow$ L је изоморфизам

Теорема: За сваку базу f дуала V^* в.п. V који је коначне димензије, постоји тачно једна база e в.п. V ткд $f = e^*$

(Другим речима, f је дуална бази e)

Доказ:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, bend left, "P"', "e \to \hat{e}"] & \cong V^* \cong & V^{**} \end{tikzcd}$$

$e \qquad f \rightsquigarrow f^*$

за свако e, $\hat{e}$ је база за V^{**}

за свако f, постоји e ткд. $\hat{e} = f$ (јер је P на)

Нека је $f^* = [f_1^*, \dots, f_n^*]$. Ово је база за V^{**}

Како је $P: V \to V^{**}$ изоморфизам $\overset{(\text{на})}{\,}$, $\exists e_1, \dots, e_n$ $\hat{e}_i = P(e_i) = f_i^*$

Пошто је P изоморфизам $\Rightarrow e = [e_1, \dots, e_n]$ је база за V

Важи $\hat{e}_i(F) = F(e_i) = f_i^*(F)$ (доказ овога доле Δ)

$\hat{e}_i(f_j) = f_j(e_i) = f_i^*(f_j) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

па је $f_j(e_i) = e_j^*(e_i)$. Како су f_j и e_j^* исти на e

то је $f_j = e_j^*$, па је $f = e^*$ (за $e \neq e'$, $e^* \neq e'^*$
па је e јединствено)

Δ $f = e^* \iff f_j(e_i) = e_j^*(e_i) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

$\iff f_j(e_i) = f_i^*(f_j)$

$\|$

$\iff \hat{e}_i(f_j) = f_i^*(f_j)$

f^* је база за V^*, постоји e база за V

ткд $\hat{e}\ (= P(e)) = f^*$

(40) Билинеарне форме

деф. Нека су U и V в.п. над K. Пресликавање $F : U \times V \to K$ је **билинеарна форма** ако важи:

1° $F(u+u', v) = F(u,v) + F(u',v)$; $F(\alpha u, v) = \alpha F(u,v)$

2° $F(u, v+v') = F(u,v) + F(u,v')$; $F(u, \alpha v) = \alpha F(u,v)$

пр. а) $\circ : V \times V \to R$ је билинеарна форма, где је $(V, \circ)$ е.в.п.

б) $F : V \times V^* \to K$ задато са $F(v, H) = H(v)$ је билинеарна форма

Теорема: Скуп $\mathcal{B}(U,V) = \{F : U \times V \to K \mid F \text{ је билинеарна форма}\}$ је в.п. над K

Доказ: докажемо 8 својстава из дефиниције. Користимо стандардне + и ·

* Нека су $e = [e_1, \dots, e_m]$ и $f = [f_1, \dots, f_n]$ редом базе за U и V.
Нека је $F : U \times V \to K$ билинеарна форма

$u = \sum x_i e_i$, $v = \sum y_i f_i$

$$F(u,v) = F\left(\sum x_i e_i, \sum y_j f_j\right) = \sum_i^m \sum_j^n x_i y_i \underbrace{F(e_i, f_j)}_{a_{ij}} \quad , \ 1 \le i \le m \ , \ 1 \le j \le n$$

Нека је $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$. Тада $X = [x_1 \dots x_m]^T = u_e^T$
$Y = [y_1 \dots y_n]^T = v_f^T$

Дакле $F(u,v) = X^T A Y = u_e A v_f^T$ (*)

деф. Матрица A се назива **матрица билинеарне форме** F у односу на пар база (e, f).

Означава се са $[F]_{e,f} = A$

НАПОМЕНА: Обрнуто, за дато A одређена је билин. форма дата са $F(u,v) = u_e A v_f^T$

* Нека су e и g базе за U, f и h базе за V и $g = eP$, $h = fQ$

P, Q су инвертибилне и за $u \in U$, $v \in V$ важи $u_e^T = P u_g^T$ и $v_f^T = Q v_h^T$

$$\left.\begin{aligned} F(u,v) &= u_e [F]_{e,f} v_f^T = u_g [F]_{g,h} v_h^T \\ &= \left(\left(P u_g^T\right)^T\right) [F]_{e,f} \left(Q v_h^T\right) = u_g P^T [F]_{e,f} Q v_h^T \end{aligned}\right\} \Rightarrow [F]_{g,h} = P^T [F]_{e,f} Q$$

Специјално, постоје P и Q, самим тим и базе g и h ткд.

$$[F]_{g,h} = A_0 = \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{k} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \Big\} k \quad \text{и при томе} \quad \rho(A_0) = \rho(A)$$

деф. Број k назива се **ранг билинеарне форме**

Теорема: Ако билинеарна форма $F: U \times V \to K$ није нула, тада је њен ранг једини природан број k за који постоји пар база $e = [e_1, \dots, e_m]$, $f = [f_1, \dots, f_n]$ за U, V редом ткд. $F(u,v) = x_1 y_1 + \dots + x_k y_k$, где је $u = \sum^m x_i e_i$, $v = \sum^n y_j f_j$

Доказ: За пар база (e', f'), важи $[L]_{e,f} \sim [L]_{e',f'}$ па имају исти ранг, тј. исто k

Приметимо да за базе e, f важи

$$F(u,v) = x_1 y_1 + \dots + x_k y_k \quad \text{за} \quad u = \sum x_i e_i, \quad v = \sum y_j f_j$$

$$\Updownarrow$$

$$[F]_{e,f} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \qquad F(e_i, f_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

㊶ Симетричне билинеарне форме

деф. Нека је V в.п. над K. Пресликавање $F : V \times V \to K$ је **симетрична билинеарна форма** ако је F билин. форма и $F(u,v) = F(v,u)$ $\forall u,v \in V$

- * Ако је g база за V и $g = eP$, тада важи $[F]_g = P^T [F]_e P$
- * Како је на месту (i,j) матрице $[F]_e$ елемент $F(e_i, e_j) = F(e_j, e_i)$ то значи да је **матрица $[F]_e$ симетрична**

Став: За $u,v \in V$ важи: $2F(u,v) = F(u+v, u+v) - F(u,u) - F(v,v)$

Доказ: $F(u+v, u+v) = F(u+v, u) + F(u+v, v) = F(u,u) + F(v,u) + F(u,v) + F(v,v)$

$\Rightarrow F(u+v, u+v) - F(u,u) - F(v,v) = F(u,u) + 2F(u,v) + F(v,v) - F(u,u) - F(v,v) = 2F(u,v)$

деф. **Карактеристика** поља K је најмањи број $n \in \mathbb{N}$ ткд. $n \cdot a = a + \ldots + a = 0$ $(\forall a \in K)$

Ако не постоји, кажемо да је карактеристике 0. Ознака је **char K**

Теорема: Ако је F симетрична билинеарна форма на V, $\dim V < +\infty$, V је в.п. над K и $\operatorname{char} K \neq 2$. Тада постоји база $e = [e_1, \ldots, e_n]$ за V ткд. $F(e_r, e_s) = 0$ $(r \neq s)$

Доказ: пп. $F \neq 0$ и $\dim V \geq 1$. Доказ потпуном индукцијом по $n = \dim V$

(БИ) ✓

(ИК) $W = \{ w \in V \mid F(e_1, w) = 0 \}$, јасно $W \leq V$, па $\dim W < \dim V$

$<n \to n$

$\hookrightarrow e_1 \neq 0$, ткд. $F(e_1, e_1) \neq 0$ (иначе $F = 0$)

$\overset{(ИХ)}{\Rightarrow}$ за $G = F|_{W \times W}$ постоји база $[e_2, \ldots, e_m]$ тд. $G(e_i, e_j) = F(e_i, e_j) = 0$

- Покажимо да је баш $[e_1, \ldots, e_m] = e$ база за V

* Како је $m-1 = \dim W \leq \dim V - 1 = n-1 \Rightarrow m \leq n$
То значи да овај систем има највише n елемената

Зато је довољно доказати да је e генератриса за V

$\Leftrightarrow \forall v \in V\ \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$ $\quad v = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m$

(исто и за остале) $\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \in K$ $\quad v = \alpha_1 e_1 \in W \Leftrightarrow F(e_1, v - \alpha_1 e_1) = 0$

$\Leftrightarrow 0 = F(e_1, v) - \alpha_1 F(e_1, e_1)$,

Дакле довољно је узети $\alpha = F(e_1, v) \cdot F(e_1, e_1)^{-1}$

Последица: Тада је $[F]_e = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{bmatrix}$, где је $\alpha_i = F(e_i, e_i)$

Такође важи: $F(u,v) = \sum x_i y_i \alpha_i$, где је $u = \sum x_i e_i$, $v = \sum y_i e_i$

Теорема: За симетричну матрицу $A \in M_n(K)$, $\text{char}\, K \neq 2$, постоји инвертибилна матрица P ткд $P^T A P$ је дијагонална

㊷ Квадратне форме

НАПОМЕНА: Свуда важи $\mathrm{char}\, K \neq 2$

деф. **Квадратна форма** је пресликавање $\Phi : V \to K$ ткд. важи:

1) $\Phi(\alpha u) = \alpha^2 \Phi(u)$

2) $F_0 : V \times V \to K$ задато са $F_0(u,v) = \Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v)$ је билинеарна форма

Јасно, $F(u,v) = \frac{1}{2} F_0(u,v) = \frac{1}{2}\left(\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v)\right)$ је симетрична билин. форма

и важи $F(u,u) = \Phi(u)$

Теорема: $\mathbf{Q(V,K)} = \{ \Phi : V \to K \mid \Phi \text{ је кв. форма} \}$ је векторски простор над K

Доказ: Докажемо 8 својстава из деф. в.п.

Теорема: Φ је квадратна форма акко постоји симетрична билин. форма F

ткд. $\Phi(u) = F(u,u)$, $\forall u \in V$

Доказ: $(\Rightarrow)$ већ доказано (након деф.)

$(\Leftarrow)$ Доказујемо 2 својства из деф кв. форме

1° $\Phi(\alpha u) = F(\alpha u, \alpha u) = \alpha^2 F(u,u) = \alpha^2 \Phi(u)$

2° $F_0(u+v) = F(u+v, u+v) - F(u,u) - F(v,v) = 2F(u,v)$

$F_0 = 2F$ јесте сим. бил. форма (пошто F јесте)

Деф. **Матрица квадратне форме** је $\mathbf{[\Phi]_e} = [F]_e$

* Нека је $u = \sum^{n} x_i e_i$ и нека је $[\Phi]_e = [a_{ij}]$

$$\mathbf{\Phi(u) =} F(u,u) = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} x_i x_j$$

Теорема: (Важи и обрнуто) Пресликавање Φ задато са (*) је квадратна форма

Доказ: Доказујемо 2 својства из деф. кв. форме

1° $\Phi(\alpha u) = \sum a_{ii} (\alpha x_i)^2 + 2 \sum a_{ij} (\alpha x_i)(\alpha x_j) = \alpha^2 \Phi(u)$

2° Доказујемо 2 својства из деф. билинеарне форме (за F_0)

(своди се на расписивање суме и прегруписање чланова)

Теорема: За произвољну квадратну форму $\Phi : V \to R$, V је в.п. над R, постоји ортогонална матрица P т.д. $\Phi(u) = \sum^{n} \alpha_i x_i^2$, $u = \sum^{n} x_i f_i$, $u_f^T = P u_e^T$

где су α_i сопствене вредности матрице $[\Phi]_e$

Доказ

(43.) Дефинитне (реалне) квадратне форме; сигнатура.

деф. Квадратна форма $\phi: V \to R$ је **позитивно дефинитна** ако: $\forall u \in V \setminus \{0\}$ $\phi(u) > 0$

негативно дефинитна $\phi(u) < 0$

Теорема: Ако је e база за V ткд. $[\phi]_e$ дијагонална, тада је

ϕ позитивно дефинитна акко су све вредности $[\phi]_e$ на дијагонали позитивне

НАПОМЕНА: Аналогно важи за негативне

Доказ: $\phi(u) = \sum \alpha_i x_i^2$, $u = \sum x_i e_i$

$(\Rightarrow)$ Изаберемо $u = e_i$, јер $\phi(e_i) = \alpha_i > 0 \Rightarrow \alpha_i > 0$

$(\Leftarrow)$ $\phi(u) = \sum \underbrace{\alpha}_{>0} \underbrace{x_i^2}_{\geq 0} \geq 0$, а једнакост би важила $x_1 = \ldots = x_n = 0$

(али по деф. нула вектор нас не занима)

деф. За матрицу $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ означимо са $A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$

Теорема: Нека је $\phi: V \to R$ $(\dim V = n)$ квадратна форма, e је база за V и $[\phi]_e = A$.

1) ϕ позитивно дефинитна $\iff \det A^{(k)} > 0$, $1 \leq k \leq n$

2) ϕ негативно дефинитна $\iff (-1)^k \det A^{(k)} > 0$, $1 \leq k \leq n$

Доказ: **1)** $(\Rightarrow)$ Постоји матрица P тд. $P^T \overbrace{[\phi]_e}^{A} P$ има само ± 1 и 0 на главној дијаг.

Како је ϕ поз. дефинитно, ова матрица има само $+1$

$P^T A P = E_n \Rightarrow 1 = \det E = \det(P)^2 \det A \Rightarrow \det A > 0$

Нека је $g = [e_1, \ldots, e_k]$, $U = \mathcal{L}(g)$, $\psi = \phi|_U$

ψ је такође поз. деф, па по претходном $\det(A^{(k)}) > 0$

(⇐) Доказ индукцијом по n

(БИ) $\phi(u) = \underbrace{\alpha_1}_{>0} \underbrace{x_1^2}_{>0} > 0$

(ИК) Нека је $e = [e_1, \ldots, e_n]$ и $g = [e_1, \ldots, e_{n-1}]$. $U = \mathcal{L}(g)$ и $\psi = \phi|_U$

Јасно, за $B = [\psi]_g$ важи $B^{(i)} = A^{(i)}$ за $1 \le i \le n-1$

$\overset{(\text{их})}{\Longrightarrow}$ ψ поз. дефинитна $\Rightarrow \exists f = [f_1, \ldots, f_{n-1}]$ за U т.к. $[\psi]_f = E$

- Посматрејмо $v \in V \setminus U$, тада $\bar{f} = [f_1, \ldots, f_{n-1}, v]$ база за V и важи

$$C = [\phi]_{\bar{f}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \\ \hline \alpha_1 & \cdots & & \alpha_n \end{array}\right]$$

Како је $[\phi]_{\bar{f}} = P^T [\phi]_{\bar{f}} P$, тј. $C = P^T A P$ (за неку матрицу P

$\Rightarrow \det C = \det(P)^2 \det A > 0$

$$\det \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \alpha_1 \\ & \ddots & & \alpha_2 \\ & & 1 & \vdots \\ \hline \alpha_1 & \cdots & & \alpha_n \end{array}\right] = \det \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{array}\right] = \lambda_n > 0$$

$\lambda_n = \alpha_n - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \ldots - \alpha_{n-1}^2 > 0 \Rightarrow \alpha_n > 0$

а важи $\phi(v) = \alpha_n > 0 \Rightarrow \phi(w) > 0$ за $w \in V \setminus \{0\}$

2) ϕ нег. деф. $\Leftrightarrow -\phi$ поз. деф

$\Leftrightarrow \det B^{(k)} > 0 \quad B = -A$

$\Leftrightarrow \det B^{(k)} = (-1)^k \det A^k > 0$

деф. Нека је $\phi: V \to R$ квадратна форма. Нека је p највећи ненегативан цео број ткд постоји $U \leq V$, $\dim U = p$ за које за $\forall u \in U \setminus \{0\}$ $\phi(u) > 0$

Позитивна сигнатура од ϕ је $p^+(\phi) = p$

деф. **Негативна сигнатура** од ϕ је $p^-(\phi) = q$ (аналогна деф.)

деф. **Сигнатура** од ϕ је пар (p,q)

Теорема: Ако је $\phi \cdot V \to R$ квадратна форма в.п. V над R, $\dim V = n$, тада је њена сигнатура једини пар $(p,q) \in N_0^2$ за који постоји база e ткд

$$(\#) \qquad \phi(u) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2 \qquad (\text{за свако } u = \sum^n x_i e_i)$$

Доказ: Нека је e база која испуњава (#).

Довољно је доказати $p = p^+(\phi)$, $q = p^-(\phi)$

- Посматрајмо $U = \mathcal{L}(\{e_1, \dots, e_p\})$. По (#) $\phi(u) > 0$ (за $u \in U \setminus \{0\}$)

$$\Rightarrow \dim U = p \leq p^+(\phi)$$

Нека је $U_0 \leq V$ ткд. је ϕ поз. дефинитна на U_0 и $\dim U_0 = p^+(\phi)$

Нека је $W = \mathcal{L}(\{e_{p+1}, \dots, e_n\})$. Тада за све $w \in W$ важи $\phi(w) \leq 0$

$$\Rightarrow W \cap U_0 = \{0\}$$

Важи: $\dim W + \dim U_0 = n \underbrace{- p + p^+(\phi)}_{\geq 0} \geq n = \dim V$

Због тога $p^+(\phi) = p$

(Слично и за q)