Геометрија 3

Јован Самарџић, 13/2019
Дуња Прокић, 18/2019

Професорка: Мирјана Ђорић

- 🟥 - дефиниције
- 🟪 - ознаке
- 🟧 - теореме
- 🟦 - докази
- 🟩 - примери

Година курса: 2021/22

Молим да ми све грешке пријавите преко мејла или друштвених мрежа.

Сви докази који фале могу се наћи у професоркиној скрипти.

$\boxed{1.}$ Криве - основне дефиниције и примери

деф. Диференцијабилна параметризована крива у R^n $(n>1)$ класе C^k $(k\geqslant 1)$ је C^k пресликавање $\alpha : I \to R^n$ отвореног интервала $I \subset R$.

деф. Крива α је регуларна ако $\alpha'(t) \neq 0$, за $\forall t \in I$.
Овај услов нам говори да крива има тангенту у свакој својој тачки.

деф. Променљива t зове се параметар.
Интервал I зове се домен.
Скуп $\{\alpha(t) : t \in I\} := \operatorname{Im} \alpha$ зове се траг криве.

деф. Векторско поље / поље вектора дуж криве α је функција Y која свакој $t \in (a,b)$ додељује вектор $Y(t) \in R^n$ у тачки $\alpha(t)$.

деф. Поље вектора брзине је $\alpha'(t)$.

Вектор брзине криве α у t_0 је $\alpha'(t_0)$.

Брзина криве α у t_0 је интензитет вектора брзине криве α у t_0.

Брзина криве α је функција $v(t) := \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\alpha' \circ \alpha'}$.

Крива α је јединичне брзине ако $\|\alpha'(t)\| = 1$, $t \in I$. $\left(\frac{d\alpha}{dt} = (\alpha_1'(t), \dots, \alpha_n'(t))\right)$

Примери:
1) права: $\alpha(t) = (x_0 + u_1 t,\ y_0 + u_2 t,\ z_0 + u_3 t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$
2) парабола: $\alpha(t) = (t, t^2)$, $t \in (-\infty, +\infty)$
3) кружница: $\alpha(t) = (r\cos t,\ r\sin t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, $r > 0$
4) елипса: $\alpha(t) = (a\cos t,\ b\sin t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, $a>0$, $b>0$
5) хеликс: $\alpha(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, $a>0$

⋮

деф. Функција $\phi: (c,d) \to (a,b)$ је дифеоморфизам класе C^k ако: 1) ϕ је бијекција;
2) ϕ, ϕ^{-1} су диф. ф-је класе C^k.

деф. Регуларне параметризоване криве $\alpha: (a,b) \to R^n$ и $\beta: (c,d) \to R^n$ класе C^k су еквивалентне ако постоји дифеоморфизам $\phi: (c,d) \to (a,b)$ класе C^k ткд. $\beta = \alpha \circ \phi$.

Пишемо $\alpha \sim \beta$.

У букв. смислу, ово значи да две криве имају исти траг.

Јасно, ако је α регуларна параметризована крива класе C^k и $\alpha \sim \beta$, онда је и β регуларна параметризована крива класе C^k.

Лема 1: Релација $\sim$ је релација еквиваленције.

Доказ: (P) id (јесте дифеоморфизам)

(С) ϕ^{-1} (јесте дифеоморфизам)

(Т) $\phi_2 \circ \phi_1$ (јесте дифеоморфизам)

деф. Класа еквив. ове релације је регуларна диференцијабилна непараметризована крива.
Често кажемо само регуларна крива или чак само крива.

деф. Крива β је позитивна репараметризација криве α ако $\alpha \sim \beta$ и $\phi' > 0$.
Крива β је негативна репараметризација криве α ако $\alpha \sim \beta$ и $\phi' < 0$.

Лема 2: Нека је β репараметризација криве α. Тада је:

$$\beta'(u) = \underbrace{\phi'(u)}_{\text{обична функција}} \cdot \underbrace{\alpha'(\phi(u))}_{\text{векторска функција}}.$$

Доказ: тривијално (извод сложене функције)

За неко својство криве кажемо да је геометријско ако не зависи од параметризације или ако само зависи од избора оријентације.

деф. Тангентно векторско поље на регуларну криву $\alpha(t)$ је поље вектора $T(t) := \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$.

деф. Тангентни вектор криве α у t_0 је $T(t_0) = \frac{\alpha'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\|}$.

Лема 3: Нека је β репараметризација криве α. Тада је:

$$T_\beta(t) = \pm T_\alpha(\phi(t)).$$ (разликују се до на знак)

Доказ: $T_\beta(t) = \frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|}$, $\quad T_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$.

$$\beta(t) = \alpha(\phi(t)) \quad \Rightarrow \quad \|\beta'(t)\| \overset{л2}{=} \|\phi'(t)\, \alpha'(\phi(t))\| = |\phi'(t)| \cdot \|\alpha'(\phi(t))\|.$$

Када то убацимо: $$T_\beta(t) = \boxed{\frac{\phi'(t)}{|\phi'(t)|}}\,\boxed{\frac{\alpha'(\phi(t))}{\|\alpha'(\phi(t))\|}} = \underline{\operatorname{sgn} \phi(t)} \cdot \underline{T_\alpha(\phi(t))} = \pm T_\alpha(\phi(t)).$$

деф. Тангентна линија / тангента на регуларну криву α у тачки t_0 је права

$$l := \{\omega \in R^3 \mid \omega = \alpha(t_0) + s \cdot T(t_0), \quad s \in R\}.$$

$\boxed{2.}$ Дужина лука и природна параметризација

деф. **Дужина лука** регуларне криве $\alpha : (c,d) \to \mathbb{R}^n$ на интервалу $[a,b] \subset (c,d)$ је

$$L(\alpha) := \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt.$$

Теорема 1: Нека је β репараметризација криве α. Тада је $L(\alpha) = L(\beta)$.

Доказ: $L(\beta) = \int_c^d \|\beta'(t)\|\, dt = \int_c^d |\phi'(t)| \cdot \|\alpha'(\phi(t))\|\, dt$

1° $\phi'(t) > 0$: $L(\beta) = \int_c^d \phi'(t) \cdot \|\alpha'(\phi(t))\|\, dt \overset{\text{смена}\ \phi(t)=u}{=} \int_a^b \|\alpha'(u)\|\, du = L(\alpha).$

2° $\phi'(t) < 0$: $L(\beta) = \int_c^d (-\phi'(t)) \cdot \|\alpha'(\phi(t))\|\, dt \overset{\text{смена}\ \phi(t)=u}{=} -\int_b^a \|\alpha'(u)\|\, du = \int_a^b \|\alpha'(u)\|\, du = L(\alpha).$

деф. **Угао између кривих** α и β је угао између вектора α' и β' у пресечној тачки.

деф. Фиксирајмо $c \in (a,b)$. **Функција дужине лука** са почетком у c рег. криве $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ је

$$s_\alpha(t) := \int_c^t \|\alpha'(u)\|\, du, \qquad c \le t \le b.$$

Лема 1: $s_\alpha'(t) = \|\alpha'(t)\| = v(t).$

Доказ: тривијално

Лема 2: Нека је $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ рег. крива и β њена репараметризација ϕ-јом $s_\alpha(t)$.

Тада је $\|\beta'(s_\alpha(t))\| = 1.$

Доказ: Знамо: $\alpha(t) = \beta(s_\alpha(t))$, самим тим $\alpha'(t) = \beta'(s_\alpha(t)) \cdot s_\alpha'(t)$

Одавде: $\|\alpha'(t)\| = \|\beta'(s_\alpha(t))\| \cdot |s_\alpha'(t)| \Rightarrow \|\beta'(s_\alpha(t))\| = \dfrac{\|\alpha'(t)\|}{|s_\alpha'(t)|} \overset{\text{Л1}}{=} 1.$

Теорема 2: Нека је $\alpha : (a,b) \to R^n$, $n = 2, 3$, рег. крива.
Тада постоји њена репараметризација чија је брзина јединична.

Доказ:

$$\left.\begin{array}{l} * \text{ По Л1, } \quad s'(t) = \|\alpha'(t)\| \\ \alpha \text{ рег. } \Rightarrow \|\alpha'(u)\| \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall t \in (a,b) \quad s'(t) > 0 \quad \Rightarrow \quad s \text{ - строго растућа.}$$

Пошто је s строго растућа ф-ја на (a,b) $\Rightarrow$ s је бијекција $\Rightarrow$ $\exists \phi := s^{-1} : R \to R.$

* Параметризујмо криву α функцијом ϕ. Тиме смо добили криву β.

Означимо са $s(t) = y$, тј. $\phi(y) = t$. Пошто је $\phi(y) = s^{-1}(y)$ $\Rightarrow$ $\phi'(y) = \frac{1}{s'(y)} \overset{Л1}{=} \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}.$

Такође: $\beta'(y) = \phi'(y) \cdot \alpha'(\phi(y)) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \cdot \alpha'(t).$

Одавде очигледно следи: $\|\beta'(y)\| = 1.$

деф. За криву $\beta(t) = \alpha(s_\alpha^{-1}(t))$ из Т2 кажемо да је **природно параметризована.**

Напомене:

1) За њу важи $v(t) = \|\beta'(t)\| = 1.$

2) У овом случају, $s(t)$ букв. мери пређени пут.
(Ако се параметар помери за t на (a,b), пређи ће пут $s(t)$ на кривој)

Тада се параметар назива **природни параметар** и означава се са **s**, тј. пишемо $\beta(s)$.

3) $T(s) = \beta'(s).$

Теорема 3: 1) За функцију дужине лука рег. криве $\beta:(c,d)\to R^n$ јединичне брзине важи:

$$s(t) = t - c.$$

2) Нека су $\beta(s)$, $\gamma(\tilde{s})$ две природне параметризације рег. криве $\alpha:(a,b)\to R^n$.

Тада важи: $\tilde{s} = \pm s + C$ $(C = const)$ и $\beta'' = \gamma''$.

Доказ: 1) Тривијално $\left(v = \|\alpha'(t)\| = 1 \Rightarrow s_\alpha(t) = \int_c^t \|\alpha'(u)\| du = \int_c^t 1\, du = t - c\right)$

2) * По услову теореме: $\|\beta(s)\| = \|\gamma(\tilde{s})\| = 1.$

Како су и β и γ параметризације α $\Rightarrow$ $\beta \sim \gamma$.
То значи да постоји дифеоморфизам φ ткд. важи: $\beta(s) = \gamma(\varphi(s)) = \gamma(\tilde{s})$.

$$\Rightarrow \beta'(s) = \gamma'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) \Rightarrow \underbrace{\|\beta'(s)\|}_{1} = \underbrace{\|\gamma'(\varphi(s))\|}_{1} \cdot \|\varphi'(s)\| \Rightarrow |\varphi'(s)| = 1.$$

Одавде: $\varphi'(s) = \pm 1 \Rightarrow \varphi(s) = \pm s + C \Rightarrow \tilde{s} = \pm s + C.$

$$* \quad \beta''(s) = (\gamma(\varphi(s)))'' = (\gamma'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s))'$$

$$= \gamma''(\varphi(s)) \cdot \underbrace{(\varphi'(s))^2}_{1} + \gamma'(\varphi(s)) \cdot \underbrace{\varphi''(s)}_{0} = \gamma''(\varphi(s)) = (\gamma(\tilde{s}))''.$$

Последица: Нека су $\alpha:(a,b)\to R^n$, $\tilde{\alpha}:(c,d)\to R^n$ две природне параметризације рег. криве.

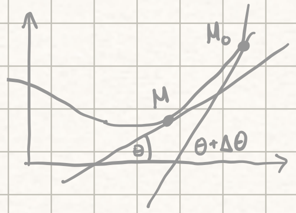
Тада је: $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(\pm s + s_0).$

3.

Кривина и торзија криве. Френе-Сереове формуле

деф. Нека је $\alpha : (a,b) \to R^n$ природно параметризована крива са природним параметром s. Кривина криве α је функција:

$$\kappa(s) := \|\alpha''(s)\|.$$



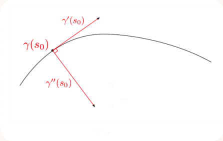
Интуитивно, кривину криве у равни R^2 можемо посматрати као брзину промене угла θ при равномерном кретању тачке M по кривој.

Лема 1: Ако је X векторско поље константне дужине, тј. $\|X(t)\| = c$, $c = const$, тада је X ортогонално на свој извод.

Доказ: $\|X(t)\| = c \quad \Rightarrow \quad \|X(t)\|^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad X(t) \circ X(t) = c^2 \quad /'$

$\Rightarrow \quad X'(t) \circ X(t) + X(t) \circ X'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\, X'(t) \circ X(t) = 0$

$\Rightarrow \quad X'(t) \circ X(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(t) \perp X(t).$



Последица: Нека је α природно параметризована крива. Тада је $\alpha'(s) \circ \alpha''(s) = 0$, за свако s.

Доказ: Природно параметризовано $\Rightarrow \|\alpha'(s)\| = 1 \overset{Л1}{\Rightarrow} \alpha' \perp \alpha'' \Rightarrow \alpha' \circ \alpha'' = 0.$

деф. Нека је $\alpha : (a,b) \to R^n$ природно парам. крива са прир. парам. s и $\kappa(s) \neq 0$, $\forall s \in (a,b)$.

Векторско поље главних нормала криве α је $N(s) := \dfrac{\alpha''(s)}{\kappa(s)}$.

Векторско поље бинормала криве α је $B(s) := T(s) \times N(s)$, за $n = 3$.

Торзија криве α је функција $\tau(s) := -B'(s) \circ N(s)$.

Напомена: За природно параметризоване криве $\alpha : (a,b) \to R^3$ важи $\alpha''(s) = T'(s)$, па због тога је $\kappa(s) := \|\alpha''(s)\| = \|T'(s)\|$, па због та два:

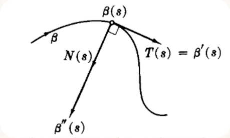
$$N(s) := \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}. \qquad (*)$$

Лема 2: Нека је $\alpha : (a,b) \to R^3$ природно параметризована крива и $\kappa(s) \neq 0$, $\forall s \in (a,b)$.
Тада су векторска поља $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ јединична и ортогонална, $\forall s \in (a,b)$.

Уз то, важи: $B(s) = T(s) \times N(s)$, $N(s) = B(s) \times T(s)$, $T(s) = N(s) \times B(s)$.

Доказ: По деф: $B(s) \perp T(s)$ и $B(s) \perp N(s)$.
Због последице Л1 и напомене: $T(s) \perp N(s)$, па су сви ортог.

Очигледно су и јединични. (због прир. парам.)



деф. Поље $[T(s), N(s), B(s)]$ ортонормираних база криве α називамо **Френеово поље репера.**

Теорема 1 (Френе-Сереове формуле):

Нека је $\alpha : (a,b) \to R^3$ природно параметризована крива и $\kappa(s) \neq 0$, $\forall s \in (a,b)$. Тада важи:

$$\begin{array}{lrcccl}
1) & T'(s) & = & & \kappa(s)\,N(s) & ; \\
2) & N'(s) & = & -\kappa(s)\,T(s) & & + \tau(s)\,B(s); \\
3) & B'(s) & = & & -\tau(s)\,N(s) & .
\end{array}$$

Доказ: 1) Из (*): $N(s) = \dfrac{T'(s)}{\kappa(s)} \Rightarrow T'(s) = \kappa(s)\,N(s)$.

3) По деф. торзије: $\tau(s) = -B'(s) \circ N(s) \overset{/\circ N(s)}{\Longrightarrow} -B'(s) = \tau(s) \circ N(s)$

$\Rightarrow B'(s) = -\tau(s) \circ N(s)$.

2) Пошто је $[T, N, B]$ база: $N'(s) = a(s) \cdot T(s) + b(s) \cdot N(s) + c(s) \cdot B(s)$.

Из (*): $\|N(s)\| = 1 \overset{Л1}{\Longrightarrow} N'(s) \perp N(s) \Rightarrow N'$ припада равни $T, B \Rightarrow b(s) = 0$.

Сада је: $N'(s) = a(s) \cdot T(s) + c(s) \cdot B(s)$. $\quad /\circ T(s) \quad /\circ B(s)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(s) = N'(s) \circ T(s) & \text{(пошто су јединични и ортогонални)} \\ c(s) = N'(s) \circ B(s) & \text{(пошто су јединични и ортогонални)} \end{cases}$$

Посматрајмо: $N(s) \circ T(s) = 0 \overset{|'}{\Longrightarrow} N'(s) \circ T(s) + N(s) \circ T'(s) = 0$;

$\Rightarrow N'(s) \circ T(s) + \underbrace{N(s) \circ N(s)}_{1}\,\kappa(s) = 0 \Rightarrow N'(s) \circ T(s) = -\kappa(s)$.

Дакле, $a(s) = -\kappa(s)$.

Аналогно: $N(s) \circ B(s) = 0 \overset{|'}{\Longrightarrow} N'(s) \circ B(s) + \underbrace{N(s) \circ B'(s)}_{-\tau(s)} = 0 \Rightarrow N'(s) \circ B(s) = \tau(s)$.

Дакле, $c(s) = \tau(s)$.

Одавде следи тражена једнакост.

Теорема 2: Нека је $\alpha : (a,b) \to R^3$ природно параметризована крива

1) Ако је $\kappa(s) = 0$, тада је α део праве.

2) Ако је $\kappa(s) \neq 0$, тада су следећи услови еквивалентни:

- а) α је раванска крива;
- б) B је константан вектор;
- в) $\tau(s) = 0$, за све $s \in (a,b)$.

Доказ: 1) Нека је $\kappa(s) = 0 \overset{\text{деф.}}{\Rightarrow} \|\alpha''(s)\| = 0 \Rightarrow \alpha''(s) = 0$

$\Rightarrow \alpha'(s) = c \Rightarrow \alpha(s) = c \cdot s + d \Rightarrow \alpha$ - део праве.

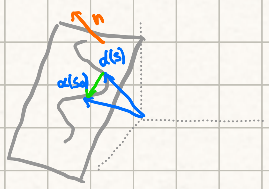
2) **(б⇒в)** $B(s) = const$ (увек има исте координате)

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow B'(s) = 0 \\ \tau(s) = -B'(s) \circ N(s). \end{array}\right\} \Rightarrow \tau(s) = 0.$$

(в⇒б) $\tau(s) = 0$

$B'(s) = -\tau(s) \cdot N(s) = 0 \Rightarrow B'(s) = const.$

(а⇒б) Знамо да је α пр. парам. раванска крива.
Нека је вектор нормале те равни вектор $n(n_1, n_2, n_3) \neq 0$.



Фиксирајмо $s_0 \in (a,b)$. Тада $\forall s \in (a,b)$ важи: $(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \perp n$

Важи: $(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \circ n = 0 \overset{/'}{\Rightarrow} \alpha'(s) \circ n + \underbrace{(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \circ n'}_{0} = 0$

$\overset{T=\alpha'}{\Rightarrow} T(s) \circ n = 0 \overset{/'}{\Rightarrow} T'(s) \circ n + \underbrace{T(s) \circ n'}_{0} = 0 \Rightarrow T'(s) \circ n = 0$

$\overset{T1}{\Rightarrow} \kappa(s) N(s) \circ n = 0 \overset{/:\kappa}{\Rightarrow} N(s) \circ n = 0 \overset{/'}{\Rightarrow} N'(s) \circ n = 0$

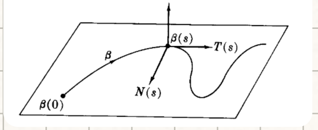
$\overset{T1}{\Rightarrow} (-\kappa(s) T(s) + \tau(s) B(s)) \circ n = 0 \Rightarrow \tau(s) B(s) \circ n = 0.$

(***) Како је $[T, N, B]$ база,
$\Rightarrow n = aT(s) + bN(s) + cB(s) \quad /\circ T \ /\circ N \ /\circ B$
$\Rightarrow a = n \circ T(s), \ b = n \circ N(s), \ c = n \circ B(s)$

1° $B(s) \circ n = 0$: По (***): $n = \underbrace{(T(s) \circ n) T(s)}_{0} + \underbrace{(N(s) \circ n) N(s)}_{0} + \underbrace{(B(s) \circ n) B(s)}_{0} = 0$ ↯

2° $B(s) \circ n \neq 0 \Rightarrow \tau(s) = 0 \overset{в \Rightarrow б}{\Rightarrow} B$ - константан вектор.

(б⇒а) Знамо да је $B(s) = const.$
Посматрајмо функцију: $f(s) = (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \circ B(s) \quad /'$
$\Rightarrow f'(s) = \alpha'(s) \circ B(s) + (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \circ \overset{0}{\cancel{B'(s)}}$



Дакле: $f'(s) = T(s) \circ B(s) = 0 \Rightarrow f(s) = const \overset{f(s_0)=0}{\Rightarrow} f \equiv 0$

$\Rightarrow \alpha(s) - \alpha(s_0) \perp B(s) \overset{\forall s}{\Rightarrow} \alpha$ је раванска крива.

Напомена: Смер $(а \Rightarrow б)$ се може доказати и на други начин.

Бирамо Декартов координатни систем ткд. је баш Oxy раван у којој је крива.
Претпоставимо да је крива параметризована дужином лука.

Важи: $\alpha(s) = (x(s), y(s), 0)$

$$\Rightarrow T(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s), 0)$$

$$\Rightarrow T'(s) = \alpha''(s) = (x''(s), y''(s), 0)$$

$$\Rightarrow \kappa(s) = \|\alpha''(s)\| = \sqrt{x''^2(s) + y''^2(s)}.$$

$$\Rightarrow N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)} = \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)} = \frac{1}{\kappa(s)}(x''(s), y''(s), 0)$$

Дакле, $$B(s) = T(s) \times N(s) = \frac{\alpha'(s) \times \alpha''(s)}{\kappa(s)} = \frac{(0, 0, x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s))}{\sqrt{x''^2(s) + y''^2(s)}}.$$

Како је $B(s)$ јединично векторско поље $\Rightarrow \|B(s)\| = \dfrac{|x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)|}{\sqrt{x''^2(s) + y''^2(s)}} = 1.$

Дакле: $$\frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{\sqrt{x''^2(s) + y''^2(s)}} = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad B(s) = \pm(0, 0, 1)$$

* До сада је α увек било пр. парам. Сада уопштавамо.

деф. Нека је $\alpha:(a,b)\to R^3$ регуларна крива и нека је $\tilde{\alpha}:(c,d)\to R^3$ њена прир. парам.

Уведимо ознаке $\tilde{\kappa}$, $\tilde{\tau}$ и $[\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}]$ за криву $\tilde{\alpha}$.

Кривина криве произвољне параметризације је $\kappa(t) := \tilde{\kappa}(s_\alpha(t))$;
Торзија криве произвољне параметризације је $\tau(t) := \tilde{\tau}(s_\alpha(t))$;

Векторско поље нормала криве произв. параметризације је $N(t) := \tilde{N}(s_\alpha(t))$;
Векторско поље бинормала криве произв. параметризације је $B(t) := \tilde{B}(s_\alpha(t))$.
Векторско поље тангента криве произв. параметризације је већ деф. за рег. случај.[1]
Истакнимо ипак да и овде важи једнакост: $T(t) = \tilde{T}(s_\alpha(t))$.

Доказ: $T(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$, $\tilde{T}(s) = \tilde{\alpha}'(s)$

$$T(t)\cdot\|\alpha'(t)\| = \alpha'(t) = s'(t)\cdot\tilde{\alpha}'(s(t)) = \|\alpha'(t)\|\cdot\tilde{T}(s(t)) \Rightarrow T(t) = \tilde{T}(s(t)).$$

Теорема 3: За свако $t\in(a,b)$, векторска поља $T(t), N(t), B(t)$ су ортонормирана поља и важи:

$$T(t) = N(t)\times B(t),\quad N(t) = B(t)\times T(t),\quad B(t) = T(t)\times N(t)$$

Доказ: $N(t) = \tilde{N}(s_\alpha(t)) \overset{Л2}{=} \tilde{B}(s_\alpha(t))\times\tilde{T}(s_\alpha(t)) = B(t)\times T(t)$.

Аналогно и остале једнакости.

Теорема 4: (Уопштене Френе-Сереове формуле):

Нека је $\alpha:(a,b)\to R^3$ регуларна крива са брзином $v(t) = \|\alpha'(t)\|$ и $\kappa(t)\neq 0$, $\forall t\in(a,b)$.

$$\begin{array}{lllll}
1) & T'(t) = & & \kappa(t)N(t)v(t) & ; \\
2) & N'(t) = & -\kappa(t)T(t)v(t) & & +\ \tau(t)B(t)v(t) \quad ; \\
3) & B'(t) = & & -\tau(t)N(t)v(t) & .
\end{array}$$

Доказ: 1) $T'(t) = \tilde{T}'(s(t))\cdot s'(t) \overset{T1}{=} \tilde{\kappa}(s(t))\cdot\tilde{N}(s(t))\cdot\|\alpha'(t)\| = \kappa(t)\cdot N(t)\cdot v(t)$.

2) $N'(t) = \tilde{N}(s(t))\cdot s'(t) \overset{T1}{=} \left(-\tilde{\kappa}(s(t))\cdot\tilde{T}(s(t)) + \tilde{\tau}(s(t))\tilde{B}(s(t))\right)\cdot\|\alpha'(t)\| = \left(-\kappa(t)T(t) + \tau(t)B(t)\right)v(t)$

3) $B'(t) = \tilde{B}(s(t))\cdot s'(t) \overset{T1}{=} -\tilde{\tau}(s(t))\cdot\tilde{N}(s(t))\cdot\|\alpha'(t)\| = -\tau(t)\cdot N(t)\cdot v(t)$.

Лема 3: За регуларну криву $\alpha : (a,b) \to R^n$, $\kappa(t) \neq 0$, $t \in (a,b)$, важи:

1) $\alpha'(t) = v(t)\,T(t)$;
2) $\alpha''(t) = v'(t)\,T(t) + v^2\kappa(t)\,N(t)$;
3) $\alpha'''(t) = \left(v''(t) - v^3(t)\kappa^2(t)\right)T(t) + \left(3v(t)v'(t)\kappa(t) + v^2(t)\kappa'(t)\right)N(t) + v^3(t)\kappa(t)\tau(t)\,B(t).$

Доказ: 1) тривијално $\left(T(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \dfrac{\alpha'(t)}{v(t)} \Rightarrow \alpha'(t) = T(t)\cdot v(t)\right)$;

2) тривијално из 1) $\left(\alpha'' = v'T + vT' \overset{T4.1)}{=} v'T + v^2\kappa N\right)$;

3) тривијално из 2), са мало више рачуна:

$$\alpha'''(t) = v''T + v'T' + (2vv'\kappa N + v^2\kappa' N + v^2\kappa N')$$

$$\overset{T4}{=} v''T + v'v\kappa N + (2vv'\kappa + v^2\kappa')N + v^3\kappa(-\kappa T + \tau B)$$

$$= (v'' - v^3\kappa^2)T + (3vv'\kappa + v^2\kappa')N + v^3\kappa\tau B.$$

Теорема 5: За регуларну криву $\alpha : (a,b) \to R^3$, $\kappa(t) \neq 0$, $t \in (a,b)$, важи:

1) $B(t) = \dfrac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}$; 2) $\kappa(t) = \dfrac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$;

3) $\tau(t) = \dfrac{[\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)]}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$.

Доказ: 2) $\alpha'(t) \times \alpha''(t) \overset{Л3}{=} vT \times (v'T + v^2\kappa N) = 0 + v^3\kappa \underbrace{T \times N}_{} = v^3\kappa B$ (Δ)

Дакле, $\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = v^3(t)\,\kappa(t) \Rightarrow \kappa(t) = \dfrac{v^3\kappa(t)}{v^3} = \dfrac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$.

1) тривијално (убацимо 2) у (Δ): $B = \dfrac{\alpha' \times \alpha''}{v^3\kappa} = \dfrac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$.)

3) $[\alpha', \alpha'', \alpha'''] = (\alpha' \times \alpha'') \circ \alpha''' \overset{(\Delta)}{=} (v^3\kappa B) \circ \left((v'' - v^3\kappa^2)T + (3vv' + v^2\kappa')N + v^3\kappa\tau B\right)$

$$\overset{орт.}{=} v^6\kappa^2\tau$$

$$\Rightarrow \tau(t) = \frac{[\alpha', \alpha'', \alpha''']}{\|\alpha'\|^6\ \kappa^2} \overset{2)}{=} \frac{[\alpha', \alpha'', \alpha''']}{\|\alpha'\|^6 \cdot \|\alpha' \times \alpha''\|^2} \cdot \|\alpha'\|^6 = \frac{[\alpha', \alpha'', \alpha''']}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}.$$

* Напоменимо да у R^2 важе аналогна тврђења и формуле.

деф. За природно параметризовану криву $\alpha : (a,b) \to R^2$,
Френеов репер је $[T(s), N(s)]$. (зато што у равни ни немамо $B(s)$)

Последица Т1:

Нека је $\alpha : (a,b) \to R^2$ природно параметризована крива и $\kappa(s) \neq 0$, $\forall s \in (a,b)$. Тада важи:

а) $T'(s) = \kappa(s) N(s);$
б) $N'(s) = -\kappa(s) T(s)$.

4.

Основна теорема о егзистенцији и јединствености кривих

Теорема 1:

Изометрије простора R^3 чувају кривину, торзију и извод ф-је дужине лука.

Знак торзије се мења уколико је изометрија индиректна.

Теорема 2: (Основна теорема за криве у R^3, јединственост):

Нека су α и β пр. парам. криве у R^3 деф. на (a,b) са истом кривином и торзијом.

Тада постоји изометрија која пресликава траг криве α у траг криве β.

Теорема 3: (Основна теорема за криве у R^3, егзистенција):

Нека су $\kappa : (a,b) \to R$, $\kappa > 0$ и $\tau : (a,b) \to R$ диференцијабилне функције.

Тада постоји крива јединичне брзине $\alpha : (a,b) \to R^3$ чија је кривина κ и торзија τ.

$\boxed{5.}$ Криве у равни: кривина, основна теорема

деф. Нека је $\alpha: (a,b) \to \mathbb{R}^2$ природно параметризована регуларна крива
и N_z поље вектора нормала ткд. је $[T(s), N_z(s)]$ поз. орј. ортонорм. база за $\forall s \in (a,b)$.

Другим речима, $N_z(s) = \mathcal{R}_{\alpha(s), +\frac{\pi}{2}}(T(s)) = (-T_2, T_1)$

Уопштена кривина криве α је функција $k_z: (a,b) \to \mathbb{R}$, ткд. $\alpha''(s) = k_z(s) N_z(s)$.

Лема 1: Уопштена кривина се разликује од обичне до на знак.

Доказ: $k(s) = \|\alpha''(s)\| = \|k_z(s) \cdot N_z(s)\| = |k_z(s)| \cdot \|N_z(s)\| = |k_z(s)| \cdot 1 = |k_z(s)|$.

Лема 2: $k_z(s) = \alpha''(s) \circ N_z(s)$

Доказ: Тривијално $\left(\alpha''(s) = k_z(s) N_z(s) \overset{/\circ N_z}{\Rightarrow} k_z(s) = \alpha''(s) \circ N_z(s) \right)$.

Теорема 1: Нека је $\alpha: (a,b) \to \mathbb{R}^2$ природно параметризована крива. Тада је:

1) $k_z(s) = x'(s)\, y''(s) - x''(s)\, y'(s)$;

2) $k(s) = |x'(s)\, y''(s) - x''(s)\, y'(s)|$.

Доказ: 1) $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $\alpha'(s) = (x'(s), y'(s)) = T(s)$, $\alpha''(s) = (x''(s), y''(s)) = T'(s)$

$N_z(s) = (-y'(s), x'(s))$. (ротација за $\pi/2$)

$k_z(s) \overset{Л2}{=} \alpha''(s) \circ N_z(s) = (x''(s), y''(s)) \circ (-y'(s), x'(s)) = x'(s) \cdot y''(s) - x''(s) \cdot y'(s)$.

2) тривијално (1) + Л1).

деф. Нека је $\alpha : (a,b) \to R^2$ регуларне криве произвољне брзине.
Уопштена кривина овакве криве α је уопштена кривина њене природне параметризације.

Теорема 2: Нека је $\alpha : (a,b) \to R^2$ регуларна крива. Тада је:

1) $$\kappa_z(t) = \frac{x'(t)\,y''(t) - x''(t)\,y'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{x'(t)\,y''(t) - x''(t)\,y'(t)}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^{3/2}}.$$

2) $$\kappa(t) = \frac{|x'(t)\,y''(t) - x''(t)\,y'(t)|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{|x'(t)\,y''(t) - x''(t)\,y'(t)|}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^{3/2}}.$$

Доказ: 1) Знамо: $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(s(t))$ и $\kappa_z(t) = \tilde{\kappa}_z(s(t)) = \tilde{\alpha}''(s(t)) \circ \tilde{N}_z(s(t))$

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{T}(s(t)) = \tilde{\alpha}'(s(t)) = (\tilde{x}'(s(t)),\ \tilde{y}'(s(t))) \\ &\tilde{T}(s(t)) = T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{\alpha'(t)}{v(t)} = \frac{(x'(t),\ y'(t))}{v(t)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tilde{x}'(s(t)) = \frac{x'(t)}{v(t)},\quad \tilde{y}'(s(t)) = \frac{y'(t)}{v(t)}.$$

Дакле, $\tilde{N}_z(s(t)) = (-\tilde{y}'(s(t)),\ \tilde{x}'(s(t))) = \frac{1}{v(t)}(-y'(t),\ x'(t))$.

Важи и: $\alpha'(t) = s'(t)\,\tilde{\alpha}'(s(t)) = v(t)\cdot\tilde{\alpha}'(s(t))$

$$\Rightarrow \alpha''(t) = v'(t)\cdot\tilde{\alpha}'(s(t)) + v^2(t)\,\tilde{\alpha}''(s(t))$$

$$\kappa_z(t) = \tilde{\alpha}''(s(t)) \circ \tilde{N}_z(s(t)) = \frac{1}{v^2(t)}\cdot\alpha''(t) \circ \tilde{N}_z(s(t)) - \frac{v'(t)}{v(t)}\cdot\overset{0\ (\tilde{\alpha}'\perp\tilde{N}_z)}{\cancel{\tilde{\alpha}'(s(t)) \circ \tilde{N}_z(s(t))}}$$

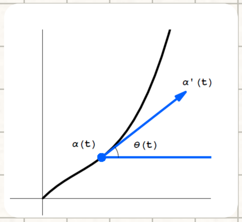
$$= \frac{1}{v^3(t)}\,(x''(t),\ y''(t)) \circ (-y'(t),\ x'(t)) = \frac{x'(t)\,y''(t) - x''(t)\,y'(t)}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^{3/2}}.$$

2) тривијално (1) + лм).

деф. Нека је $\alpha:(a,b)\to R^2$ природно парам. крива
и θ_0 угао који гради танг. вектор у тачки $\alpha(s_0)$ са фиксираним јединичним вектором.
(то је вектор $\alpha'(s_0)=(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$)

Може се доказати да постоји једна диф. ф-ја $\theta:(a,b)\to R$, ткд. $\theta(s_0)=\theta_0$ и $\alpha'(s)=(\cos\theta(s), \sin\theta(s))$.

Та функција θ се назива угао окретања криве α, одређен са θ_0.



Теорема 3 (Ојлерова): $k_z(s) = \theta'(s)$.

Доказ: Нека је $\alpha:(a,b)\to R^2$ природно парам. крива.

По деф: $\alpha''(s) = k_z(s) N_z(s)$.

$$\alpha'(s) = \cos\theta(s)\cdot e_1 + \sin\theta(s)\cdot e_2.$$
$$\alpha''(s) = -\sin\theta(s)\cdot\theta'(s)\cdot e_1 + \cos\theta(s)\cdot\theta'(s)\cdot e_2 \qquad /\circ e_1$$

$$\Rightarrow k_z(s)\cdot N_z(s)\circ e_1 = -\sin\theta(s)\cdot\theta'(s) \qquad (e_1\perp e_2)$$

$$\Rightarrow k_z(s)\cdot\underbrace{\|N_z(s)\|}_{1}\cdot\underbrace{\|e_1\|}_{1}\cdot\cos\measuredangle(N_z,e_1) = -\sin\theta(s)\cdot\theta'(s)$$

$$\Rightarrow k_z(s)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta(s)\right) = -\sin\theta(s)\cdot\theta'(s) \quad\Rightarrow\quad k_z(s)\left(-\sin\theta(s)\right) = -\sin\theta(s)\cdot\theta'(s)$$

$$\Rightarrow k_z(s) = \theta'(s).$$

Да ли можемо да одредимо криву у равни уколико знамо њену кривину?

Теорема 4: Природно парам. крива $\alpha : (a,b) \to R^2$, чија је уопштена кривина глатка ф-ја $k_z : (a,b) \to R$, дата је са:

$$\begin{cases} \alpha(s) = \left(\int \cos\theta(s)\,ds + c, \quad \int \sin\theta(s)\,ds + d \right), \\ \theta(s) = \int k_z(s)\,ds + \theta_0. \end{cases}$$

Доказ: $\alpha(s) = (x(s), y(s)) \Rightarrow \alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$.
Са друге стране: $\alpha'(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$.

- $x'(s) = \cos\theta(s) \Rightarrow x(s) = \int \cos\theta(s)\,ds + c.$
  $y'(s) = \sin\theta(s) \Rightarrow y(s) = \int \sin\theta(s)\,ds + d.$

- По Ојлеру (Т3): $\theta'(s) = k_z(s) \Rightarrow \theta(s) = \int k_z(s)\,ds + \theta_0.$

Теорема 5 (Основна (фундаментална) теорема о кривама у равни):

1) Нека је $k_z : (a,b) \to R$ произвољна глатка функција.
Тада постоји прир. парам. крива $\alpha : (a,b) \to R^2$ чија је уопштена кривина k_z.

2) Нека је $\beta : (a,b) \to R^2$ прир. парам. крива чија је уопштена кривина k_z.
Тада постоји директна изометрија $M : R^2 \to R^2$ ткд. $\beta(t) = M(\alpha(t))$, $\forall t \in (a,b)$

Доказ: 1) Фиксирајмо неко $s_0 \in (a,b)$ и дефинишемо: $\theta(s) := \int_{s_0}^{s} k_z(u)\,du.$ (*)

Осим тога, нека је $\alpha(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos\theta(t)\,dt, \int_{s_0}^{s} \sin\theta(t)\,dt \right)$

Треба да проверимо да ли је баш k_z уопштена кривина криве α.

$T_\alpha = \alpha'(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$, $\quad \theta(s) = \measuredangle(T(s), e_1)$.

По Ојлеру: $\theta'(s) = k_z^{\alpha}(s)$. (за сад k_z није исто што и k_z^{α}).
Али пошто је $\theta'(s) = k_z(s)$ (по (*)), онда је $k_z^{\alpha} = k_z$ и тиме је доказ готов.

2) Нека је β пр. парам. крива и нека је $\measuredangle(T_\beta, e_1) = \tilde{\theta}(s)$.
Тада је $\beta'(s) = (\cos\tilde{\theta}(s), \sin\tilde{\theta}(s))$ (ово можемо да напишемо јер је β прир. парам.)

По Ојлеру: $\tilde{\theta}'(s) = k_z(s) \Rightarrow \tilde{\theta}(s) = \tilde{\theta}(s) - \tilde{\theta}(s_0) + \tilde{\theta}(s_0) = \int_{s_0}^{s} k_z(u)\,du + \tilde{\theta}(s_0) \overset{1)}{=} \theta(s) + \underset{\text{ознака}}{\varphi}$

По Т4: $\beta(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos\tilde{\theta}(u)\,du, \int_{s_0}^{s} \sin\tilde{\theta}(u)\,du \right) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos(\theta(u) + \varphi)\,du, \int_{s_0}^{s} \sin(\theta(u) + \varphi)\,du \right)$

$$= \left(\int_{s_0}^{s} (\cos\theta(u)\cos\varphi - \sin\theta(u)\sin\varphi)\,du, \int_{s_0}^{s} (\sin\theta(u)\cos\varphi + \cos\theta(u)\sin\varphi)\,du \right)$$

$$= \left(\cos\varphi \underbrace{\int_{s_0}^{s} \cos\theta(u)\,du}_{x_\alpha} - \sin\varphi \underbrace{\int_{s_0}^{s} \sin\theta(u)\,du}_{y_\alpha}, \cos\varphi \underbrace{\int_{s_0}^{s} \sin\theta(u)\,du}_{y_\alpha} + \sin\varphi \underbrace{\int_{s_0}^{s} \cos\theta(u)\,du}_{x_\alpha} \right) = \mathcal{R}(\alpha)$$

Дакле, један начин да задамо криву јесте преко κ_z.
То се зове **природна једначина**

Примери: 1) права: $\kappa(s) = 0$

2) кружница: $\kappa(s) = \frac{1}{r}$ (r- полупречник)

3) ланчаница: $\kappa(s) = \frac{1}{1+s^2}$

4) хеликс: $\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = const$

Иако не зависе од координатног система, ове једначине нису погодне за рачун.

деф. **Имплицитно дефинисана крива у $\mathbb{R}^2$** је скуп $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid F(p) = 0\}$, $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ је диф.

Теорема 6: Нека је $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ диф. и $F(q) = 0$.

Ако је $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)\Big|_q \neq 0$,
тада постоји околина $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ од q и парам. крива $\alpha: (a,b) \to \mathbb{R}^2$ ткд. је скуп $\{p \in \mathcal{U} \mid F(p) = 0\}$ траг криве α.

деф. **Поларна параметризација** је пресликавање $\alpha: (a,b) \to \mathbb{R}^2$ задато формулом:

$$\alpha(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta,\ \rho(\theta)\sin\theta), \qquad \rho: (a,b) \to \mathbb{R}^+,\ \rho \in C^k$$

$\boxed{6.}$ Површи - основне дефиниције и примери

деф. **Параметризована регуларна елементарна површ** класе C^k $(k \geq 1)$ у $\mathbb{R}^3$ је 1-1 пресликавање $r: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ класе C^k, где је $\mathcal{U}$ отворен и повезан подскуп од $\mathbb{R}^2$ и вектори $\frac{\partial r}{\partial u}(u,v)$ и $\frac{\partial r}{\partial v}(u,v)$ су линеарно независни за $(u,v) \in \mathcal{U}$.

Уобичајене ознаке су:

$$r(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)); \qquad (x, y, z: \mathcal{U} \to \mathbb{R},\ \in C^k)$$

$$r(u,v) = (r_1(u,v),\ r_2(u,v),\ r_3(u,v)); \qquad (r_1, r_2, r_3: \mathcal{U} \to \mathbb{R},\ \in C^k)$$

$$r(u,v) = r_1(u,v)e_1 + r_2(u,v)e_2 + r_3(u,v)e_3. \qquad ([e_1, e_2, e_3] \text{ - ортонорм. база } \mathbb{R}^3)$$

Такође:

$$\frac{\partial r}{\partial u}(u,v) = r_u(u,v) = \left(\frac{\partial r_1}{\partial u}(u,v),\ \frac{\partial r_2}{\partial u}(u,v),\ \frac{\partial r_3}{\partial u}(u,v)\right);$$

$$\frac{\partial r}{\partial v}(u,v) = r_v(u,v) = \left(\frac{\partial r_1}{\partial v}(u,v),\ \frac{\partial r_2}{\partial v}(u,v),\ \frac{\partial r_3}{\partial v}(u,v)\right);$$

деф. Скуп $S := r[\mathcal{U}] = \operatorname{Im} \mathcal{U}$ је **траг површи** r.

Напомена: Код кривих, пресликавање α није морало да буде 1-1 (дозвољена су самопресецања).
(зато што смо у сваком тренутку знали параметар кретања, тј. танг. вектор)

Код површи не сме бити самопресецања
(иначе бисмо добили праву, а на њој не можемо одредити танг. раван)

Пример: Сфера: $r(u,v) = (R \cdot \cos u \cdot \cos v,\ R \cdot \cos u \cdot \sin v,\ R \sin v)$ $\quad (-\pi/2 \leq u < \pi/2,\ \ 0 \leq v \leq 2\pi)$

деф. **Јакобијева матрица** пресликавања r је:

$$J(r)(u,v) := \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial r_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial r_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial r_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial r_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial r_3}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix}$$

Напомена: Следећи услови су еквивалентни:

(1) $r_u(u_0, v_0)$ и $r_v(u_0, v_0)$ су лин. независни;
(2) $r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0) = 0$;
(3) ранг Јакобијана од r у (u_0, v_0) је мањи од 2;

деф. **Координатна трансформација** класе C^k је C^k дифеоморфизам $\phi: \mathcal{V} \to \mathcal{U}$. ($\mathcal{U}, \mathcal{V}$ - отворени, повезани подскупови R^2)

Лема 1: Нека је $r_1 : \mathcal{U} \to R^3$ парам. рег. елем. površ класе C^k и $\phi: \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ коорд. трансф. класе C^k.

Тада је $r_2 : \mathcal{V} \to R^3$, $r_2 = r_1 \circ \phi$ такође парам. рег. елем. површ класе C^k и има исту слику.

Доказ: Да би пресликавање r_2 било парам. рег. елем. површ, треба да буде:

- класе C^k, $k \geq 1$: Испуњено, као композиција два таква пресликавања.
- 1-1: Како је r_1 рег. парам. површ $\Rightarrow$ r_1 је 1-1
  Како је ϕ дифеоморфизам $\Rightarrow$ ϕ је 1-1 $\Big\} \Rightarrow r_2$ је 1-1 (композиција)
- $\frac{\partial r_2}{\partial u}, \frac{\partial r_2}{\partial v}$ - лин. независни вектори:

Како је r_1 рег. парам. елем. површ $\Rightarrow \frac{\partial r_1}{\partial u_1}, \frac{\partial r_1}{\partial v_1}$ - лин. нез. $\overset{\text{нап.}}{\Rightarrow} \frac{\partial r_1}{\partial u_1} \times \frac{\partial r_1}{\partial v_1} \neq 0.$ (*)

$\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ је дифеоморфизам $\Rightarrow$ $J(\phi)(u,v) \neq 0$
Нека $\phi : (u,v) \mapsto (\phi_1(u,v), \phi_2(u,v))$.

Доказујемо $\frac{\partial r_2}{\partial u_2} \times \frac{\partial r_2}{\partial v_2} \neq 0$:

Нека је: $r_1 : (u_1, v_1) \mapsto (r_1^1(u_1,v_1), \; r_1^2(u_1,v_1), \; r_1^3(u_1,v_1))$;
$\phi : (u_2, v_2) \mapsto (\phi_1(u_2,v_2), \; \phi_2(u_2,v_2))$;
$r_2 : (u_2, v_2) \mapsto (r_2^1(u_2,v_2), \; r_2^2(u_2,v_2), \; r_2^3(u_2,v_2))$.

Одавде: $\frac{\partial r_2}{\partial u_2} = \frac{\partial r_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial u_2} + \frac{\partial r_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2}$ и $\frac{\partial r_2}{\partial v_2} = \frac{\partial r_1}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial v_2} + \frac{\partial r_1}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial v_2}$.

$$\Rightarrow \frac{\partial r_2}{\partial u_2} \times \frac{\partial r_2}{\partial v_2} = \frac{\partial \phi_1}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial v_2} \cdot \cancelto{0}{\frac{\partial r_1}{\partial v_1} \times \frac{\partial r_1}{\partial v_1}} + \frac{\partial \phi_1}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial u_1} \times \frac{\partial r_1}{\partial v_1}$$

$$+ \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial v_1} \times \frac{\partial r_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial v_2} \cdot \cancelto{0}{\frac{\partial r_1}{\partial v_1} \times \frac{\partial r_1}{\partial v_1}}$$

$$= \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial v_2} + \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial v_2} \right) \frac{\partial r_1}{\partial v_1} \times \frac{\partial r_1}{\partial u_1}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial v_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v_2} \end{vmatrix}}_{\det J(\phi) \neq 0} \cdot \underbrace{\frac{\partial r_1}{\partial v_1} \times \frac{\partial r_1}{\partial u_1}}_{\underset{(*)}{\neq 0}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial r_2}{\partial u_2} \times \frac{\partial r_2}{\partial v_2} \neq 0.$$

деф. Параметризоване регуларне површи $r_1: \mathcal{U} \to R^3$, $r_2: \mathcal{V} \to R^3$ су **еквивалентне**, $r_1 \sim r_2$, ако постоји координатна трансформација $\phi: \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ класе C^k ткд. $r_2 = r_1 \circ \phi$.

Лема 2: $\sim$ је релација еквиваленције.

Доказ: тривијално

деф. **Регуларна непараметризована елементарна површ** је класа еквиваленције релације $\sim$.

деф. Ако постоји координатна трансф. $\phi: \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ класе C^k ткд. $r_2 = r_1 \circ \Phi$, кажемо да је површ r_2 **репараметризација** површи r_1.

Теорема 1: Нека су $r_1: \mathcal{U} \to R^3$, $r_2: \mathcal{V} \to R^3$ парам. елем. површи ткд. $r_1[\mathcal{U}] = r_2[\mathcal{V}]$.

Тада је за све $p \in \mathcal{U}$, $q \in \mathcal{V}$ ткд. $r_1(p) = r_2(q)$ постоје њихове околине $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$ такве да су $r_1|_{\mathcal{U}_1} \sim r_2|_{\mathcal{V}_1}$.

Другим речима, тада постоји координатна трансф. $\Phi: \mathcal{V}_1 \to \mathcal{U}_1$ ткд. $r_2 = r_1 \circ \Phi$.

Доказ: тривијално

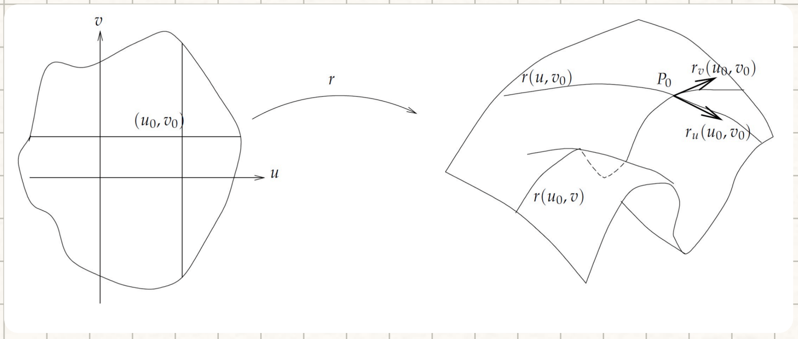
деф. Нека је $r: \mathcal{U} \to R^3$, $r: (u,v) \mapsto (r_1(u,v), r_2(u,v), r_3(u,v))$ регуларна непарам. елем. површ.

Ако фиксирамо један од параметара (u или v), добијамо криве које припадају површи r:

$u \mapsto r(u, v_0) = \alpha(u)$, $\alpha: R \supset I \to r[\mathcal{U}]$ - **u-параметарска крива;**
$v \mapsto r(u_0, v) = \beta(v)$, $\beta: R \supset J \to r[\mathcal{U}]$ - **v-параметарска крива.**

Називамо их и **координатне криве.**

Напомена: вектори брзина су им редом r_u и r_v.



Лема 3: Нека је $\alpha : (a,b) \to R^3$ крива чији траг припада трагу $r[\mathcal{U}]$ рег. елем. површи $r : \mathcal{U} \to R^3$, ткд. је $r : \mathcal{U} \to r[\mathcal{U}]$ хомеоморфизам.

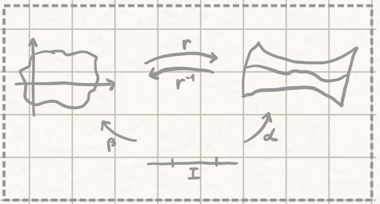
Тада постоје јединствене диф. ф-је $\alpha_1, \alpha_2 : (a,b) \to R$ ткд. $\alpha(t) = r(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$.

Напомена: Често се уместо $\alpha_1, \alpha_2 : (a,b) \to R$ пишемо $u, v : (a,b) \to R$, тј. $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$.

Доказ: * r хомеоморфизам $\Rightarrow \exists r^{-1}$ и оно је такође бијекција.

Крива α је пресликавање из $I \subset R$ у R^3,
па га можемо представити као композицију два пресликавања (слика):

$$\alpha = r \circ \beta \overset{/r^{-1}\circ}{\Rightarrow} \beta = r^{-1} \circ \alpha \Rightarrow \beta(t) = r^{-1}(\alpha(t))$$



Такође: $\beta : I \to R^2$ $\Rightarrow \beta(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$

Дакле: $(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = r^{-1}(\alpha(t)) \Rightarrow \alpha(t) = r(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$. (#)

* Јединственост следи тривијално (пп. $\exists \alpha_3, \alpha_4$, за њих важи све исто, па и (#) одатле следи $\alpha_1 \equiv \alpha_3$, $\alpha_2 \equiv \alpha_4$)

Ова лема омогућава увођење наредног појма:

деф. Нека је $r : \mathcal{U} \to R^3$ рег. елем. површ и $P \in r[\mathcal{U}]$ тачка са те површи.

Тангентни вектор површи r у тачки P је вектор $X \in R^3$
за који постоји крива $\alpha : (a,b) \to R^3$ чији траг припада трагу површи r, тј. $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$,

и при томе су $u, v : (a,b) \to R$ диф. и $\alpha(0) = P$, $\alpha'(0) = X$.

Напомена: По Л3 $\Rightarrow X$ је вектор брзине у тачки P криве α и садржи тачку P.

Теорема 2: Скуп свих тангентних вектора на рег. елем. површ $r : \mathcal{U} \to R^3$ у тачки $P = r(u_0, v_0) \in r[\mathcal{U}]$ заједно са нула вектором, чини векторски простор чија је база $[r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)]$.

Напомена: Са $T_P(r)$ означавамо **тангентни простор**.

Доказ: Доказујемо да је $T_P(r)$ један векторски простор.
То ћемо урадити тако што ћемо тај скуп „угостити" у век. простор $(R^3, +, \cdot)$.

А за то је довољно доказати:

1) $X, Y \in T_P(r) \Rightarrow X + Y \in T_P(r)$;
2) $X \in T_P(r)$, $a \in R \Rightarrow a \cdot X \in T_P(r)$.

1) $X \in T_P(r) \Rightarrow \exists$ крива $\alpha : I \to R^3$ ткд. важи: $\alpha(0) = P$, $\alpha'(0) = X$, $\alpha(t) = r(u_1(t), v_1(t))$.
$Y \in T_P(r) \Rightarrow \exists$ крива $\beta : I \to R^3$ ткд. важи: $\beta(0) = P$, $\beta'(0) = Y$, $\beta(t) = r(u_2(t), v_2(t))$.

Тражимо криву $\gamma : I \to R^3$ која припада трагу површи $r[U]$ ткд:
- $\gamma(0) = P$;
- $\gamma'(0) = X + Y$;
- $\gamma(t) = (u(t), v(t))$.

Означимо са: $u_1(0) = u_2(0) = u_0$ и $v_1(0) = v_2(0) = v_0$
$\Rightarrow \alpha(0) = r(u_0, v_0)$, $\beta(0) = r(u_0, v_0)$.

Дефинишемо γ на сл. начин: $\gamma(t) := r(u_1(t) + u_2(t) - u_0,\ v_1(t) + v_2(t) - v_0)$.
Она испуњава сва три услова:

- $\gamma(0) = r(u_1(0) + u_2(0) - u_0,\ v_1(0) + v_2(0) - v_0) = r(2u_0 - u_0,\ 2v_0 - v_0) = r(u_0, v_0) = P$.

- $\gamma'(t) = r_u(u_1'(t) + u_2'(t)) + r_v(v_1'(t) + v_2'(t)) \Rightarrow \gamma'(0) = \alpha'(0) + \beta'(0) = X + Y$.

- $u(t) := u_1(t) + u_2(t) - u_0$, $v(t) := v_1(t) + v_2(t) - v_0$.

2) $X \in T_P(r) \Rightarrow \exists$ крива $\alpha : I \to R^3$ ткд. важи: * $\alpha(0) = P$; * $\alpha'(0) = X$; * $\alpha(t) = r(u_1(t), v_1(t))$.

Тражимо криву $\gamma : I \to R^3$ која припада трагу површи $r[U]$ ткд:
- $\gamma(0) = P$;
- $\gamma'(0) = aX$;
- $\gamma(t) = (u(t), v(t))$.

Означимо са: $u_1(0) = u_0$ и $v_1(0) = v_0 \Rightarrow \alpha(0) = r(u_0, v_0)$

Дефинишемо γ на сл. начин: $\gamma(t) := r(a \cdot u_1(t) - (a-1) \cdot u_0,\ a \cdot v_1(t) - (a-1) \cdot v_0)$
Она испуњава сва три услова:

- $\gamma(0) = r(a \cdot u_0 - (a-1) u_0,\ a \cdot v_0 - (a-1) v_0) = r(u_0, v_0) = P$

- $\gamma'(t) = r_u (a \cdot u_1(t) - (a-1) u_0)' + r_v (a \cdot v_1(t) - (a-1) v_0)' = r_u \cdot a \cdot u_1'(t) + r_v \cdot a \cdot v_1'(t)$
  $\gamma'(0) = a \cdot (r_u \cdot u_1'(0) + r_v \cdot v_1'(0)) = a \cdot \alpha'(0) = aX$.

- $u(t) := a \cdot u_1(t) - (a-1) \cdot u_0$ $v(t) := a \cdot v_1(t) - (a-1) \cdot v_0$.

Последица: $\alpha(t) = r(u(t), v(t)) \Rightarrow \alpha'(t) = r_u(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + r_v(u(t), v(t)) \cdot v'(t)$.

деф. Нека је $r: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ рег. елем. површ.
За вектор $Z \in \mathbb{R}^3$ кажемо да је нормалан на r у $P \in r[\mathcal{U}]$ ако је $Z \circ X = 0, \quad \forall X \in T_{r(q)}(r)$

деф. Тангентна раван на рег. елем. површ $r: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ у тачки $P = r(u_0, v_0)$ је раван која садржи тачку P и паралелна је векторима $r_u(u_0, v_0)$ и $r_v(u_0, v_0)$.

деф. Вектор нормале на површ r у тачки P је $n(u_0, v_0) := \dfrac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}(u_0, v_0)$.

Нормала на површ r у тачки P је права одређена тачком P и вектором n.

деф. Векторско поље V на рег. елем. површи $r: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ је диф. пресликавање које свакој тачки $q \in \mathcal{U}$ додељује вектор $V(q) \in \mathbb{R}^3$.

Кажемо да је V тангентно векторско поље на r ако $V(q) \in T_{r(q)}(r)$.
Кажемо да је V нормално векторско поље ако $V(q) \circ X = 0, \quad \forall X \in T_{r(q)}(r), \ q \in \mathcal{U}$.

Векторска поља r_u и r_v су координатна векторска поља.

Векторско поље нормала на површ је $n(u,v) := \dfrac{r_u(u,v) \times r_v(u,v)}{\|r_u(u,v) \times r_v(u,v)\|}$.

Теорема 3: Свако тангентно век. поље на рег. елем. површи $r: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ се може представити као:

$$X(u,v) = X_1(u,v) \cdot r_u(u,v) + X_2(u,v) \cdot r_v(u,v).$$

Функције X_1, X_2 су јединствене и диференцијабилне.

Такође, пар диф. ф-ја $X_1, X_2 : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ одређује јединствено тангентно век. поље.

Доказ: Директно из последице Т2.

деф. Рег. елем. површ $r: \mathcal{U} \to R^3$ је **својствена** ако је $r^{-1}: r[\mathcal{U}] \to \mathcal{U}$ непрекидна у свакој тачки у $r[\mathcal{U}]$.

Површ класе C^k у R^3 је подскуп $\mathcal{P} \subset R^3$ који је унија слика својств. рег. елем. површи класе C^k, таквих да за сваке две рег. елем. површи $r_1: \mathcal{U} \to R^3$, $r_2: \mathcal{U} \to R^3$ из те уније, ф-ја

$$r_2^{-1} \circ r_1 : r_1^{-1}[\mathcal{U}' \cap \mathcal{V}'] \to r_2^{-1}[\mathcal{U}' \cap \mathcal{V}'] \qquad (\mathcal{U}' = r_1[\mathcal{U}],\ \mathcal{V}' = r_2[\mathcal{V}])$$

представља координатну трансформацију класе C^k.

Теорема 4: Нека је $F: R^3 \to R$ диф. ф-ја и $(F_x, F_y, F_z) \neq 0$ у свим тачкама $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \mid F(x,y,z) = 0\}$. Тада је $\mathcal{P}$ површ.

Специјално, ако је $F_z \neq 0$ у тачки $P \in \mathcal{P}$,
тада постоји рег. елем. површ $r: \mathcal{U} \to R^3$, $r(u,v) = (u, v, f(u,v))$, тако да $P \in r[\mathcal{U}]$.

Доказ: теорема о имплицитној функцији.

$\boxed{7.}$

Прва основна форма

деф. $\langle a, b \rangle = a \circ b.$ (скаларни производ у $\mathbb{R}^3$)

деф. Нека је $r: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ рег. елем. површ, $w \in T_P(r)$ и $P \in r[\mathcal{U}]$.
Квадратна форма $I_P(w) = \langle w, w \rangle_P = \|w\|^2 > 0$ зове се
прва основна/фундаментална форма површи r у тачки P.

* Како је $w \in T_P(r)$ тангентни вектор на површ r, по деф. сигурно постоји крива α која припада трагу површи $r[\mathcal{U}]$ чији је тангентни вектор у некој тачки P баш w. Зато:

$$\alpha(t) = r(u(t), v(t)), \quad t \in (a,b)$$
$$\Rightarrow \alpha(0) = r(u_0, v_0) = P, \quad u_0 = u(0), \quad v_0 = v(0)$$
$$\Rightarrow \alpha'(t) = r_u(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + r_v(u(t), v(t)) \cdot v'(t)$$
$$\Rightarrow w = \alpha'(0) = r_u(u_0, v_0) \cdot u'(0) + r_v(u_0, v_0) \cdot v'(0)$$

Убацимо ово у претх. деф:

$$\begin{aligned} I_P(w) &= I_P(\alpha'(0)) = \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_P \\ &= \langle r_u(u_0, v_0) \cdot u'(0) + r_v(u_0, v_0) \cdot v'(0),\ r_u(u_0, v_0) \cdot u'(0) + r_v(u_0, v_0) \cdot v'(0) \rangle_P \end{aligned}$$

$$I_P(w) = (u'(0))^2 \cdot \langle r_u(u_0, v_0), r_u(u_0, v_0) \rangle + 2u'(0)v'(0) \langle r_u(u_0,v_0), r_v(u_0,v_0) \rangle + (v'(0))^2 \langle r_v(u_0,v_0), r_v(u_0,v_0) \rangle$$

Уведимо ознаке:
$$\begin{aligned} E &= E(u_0,v_0) := \langle r_u, r_u \rangle_P = \langle r_u(u_0,v_0), r_u(u_0,v_0) \rangle; \\ F &= F(u_0,v_0) := \langle r_u, r_v \rangle_P = 2u'(0)v'(0) \langle r_u(u_0,v_0), r_v(u_0,v_0) \rangle; \\ G &= G(u_0,v_0) := \langle r_v, r_v \rangle_P = \langle r_v(u_0,v_0), r_v(u_0,v_0) \rangle. \end{aligned}$$

Приметимо да E, F, G не зависе од избора криве.
Такође, у околини тачке P можемо дефинисати ф-је:
$$\begin{aligned} E(u,v) &:= \langle r_u(u,v), r_u(u,v) \rangle; \\ F(u,v) &:= \langle r_u(u,v), r_v(u,v) \rangle; \\ G(u,v) &:= \langle r_v(u,v), r_v(u,v) \rangle. \end{aligned}$$

Лема 1: $EG - F^2 > 0.$

Доказ: Знамо да су $r_u(u,v) := r_u$ и $r_v(u,v) := r_v$ лин. нез. вектори $\Rightarrow \|r_u \times r_v\|^2 > 0.$

$$\begin{aligned} \|r_u \times r_v\|^2 &= \|r_u\|^2 \cdot \|r_v\|^2 \cdot \sin^2 \measuredangle(r_u, r_v) = \langle r_u, r_u \rangle \cdot \langle r_v, r_v \rangle \cdot (1 - \cos^2 \measuredangle(r_u, r_v)) \\ &= EG - \|r_u\|^2 \cdot \|r_v\|^2 \cdot \cos^2 \measuredangle(r_u, r_v) = EG - F^2 > 0. \end{aligned}$$

Последица: $\|r_u \times r_v\|^2 = EG - F^2.$

деф. Квадратна форма I дефинише **билинеарну форму** $\mathcal{I}(X,Y)$ у векторском простору $T_P(r) \cong R^2$.

$$X = X_1 r_u + X_2 r_v, \qquad (X_1 = X_1(u,v), \quad X_2 = X_2(u,v));$$
$$Y = Y_1 r_u + Y_2 r_v, \qquad (Y_1 = Y_1(u,v), \quad Y_2 = Y_2(u,v)).$$

$$\mathcal{I}(X,Y) = \langle X, Y \rangle = \langle X_1 r_u + X_2 r_v, \; Y_1 r_u + Y_2 r_v \rangle$$
$$= X_1 Y_1 \langle r_u, r_u \rangle + (X_1 Y_2 + X_2 Y_1) \langle r_u, r_v \rangle + X_2 Y_2 \langle r_v, r_v \rangle$$

$$\mathcal{I}(X,Y) = X_1(u,v) Y_1(u,v) E(u,v) + \Big(X_1(u,v) Y_2(u,v) + X_2(u,v) Y_1(u,v) \Big) F(u,v) + X_2(u,v) Y_2(u,v) \cdot G(u,v).$$

$$= \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

Напомена: Ако E, F, G посматрамо као ф-је од u, v, онда за њих можемо да кажемо да образују сим. матрицу у свакој тачки са површи $r[\mathcal{U}]$.

Зовемо их **коефицијенти I основне форме.**

Примери:

1) **Раван:** За параметризацију $r(u,v) = r_0 + up + vq$ $(-\infty < u, v < +\infty)$ важи: $E = p^2 = \|p^2\|$, $F = \langle p, q \rangle$, $G = \|q\|^2$.
Уколико су p и q ортог. и јединични $\Rightarrow$ $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$.

За параметризацију $r(\rho, \varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, 0)$ $(0 \le \rho < +\infty, \; 0 \le \varphi < 2\pi)$ је $E = 1$, $F = 0$, $G = \rho^2$.

2) **Сфера:**

$$r(u,v) = R(\cos u \cdot \cos v, \; \cos u \cdot \sin v, \; \sin u)$$
$$r_u(u,v) = R(-\sin u \cdot \cos v, \; -\sin u \cdot \sin v, \; \cos u)$$
$$r_v(u,v) = R(-\cos u \cdot \sin v, \; \cos u \cdot \cos v, \; 0)$$

$$\Rightarrow E = R^2, \quad F = 0, \quad G = R^2 \cos^2 u.$$

3) **Ротационе површи:**

$$r(u,v) = (f(u) \cdot \cos v, \; f(u) \cdot \sin v, \; g(u)), \qquad f > 0$$
$$r_u(u,v) = (f_u(u) \cdot \cos v, \; f_u(u) \cdot \sin v, \; g_u(u))$$
$$r_v(u,v) = (-f(u) \cdot \sin v, \; f(u) \cdot \cos v, \; 0)$$

$$\Rightarrow E = f_u^2 + g_u^2, \quad F = 0, \quad G = f^2.$$

(за прир. парам $\Rightarrow$ $E = 1$, $F = 0$, $G = f^2$)

* Питамо се да ли су E, F, G геом. појмови, тј. да ли зависе од параметризације површи?

Нека је дата нека површ $r: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$, $r = r(u,v)$ и њени коеф. I основне форме E, F, G и нека је дата њена репараметризација $\tilde{r}: \mathcal{V} \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{r} = \tilde{r}(\tilde{u}, \tilde{v})$ и њени $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$.

Пошто је $\tilde{r}$ репараметризација $\Rightarrow$ постоји $\phi: \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, ткд. $\tilde{r} = r \circ \phi$, тј:

$$\tilde{r}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (r \circ \phi)(\tilde{u}, \tilde{v}) = r(\phi(\tilde{u}, \tilde{v})) = r(\underbrace{\phi_1(\tilde{u}, \tilde{v})}_{u}, \underbrace{\phi_2(\tilde{u}, \tilde{v})}_{v}) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \tilde{r}_{\tilde{u}} &= \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{u}} + \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{u}} \\ r_{\tilde{v}} &= \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{v}} + \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{v}} \end{aligned}$$

Дакле:

$$\tilde{E}(\tilde{u}, \tilde{v}) = < \tilde{r}_{\tilde{u}}, \tilde{r}_{\tilde{v}} > = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{u}}\right)^2 < r_u, r_u > + 2 \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{u}} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{u}} < r_u, r_v > + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{u}}\right)^2 < r_v, r_v >.$$

$$\tilde{F}(\tilde{u}, \tilde{v}) = < \tilde{r}_{\tilde{u}}, \tilde{r}_{\tilde{v}} > = \frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{u}} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{v}} < r_u, r_u > + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{u}} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{v}} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{u}} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{v}}\right) < r_u, r_v > + \frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{u}} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{v}} < r_v, r_v >.$$

$$\tilde{G}(\tilde{u}, \tilde{v}) = < \tilde{r}_{\tilde{v}}, \tilde{r}_{\tilde{v}} > = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{v}}\right)^2 < r_u, r_u > + 2 \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{v}} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{v}} < r_u, r_v > + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{v}}\right)^2 < r_v, r_v >.$$

Компактније, то записујемо: $\begin{bmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{bmatrix} = J(\phi)^T \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} J(\phi)$, $\quad J(\phi)(\tilde{u}, \tilde{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{v}} \end{bmatrix}$.

Закључак: E, F, G зависе од параметризације.

деф. Параметризација чији коеф. I основне форме испуњавају услове $E = G$ и $F = 0$ зове се **конформна параметризација**.

Теорема 1: Нека су $\alpha_1, \alpha_2 : I \to \mathcal{U}$, $\alpha_1(t) = (u_1(t), v_1(t))$, $\alpha_2(t) = (u_2(t), v_2(t))$, криве које се секу у $(a,b) \in \mathcal{U}$.

Параметризација $r: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ је конформна акко је угао између кривих α_1, α_2 у $\alpha_1(t_1) = \alpha_2(t_2)$ једнак углу између кривих $\beta_1(t) = r(u_1(t), v_1(t))$ и $\beta_2(t) = r(u_2(t), v_2(t))$ у тачки $\beta_1(t_1) = \beta_2(t_2) = r(a,b)$.

Доказ: Прво прочитати следећу страну!

(⇒) $E = G,\ F = 0 \overset{(*)}{\underset{(**)}{\Longrightarrow}} \cos\sphericalangle(\beta_1, \beta_2)_{r(a,b)} = \dfrac{\cancel{E} u_1' u_2' + \cancel{E} v_1' v_2'}{\sqrt{\cancel{E}\cdot(u_1')^2 + \cancel{E}\cdot(v_1')^2} \cdot \sqrt{\cancel{E}\cdot(u_2')^2 + \cancel{E}\cdot(v_2')^2}} = \cos\sphericalangle(\alpha_1, \alpha_2)_{(a,b)}$.

(⇐) Знамо: $\cos\sphericalangle(\beta_1, \beta_2)_{r(a,b)} = \cos\sphericalangle(\alpha_1, \alpha_2)_{(a,b)}$, за све криве α_1, α_2.

Уочимо криве: $\alpha_1(t) = (\underbrace{a+t}_{u_1}, \underbrace{b}_{v_1})$, $\alpha_2(t) = (\underbrace{a}_{u_2}, \underbrace{b+t}_{v_2})$ које се секу у $(a,b) \in \mathcal{U}$ за $t = 0$.

$$\cos\sphericalangle(\alpha_1, \alpha_2)_{(a,b)} = \frac{u_1' u_2' + v_1' v_2'}{\sqrt{(u_1')^2 + (v_1')^2} \cdot \sqrt{(u_2')^2 + (v_2')^2}} = 0. \quad \text{(кад убрстимо)}$$

$$\cos\sphericalangle(\beta_1, \beta_2)_{r(a,b)} \overset{(*)}{=} \frac{E u_1' u_2' + F(u_1' v_2' + u_2' v_1') + G v_1' v_2'}{\sqrt{E(u_1')^2 + 2F u_1' v_1' + G(v_1')^2} \cdot \sqrt{E(u_2')^2 + 2F u_2' v_2' + G(v_2')^2}} = \frac{F}{\sqrt{E} \cdot \sqrt{G}} = 0 \Rightarrow F = 0.$$

Гледамо: $\begin{cases} \alpha_3(t) = (a+t, b+t) \\ \alpha_4(t) = (a+t, b-t) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{E-G}{E+G} = 0 \Rightarrow E - G = 0 \Rightarrow E = G \Rightarrow$ конформна.

↑ аналогно

Овде пишемо ствари које ћемо користити у доказу Т1:

* Нека је $\alpha(t)$ крива чија слика припада $r[\mathcal{U}]$, тј. $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$.
Тада за функцију дужине лука криве α важи:

$$s(t) := \int_0^t \|\alpha'(\tau)\| \, d\tau = \int_0^t \sqrt{\mathcal{I}(\alpha'(\tau))} \, d\tau = \int_0^t \sqrt{E(u(\tau), v(\tau))(u'(\tau))^2 + 2F(u(\tau), v(\tau))\, u'(\tau)\, v'(\tau) + G(u(\tau), v(\tau))(v'(\tau))^2} \, d\tau.$$

$$\Rightarrow \quad s'(t) = \|\alpha'(t)\| \quad \overset{/^2}{\Rightarrow} \quad ds^2 = E(u,v)\, du^2 + 2F(u,v)\, du\, dv + G(u,v)\, dv^2.$$

деф. ds^2 зовемо **елемент дужине лука површи** $\mathcal{P}$.

Одавде, видимо да дужина лука криве α чија слика припада $r[\mathcal{U}]$, тј. $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ на интервалу $[a,b]$ износи:

$$L(\alpha) := \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{\mathcal{I}(\alpha'(t))} \, dt = \int_a^b \sqrt{E \cdot (u'(t))^2 + 2F \cdot u'(t)\, v'(t) + G \cdot (v'(t))^2} \, dt$$

* За угао θ између две криве α и β чије слике припадају $r[\mathcal{U}]$ и које се секу у $\alpha(t_0) = \beta(t_1) = r(u_0, v_0)$ и за које је $\alpha'(t_0) = X$, $\beta'(t_1) = Y$, важи следеће:

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_1) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \cdot \|\beta'(t)\|} = \frac{\mathcal{I}(X,Y)}{\sqrt{\mathcal{I}(X,X)} \cdot \sqrt{\mathcal{I}(Y,Y)}}. \qquad (*)$$

Користећи $\boxed{6}$ лз, уведимо ознаке:

$$\alpha(t) = r(u_1(t), v_1(t)) \Rightarrow \alpha'(t_0) = r(u_1'(t_0), v_1'(t_0)) = X;$$
$$\beta(t) = r(u_2(t), v_2(t)) \Rightarrow \beta'(t_1) = r(u_2'(t_1), v_2'(t_1)) = Y.$$

Тада је:

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{I}(X,Y) &\overset{\text{деф.}}{=} E(u_0,v_0) \cdot u_1'(t_0) \cdot u_2'(t_1) + F(u_0,v_0)\big(u_1'(t_0)\, v_2'(t_1) + u_2'(t_1)\, v_1'(t_0)\big) + G(u_0,v_0)\, v_1'(t_0)\, v_2'(t_0). \\
\mathcal{I}(X,X) &\overset{\text{деф.}}{=} E(u_0,v_0) \cdot (u_1'(t_0))^2 + 2F(u_0,v_0)\, u_1'(t_0)\, v_1'(t_0) + G(u_0,v_0)\, (v_1'(t_0))^2. \\
\mathcal{I}(Y,Y) &\overset{\text{деф.}}{=} E(u_0,v_0) \cdot (u_2'(t_1))^2 + 2F(u_0,v_0)\, u_2'(t_1)\, v_2'(t_1) + G(u_0,v_0)\, (v_2'(t_1))^2.
\end{aligned}\right\} \quad (**)$$

Лема 2: Специјално, за угао ϕ између координатних кривих важи: $\cos\phi = \dfrac{F(u_0,v_0)}{\sqrt{E(u_0,v_0) \cdot G(u_0,v_0)}}$.

Доказ: Означимо u- координатну криву са α $(\alpha(t) = r(t, v_0))$.
Означимо v- координатну криву са β $(\beta(t) = r(u_0, t))$.

Тврђење следи тривијално убацивањем $(**)$ у $(*)$.

Последица: Координатне криве ротационих површи су ортогоналне.

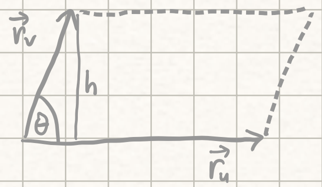
Доказ: тривијално (по примеру $\Rightarrow F = 0 \Rightarrow \cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = 90^\circ$)

деф. Нека је $r: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ рег. елем. површ и нека је $S \subseteq r[\mathcal{U}]$ компактан.
Тада је **површина од S** једнака:

$$\mathcal{P}(S) := \iint\limits_{r^{-1}[S]} \| r_u \times r_v \| \, du\, dv = \iint\limits_{r^{-1}[S]} \sqrt{EG - F^2} \, du\, dv.$$

Мотивација: Како смо дошли до овога?

Ако површ поделимо на мрежу (слика), онда траженu површину можемо посматрати као збир површина паралелограма које разапињу r_u, r_v.



$$P_{\square} = \| r_u \times r_v \|$$

последица Л1

$$\Rightarrow \mathcal{P}(r) = \iint\limits_{r^{-1}[S]} \| r_u \times r_v \| \, du\, dv = \iint\limits_{r^{-1}[S]} \sqrt{EG - F^2} \, du\, dv.$$

Лема 3: $\mathcal{P}(\tilde{r}) = |\det(\mathcal{J})| \cdot \mathcal{P}(r).$

Доказ: Нека је $\tilde{r} = r \circ \phi$, тј. нека је $\tilde{r}(\tilde{u}, \tilde{v})$ репараметризација површи $r(u,v)$.

Знамо: $\mathcal{P}(r) = \iint\limits_{r^{-1}[S]} \| r_u \times r_v \| \, du\, dv$, $\quad \mathcal{P}(\tilde{r}) = \iint\limits_{\tilde{r}^{-1}[\tilde{S}]} \| \tilde{r}_{\tilde{u}} \times \tilde{r}_{\tilde{v}} \| \, d\tilde{u}\, d\tilde{v}.$

Такође: $\tilde{r}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (r \circ \phi)(\tilde{u}, \tilde{v}) = r(\phi(\tilde{u}, \tilde{v})) = r(\underbrace{\phi_1(\tilde{u}, \tilde{v})}_{u}, \underbrace{\phi_2(\tilde{u}, \tilde{v})}_{v}).$

$$\Rightarrow \tilde{r}_{\tilde{u}} = \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{u}} + \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{u}}, \qquad \tilde{r}_{\tilde{v}} = \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{v}} + \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{v}}.$$

$$\Rightarrow \tilde{r}_{\tilde{u}} \times \tilde{r}_{\tilde{v}} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{u}} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{v}} \cdot \cancelto{0}{r_u \times r_u} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{u}} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{v}} \cdot r_u \times r_v + \frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{u}} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{v}} \cdot r_v \times r_u + \frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{u}} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{v}} \cdot \cancelto{0}{r_v \times r_v}$$

$$= \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{u}} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{v}} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{u}} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{v}} \right) \cdot r_u \times r_v = \det(\mathcal{J}(\phi)(\tilde{u}, \tilde{v}))\, r_u \times r_v.$$

Дакле: $\mathcal{P}(\tilde{r}) = \iint\limits_{r^{-1}[\tilde{S}]} \| \tilde{r}_{\tilde{u}} \times \tilde{r}_{\tilde{v}} \| \, d\tilde{u}\, d\tilde{v} = \iint\limits_{r^{-1}[\tilde{S}]} |\det(\mathcal{J})| \cdot \| r_u \times r_v \| \, du\, dv = |\det(\mathcal{J})| \cdot \mathcal{P}(r).$

Последица: Оваква деф. површина је геометријска.

Лема 4: Нека je $r: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$, $r = r(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ рег. елем. површ и $S \subseteq r[\mathcal{U}]$ компактан. Тада je:

$$\mathcal{P}(S) = \iint\limits_{r^{-1}[S]} \sqrt{(x_u y_v - x_v y_u)^2 + (x_u z_v - x_v z_u)^2 + (y_u z_v - y_v z_u)^2}\, du\, dv.$$

Доказ: Означимо: $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$, $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$, $y_u = \frac{\partial y}{\partial u}$, $y_v = \frac{\partial y}{\partial v}$, $z_u = \frac{\partial z}{\partial u}$, $z_v = \frac{\partial z}{\partial v}$.

По овим ознакама: $r_u = r_x \cdot x_u + r_y \cdot y_u + r_z \cdot z_u$, $r_v = r_x \cdot x_v + r_y \cdot y_v + r_z \cdot z_v$.

$E = \langle r_u, r_u \rangle = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$, $F = \langle r_u, r_v \rangle = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$, $G = \langle r_v, r_v \rangle = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$

$$\Rightarrow EG - F^2 = \ldots = (x_u y_v - x_v y_u)^2 + (x_u z_v - x_v z_u)^2 + (y_u z_v - y_v z_u)^2.$$

Лема 5: Нека je $r: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$, $r = r(x, y, f(x,y))$ рег. елем. површ и $S \subseteq r[\mathcal{U}]$ компактан. Тада je:

$$\mathcal{P}(S) = \iint\limits_{r^{-1}[S]} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy.$$

Доказ: $r_x = (1, 0, f_x)$, $r_y = (0, 1, f_y)$

$E = \langle r_x, r_x \rangle = 1 + f_x^2$, $F = \langle r_x, r_y \rangle = f_x f_y$, $G = \langle r_y, r_y \rangle = 1 + f_y^2$.

$$\Rightarrow EG - F^2 = \ldots = 1 + f_x^2 + f_y^2.$$

$\boxed{8.}$ Пресликавања површи

Уочимо пресликавање $f: S_1 \to S_2$, а $r_1: \mathcal{U}_1 \to R^3$ и $r_2: \mathcal{U}_2 \to R^3$ рег. елем. површи чије су слике S_1 и S_2.

С обзиром да су $r_1: \mathcal{U}_1 \to S_1$ и $r_2: \mathcal{U}_2 \to S_2$ бијекције

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}_1 \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, dotted, "\mathcal{F}"'] & S_1 \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{U}_2 \arrow[r, "r_2"] & S_2 \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ постоји јединствено $\mathcal{F}: \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ ткд. $\forall (u,v) \in \mathcal{U}_1 \quad f(r_1(u,v)) = r_2(\mathcal{F}(u,v))$.

Кажемо да је $f: S_1 \to S_2$ **глатко** ако је $\mathcal{F}$ глатко, тј. ако $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ имају непрекидне изводе сваког реда.

* **деф.** Нека су $r_1: \mathcal{U}_1 \to R^3$ и $r_2: \mathcal{U}_2 \to R^3$ рег. елем. површи чије су слике S_1 и S_2. $(\measuredangle(\alpha, b) = \measuredangle(f(\alpha), f(\beta)))$
Дифеоморфизам $f: S_1 \to S_2$ је **конформно пресликавање** ако „чува угао између кривих".
Ако такво пресликавање постоји, кажемо да су **површи S_1 и S_2** (тј. r_1 и r_2) **конформне.**

Теорема 1: Две рег. елем. површи S_1 и S_2 су (локално) конформне акко постоје њихове репараметризације $r_1: \mathcal{U} \to R^3$ и $r_2: \mathcal{U} \to R^3$, са $r_1[\mathcal{U}] = S_1$, $r_2[\mathcal{U}] = S_2$, ткд. $E_2 = \lambda^2 E_1$, $F_2 = \lambda^2 F_1$, $G_2 = \lambda^2 G_1$. (λ^2 - не-нула диф. ф-ја на $\mathcal{U}$)

Теорема 2: Сваке две рег. елем. површи су локално конформне.

Доказ: Само идеја: Изаберемо тзв. „изотермалну" параметризацију: $E = G = \lambda^2(u,v)$, $F = 0$.

Користимо $\boxed{7}$ Т1

* **деф.** Нека су $r_1: \mathcal{U}_1 \to R^3$ и $r_2: \mathcal{U}_2 \to R^3$ рег. елем. површи чије су слике S_1 и S_2.
Дифеоморфизам $f: S_1 \to S_2$ је **изометрија** ако „чува дужину кривих". $(L(\alpha) = L(f(\alpha)))$
Ако такво пресликавање постоји, кажемо да су **површи S_1 и S_2** (тј. r_1 и r_2) **изометричне.**

деф. Нека су $r_1: \mathcal{U}_1 \to R^3$ и $r_2: \mathcal{U}_2 \to R^3$ рег. елем. површи чије су слике S_1 и S_2.

Функција f назива се **локални дифеоморфизам**
ако за сваку тачку $P \in S_1$ постоји њена околина $\mathcal{T} \subset S_1$ ткд. је $f|_{\mathcal{T}}$ дифеоморфизам на $f[\mathcal{T}]$.

Локални дифеоморфизам $f: \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ је **локална изометрија** ако „чува дужину кривих".
Ако такво пресликавање постоји, кажемо да су **површи S_1 и S_2** (тј. r_1 и r_2) **локално изометричне.**

Теорема 3: Две рег. елем. површи S_1 и S_2 су (локално) изометричне акко постоје њихове репараметризације $r_1: \mathcal{U} \to R^3$ и $r_2: \mathcal{U} \to R^3$, са $r_1[\mathcal{U}] = S_1$, $r_2[\mathcal{U}] = S_2$, ткд. $E_2 = E_1$, $F_2 = F_1$, $G_2 = G_1$.

Доказ: (⇐) Нека су r_1 и r_2 репараметризације ткд. $E_2 = E_1 = E$, $F_2 = F_1 = F$, $G_2 = G_1 = G$.
Нека је $f: S_1 \to S_2$ пресликавање такво да је $\mathcal{F} \equiv id$, тј. $f(r_1(u,v)) = r_2(u,v)$.
(Такво f постоји, јер $f = r_2 \circ r_1^{-1}$)

Уочимо произвољну криву $(a,b) \to \mathcal{U}$, $t \mapsto (u(t), v(t))$.
Уочимо и криве $\gamma_1(t) = r_1(u(t), v(t))$ и $\gamma_2(t) = r_2(u(t), v(t))$.

Тада је: $f(\gamma_1(t)) = f(r_1(u(t), v(t))) = r_2(u(t), v(t)) = \gamma_2(t) \Rightarrow \gamma_1 \xmapsto{f} \gamma_2$.

Приметимо и да имају исте дужине: $L(\gamma_1) = \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}\, dt = L(\gamma_2)$.

Дакле, f је изометрија.

(⇒) Нека је $f: S_1 \to S_2$ изометрија.
Означимо $S_1 = \tilde{r}_1[\mathcal{U}_1]$ и $S_2 = \tilde{r}_2[\mathcal{U}_2]$.
Како је $\mathcal{F}: \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ дифеоморфизам ⇒ постоји репарам. од $\tilde{r}_2$ ткд. $r_2(u,v) = \tilde{r}_2(\mathcal{F}(u,v))$

Нека је $r_1 = \tilde{r}_1$, $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}$. Докажимо да r_1, r_2 имају исту прву основну форму.

Приметимо: $f(r_1(u,v)) = f(\tilde{r}_1(u,v)) = \tilde{r}_2(\mathcal{F}(u,v)) = r_2(u,v)$.

Слика произв. криве $\gamma_1(t) = r_1(u(t), v(t))$ је $f(\gamma_1(t)) = f(r_1(u(t), v(t))) = r_2(u(t), v(t))$.

Како је f изометрија: $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E_1(u')^2 + 2F_1u'v' + G_1(v')^2}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E_2(u')^2 + 2F_2u'v' + G_2(v')^2}\, dt$, $\forall t_0, t_1 \in (a,b)$

$$\Rightarrow E_1(u')^2 + 2F_1u'v' + G_1(v')^2 = E_2(u')^2 + 2F_2u'v' + G_2(v')^2$$

Ако фиксирамо t_0, а означимо $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$ и фиксирамо криву $t \mapsto (u(t), v(t))$:

* за $u = u_0 + t - t_0$, $v = v_0$ $\Rightarrow$ $u'(t) = 1$, $v'(t) = 0$ $\Rightarrow$ $E_1 = E_2$;

* за $u = u_0$, $v = v_0 + t - t_0$ $\Rightarrow$ $u'(t) = 0$, $v'(t) = 1$ $\Rightarrow$ $G_1 = G_2$;

* за $u = u_0 + t - t_0$, $v = v_0 + t - t_0$ $\Rightarrow$ $u'(t) = 1$, $v'(t) = 1$ $\Rightarrow$ $F_1 = F_2$.

Примери: стр. 52 - 53

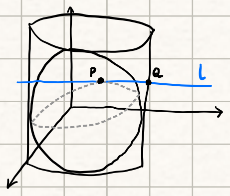
Посматрајмо јединичну сферу $S: x^2+y^2+z^2=1$ и описани цилиндар $C: x^2+y^2=1$.

За сваку тачку $P \in S$ постоји тачно једна права l ткд. $l \ni P$, $l \parallel Oxy$ и сече z-осу. (осим $(0,0,\pm1)$)
Права l продире цилиндар у 2 тачке, али ми бирамо ону тачку која је блика тачки P.

Тиме добијамо пресликавање $f: S \to C$, $P(x,y,z) \xrightarrow{f} Q(X,Y,Z)$. Нађимо везу између координата.

$z = Z$ – очигледно ($\parallel Oxy$)

$$\left.\begin{array}{l} Q \in C \Rightarrow X^2+Y^2=1 \\ (X,Y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{слика}}}{=} \lambda \cdot (x,y) = (\lambda x, \lambda y) \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda^2(x^2+y^2)=1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



Дакле: $f(x,y,z) = (X,Y,Z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z\right)$

Теорема 4 (Архимедова теорема):

Површина сваког дела сфере једнака је површини његове слике при овом пресликавању f.

Доказ: $r(\theta,\varphi) \overset{S}{=} (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta) \xmapsto{f} (\cos\varphi, \sin\varphi, \sin\theta) \overset{C}{=} \tilde{r}(\theta,\varphi)$.

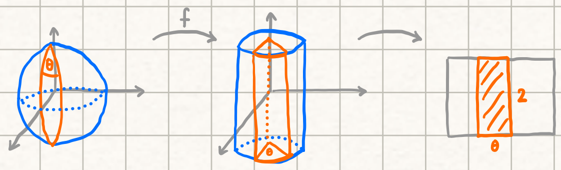
$$\begin{cases} \Rightarrow r_\theta = (-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \quad r_\varphi = (-\cos\theta\sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0) \\ \Rightarrow E = \langle r_\theta, r_\theta \rangle = 1, \quad F = \langle r_\theta, r_\varphi \rangle = 0, \quad G = \langle r_\varphi, r_\varphi \rangle = \cos^2\theta. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Rightarrow \tilde{r}_\theta = (0, 0, \cos\theta), \quad \tilde{r}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\theta, 0) \\ \Rightarrow \tilde{E} = \langle \tilde{r}_\theta, \tilde{r}_\theta \rangle = \cos^2\theta, \quad \tilde{F} = \langle \tilde{r}_\theta, \tilde{r}_\varphi \rangle = 0, \quad \tilde{G} = \langle \tilde{r}_\varphi, \tilde{r}_\varphi \rangle = 1. \end{cases}$$

Дакле $\sqrt{EG-F^2} = \cos\theta = \sqrt{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2} \Rightarrow \mathcal{P} = \iint_S \sqrt{EG-F^2}\, d\theta d\varphi = \iint_C \sqrt{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2}\, d\theta d\varphi = \tilde{\mathcal{P}}$.

Последица: **Површина сферног исечка јединичне сфере чији је угао θ је 2θ.**

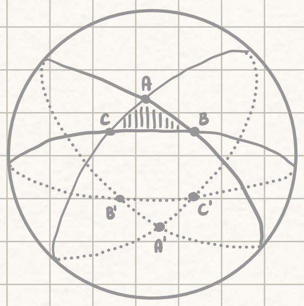
Доказ: Слика (пречник је 2)



Теорема 5:

**Нека је ABC сферни троугао јединичне сфере.
Тада је површина овог троугла једнака: $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C - \pi$.**

Доказ: $P_{\Delta ABC} + P_{\Delta A'B'C'} = 2\measuredangle A$
$P_{\Delta ABC} + P_{\Delta A'B'C'} = 2\measuredangle B$
$P_{\Delta ABC} + P_{\Delta A'B'C'} = 2\measuredangle C$



Троуглови ΔABC, $\Delta AB'C'$, $\Delta ABC'$, $\Delta AB'C$ чине полулопту

$$\Rightarrow P_{\Delta ABC} + \underset{\substack{\parallel \\ P_{\Delta A'BC}}}{P_{\Delta AB'C'}} + P_{ABC'} + P_{AB'C} = 2\pi$$

$$\Rightarrow 2\measuredangle A + 2\measuredangle B + 2\measuredangle C - 2P_{\Delta ABC} = 2\pi \Rightarrow P_{\Delta ABC} = \measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C - \pi.$$

* деф. Нека су $r_1: \mathcal{U}_1 \to R^3$ и $r_2: \mathcal{U}_2 \to R^3$ рег. елем. површи чије су слике S_1 и S_2.
Дифеоморфизам $f: S_1 \to S_2$ **„чува површину"** ако за сваки $T \subset S_1$ важи $\mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(f(T))$.

Теорема 6: Дифеоморфизам $f: S_1 \to S_2$ чува површину акко $E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2$.
($r_1: \mathcal{U}_1 \to R^3$, $r_2: \mathcal{U}_2 \to R^3$, њихове слике су S_1 и S_2)

Доказ: тривијално (по деф. $\mathcal{P}$)

* деф. Нека су $r_1: \mathcal{U}_1 \to R^3$ и $r_2: \mathcal{U}_2 \to R^3$ рег. елем. површи чије су слике S_1 и S_2.
Дифеоморфизам $f: S_1 \to S_2$ је **геодезијско пресликавање** ако „чува геодезијске линије". $\boxed{13}$

$\boxed{9.}$ Друга основна форма

деф. **Коефицијенти друге основне форме** рег. површи $r: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ су ф-је деф. на $\mathcal{U}$ са:

$$e(u,v) := \langle r_{uu}(u,v),\ n(u,v) \rangle \overset{(*)}{=} -\langle r_u, n_u \rangle;$$

$$f(u,v) := \langle r_{uv}(u,v),\ n(u,v) \rangle \overset{(*)}{=} -\langle r_u, n_v \rangle = -\langle r_v, n_u \rangle;$$

$$g(u,v) := \langle r_{vv}(u,v),\ n(u,v) \rangle \overset{(*)}{=} -\langle r_v, n_v \rangle,$$

при чему $n(u,v) = \dfrac{r_u \times r_v}{\| r_u \times r_v \|}$.

(*) Како је $\langle r_u(u,v), n(u,v) \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle r_{uu}(u,v), n(u,v) \rangle + \langle r_u(u,v), n_u(u,v) \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle r_{uu}(u,v), n(u,v) \rangle = -\langle r_u(u,v), n_u(u,v) \rangle$

Слично и за остале.

Напомена: Често се друга нормална форма дефинише као билинеарна форма:

$$\begin{aligned} \mathrm{II}\big(X(u,v), Y(u,v)\big) := &\ X_1(u,v)\, Y_1(u,v)\, e(u,v) \\ &+ \big(X_1(u,v)\, Y_2(u,v) + X_2(u,v)\, Y_1(u,v)\big)\, f(u,v) \\ &+ X_2(u,v)\, Y_2(u,v)\, g(u,v). \end{aligned}$$

где су $X(u,v) = X_1(u,v) \cdot r_u(u,v) + X_2(u,v) \cdot r_v(u,v)$
$Y(u,v) = Y_1(u,v) \cdot r_u(u,v) + Y_2(u,v) \cdot r_v(u,v)$ тангентна векторска поља површи r.

Напомена: Коефицијенти e, f, g нису геометријски појмови, тачније, зависе од параметризације.

$$\begin{bmatrix} \tilde{e} & \tilde{f} \\ \tilde{f} & \tilde{g} \end{bmatrix} = \pm\, J^t(\phi) \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} J(\phi), \qquad r_2 = r_1 \circ \phi$$

Напомена: Ако $e, f, g \equiv 0 \Rightarrow$ површ је део равни.

Доказ:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{lll} e \equiv 0 & \Rightarrow \langle r_u, n_u \rangle = 0 & \Rightarrow n_u \perp r_u \\ f \equiv 0 & \Rightarrow \langle r_v, n_u \rangle = 0 & \Rightarrow n_u \perp r_v \end{array}\right\} \Rightarrow n_u \perp T(r) \\ \\ \text{Аналогно} \quad n_v \perp T(r) \end{array}\right\} \Rightarrow n \perp T(r) \Rightarrow \begin{array}{c}\text{површ је} \\ \text{раванска}\end{array}$$

Од раније знамо да $[r_u, r_v, n]$ чине базу за $\mathbb{R}^3$, па изразимо r_{uu}, r_{uv}, r_{vv} у тој бази.

Јасно, из деф. видимо да су коефицијенти уз n редом e, f, g (само $/\cdot n$)
Шта иде уз r_u и r_v?

деф. **Кристофелови симболи** површи r су:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma^1_{12} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma^1_{22} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG-F^2)}$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG-F^2)}$$

Гаусове формуле:

$$r_{uu} = \Gamma^1_{11} \cdot r_u + \Gamma^2_{11} \cdot r_v + e \cdot n$$

$$r_{uv} = \Gamma^1_{12} \cdot r_u + \Gamma^2_{12} \cdot r_v + f \cdot n$$

$$r_{vv} = \Gamma^1_{22} \cdot r_u + \Gamma^2_{22} \cdot r_v + g \cdot n$$

Доказ:

А како у тој бази записујемо n_u и n_v?

деф.

$$\beta^1_1 = \frac{fF - eG}{EG-F^2} \qquad \beta^2_1 = \frac{eF - fE}{EG-F^2}$$

$$\beta^1_2 = \frac{gF - fG}{EG-F^2} \qquad \beta^2_2 = \frac{fF - gE}{EG-F^2}$$

Вајнгартенове формуле:

$$n_u = \beta^1_1 \cdot r_u + \beta^2_1 \cdot r_v$$

$$n_v = \beta^1_2 \cdot r_u + \beta^2_2 \cdot r_v$$

Доказ:

Теорема 1: Нека је $r: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ рег. елем. површ и n век. поље нормала површи r. Тада:

$$n_u \times n_v = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \cdot r_u \times r_v$$

Доказ: тривијално (рачун)

Код кривих смо имали базу $[T, N, B]$, а код површи $[r_u, r_v, n]$.

За описивање геометрије кривих, користили смо кривину и торзију.
Питамо се да ли коеф. I и II основне форме могу играти аналогну улогу?

Кодацијеве једначине:
$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2$$
$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2$$

Доказ:

деф. $K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$

Гаусове једначине:
$$E \cdot K = (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2$$
$$F \cdot K = (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1$$
$$F \cdot K = (\Gamma_{12}^2)_v - (\Gamma_{22}^2)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2$$
$$G \cdot K = (\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^1 - (\Gamma_{12}^1)^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1.$$

Доказ:

Теорема 2: I и II једнинствено одређују површ, до на изометрију.

А шта ако имају исту само I?

Теорема 3 (Бонеова):

↗ $E>0$, $G>0$, $\det>0$

Нека су E, F, G, e, f, g коеф. осн. форми I и II, при чему је I поз. дефинитна.

Ако су за ове коеф. задовољене Кодацијеве и Гаусове једначине,
онда постоји до на изометрију јединствена површ за коју су I и II основне форме.

10. Нормална и геодезијска кривина

деф. Нека је α рег. прир. парам. крива чија слика припада трагу елем. површи r.
Векторско поље унутрашњих нормала дуж криве α површи r је $S(s) := n(s) \times T(s)$

Приметимо да је $[n, T, S]$ ортон. база. Важи: $\|\alpha'\| = \|T\| = 1 \overset{\boxed{3}ЛИ}{\Rightarrow} \alpha' \perp \alpha'' \Rightarrow \alpha'' = a \cdot n + 0 \cdot T + b \cdot S$

деф. Нормална кривина криве α је функција $\kappa_n : (a,b) \to R$, $\kappa_n(s) := \langle \alpha''(s), n(s) \rangle$. (то је a)

деф. Геодезијска кривина криве α је функција $\kappa_g : (a,b) \to R$, $\kappa_g(s) := \langle \alpha''(s), S(s) \rangle$. (то је b)

Теорема 1:
1) $\kappa^2(s) = \kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s)$;

2) $\kappa_n(s) = \kappa(s) \cdot \cos\theta(s)$, $\theta(s) = \measuredangle(n(s), N(s))$;

3) $\kappa_g(s) = \kappa(s) \cdot \cos\alpha(s)$, $\alpha(s) = \measuredangle(n(s), B(s))$;

4) $\kappa_g(s) = \pm\kappa(s) \cdot \sin\theta(s)$.

Доказ:

деф. Нормално сечење у тачки M површи је крива која је одређена као пресек површи и равни која садржи тачку M и нормална је на $T_M(r)$. (тј. $\parallel n$ у M)

$\alpha = r \cap \Pi$

Теорема 2:
1) Нормална кривина раванских кривих је нула.
За њих важи: $\kappa_g = \kappa$.

2) Геодезијска кривина нормалних сечења је нула.
За њих важи: $\kappa_n = \pm\kappa$.

3) Нормална кривина сферних кривих је const, и то $\pm\frac{1}{R}$. (R - полупречник)

Доказ:

Теорема 3: Нека је α рег. прир. парам. крива чији траг припада $r(\mathcal{U})$ рег. елем. површи.

1) $$\kappa_n(s) = e(u(s),\ v(s)) \cdot (u'(s))^2 + 2f(u(s), v(s)) \cdot u'(s) \cdot v'(s) + g(u(s), v(s)) \cdot (v'(s))^2$$
$$= \mathrm{II}\left(\alpha'(s),\ \alpha''(s)\right)$$

2) $$\kappa_g(s) \cdot S(s) = \left(\Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 + u''\right) \cdot r_u$$
$$+ \left(\Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 + v''\right) \cdot r_v$$

Доказ:

Теорема 4: Нека је α рег. прир. парам. крива чији траг припада $r(\mathcal{U})$ рег. елем. површи.

Тада: $$\kappa_g(s) = \left(\Gamma_{11}^2 (u')^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)(u')^2 v' + \left(\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1\right) u'(v')^2 - \Gamma_{22}^1 (v')^3 + u'v'' - u''v'\right) \cdot \sqrt{EG - F^2}.$$

Доказ:

Напомене: 1) κ_g зависи само од коеф. I основне форме.
То значи да је κ_g унутрашња карактеристика површи.

2) Ако је $f: S_1 \to S_2$ изометрија, κ_g за $f(r_1(u(s), v(s)))$ је иста у тачки $f(r_1(u_0, v_0))$.
(зато што зависи само од коеф. I основне форме и $(u(s),\ v(s))$)

Теорема 5: Нека је $\alpha(t)$ крива произвољне брзине чији траг припада $r(\mathcal{U})$ рег. елем. површи.

1) $$\kappa_n(t) = \frac{\langle \alpha''(t),\ n(t) \rangle}{\| \alpha'(t) \|^2}$$

2) $$\kappa_n(t) = \frac{e \cdot (u')^2 + 2f\, u'v' + g \cdot (v')^2}{E \cdot (u')^2 + 2F\, u'v' + G \cdot (v')^2} = \frac{\mathrm{II}(\alpha', \alpha')}{\mathrm{I}(\alpha', \alpha')}.$$

Доказ:

Теорема 6 (Менијеова): Нормална кривина криве чији траг припада трагу рег. елем. површи зависи само од површи, вектора брзине криве и смера нормале површи

Означимо: $\alpha(0) = P$, $\alpha'(0) = X$ - вектор брзине

$$X = X_1 \cdot r_u(u_0, v_0) + X_2 \cdot r_v(u_0, v_0), \qquad X_1 = u'(0), \quad X_2 = v'(0).$$

Тада је: $$\kappa_n(P, X) = \frac{II(X,X)}{I(X,X)} = \frac{eX_1^2 + 2fX_1X_2 + gX_2^2}{EX_1^2 + 2FX_1X_2 + GX_2^2}$$

Напомена: Ово оправдава чињеницу да κ_n некад зовемо „нормална кривина површи".

Теорема 7: Нека су $\alpha(t) = r(u_0, t)$, $\beta(t) = r(t, v_0)$ координатне линије.

1) $\kappa_n^\alpha = \dfrac{g(u_0,t)}{G(u_0,t)}$;

2) $\kappa_n^\beta = \dfrac{e(t,v_0)}{E(t,v_0)}$.

Доказ: 1) тривијално $\left(\kappa_n^\alpha(t) = \dfrac{e\cdot 0 + 2f\cdot 0\cdot 1 + g\cdot 1}{E\cdot 0 + 2F\cdot 0\cdot 1 + G\cdot 1} = \dfrac{g}{G} \right)$

2) аналогно

деф. **Асимптотска крива / линија** површи је крива чији траг припада трагу површи и $\kappa_n = 0$.

Праве чији су вектори управо вектори брзине ове криве су **асимптотски правци.**

Теорема 8: Нека је α рег. прир. парам. крива чији траг припада $r(u)$ рег. елем. површи.

α је асимпт. лин. ако: $e(u')^2 + 2f u'v' + g(v')^2 = 0$

Доказ: тривијално (из Т5. 2)

Теорема 9: $\alpha(0) = P$, $\alpha'(0) = X = X_1 \cdot r_u(u_0, v_0) + X_2 \cdot r_v(u_0, v_0)$, $X_1 = u'(0)$, $X_2 = v'(0)$.

X је асимпт. правац ако: $eX_1^2 + 2fX_1X_2 + gX_2^2 = 0$

Доказ: тривијално (из Т6)

Теорема 10: Нека је $\alpha(t)$ крива произвољне брзине чији траг припада $r(\mathcal{U})$ рег. елем. површи.

1) $$K_g(t) = \frac{[\alpha'(t),\ \alpha''(t),\ n(t)]}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

2) $$K_g(t)\cdot\|\alpha'(t)\|^3 = \Big(\Gamma_{11}^{2}(u')^3 + (2\Gamma_{12}^{2} - \Gamma_{11}^{1})(u')^2 v' + \big(\Gamma_{22}^{2} - 2\Gamma_{12}^{1}\big)u'(v')^2 - \Gamma_{22}^{1}(v')^3 + u'v'' - u''v'\Big)\cdot\sqrt{EG-F^2}.$$

Доказ: 1)

2) аналогно Т4

Теорема 11: Нека су $\alpha(t) = r(u_0, t)$, $\beta(t) = r(t, v_0)$ координатне линије.

1) $$K_g^{\alpha} = -\Gamma_{22}^{1}\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G\sqrt{G}};$$

2) $$K_g^{\beta} = \Gamma_{11}^{2}\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E\sqrt{E}}.$$

Доказ: тривијално

Последица: Ако су α, β ортогоналне, онда:

1) $$K_g^{\alpha} = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}$$

2) $$K_g^{\beta} = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}$$

$\boxed{11.}$ Главне криве површи

деф. $\mathcal{F}_{I} := \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$, $\mathcal{F}_{II} := \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$.

Нека су $t_1 = \xi_1 r_u + \eta_1 r_v$, $t_2 = \xi_2 r_u + \eta_2 r_v$ два танг. век. у тачки $P \in r(\mathcal{U})$.
Тада је $\langle t_1, t_2 \rangle = E\xi_1\xi_2 + F(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + G\eta_1\eta_2$, тј. $\langle t_1, t_2 \rangle = T_1^t \mathcal{F}_I T_2$, $T_1 = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix}$, $T_2 = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$.

Нека је $\gamma'(s) = \xi r_u + \eta r_v$ танг. век. прир. парам. криве γ и $T = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$.
По Менијеу ($\boxed{10}$ Т6) $\Rightarrow$ $\kappa_n(P, t) = T^t \mathcal{F}_{II} T$

деф. **Главне кривине** елементарне површи су корени једначине:

$$\det(\mathcal{F}_{II} - \kappa \cdot \mathcal{F}_{I}) = 0, \quad \text{тј.} \quad \begin{vmatrix} e - \kappa E & f - \kappa F \\ f - \kappa F & g - \kappa G \end{vmatrix} = 0$$

Ова једначина се може записати: $(EG - F^2)\kappa^2 + (2fF - eG - gE)\kappa + eg - f^2 = 0$.
Она је квадратна, па има два решења: κ_1, κ_2.
Уз то, дискриминанта јој је ≥ 0, па су главне кривине реалне функције.

деф. Уколико вектор $T = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$ задовољава једначину $(\mathcal{F}_{II} - \kappa \mathcal{F}_I) T = 0$,
одг. танг. век. $t = \xi r_u + \eta r_v$ површи r назива се **главни вектор** који одговара гл. кривини κ.
Кажемо и **главни правац**.

Кренимо са решавањем последње једначине:

$$\begin{bmatrix} e - \kappa E & f - \kappa F \\ f - \kappa F & g - \kappa G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (e - \kappa E)\xi + (f - \kappa F)\eta = 0 \\ (f - \kappa F)\xi + (g - \kappa G)\eta = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (e\xi + f\eta) - \kappa(E\xi + F\eta) = 0 \\ (f\xi + g\eta) - \kappa(F\xi + G\eta) = 0 \end{cases}$$

Овај систем има нетрив. реш. $(1, \kappa)$ ако $\begin{vmatrix} e\xi + f\eta & E\xi + F\eta \\ f\xi + g\eta & F\xi + G\eta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\eta^2 & \xi\eta & -\xi^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 \quad (*)$

Закључак: Ако је последња детерминанта $(*)$ једнака нули, онда је $t = \xi r_u + \eta r_v$ главни вектор.

Напомена: За $F = f = 0$, почетна једначина има облик: $\begin{vmatrix} e - \kappa E & 0 \\ 0 & g - \kappa G \end{vmatrix} = 0$

То значи $\kappa_1 = \frac{e}{E}$, $\kappa_2 = \frac{g}{G}$, а једначина $(*)$ има облик: $\xi \cdot \eta \cdot (eG - Eg) = 0$

Ако је $\kappa_1 \neq \kappa_2$ $\Rightarrow$ $eG - Eg \neq 0$ $\Rightarrow$ $\xi = 0$ или $\eta = 0$ $\Rightarrow$ главни вектори су r_u, r_v.

Примери: стр. 76

деф. Ако је $\kappa_1(P) = \kappa_2(P)$, онда је P умбиличка / заобљена тачка.

Ако је $\kappa_1(P) = \kappa_2(P) = 0$, онда је P планарна тачка.

Напомена: Ако су све тачке повезане површи умбиличке, површ је део сфере $\left(R = \frac{1}{\kappa_n}\right)$ или равни. Ово тврђење не доказујемо.

Теорема 1: 1) P је умбиличка акко $\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G}$;

2) P је планарна акко $e = f = g = 0$

Доказ: 1) $\kappa_1 = \kappa_2 \Leftrightarrow 0 = D = b^2 - 4ac = 4\frac{EG-F^2}{E}(Ef-Fe)^2 + \left(Eg - Ge - 2\frac{F}{G}(Ef-Fe)\right)^2$

$\Leftrightarrow Ef = Fe, \quad Eg - Ge - 2\frac{F}{G}(Ef-Fe) = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G}$

2)

Теорема 2: 1) Ако $\kappa_1 \neq \kappa_2$, онда су главни вектори који одг. κ_1, κ_2 међусобно ортогонални;

2) Ако $\kappa_1 = \kappa_2$, сваки танг. век. $v \in T_P(r)$ је главни вектор.

Доказ:

деф. Линија кривине на елем. површи је крива чији је тангентни век. у било којој тачки главни вектор у тој тачки.

Кажемо и главна линија.

Теорема 3: α је линија кривине акко $\begin{vmatrix} -v'^2 & u'v' & -u'^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$

Доказ: $\alpha(t) = r(u(t), v(t)) \Rightarrow \alpha' = u'r_u + v'r_v \Rightarrow \xi = u', \quad \eta = v'$

Када то убацимо у (*), добијамо тврђење.

Теорема 4: Меридијани и паралеле ротационе површи у тачкама које нису умбиличке су линије кривине.

Доказ:

Теорема 5: Коорд. лин. рег. елем. површи које не садрже умбиличке тачке су једине линије кривине акко $F = f = 0$.

Доказ:

Узимајући у обзир да случај $F = f = 0$ олакшава рачун, такве параметризација нам је важна. Зовемо је **главна параметризација**.

Пример: Антић, 31. задатак.

Теорема 6 (Ојлерова):

Нека је α прир. парам. крива на површи r, а κ_1, κ_2 главне кривине површи. Тада:

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta$$

где је θ угао између α' и главног вектора који одговара κ_1, а κ_n је норм. кривина у тачки у правцу вектора α'.

Алт. формулација:

Нека је Y јединични танг. вектор у тачки P рег. елем. површи. Тада је:

$$\mathrm{II}(Y, Y) = \kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta .$$

Доказ:

Последица: Главне кривине у тачки површи су макс. и мин. вредност нормалне кривине свих параметризованих кривих на површи које садрже ту тачку.

Доказ:

$\boxed{12.}$ Гаусова и средња кривина површи

деф. Нека је $r: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ рег. елем. површ, чије су главне кривине κ_1, κ_2.

Гаусова кривина је функција $K(u,v) = \kappa_1(u,v) \cdot \kappa_2(u,v)$, $K: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$.
Средња кривина је функција $H(u,v) = \frac{1}{2}(\kappa_1(u,v) + \kappa_2(u,v))$, $H: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$.

Напомена: K не зависи од параметризације површи (иако κ_1, κ_2 зависе)

деф. Површи за које је $H = 0$ зову се минималне површи. (нпр. катеноид, хеликоид)

Теорема 1: 1) $K(u,v) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}(u,v)$;

2) $H(u,v) = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)}(u,v)$;

3) $\kappa_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$.

Доказ:

деф. Нека је P тачка која припада трагу рег. површи.

$K(P) > 0$ - P је елиптичка тачка;
$K(P) < 0$ - P је хиперболичка тачка;
$K(P) = 0$, једна од $\kappa \neq 0$ - P је параболичка тачка;
$K(P) = 0$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ - P је планарна тачка. (већ увели у $\boxed{11}$)

Пример: стр. 86

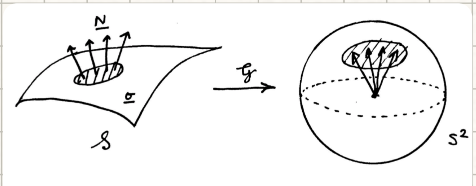
Теорема 2: Ако је P умбиличка, онда $K(P) \geq 0$.

Доказ:

Теорема 3: Ако су све тачке повезане рег. површи умбиличке, онда $K = \text{const} \geq 0$.

Доказ:

деф. Нека је $r: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ рег. елем. површ и $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
Гаусово пресликавање $\mathcal{G}: r(\mathcal{U}) \to S^2$ тачки $r(u,v)$ додељује тачку на јединичној сфери ткд. одговара врху вектора нормале $n(u,v)$ површи $r(u,v)$.



Теорема 4: Нека је $r: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ рег. елем. површ и нека је $\delta > 0$ такво да је диск $\mathcal{R}_\delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u-u_0)^2 + (v-v_0)^2 \le \delta^2\}$ садржан у $\mathcal{U}$.

Тада је $\lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{P(\mathcal{G}(r(\mathcal{R}_\delta)))}{P(r(\mathcal{R}_\delta))} = |K|$, где је K Гаусова кривина у $r(u_0, v_0)$.

Доказ:

Ако Кристофелове симболе убацимо у Гаусове формуле, добијамо:

Бриоскијева формула: $K = \dfrac{A - B}{(EG - F^2)^2}$,

где је: $A = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}$

Специјално, ако је $F=0$, онда $K = -\dfrac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{G_u}{\sqrt{EG}}\right) + \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)\right)$

$$\Rightarrow \quad K = -\frac{1}{EG}\left(\frac{1}{2}(E_{vv} + G_{uu}) - \frac{1}{4}\left(\frac{E_u G_u + E_v^2}{E} + \frac{E_v G_v + G_u^2}{G}\right)\right)$$

Уколико је уз то и $E=1$, онда: $K = -\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}(\sqrt{G})$

Пример: За ротациону површ: $r(u,v) = (f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ g(u))$, $f>0$ и $f'^2 + g'^2 = 1$

$$\Rightarrow \quad E=1,\ F=0,\ G = f(u)^2 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{-f''}{f}.$$

Теорема 5 (Гаусова брилијантна): Гаусова кривина елем. површи је унутрашња особина.

(зависи само од I и чува се при изометријама)

Доказ: Директно из Бриоскијеве формуле.

Теорема 6: Нека је $f: S_1 \to S_2$ локална изометрија рег. елем. површи r_1 и r_2.

Тада је $K_1 = K_2 \circ f$ (K_i - Гаусова кривина r_i)

Доказ: Постоје параметризације површи r_1, r_2 ткд. су им коеф. I исти.

По Т5, K се не мења $\Rightarrow$ имају исте Гаусове кривине, тј. $K_1 = K_2 \circ f$.

Последица: Сфера и раван нису лок. изометричне.

Доказ: Зато што $K_{\ominus} = \frac{1}{R^2}$, а $K_{\square} = 0$.

Важи ли обрат Т6?

Теорема 7 (Миндингова): Две рег. елем. површи које имају једнаку константну Гаусову кривину јесу локално изометричне.

Напомена: Вредност Гаусове кривине одређује природу геометрије која описује површ.

$K = const$ $\Rightarrow$ еуклидска;
$K > 0$ $\Rightarrow$ хиперболичка;
$K < 0$ $\Rightarrow$ тзв. „не-еуклидска".

13. Геодезијске линије

деф. Крива $\alpha \in r(\mathcal{U})$ је геодезијска линија/крива ако је $\alpha''(t)$ нула или „нормално на површ", тј. паралелно са $n(t)$, за $\forall t$.

Лема 1: Свака геод. линија има const брзину.

Доказ: тривијално $\left(\frac{d}{dt} \|\alpha'(t)\|^2 = \frac{d}{dt} \langle \alpha', \alpha' \rangle = 2 \langle \alpha', \alpha'' \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha' = \text{const} \right)$

Нека је $\|\alpha'(t)\| = \lambda$, онда је $\tilde{\alpha}(t) = \alpha\left(\frac{t}{\lambda}\right)$ прир. репарам. криве α.

Тада је $\frac{d^2}{dt^2} \tilde{\alpha}(t) = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \cdot \alpha(t) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\alpha}$ је такође геодезијска линија.
То значи да се увек можемо ограничити на изучавање геод. лин. јединичне брзине.

Ипак, у општем случају, репараметризација (било која) геод. лин. не мора бити геод. лин.
Зато чешће користимо следећу деф.

Теорема 1: α је геодезијска линија $\Leftrightarrow$ $\kappa_g = 0$ дуж целе криве α.

Доказ:

Последица: Геодезијску линију можемо дефинисати као крива јединичне брзине ткд. $\kappa_g = 0$.

Теорема 2: α је геодезијска $\Leftrightarrow$ $[n, T, T'] = 0$.

Доказ: тривијално $\left(0 = \kappa_g(s) = \langle \alpha''(s), S(s) \rangle = \langle T', n \times T \rangle = [n, T, T'] \right)$

Лема 2: Права (или део праве) на површи је геодезијска линија.

Доказ:

Напомена: Одавде видимо да су генератрисе праволинијских површи заправо геодезијске.

Лема 3: Свако нормално сечење површи је геодезијска линија.

Доказ:

Напомена: Одавде видимо да су велики кругови сфере такође геодезијске.

Теорема 3 (Геодезијске једначине): Крива $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ је геодезијска акко:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}(Eu' + Fv') = \frac{1}{2}\left(E_u (u')^2 + 2F_u \cdot u'v' + G_u (v')^2\right); \\ \frac{d}{ds}(Fu' + Gv') = \frac{1}{2}\left(E_v (u')^2 + 2F_v \cdot u'v' + G_v (v')^2\right). \end{cases}$$

Доказ:

Последица: Изометрија површи чува геод. линије.

Доказ: тривијално (две изометричне површи могу бити параметризоване ткд. имају исте I)

Теорема 4: Крива $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ је геодезијска акко:

$$\begin{cases} u'' + \Gamma^1_{11}(u')^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}(v')^2 = 0 \\ v'' + \Gamma^2_{11}(u')^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}(v')^2 = 0 \end{cases}$$

Доказ:

Напомена: Т3 $\Leftrightarrow$ Т4

Теорема 5: 1) Сваки меридијан ротационе површи је геодезијска линија;

2) Паралела рот. површи је геод. лин. акко су тангенте меридијана паралелне оси ротације у свим тачкама паралеле.

Доказ:

Уочимо ротациону површ $r(u,v) = (f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ g(u))$, $f_u^2 + g_u^2 = 1$, $f > 0$.
Нека је $\theta \in [0, \pi]$ угао који геодезијска линија заклапа са паралелом коју је пресеца.
Нека је R полупречник паралеле која је пресеца.

Теорема 6 (Клерова релација): $R\cos\theta = \text{const}.$

Доказ: скрипта, стр. 99

Теорема 7: Нека је $\alpha(s) = r(u_1(s), v_1(s))$ природно парам. геод. лин. ткд. $E = E(u)$, $G = G(u)$, $F = 0$,
а нека је θ угао између геодезијске линије α и v-параметарске криве (u=const)

$$\sqrt{G}\cdot\cos\theta = \text{const}$$

Доказ:

Напомена: Важи и у обрнутом смеру.

Теорема 8: Нека је $r = r(u,v)$ рег. елем. површ (класе ≥ 2) ткд. $E = E(u)$, $G = G(u)$, $F = 0$.

1) u-параметарске криве $v = v_0$ су геодезијске линије;

2) v-параметарске криве $u = u_0$ су геодезијске линије $\Leftrightarrow$ $G_u(u_0) = 0$;

3) Прир. парам. криве $\alpha(s) = r(u(s), v(s))$ су геодезијске линије $\Leftrightarrow$ $v(t) = \pm\int \frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G - C^2}}\,dt + C_1$
(C, C_1 = const)

Доказ:

Теорема 9 (Егзистенција и јединственост геодезијских линија):

Нека је $P \in r(\mathcal{U})$ и X јединични вектор у $T_P(r)$.

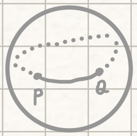
Тада за $s_0 \in R$ постоји јединствена геод. лин. α чији траг припада трагу површи r

ткд. $\alpha(s_0) = P$, $\alpha'(s_0) = X$.

Доказ:

Теорема 10: Нека је α крива на површи $\mathcal{P}$ параметризована дужином лука
и нека је $P = \alpha(a)$, $Q = \alpha(b)$.
Ако је α најкраћа крива између P и Q, тада је α геодезијска линија.

Обрнуто не важи: геодезијске линије не морају минимизирати растојање.



14. Паралелно померање

деф. Тангентно векторско поље површи дуж криве $\alpha:[a,b]\to R^3$, $\alpha\in r(\mathcal{U})$ је функција $X:[a,b]\to R^3$ која сваком $t\in[a,b]$ додељује танг. век. $X(t)$ на површ r у тачки $\alpha(t)$.

Оно је диференцијабилно ако је X диференцијабилна.

деф. Диф. танг. век. поље $X(t)$ дуж $\alpha(t)$ је паралелно дуж криве $\alpha(t)$ ако је X' нормално на површ.

Ако је век. поље $\frac{dX}{dt}$ нормално на површ, анулирају се тангентне компоненте промене поља X при променама t.

Другим речима, нека особа са површи не би могла да примети промену век. поља X дуж α, односно та особа ће видети векторе $X(t_1)$ и $X(t_2)$ (за блиске t_1, t_2) као паралелне.

Пример:

Теорема 1: Нека је $\alpha(t) = r(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ и $X(t)$ диф. танг. век. поље дуж α.

Век. поље $X(t)$ је паралелно дуж α акко је $\frac{dX_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k} X_i \frac{d\alpha_j}{dt} = 0$, $k = 1,2$.

Доказ:

Последица: Паралелност је унутрашња особина.

Доказ: Зависи само од I.

Теорема 2: Нека je α рег. крива на површи r класе C^2, а X^0 танг. век. на r. $(X^0 \in T_{\alpha(t_0)} r)$

Тада постоји јединствено танг. век. поље $X(t)$ паралелно дуж криве α ткд. $X(t_0) = X^0$.

деф. Векторско поље X из Т2 зовемо **паралелно померање** вектора X^0 дуж криве α.

Теорема 3: Нека су $X(t)$ и $Y(t)$ паралелна танг. век. поља дуж криве α на површи $\mathcal{P}$.
Тада се интензитети ових век. поља, као и угао који она заклапају, не мењају дуж α.

Доказ:

деф. Рег. крива $\alpha(t)$ на површи $\mathcal{P}$ je **потпуно права** ако je век. поље $\frac{d\alpha}{dt}$ паралелно дуж α.

Теорема 4: $\alpha(t)$ je потпуно права акко je $\frac{dt}{ds} = const$ и $\alpha(t(s))$ je пр. парам. геод. лин.
(s - дужина лука)

Последица: Ако je рег. крива α на површи $\mathcal{P}$ параметризована дужином лука,
тада je она потпуно права акко je геодезијска.

Другим речима, век. поље танг. век. пр. парам. криве je паралелно дуж криве α
акко je α геодезијска линија.

деф. **Коваријантни извод** танг. век. поља je норм. пр o j. $\frac{dX}{dt}$ на танг. простор, тј. $\frac{DX}{dt} = \frac{dX}{dt} - \langle \frac{dX}{dt}, n \rangle n$.

Напомена: Специјално, у случају равни: $E = G = 1$, $F = 0$ $\Rightarrow$ $\Gamma_{ij}^k = 0$ и $\frac{DX}{dt} = \frac{dX}{dt}$.

Пример: Паралелно померање дуж паралеле сфере: скрипта, стр. 105