Јован Самарџић

13 / 2019

Геометрија 1, професор: Иван Димитријевић

- дефиниције
- ставови / теореме / тврђења
- докази

1. Вектор као класа еквиваленције

деф. E^k (или само E) - **скуп тачака** еуклидског простора

E^1 - права
E^2 - раван
E^3 - простор

деф. Уређен пар тачака $(A,B) \in E \times E$ је у **релацији ~** са (C,D) акко AD и BC имају заједничко средиште

($\Leftrightarrow$ $\|AB\| = \|DC\|$ и паралелне / колинеарне су)

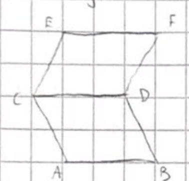
Лема 1: Релација ~ је релација еквиваленције

Доказ: (Р) AB и BA имају исто средиште

(С) AD и BC имају исто средиште $\Rightarrow$ CB и DA имају исто ср.

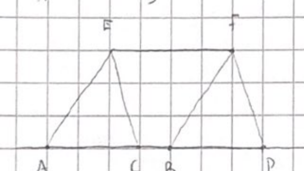
(Т) Раздвајамо више случајева ($AB \sim CD$ и $CD \sim EF$ $\Rightarrow$ $AB \sim EF$)

1°



$\|AB\| = \|CD\| = \|EF\|$, $AB \parallel CD \parallel EF$ $\Rightarrow$ $ABFE$ - паралелограм

2°

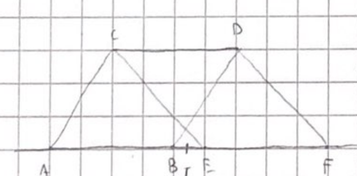


AB колинеарно са CD, $CD \parallel EF$ $\Rightarrow$ $AB \parallel EF$

$\|AB\| = \|CD\| = \|EF\|$

$\Rightarrow$ $ABEF$ - паралелограм

3°



T - средиште BE $\Rightarrow$ $\|BT\| = \|TE\|$

$\|AB\| = \|CD\| = \|EF\|$

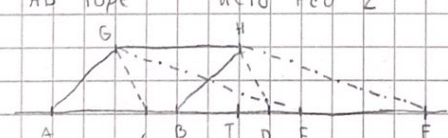
$\Rightarrow$ $\|AB\| + \|BT\| = \|EF\| + \|TE\|$

$\Rightarrow$ T - средиште AF

$\Rightarrow$ AF и BE - заједничко средиште

4° AB горе - исто као 2°

5°



исто као 3°, уз помоћ GH

деф. **Вектор** је класа еквиваленције релације $\sim$ на $E\times E$

$$\overrightarrow{AB} = [(A,B)]_\sim = \{(X,Y)\in E\times E \mid (X,Y)\sim(A,B)\}$$

↳ **вектор представник** вектора $\overrightarrow{AB}$

деф. $(E\times E)/_\sim = \{\overrightarrow{XY} \mid (X,Y)\in E\times E\} = V^k\ (= V)$ → **скуп свих вектора** у E^k

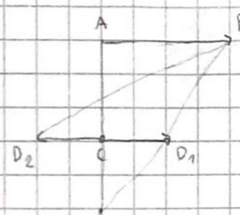
деф. **Нула вектор**: $\vec{0} = [(A,A)]_\sim$

Супротан вектор за $\overrightarrow{AB}$: $-\overrightarrow{AB} = [(B,A)]_\sim$

деф. **Интензитет** (норма, дужина) − $\|\overrightarrow{AB}\| = d(A,B)$

правац − истог су правца (**колинеарни**) ако су праве AB и CD паралелне

смер − истог су смера ако $AC \cap BD$ не припада дужи AC



, иначе су супротног смера

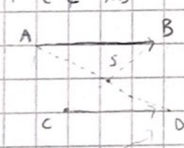
(има смисла упоређивати само ако су истог правца)

* Сваки ненула вектор одређен је нормом и смером

Лема 2: За сваки вектор $\overrightarrow{AB}$ и тачку C постоји тачка D тако да $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Доказ: (конструкцијом)

1° $C \notin AB$



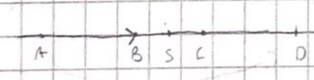
S - средиште BC

D - тачка централно симетрична A у односу на S

Пошто је S зај. средиште AD и BC $\Rightarrow AD \sim BC$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

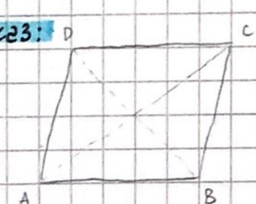
2° $C \in AB$



исти доказ

Лема 3: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Доказ:



AC и BD имају зај. ср

⇕

AC и DB имају зај. ср

2. Основне операције са векторима

деф. Збир вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ је вектор $\overrightarrow{AC}$

Став: Збир не зависи од избора вектора представника

Доказ: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$ $\quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, а такође $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'C'}$

$\text{л}3 \Updownarrow \qquad \Updownarrow$

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} \qquad \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} \quad \overset{\text{л}5}{\Rightarrow} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$

Последица: због леме 2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ (постоји E), због тога постоји правило надовезивања

деф. Множење вектора скаларом , $R \times V \to V$, $\alpha \cdot \vec{u}$

1° $\alpha = 0$: $\alpha \vec{u} = \vec{0}$

2° $\vec{u} = \vec{0}$: $\alpha \vec{u} = \vec{0}$

3° $\alpha \neq 0 \land \vec{u} \neq \vec{0}$: интензитет : $|\alpha| \, \|\vec{u}\|$

правац : исти као $\vec{u}$

смер : 1° $\alpha > 0$: исти

2° $\alpha < 0$: супротен

Теорема: V^k је векторски простор:

$(V^k, +)$ - Абелова група:

1) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
2) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
3) $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$
4) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

5) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
6) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
7) $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$
8) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Доказ: 1) $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

2) $\vec{u} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$

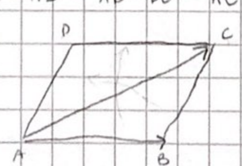
$\vec{0} + \vec{u} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$

3) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

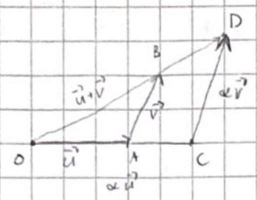
$(-\vec{u}) + \vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$

4) $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$



5)



1° $\alpha = 0$: $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$

2° $\alpha \neq 0$

2°_1 $\vec{u}, \vec{v}$ нису колинеарни

$\underbrace{\vec{OD} = \alpha(\vec{u}+\vec{v})}_{\text{сличност } \triangle OAB \sim \triangle OCD}$, $\vec{OD} = \underbrace{\alpha\vec{u}}_{\vec{OC}} + \underbrace{\alpha\vec{v}}_{\vec{CD}}$

(користимо 6, 7, 8)

2°_2 $\vec{u}, \vec{v}$ - колинеарни $\Rightarrow$ $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$

$\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha(\vec{u} + \lambda\vec{u}) = \alpha\left((1+\lambda)\vec{u}\right) = (\alpha(1+\lambda))\vec{u} = (\alpha + \alpha\lambda)\vec{u}$

$= \alpha\vec{u} + (\alpha\lambda)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \alpha(\lambda\vec{u}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

6) 1° $\vec{u} = \vec{0}$: $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$

2° $\vec{u} \neq \vec{0}$

2°_1 $\alpha = 0 \ \vee \ \beta = 0$

тривијално

2°_2 $\alpha \neq 0 \ \wedge \ \beta \neq 0$

$2^\circ_{2_1}$ $\alpha + \beta = 0$

тривијално

$2^\circ_{2_2}$ $\alpha+\beta \neq 0$: $2^\circ_{2_{2_1}}$ $\alpha\beta > 0$

(нацртати)

интензитет ✓

смер ✓

$2^\circ_{2_{2_2}}$ $\alpha\beta < 0$, нпр $\alpha > 0, \beta < 0$

по деф сабирања ✓

7) 1° $\vec{u} = \vec{0} \ \vee \ \alpha = 0 \ \vee \ \beta = 0$ ✓

2° $\left.\begin{array}{l} \|\alpha(\beta\vec{u})\| = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot \|\vec{u}\| \\ \|(\alpha\beta)\vec{u}\| = |\alpha\beta| \ \|\vec{u}\| \end{array}\right\} \Rightarrow$ интензитет ✓

правац је исти, али и смер ($\text{sgn}(\alpha\beta) = \text{sgn}\,\alpha \ \text{sgn}\,\beta$) ✓

8) 1° $\vec{u} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$ ✓

2° $\vec{u} \neq \vec{0}$ $\Rightarrow$ вектори $1 \cdot \vec{u}$ и $\vec{u}$ имају исти интензитет и исти смер ✓

3. Линеарна зависност и независност вектора

деф. Скуп ненула вектора $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\} \in V^k$ је

1° **линеарно независан** ако

$$\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \dots + \alpha_n\vec{v_n} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

2° иначе је **линеарно зависан**

пр. $\{v_1, v_2\}$ - линеарно зависни вектори

$$\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} = \vec{0} \overset{\alpha_1 \neq 0}{\Longrightarrow} \vec{v_1} = \underbrace{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}_{\beta}\vec{v_2} = \beta\vec{v_2}$$

$\Rightarrow$ $\vec{v_1}$ и $\vec{v_2}$ су **колинеарни** ако су лин зависни

пр. v_1, v_2, v_3 су **компланарни** ако су лин. зависни

деф. Скуп вектора $B = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ је **база** векторског простора V^k ако

1) за свако $v \in V^k$ $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ ткд. $v = \alpha_1\vec{e_1} + \dots + \alpha_n\vec{e_n}$

2) B је лин. независан скуп

деф. Број елемената базе векторског простора је његова **димензија**

Лема: Ако је B база V^k и $\vec{v} = \alpha_1\vec{v_1} + \dots + \alpha_n\vec{v_n}$ и $\vec{v} = \beta_1\vec{v_1} + \dots + \beta_n\vec{v_n}$

$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \ \alpha_2 = \beta_2, \ \dots, \ \alpha_n = \beta_n$

Доказ: одузмемо их: $0 = (\alpha_1 - \beta_1)\vec{v_1} + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\vec{v_n}$

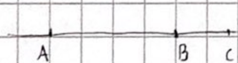
пошто су $\vec{v_i}$ лин. нез. $\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$

Теорема: $\dim V^k = k, \quad k \in \{1, 2, 3\}$

Доказ: $k = 1$

Изаберемо A, B ткд. $A \neq B$, па $\vec{AB} \in V^1$

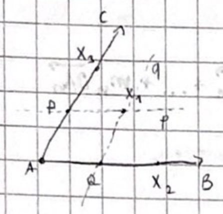
$\{\vec{AB}\}$ је лин нез. $\Rightarrow \dim V^1 \geq 1$



$\vec{AC}, \vec{AB}$ колинеарни $\Rightarrow$ лин. зависни $\Rightarrow \dim V^1 < 2$

$\Rightarrow \dim V^1 = 1$

$k=2$: (V^2 одређен са 3 неколин. тачке)



Ако би $\vec{AB}, \vec{AC}$ били лин. зависни, били би колинеарни

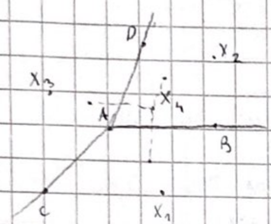
$\Rightarrow \vec{AB}, \vec{AC}$ лин. нез. $\Rightarrow \dim V^2 \geq 2$

$\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AX_i}$ морају бити лин. зависни, јер:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{AX_2} = \lambda_2 \vec{AB} + 0 \cdot \vec{AC}, \quad \vec{AX_3} = 0 \cdot \vec{AB} + \lambda_3 \vec{AC} \\ \vec{AP} + \vec{AQ} = \mu_1 \vec{AB} + \mu_2 \vec{AC} = \vec{AX_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \dim V^2 < 3$$

$\Rightarrow \dim V^2 = 2$

$k=3$: (V^3 одређен са 4 некопл. тачке)



Ако би $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ били лин. зав., били би компланарни

$\Rightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ лин. нез. $\Rightarrow \dim V^3 \geq 3$

$\vec{AX_i}, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ морају бити лин. зависни

$$\vec{AX_1} = \lambda_1 \cdot \vec{AB} + \mu_1 \vec{AC} + 0 \cdot \vec{AD}$$
$$\vec{AX_2} = \lambda_2 \cdot \vec{AB} \quad 0 \cdot \vec{AC} \quad \mu_2 \cdot \vec{AD}$$
$$\vec{AX_3} = 0 \cdot \vec{AB} \quad \lambda_2 \cdot \vec{AC} \quad \mu_3 \cdot \vec{AD}$$

$$\underbrace{\vec{AX} = \lambda_4 \vec{AB} + \mu_4 \vec{AC} + \xi_4 \cdot \vec{AD}}_{\dim V^3 < 4}$$, јер $\exists \alpha \parallel ABC, X \in \alpha$; $\exists \beta \parallel ABD, X \in \beta$; $\exists \gamma \parallel ACD, X \in \gamma$

$\Rightarrow \dim V^3 = 3$

4. Центар масе

деф. $A_1, A_2, \dots, A_n, O$ - тачке, $m_1, m_2, \dots, m_n$ - масе, $\sum_{i=1}^{n} m_i = m \neq 0$

Центар масе је тачка S, ткд $m\overrightarrow{OS} = m_1\overrightarrow{OA_1} + \dots + m_n\overrightarrow{OA_n}$

Лема: Центар масе неког скупа тачака је јединствен
(не зависи од избора тачке O)

Доказ:

Изаберимо неко $O' \neq O$ и нп. $m \cdot \overrightarrow{O'S'} = m_1 \overrightarrow{O'A_1} + \dots + m_n \overrightarrow{O'A_n}$

Докажимо да је $S = S'$

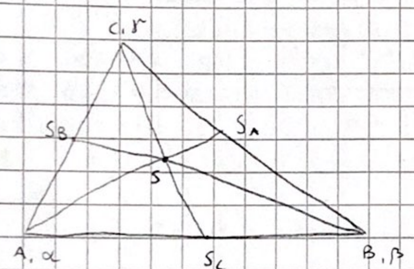
$$m(\underbrace{\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OS'}}_{\overrightarrow{O'S'}}) = m_1(\underbrace{\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_1}}_{\overrightarrow{O'A_1}}) + \dots + m_n(\underbrace{\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_n}}_{\overrightarrow{O'A_n}}) = \underbrace{(m_1 + \dots + m_n)}_{m}\overrightarrow{O'O} + \underbrace{m_1\overrightarrow{OA_1} + \dots + m_n\overrightarrow{OA_n}}_{m\overrightarrow{OS}}$$

$$m \cdot \overrightarrow{O'O} + m \cdot \overrightarrow{OS'} = m\,\overrightarrow{O'O} + m\,\overrightarrow{OS} \quad \Rightarrow \quad S = S'$$

Лема: Ако је S центар масе за $A_1, \dots, A_n$ са масама $m_1, \dots, m_n$
онда је S центар масе за $A_1, \dots, A_n$ са масама $\lambda m_1, \dots, \lambda m_n$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

Доказ: из дефиниције (помножимо обе стране са λ)

пр.



$$\frac{\|AS\|}{\|AS_A\|} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta + \gamma}$$

деф. Када је $m_1 = \dots = m_n = \frac{1}{n}$, онда се центар масе зове тежиште

5. Скаларни производ

деф. Угао између два ненула вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ је онај мањи угао између полуправих $[OA)$ и $[OB)$, дакле $\measuredangle(\vec{u},\vec{v}) \in [0, \pi]$

деф. Скаларни производ је операција $\circ : V^K \times V^K \to R$

$$\vec{u} \circ \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \measuredangle(\vec{u},\vec{v})$$

деф. Вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ су ортогонални ако $\vec{u} \circ \vec{v} = 0$

$\iff \vec{u} = \vec{0} \quad \vee \quad \vec{v} = \vec{0} \quad \vee \quad \cos \measuredangle(u,v) = 0$

$\iff \measuredangle(u,v) = \pi/2$

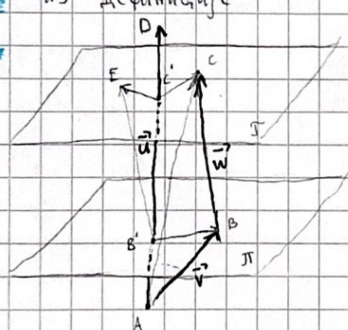
Особине:

1) $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$
2) $\vec{u} \circ (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \circ \vec{v} + \vec{u} \circ \vec{w}$
3) $\vec{u} \circ (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \circ \vec{v})$
4) $\vec{u} \circ \vec{u} \geq 0$
5) $u \circ u = 0 \iff u = \vec{0}$

Доказ:

1) из дефиниције

2)



$\vec{u} = \overrightarrow{AD}, \ \vec{v} = \overrightarrow{AB}, \ \vec{w} = \overrightarrow{BC}$

$B \in \pi, \ AD \perp \pi, \ AD \cap \pi = \{B'\}$

$C \in \pi', \ AD \perp \pi', \ AD \cap \pi' = \{C'\}$

$\overrightarrow{B'E} = \overrightarrow{BC}$

$\triangle ABB'$ – правоугли $\Rightarrow \cos \measuredangle(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\|\overrightarrow{AB'}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{AB'}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \cos \measuredangle(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB})$ исти угао

(1) $(\vec{u} \circ \underset{\vec{v}}{\overrightarrow{AB}}) \cdot \vec{u} = \|u^2\| \cdot \overrightarrow{AB'}$

↳ исти интензитет:

$\|(\vec{u} \circ \vec{v}) \cdot \vec{u}\| = |\vec{u} \circ \vec{v}| \cdot \|\vec{u}\| = \|u^2\| \cdot \overbrace{\|v\| \cos \measuredangle(u,v)}^{\|AB'\|}$

↳ исти смер: $\vec{u}$ и $\overrightarrow{AB'}$ су истог смера

$sgn(\vec{u} \circ \vec{v}) = sgn(\cos \measuredangle(\vec{u},\vec{v})) > 0$

(2) Аналогно (за $\triangle ACC'$) $\Rightarrow (\vec{u} \circ \underset{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{v} + \vec{w}}{\overrightarrow{AC}}) \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \cdot \overrightarrow{AC'}$

(3) (за $\triangle BC'E$) $\Rightarrow (\vec{u} \circ \underset{\overrightarrow{BC} = \vec{w}}{\overrightarrow{B'E}}) \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \cdot \overrightarrow{B'C'}$

$\|u\|^2 \overrightarrow{AB'} + \|u\|^2 \overrightarrow{B'C'} = \|u\|^2 (\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'}) = \|u\|^2 \overrightarrow{AC'}$

(1)+(3)=(2) $\Rightarrow (\vec{u} \circ \vec{v}) \cdot \vec{u} + (\vec{u} \circ \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \circ (\vec{v} + \vec{w})) \cdot \vec{u}$

$\Rightarrow \vec{u} \circ \vec{v} + \vec{u} \circ \vec{w} = u \circ (\vec{v} + \vec{w})$

3) $\vec{u} \circ \alpha\vec{v} = \|\vec{u}\| \, |\alpha| \, \|\vec{v}\| \cdot \cos \measuredangle(\vec{u}, \alpha\vec{v})$

$= |\alpha| \cdot \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cdot \underline{\operatorname{sgn} \alpha \cdot \cos \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})} = \alpha \cdot (\vec{u} \circ \vec{v})$

(α је коеф., не угао)

$1^\circ \; \alpha > 0$

$\measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) = \measuredangle(\vec{u}, \alpha\vec{v})$

$\cos\measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) = \cos \measuredangle(\vec{u}, \alpha\vec{v})$

$2^\circ \; \alpha < 0$

$\measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi - \measuredangle(\vec{u}, \alpha\vec{v})$

$\cos \measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) = -\cos\measuredangle(\vec{u}, \alpha\vec{v})$

$\cos \measuredangle(\vec{u}, \alpha\vec{v}) = \operatorname{sgn} \alpha \cdot \cos \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$

4) $\vec{u} \circ \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \cdot \cos 0 = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$

5) $\vec{u} \circ \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0} \;\lor\; \underbrace{\measuredangle(\vec{u}, \vec{u}) = \pi/2}_{\perp \text{ јер } \measuredangle(\vec{u}, \vec{u}) = 0} \iff \vec{u} = \vec{0}$

пр. $\vec{u} \circ \vec{w} = \vec{v} \circ \vec{w}$

$(\vec{u} - \vec{v}) \circ \vec{w} = 0 \iff \vec{u} = \vec{v} \;\lor\; \vec{w} = \vec{0} \;\lor\; (\vec{u} - \vec{v}) \perp \vec{w}$

НАПОМЕНА: у 10. питању је скаларни производ по координатама
у 8. питању је примена скаларног производа

6. Векторски производ

(Напомена: дефинише се у V^3 јер је само у њему правац нормале једнозначно одређен)

деф. **Векторски производ** вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$, $\times : V^3 \times V^3 \to V^3$, је вектор са следећим особинама:

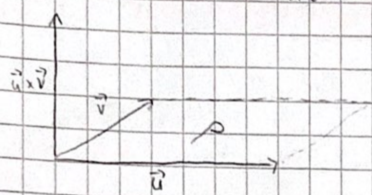
1° $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ ∧ $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$ - правац

2° $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$ - интензитет

↓

једнако површини паралелограма који $\vec{u}, \vec{v}$ образују

3° $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ - позитивно **оријентисано** - смер



* $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} = \vec{0} \lor \vec{v} = \vec{0} \lor \vec{u}, \vec{v}$ - колинеарни (лин. зависни)

Особине:

1) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
2) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
3) $\vec{u} \times (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \times \vec{v})$

Доказ:

1) (антикомутативност) интензитет исти √
$\vec{u} \times \vec{v}$ и $\vec{v} \times \vec{u}$ имају супротне оријентације
⇒ супротни смер ⇒ $\vec{u} \times \vec{v}$ и $-\vec{v} \times \vec{u}$ - исти смер

2) (користећи мешовити производ)

$$(\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})) \circ \vec{t} = (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{t} + (\vec{u} \times \vec{w}) \circ \vec{t} \quad \text{- (дистриб. мешовитог)}$$

$$(\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})) \circ \vec{t} - (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{t} - (\vec{u} \times \vec{w}) \circ \vec{t} = 0$$

$$(\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) - \vec{u} \times \vec{v} - \vec{u} \times \vec{w}) \circ \vec{t} = 0 \quad \text{(дистриб. скаларног)}$$

Ово важи за $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}$, па можемо да узмемо $\vec{t} = \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) - \vec{u} \times \vec{v} - \vec{u} \times \vec{w}$

$$\Rightarrow \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) - \vec{u} \times \vec{v} - \vec{u} \times \vec{w} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

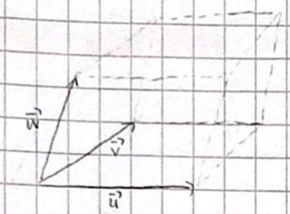
3) интензитет: $\|\vec{u} \times (\alpha \vec{v})\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\alpha \vec{v}\| \cdot \sin \measuredangle(\vec{u}, \alpha \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot |\alpha| \cdot \|\vec{v}\| \sin \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$
$= |\alpha| \cdot \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{v})\|$

правац: оба су нормална на $\vec{u}$ и $\vec{v}$ ⇒ исти
смер: 1° $\alpha > 0$: оба имају исти смер као $\vec{u} \times \vec{v}$
2° $\alpha < 0$: оба имају супротан смер од $\vec{u} \times \vec{v}$

⇒ исти смер

7. Мешовити производ

деф. **Мешовити производ** вектора $\vec{u}, \vec{v}$ и $\vec{w}$, $[\ ,\ ,\ ]: V^3 \times V^3 \times V^3 \to R$, је број $(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}$



Мешовити производ је једнак запремини призме коју вектори одређују (може бити $+V$ и $-V$)

Особине:

1) $[u,v,w] = -[v,u,w] = -[w,v,u] = -[u,w,v]$ (замена)
2) $[u,v,w] = [v,w,u] = [w,u,v]$ (шифт)
3) $[u,v,w+t] = [u,v,w] + [u,v,t]$
4) $[u,v,\alpha w] = \alpha [u,v,w]$

Доказ:

1) $[u,v,w] = (u \times v) \circ w = -(v \times u) \circ w = -[v,u,w]$

(користимо 2) $[u,v,w] = [w,u,v] = -[u,w,v]$

$[u,v,w] = [v,w,u] = -[w,v,u]$

2) Пошто су у сва три случаја иста три вектора, апсолутне вредности та три меш. пр. су исте. Довољно је доказати да су сва три истог знака.

Пошто је $[u,v,w] = \underset{\geq 0}{\|u\|} \, \underset{\geq 0}{\|v\|} \cdot \underset{\geq 0}{\|w\|} \cos \measuredangle(u \times v, w) \cdot \underset{\geq 0 \ (\varphi \in [0,\pi])}{\sin \measuredangle(u,v)}$

$[v,w,u] = \|u\| \cdot \|v\| \, \|w\| \cdot \cos \measuredangle(v \times w, u) \cdot \sin \measuredangle(v,w)$

довољно је проверити $\cos \measuredangle(u \times v, w) \geq 0 \iff \cos \measuredangle(v \times w, u) \geq 0$

тј. w и $u \times v$ са исте стране равни одређене са u, v

$\Updownarrow$

u и $v \times w$ са исте стране равни одређене са v, w

а то је (провером) јасно тачно

аналогно се докаже и друга једнакост

3) $(u \times v) \circ (w + t) = u \times v \circ w + u \times v \circ t$ (дистр. скаларног пр.)

4) $u \times v \circ (\alpha w) = \alpha (u \times v \circ w) = \alpha [u,v,w]$

8. Примене скаларног и векторског производа

* Скаларни:

1) рачунање интензитета вектора

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \circ \vec{u}}$$

2) рачунање угла између два вектора (праве, равни) (питање 18)

$$\measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

(од велике користи ако су дате координате)

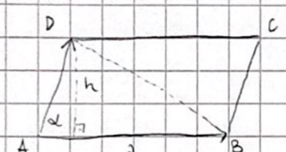
3) ортогоналност вектора

$$\vec{u} \circ \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

(u, v - ненула)

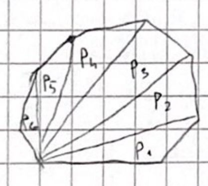
* Векторски:

1) површина паралелограма и троугла, па и n-тоугла



$$P_{▱} = \|\vec{AB} \times \vec{AD}\| = \underbrace{\|\vec{AB}\|}_{a} \underbrace{\|\vec{AD}\| \cos\alpha}_{h}$$

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} P_{▱} \Rightarrow P_{\Delta} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AD}\|$$



$$P_n = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

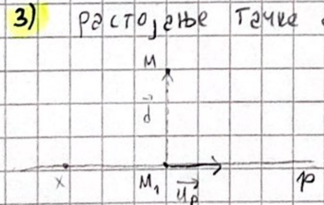
2) провера да ли су вектори колинеарни

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ - колинеарни}$$

(u, v - ненула)

(угао који заклапају је $\varphi = 0 \lor \varphi = \pi$)

3) растојање тачке од праве

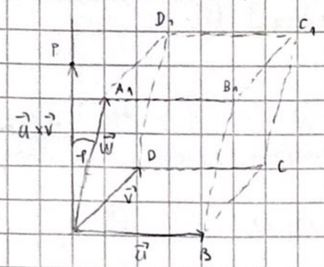


$$\|\vec{d} \times \vec{u_p}\| = \|\vec{d}\| \, \|\vec{u_p}\| \cdot \overset{1}{\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow d(M, p) = \frac{\|\vec{M_1M} \times \vec{u_p}\|}{\|\vec{u_p}\|}$$

(не мора MM_1, може било који MX)

* **Мешовити:** 1) запремине призме и тетраедра



$$V = B \cdot H$$

$$B = P_{ABCD} = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

$$H = \|\vec{w}\| \cos\varphi \quad , \quad \varphi = \measuredangle(\vec{u}\times\vec{v}, \vec{w})$$

$$\Rightarrow \quad V = \left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right|$$

$$V_{\Delta} = \frac{1}{3} B_{\Delta} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BH \Rightarrow V_{\Delta} = \frac{1}{6}\left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right|$$

2) провера да ли су вектори копланарни

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ - копланарни}$$

⑨ Двоструки векторски производ

деф. **Двоструки векторски производ** је векторско множење примењено два пута заредом $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$

* уколико су $\vec{u}$ и $\vec{v}$ колинеарни онда је $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$, па је и цео израз $=\vec{0}$ па зато даље све радимо уз претпоставку да су $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ лин нез.

Теорема: $$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = -(\vec{v}\circ\vec{w})\cdot\vec{u} + (\vec{u}\circ\vec{w})\cdot\vec{v}$$

Доказ: Нека је $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ ортонормирана база за V^3

Ако тврђење докажемо за базу, онда због линеарности важи увек

(особине 3 питање 6)

Уочавамо 27 случајева (за избор вектора):

I) $e_i\ e_i\ e_i$ (3)

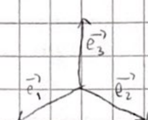
II) $e_i\ e_i\ e_j$ (6)

III) $e_i\ e_j\ e_i$ (6)

IV) $e_j\ e_i\ e_i$ (6)

V) $e_i\ e_j\ e_k$ (6)

(27) $(e_\square\ e_\square\ e_\square\quad 3^3)$



сви исти

I) $L = (e_i\times e_i)\times e_i = \vec{0}$

$D = -(e_i\circ e_i)\,e_i + (e_i\circ e_i)\,e_i = \vec{0}$

два иста један различит

II) $L = (e_i\times e_i)\times e_j = \vec{0}$

$D = -(e_i\circ e_j)\,e_i + (e_i\circ e_j)\,e_i = \vec{0}$

III) $L = (e_i\times e_j)\times e_i = [\text{нпр. } i=1,\ j=2] = (e_1\times e_2)\times e_1 = e_3\times e_1 = e_2$

$D = -(e_2\circ e_1)\,e_1 + (e_1\circ e_1)\,e_2 = \vec{0} + e_2 = e_2$

(аналогно и остале комбинације за i, j)

IV) опет разматрамо $i=1,\ j=2$, остало аналогно

$L = (e_2\times e_1)\times e_1 = -e_3\times e_1 = -e_2$

$D = -(e_1\circ e_1)\,e_2 + (e_2\circ e_1)\,e_1 = -e_2$

сви различити

V) $L = (e_i\times e_j)\times e_k = \pm e_k\times e_k = \vec{0}$

$D = -(e_j\circ e_k)\times e_i + (e_i\circ e_k)\,e_j = \vec{0}$

Последице: 1) Не важи асоцијативност за (обичан) векторски производ

2) **Јакобијев идентитет:** $(u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v = \vec{0}$

Доказ: 1) $u \times (v \times w) = -(v \times w) \times u = -\left(-(u \circ w) v + (v \circ u) w\right) = (u \circ w) v - (u \circ v) w$

$(u \times v) \times w = (u \circ w) v - (v \circ w) u$

2) $-(v \circ w) u + (u \circ w) v - (w \circ u) v + (v \circ u) w - (u \circ v) w + (w \circ v) u = \vec{0}$

10. Координате вектора и тачака

деф. Нека је $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ база векторског простора V^n.
Тада за свако $\vec{v} \in V^n$ постоје скалари $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ т.д.
$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$. Ти скалари зову се **координате вектора**

* два вектора су једнака ако и само ако имају једнаке координате у истој бази

деф. Положај тачке M се одређује у односу на изабрану тачку коју зовемо **координатни почетак** $O \in E$ тако што тој тачки придружимо једнозначно одређен **вектор положаја** тачке M (то је $\vec{OM}$)

деф. **Координатни систем** се састоји од тачке O и базе $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$

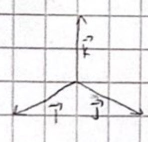
деф. Координатни систем је

1) **Декартов** - ако $\|e_i\| = 1$, за сваки елем. базе
2) **правоугли** - ако $e_i \perp e_j$, за сваки два елем базе
3) **ортонормирани** - ако је и Декартов и правоугли

деф. **Координате тачке** → координате вектора положаја те тачке
($[X]_{O,e} \to [\vec{OX}]_e$)

Скаларни производ у координатама (аналогно и за V^2, V^1)

- $O_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ - ортонормирани систем у V^3, позитивно оријентисана



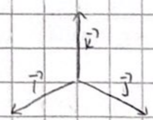
$\circ$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

$\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$
$\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$

$$\vec{u} \circ \vec{v} = (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}) \circ (v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u} \circ \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Векторски производ у координатама



$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	k	-j
$\vec{j}$	-k	0	i
$\vec{k}$	j	-i	0

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$$
$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}) \times (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k})$$

$$= (u_1\vec{i} \times v_2\vec{j} + u_1\vec{i} \times v_3\vec{k}) + (u_2\vec{j} \times v_1\vec{i} + u_2\vec{j} \times v_3\vec{k}) + (u_3\vec{k} \times v_1\vec{i} + u_3\vec{k} \times v_2\vec{j})$$

$$= u_1v_2\vec{k} - u_1v_3\vec{j} - u_2v_1\vec{k} + u_2v_3\vec{i} + u_3v_1\vec{j} - u_3v_2\vec{i}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}}$$

Мешовити производ у координатама

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$$
$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$$
$$\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$$

$$[u, v, w] = (u \times v) \circ w = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \circ (w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right) \circ (w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}) =$$

$$[u, v, w] = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} w_3$$

$$[u, v, w] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

11. Трансформације координата тачака

$e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$
$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ } базе векторског простора V^n

* Тражимо везу координата произвољног вектора $\vec{v} \in V$ у базама e и f

Пошто вектори $f_1, \dots, f_n \in V^n$, онда их можемо изразити у бази e

$$\underbrace{\begin{aligned} \vec{f_1} &= \alpha_{11}\vec{e_1} + \dots + \alpha_{1n}\vec{e_n} \\ &\vdots \\ \vec{f_n} &= \alpha_{n1}\vec{e_1} + \dots + \alpha_{nn}\vec{e_n} \end{aligned}}, \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

→ **матрица преласка** са e на f

Дакле: $f = e \cdot A$

Знамо: $e \cdot [v]_e = v = f \cdot [v]_f = e \cdot A \cdot [v]_f \quad / -$

$e \cdot \left([v]_e - A \cdot [v]_f \right) = 0$

$\Rightarrow \quad [v]_e = A \cdot [v]_f$

деф. Уколико су e, f ортонормиране, онда је $A \cdot A^T = E$, тј. $A^{-1} = A^T$

Матрице са тим својством називају се **ортогоналне матрице**

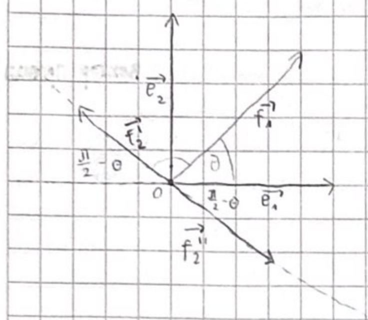
деф. Скуп свих ортогоналних матрица димензије k означавамо $O(k)$

* Тражимо везу координата произвољне тачке (M) у координ. сис. (O, e) и (S, f)
(посматрамо шта се дешава уколико, осим базе, променимо и координ. почетак

$[M]_{O,e} = [\vec{OM}]_e = A \cdot [\vec{OM}]_f = A \cdot [\vec{OS} + \vec{SM}]_f = A [\vec{OS}]_f + A \cdot [\vec{SM}]_f$

$[M]_{O,e} = \underset{\substack{\shortparallel \\ [OS]_e}}{[S]_{O,e}} + A \cdot [M]_{S,f}$

* Посматрајмо шта се дешава у $O(2)$



e, f - ортонормиране базе, $\theta = \measuredangle(e_1, f_1)$

1° e, f - исте оријентације $\left[f = (f_1, f_2')\right]$

$$f_1 = \cos\theta \cdot e_1 + \sin\theta \cdot e_2$$
$$f_2' = -\sin\theta \cdot e_1 + \cos\theta \cdot e_2$$

$\Rightarrow$ матрица промене из e у f je:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = R(\theta) \rightarrow \text{матрица ротације}$$

(за угао θ)

$$\det R(\theta) = 1$$

2° e, f - супротне оријентације $\left[f = (f_1, f_2'')\right]$

$$f_1 = \cos\theta \cdot e_1 + \sin\theta \cdot e_2$$
$$f_2'' = \sin\theta \cdot e_1 - \cos\theta \cdot e_2$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} = S(\theta) \rightarrow \text{матрица симетрије}$$

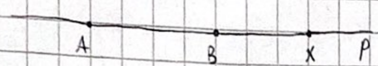
$$\det S(\theta) = -1$$

Дакле, $O(2) = \{R(\theta) \mid \theta \in R\} \cup \{S(\theta) \mid \theta \in R\}$

(12.) Права и раван у простору

*** права** (посматрамо у равни, тј. V^2, аналогно је и за V^3)

$A(a_1,a_2)$; $B(b_1,b_2)$; $A \neq B$



$\vec{u_p} = \vec{AB} = (b_1-a_1,\ b_2-a_2) = (u_1,u_2)$ → **вектор праве**

Бирамо произвољну тачку $X(x_1,x_2) \in p$, тј $\vec{AB}$ и $\vec{AX}$ су колинеарни

$\vec{AX} = \lambda \cdot \vec{AB}$

$(x_1-a_1,\ x_2-a_2) = \lambda(u_1,u_2)$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda u_1 \\ x_2 &= a_2 + \lambda u_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$ **параметарски облик** једначине праве

$$\lambda = \frac{x_1-a_1}{u_1} = \frac{x_2-a_2}{u_2} \left(= \frac{x_3-a_3}{u_3} \text{ за } V^3\right) \rightarrow$$ **канонски облик** једначине праве

(пошто је ово само скраћени запис параметарског облика, дозвољава се да неки буду једнаки нули, али не сви)

важи само V^2 ←

$u_2(x_1-a_1) = u_1(x_2-a_2)$

$u_2x_1 - u_1x_2 + (u_1a_2 - u_2a_1) = 0$

$A = u_2$

$B = -u_1$

$C = u_1a_2 - u_2a_1$

$$Ax_1 + Bx_2 + C = 0 \rightarrow$$ **општи (имплицитни) облик** једначине праве

(опет, не могу и A и B да буду једнаки нули)

$$x_2 = -\frac{A}{B}x_1 - \frac{C}{B} \rightarrow$$ **експлицитни облик** једначине праве

(може ако је $B \neq 0$, па зато не може „усправна" права)

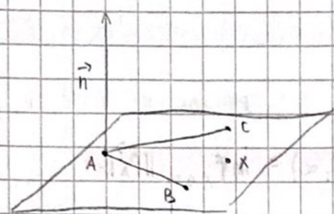
Дискусије: $u_1 = 0$ $\quad \frac{x_1-a_1}{0} = \frac{x_2-a_2}{u_2}$ је дефинисано за $x_1 = a_1$

⇒ усправна права (вертикална)

$u_2 = 0$ ⇒ хоризонтална права

$u_1 = 0 \wedge u_2 = 0$ → немогуће ($A \neq B$)

* **раван**



A, B, C - неколинеарне тачке

$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (n_1, n_2, n_3)$

$A(a_1, a_2, a_3)$; $X(x_1, x_2, x_3)$ - произв. тачка у равни

$\vec{n} \perp \vec{AX} \Rightarrow \vec{AX} \circ \vec{n} = 0$ (исто што и векторски облик на ону стран

$(x_1 - a_1) n_1 + (x_2 - a_2) n_2 + (x_3 - a_3) n_3 = 0$

$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 - (n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3) = 0$

$\underbrace{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3}_{\vec{n}} + \underbrace{n_4}_{A} = 0 \rightarrow$ **једначина равни** $(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \neq 0)$

(из овог облика имамо $\vec{n}$ и A)

У случају $n_1 = n_2 = n_3 = 0$: 1° $n_4 = 0$: цео простор
2° $n_4 \neq 0$: ништа

* И за раван постоји параметарски облик

$\vec{AX} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$

$(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3) = \lambda \underbrace{(u_1, u_2, u_3)}_{\vec{AB}} + \mu \underbrace{(v_1, v_2, v_3)}_{\vec{AC}}$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ x_2 &= a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ x_3 &= a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$ **параметарски облик** једначине равни

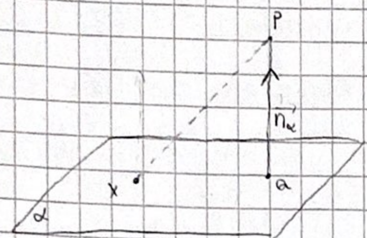
* Постоји и још један облик

$\vec{n} \circ \vec{AX} = 0 \rightarrow$ **векторски облик** једначине равни

(из ње се изводи „обична" једначина равни)

13. Удаљеност тачке од праве и равни

*** Раван** - одређена тачком X и вектором нормале $\vec{n_\alpha}$



$\alpha: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 = 0$ $\quad [\vec{n_\alpha}(n_1, n_2, n_3)]$

$P(p_1, p_2, p_3)$, X - произвољна тачка у α

По деф. $d(P, \alpha) = \inf_{X \in \alpha} \|\vec{PX}\|$

Докажимо да је баш $\|\vec{PQ}\| = d(P, \alpha)$

Доказ: $\|\vec{PX}\|^2 = \vec{PX} \circ \vec{PX} = (\vec{PQ} + \vec{QX}) \circ (\vec{PQ} + \vec{QX}) = \|PQ\|^2 + \|QX\|^2$ (остали се скрате зато што $PQ \perp QX$)

$\Rightarrow \|\vec{PX}\| \geq \|\vec{PQ}\|$, за $\forall X \in \alpha$, једнакост важи када $\|\vec{QX}\| = 0$ тј. $Q = X$

* Дакле, $d(P, \alpha) = \|\vec{PQ}\|$. Сада ћемо то да израчунамо.

$$\vec{PQ} = \lambda \cdot \vec{n_\alpha}$$
$$\vec{PQ} = \vec{PX} + \vec{XQ} \quad / \circ n_\alpha \quad (\text{тражимо } \lambda)$$

$$(\lambda \cdot \vec{n_\alpha}) \circ \vec{n_\alpha} = (\vec{PX} + \vec{XQ}) \circ \vec{n_\alpha} \qquad (\vec{XQ} \perp \vec{n_\alpha})$$

$$\lambda \cdot \|\vec{n_\alpha}\|^2 = \vec{PX} \circ n_\alpha = (x_1 - p_1, x_2 - p_2, x_3 - p_3) \circ (n_1, n_2, n_3)$$

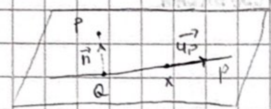
$$\lambda \|n_\alpha\|^2 = \underbrace{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3}_{-n_4} - (n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3)$$

$$\lambda = \frac{-(n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + n_4)}{\|\vec{n_\alpha}\|^2}$$

$$\Rightarrow \|\vec{PQ}\| = d(P, \alpha) = \frac{|n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + n_4|}{\underbrace{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}_{\|\vec{n_\alpha}\|}}$$

*** права** - одређена тачком X и вектором правца $\vec{u_p}$

1° у равни (V^2)



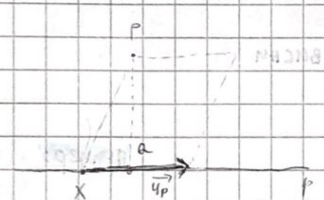
Опет, $d(P,p) = \inf_{X \in p} \|\vec{PX}\|$ и опет $d(P,p) = \|\vec{PQ}\|$

$P(p_1,p_2,p_3)$, $\vec{n}(n_1,n_2,n_3)$, $p: ax_1 + bx_2 + c = 0$

Аналогно претходном, доказује се:

$$d(P,p) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

2° у простору (V^3)



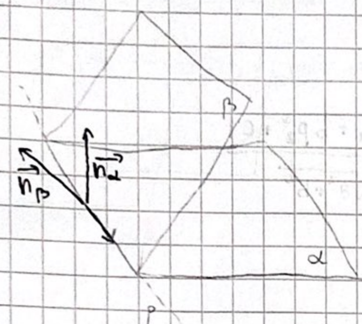
$P_{\square} = \|\vec{X_p} \times \vec{u_p}\|$, а такође $P_{\square} = \|\vec{u_p}\| \cdot \|\vec{PQ}\|$

$$\Rightarrow \|\vec{PQ}\| = d(P,p) = \frac{\|\vec{XP} \times \vec{u_p}\|}{\|\vec{u_p}\|}$$

(14.) Међусобни положај две равни у простору

$\alpha: \ a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + d_1 = 0$, $\vec{n_\alpha}(a_1, b_1, c_1)$
$\beta: \ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + d_2 = 0$, $\vec{n_\beta}(a_2, b_2, c_2)$

1° секу се → $\vec{n_\alpha}$ и $\vec{n_\beta}$ су **лин. независни**

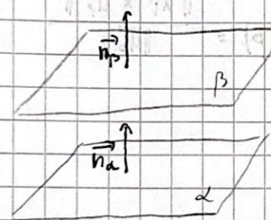


$\alpha \cap \beta = \{p\}$

$\vec{n_\alpha} \times \vec{n_\beta} \neq 0$ – вектор правца p

пример: $x_1 = 0$
$x_2 = 0$

2° паралелне су → $\vec{n_\alpha}$ и $\vec{n_\beta}$ су **лин. зависни** и $\alpha \neq \beta$



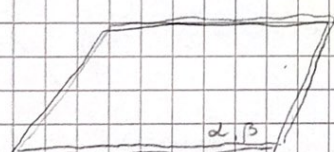
$\vec{n_\alpha} = \lambda \cdot \vec{n_\beta}$

пример: $x_1 = 0$
$x_1 = 1$

$(a_1, b_1, c_1) = \lambda(a_2, b_2, c_2)$

$$\lambda = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$$

3° поклапају се → $\alpha = \beta$ ($\vec{n_\alpha}$ и $\vec{n_\beta}$ су лин. зависни)



$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

пример: $x_1 = 0$
$x_1 = 0$

* Нека се α и β секу, $\alpha \cap \beta = \{p\}$

Посматрејмо произвољну раван γ, ткд $p \subset \gamma$

(компланарни)

$\Rightarrow \quad \vec{u_p} \circ \vec{n_\gamma} = 0$, тј $(\vec{n_\alpha} \times \vec{n_\beta}) \circ \vec{n_\gamma} = 0 \Rightarrow \vec{n_\alpha}, \vec{n_\beta}, \vec{n_\gamma}$ - лин зависни

мешовити пр

$$\vec{n_\gamma} = \lambda \vec{n_\alpha} + \mu \vec{n_\beta}$$

$$\lambda(a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + d_1) + \mu(a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + d_2) = 0$$

$\hookrightarrow$ једначина равни γ

1° $\lambda = 0$: $\gamma = \beta$

2° $\mu = 0$: $\gamma = \alpha$

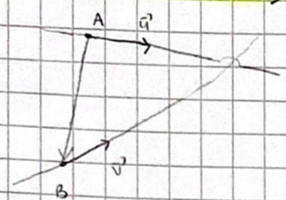
3° $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$: $(a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + d_1) + \xi(a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + d_2) = 0$

$\{\gamma \mid p \subset \gamma\} \rightarrow$ прамен равни

(15.) Међусобни положај две праве у простору

p: A, $\vec{u}$
q: B, $\vec{v}$

1° мимоилазне су: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}$ су лин. независни



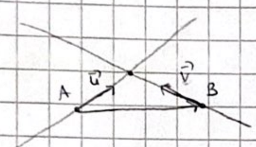
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}] \neq 0$$

пример:

$$\frac{x_1-0}{0} = \frac{x_2-0}{0} = \frac{x_3-0}{1}$$

$$\frac{x_1-1}{0} = \frac{x_2-0}{1} = \frac{x_3-0}{0}$$

2° секу се: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}$ су лин. зависни, али $\vec{u}, \vec{v}$ су лин. нез.



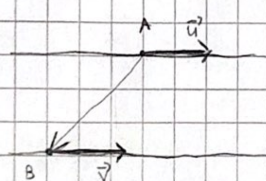
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}] = 0 \quad \text{(копланарни су)}$$

пример:

$$\frac{x_1-0}{0} = \frac{x_2-0}{0} = \frac{x_3-0}{1}$$

$$\frac{x_1-0}{0} = \frac{x_2-0}{1} = \frac{x_3-0}{0}$$

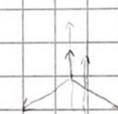
3° паралелне су: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}$ су лин. зав, $\vec{u}, \vec{v}$ су лин. зав., али $\vec{AB}, \vec{u}$ су лин. нез.



пример:

$$\frac{x_1-0}{0} = \frac{x_2-0}{0} = \frac{x_3-1}{1}$$

$$\frac{x_1-0}{0} = \frac{x_2-1}{1} = \frac{x_3-0}{0}$$



4° поклапају се: сви су колинеарни

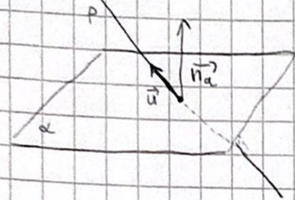
- мимоилазне: $\dim \mathcal{L}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}) = 3$
- секу се: $\dim \mathcal{L}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}) = 2$ $\quad \dim \mathcal{L}(\vec{u}, \vec{v}) = 2$
- паралелне: $\dim \mathcal{L}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}) = 2$ $\quad \dim \mathcal{L}(\vec{u}, \vec{v}) = 1$
- поклапају се: $\dim \mathcal{L}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}) = 1$

16. Међусобни положај праве и равни у простору

p : A, $\vec{u}$

α : X, $\vec{n_\alpha}$ и изаберемо произвољну тачку $B \in \alpha$ (специјално $B \neq A$)

1° секу се: $\vec{u}$ и $\vec{n_\alpha}$ нису ортогонални



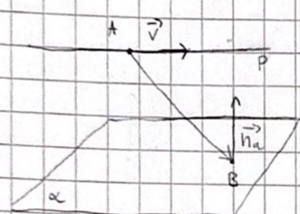
$$\vec{u} \circ \vec{n_\alpha} \neq 0$$

(рачунање угла у питању 18)

пример: $x_1 = 0$

$$\frac{x_1-0}{1} = \frac{x_2-0}{0} = \frac{x_3-0}{0}$$

2° паралелни су: $\vec{u}$, $\vec{n_\alpha}$ су ортогонални, али $\vec{AB}$, $\vec{n_\alpha}$ нису

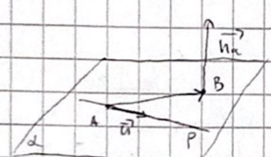


$$\vec{u} \circ \vec{n_\alpha} = 0$$

$$\vec{AB} \circ \vec{n_\alpha} \neq 0$$

пример: $x_1 = 0$; $\frac{x_1-1}{0} = \frac{x_2-0}{1} = \frac{x_3-0}{0}$

3° припада јој: $\vec{u}$, $\vec{n_\alpha}$ су ортогонални и $\vec{AB}$, $\vec{n_\alpha}$ су ортогонални



$$\vec{u} \circ \vec{n_\alpha} = 0$$

$$\vec{AB} \circ \vec{n_\alpha} = 0$$

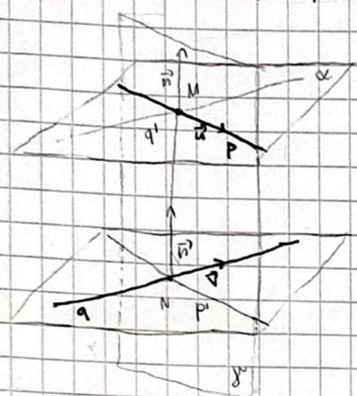
пример: $x_1 = 0$

$$\frac{x_1-0}{0} = \frac{x_2-0}{1} = \frac{x_3-0}{0}$$

17. Мимоилазне праве

деф. **Мимоилазне праве** су праве у простору које не припадају једној равни, тј. нису паралелне ни не секу се.

* Тражимо **заједничку нормалу** мимоилазних прави (конструкцијом)



$p: A, \vec{u}$; $q: B, \vec{v}$

Тражимо: $n \perp p$, $n \cap p \neq \emptyset$, $n \perp q$, $n \cap q \neq \emptyset$

$\vec{n_\alpha} \perp \vec{u}$ (пошто садржи p)
$\vec{n_\beta} \perp \vec{v}$ (пошто садржи q)

$\alpha \parallel \beta \Rightarrow \vec{n_\alpha} = \vec{n_\beta} \Rightarrow$ $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

$\vec{n}$ је вектор нормале за γ

Уводимо трећу раван γ: $\gamma \perp \alpha$, $\gamma \perp \beta$, $p \subset \gamma$

$\gamma \cap \beta = \{p'\}$, $p' \cap q = \{N\} \Rightarrow$ $n_1: N, \vec{n}$ је зај. норм. (већ овде је одређено, али се иде на конструкцију)

Уводимо четврту раван δ: $\delta \perp \alpha$, $\delta \perp \beta$, $q \subset \delta$

$\delta \cap \alpha = \{q'\}$, $q' \cap p = \{M\} \Rightarrow$ $n_2: M, \vec{n}$ је зај. норм.

$\gamma \cap \delta = \{n\}$, $n_1 = n_2 = n = p(M,N)$ – **заједничка нормала** за p, q

$\left(\begin{array}{l} n \perp p, \ n \perp q \quad (\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}) \\ n \cap p = \{M\}, \ n \cap q = \{N\} \end{array} \right)$

* Тражимо **растојање** мимоилазних прави

→ Као и код растојања тачке од праве, по деф. $d(p,q) = \inf_{X\in p,\, Y\in q} \|\overrightarrow{XY}\|$

Докажимо да је баш $\|\overrightarrow{MN}\| = d(p,q)$

Доказ: $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NY}$ $\quad (\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{NY} = \vec{t})$

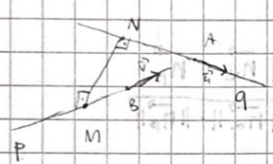
$$\|\overrightarrow{XY}\|^2 = \overrightarrow{XY} \circ \overrightarrow{XY} = (\overrightarrow{MN} + \vec{t}) \circ (\overrightarrow{MN} + \vec{t}) = \|\overrightarrow{MN}\|^2 + \|\vec{t}\|^2 \geq \|\overrightarrow{MN}\|^2$$

$\Rightarrow \|MN\|^2 \leq \|XY\|^2$, $\forall X \in p, Y \in q$, једнакост важи када $\|t\|^2 = 0$

тј. $\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{NY} = \vec{0} \iff \overrightarrow{XM} = \overrightarrow{YN}$

(пошто су p, q мимоилазне) $\iff X = M,\ Y = N$

→ Остаје још да одредимо **колико** је $\|\overrightarrow{MN}\|$



$V = |[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|$

$V = B \cdot H = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\overrightarrow{MN}\|$

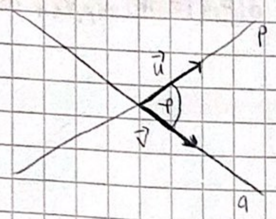
$$\Rightarrow d(p,q) = \|\overrightarrow{MN}\| = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$$

НАПОМЕНА: Формула је тачна и у случају да се p, q секу (мешовити пр. је 0)

У случају $p \parallel q$, добија се формула за растојање тачке од праве

(18.) Углови између правих и равни

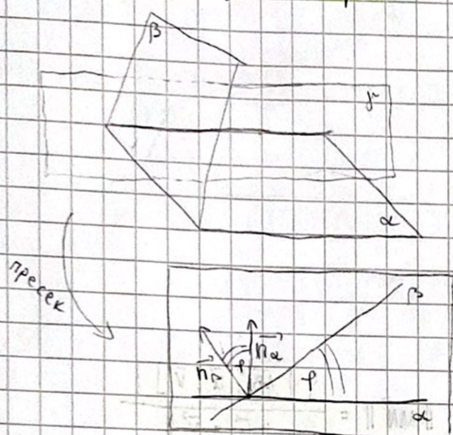
* угао између две праве



$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$ (из деф. скаларног пр.)

(због апсолутне заграде, увек добијамо мањи од два угла)

* угао између две равни

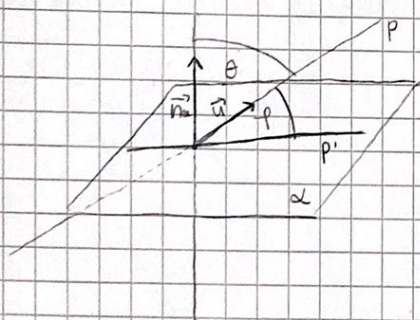


По деф. $\measuredangle(\alpha, \beta)$ је једнак углу између пројекција равни α, β на раван γ.

То је исто као угао између $\vec{n_\alpha}$ и $\vec{n_\beta}$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n_\alpha} \circ \vec{n_\beta}|}{\|\vec{n_\alpha}\| \cdot \|\vec{n_\beta}\|}$$

* угао између праве и равни



По деф. $\measuredangle(p, \alpha)$ је угао између p и пројекције p на α – p'

Знамо: $\cos\measuredangle(\vec{n_\alpha}, \vec{u}) = \cos\theta = \dfrac{|\vec{n_\alpha} \circ \vec{u}|}{\|\vec{n_\alpha}\| \cdot \|\vec{u}\|}$

и знамо $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n_\alpha} \circ \vec{u}|}{\|\vec{n_\alpha}\| \cdot \|\vec{u}\|}$$

(19.) Конусни пресеци, поларна једначина конусних пресека

* Поларне координате

деф. **Поларни координатни систем** у равни E^2 је одређен са две ствари

1. **Пол** – тачка O
2. **оса** – полуправа $[Ox)$.

деф. **Поларне координате** тачке M: ($M \neq O$)
1. $\rho = d(O, M)$, $\rho \in \mathbb{R}$
2. $\theta = \measuredangle([Ox), (OM))$, $\theta = \theta + 2k\pi$

Пол O је одређен са $\rho = 0$, а θ тада није дефинисано

→ **веза**: 1° поларни у Декартов: $x_1 = \rho\cos\theta$, $x_2 = \rho\sin\theta$

2° Декартов у поларни: $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $tg\,\theta = \frac{x_2}{x_1}$

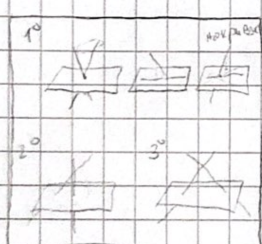
* Конусни пресеци

деф. **Кружни конус** се добија ротацијом праве l (**изводница**) око праве s (**оса**) које се секу у тачки O (**врх**)

(све праве које се добијају при ротацији су такође изводнице)

деф. **Конусни пресек** је пресек кружног конуса $\mathcal{K}$ и равни Ω.

То може бити: 1° Ако $O \in \Omega$ (дегенерисан случај) – тачка
једна изводница
две изводнице



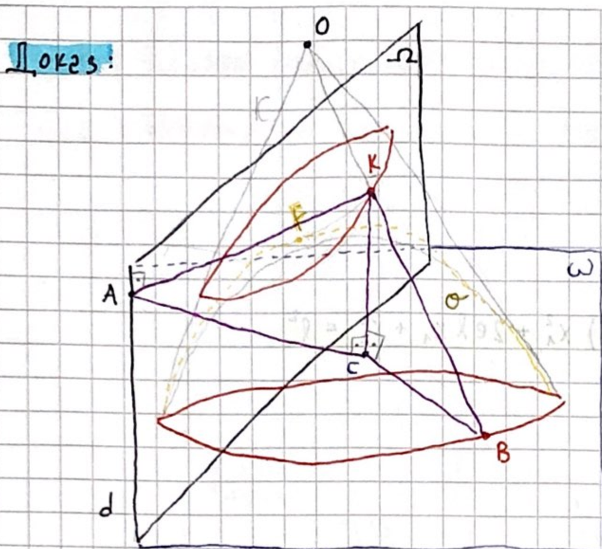
2° Ако $O \notin \Omega$, али $s \perp \Omega$ – круг

3° Ако $O \notin \Omega$ и $s \not\perp \Omega$ – **коника**

Теорема: Нека је $\mathcal{K}$ конус чији је врх O, оса s и нека је Ω раван таква да $O \notin \Omega$ и $s \not\perp \Omega$. Тада постоје тачка F и права d

$$\frac{d(F, K)}{d(K, d)} = const, \quad \forall K \in \mathcal{K}$$

Доказ:



O - врх
K - конус
Ω - раван

σ - сфера која дотиче конус и **конику**
F - тачка у којој **коника** дира **сферу**

ω - раван која садржи **додирни круг**
d - пресек равни Ω и ω

K - произвољна тачка **конике**
A - подножје нормале из K на d
B - тачка у којој OK дира **сферу**
C - подножје нормале из K на ω

(Сфера σ постоји, некад постоје и две, па можемо F и d изабрати на два начина)

(пошто је $S \perp \omega$ (нису паралелни), то значи да се ω и Ω сигурно секу)

Посматрајмо ΔKBC и ΔKAC - они су правоугли, са заједничком катетом

$KC = KB\cos(\measuredangle BKC)$ $\quad KC = KA\sin(\measuredangle KAC) \implies \frac{KB}{KA} = \frac{\sin(\measuredangle KAC)}{\cos(\measuredangle BKC)}$

$\measuredangle KAC = const$ (угао између Ω и ω)
$\measuredangle BKC = const$ (угао између S и изводнице, углови са паралелним крацима)
$KB = KF$ (иако не изгледа тако на слици, то су тангентне дужи из K на σ)
$KA = d(K,d)$ (по дефиницији)

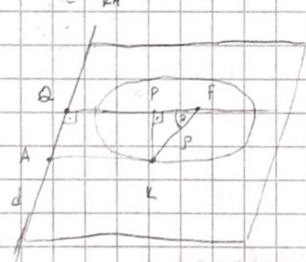
$$\implies \frac{KF}{d(K,d)} = const = e$$ - **ексцентритет**

F - **жижа** , d - **директриса**

* **Поларна једначина конусних пресека**

- теме (систем): F , оса: полуправа са почетком у F и нормална на d

$e = \frac{\rho}{KA}$



$\Delta PFK:\ FP = FK\cos\theta = \rho\cos\theta$

а из теореме: $FK = \rho = e\cdot KA = e\cdot PQ = e(FQ - FP)$

$\implies \rho = e\cdot FQ - e\cdot FP = \underbrace{e\cdot FQ}_{\ell} - e\rho\cos\theta$

$$\implies \rho(1 + e\cos\theta) = \ell$$

(20.) Елипса, хипербола и парабола

* Сада ћемо поларне координате да пребацимо у Декартове $(O = F,\ X_1 = x)$

$$x_1 = \rho \cos\theta \quad , \quad x_2 = \rho \sin\theta$$

$$\rho = \ell - \rho \cdot e \cdot \cos\theta$$

$$\rightarrow \ x_1^2 + x_2^2 = \rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho^2 = (\ell - e x_1)^2$$

Добијамо: $(1-e^2)\, x_1^2 + 2e\ell\, x_1 + x_2^2 = \ell^2$

$\boxed{1^\circ}$ $(1-e^2) \neq 0$ (поделимо)

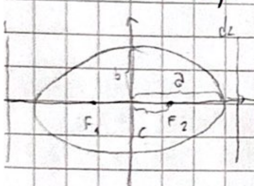
$$x_1^2 + \frac{2e\ell}{1-e^2}\, x_1 + \frac{x_2^2}{1-e^2} = \frac{\ell^2}{1-e^2} \quad / + \left(\frac{e\ell}{1-e^2}\right)^2$$

$$\left(x_1 + \frac{e\ell}{1-e^2}\right)^2 + \frac{x_2^2}{1-e^2} = \frac{\ell^2}{1-e^2} + \frac{e^2\ell^2}{(1-e^2)^2} = \frac{\ell^2}{(1-e^2)^2}$$

Транслирамо координатни систем: $x_1' = x_1 + \frac{e\ell}{1-e^2}$, $x_2' = x_2$

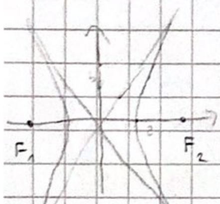
$$\frac{x_1^2}{\frac{\ell^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{x_2^2}{\frac{\ell^2}{(1-e^2)}} = 1 \quad \xRightarrow[b^2 = \frac{\ell^2}{|1-e^2|}]{a^2 = \frac{\ell^2}{(1-e^2)^2}} \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{\operatorname{sgn}(1-e^2)\, b^2} = 1$$

а) $1-e^2 > 0$: **елипса** $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ (канонски облик)



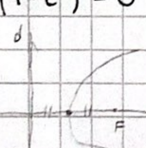
* a је **велика полуоса**, b је **мала полуоса**
* За $a > b$, има две жиже: $F_{1,2}(\pm ea,\ 0)$ ($c = ea$ – растојање жиже од коорд. поч)
* За $b > a$, има исто две жиже, али на x_2 оси: $F_{12}(0, \pm c)$
* $c^2 = a^2 - b^2$ (доказ: само уврстити c, a, b) ; $d = \pm \frac{a^2}{c}$

б) $1-e^2 < 0$: **хипербола** $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$



* a је реална полуоса, b је имагинарна полуоса
* За $a > b$, има две жиже: $F_{12}(\pm ea, 0)$ $(c = ea)$
* За $b > a$, $-\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$, такође две жиже, опет на x_2
* асимптоте хиперболе: $x_2 = \pm \frac{b}{a} \cdot x_1$

$\boxed{2^\circ}$ $(1-e^2) = 0 \quad \xRightarrow{e=1} \quad x_2^2 = \ell^2 - 2\ell x_1 = 2\ell\left(\frac{\ell}{2} - x_1\right)$



Транслирамо: $x_1' = \frac{\ell}{2} - x_1$, $x_2' = x_2$

$$x_2^2 = 2\ell x_1 \ \rightarrow \ \text{парабола}$$

* има само једну жижу

* услов додира (тангенте)

деф. Тангента је права која са коником има тачно један пресек

1° елипса: $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{(kx_1+n)^2}{b^2}=1$

$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)x_1^2+\frac{2kn}{b^2}x_1+\left(\frac{n^2}{b^2}-1\right)=0$ (тражимо јединствено ре

D=0: $\frac{4k^2n^2}{b^4}-4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)\left(\frac{n^2}{b^2}-1\right)=0$

$\frac{k^2n^2}{b^4}-\frac{n^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{k^2n^2}{b^4}+\frac{k^2}{b^2}=0 \quad / \cdot a^2b^2$

$-n^2+b^2+a^2k^2=0$

$a^2k^2+b^2=n^2$ → услов додира праве и елипсе

2° хипербола: $a^2k^2-b^2=n^2$ → услов додира праве и хиперболе

3° парабола: $(kx_1+n)^2=2\ell x_1$

$k^2x_1^2+(2kn-2\ell)x_1+n^2=0$

D=0: $4(kn-\ell)^2-4k^2n^2=0$

$2kn\ell+\ell^2=0$

$\ell=2kn$ → услов додира праве и параболе

* Ако је дата тачка $M(m_1,m_2)$ која припада коници, једн. тангенте кроз M:

1° елипса: $\frac{m_1x_1}{a^2}+\frac{m_2x_2}{b^2}=1$

2° хипербола: $\frac{m_1x_1}{a^2}-\frac{m_2x_2}{b^2}=1$

3° парабола: $m_2x_2=\ell(m_1+x_1)$

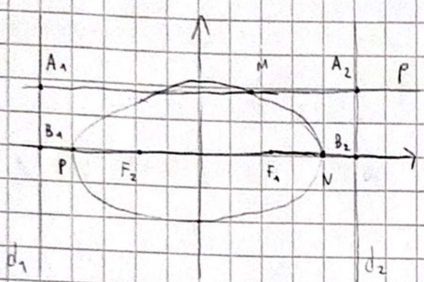
(као да у x^2 једно x оставимо, а у друго x уврстимо m)

21. Оптичке особине елипсе, хиперболе и параболе

Теорема: Нека је M произвољна тачка **елипсе** $\mathcal{E}$ која има жиже F_1 и F_2.

Тада је $MF_1 + MF_2 = 2a$

Доказ:



d_1, d_2 - директрисе

p - садржи M и нормална на d_1, d_2

$d_1 \cap p = \{A_1\}$, $d_2 \cap p = \{A_2\}$

$e = \frac{MF_1}{MA_1} = \frac{MF_2}{MA_2} = \frac{NF_1}{NB_1} = \frac{NF_2}{NB_2}$ $(N \in \mathcal{E})$

$NF_1 + NF_2 = e(NB_1 + NB_2) = e \cdot B_1B_2 = e \cdot A_1A_2$

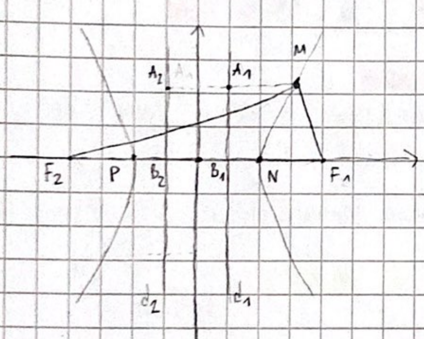
$NF_1 + NF_2 = NF_1 + PF_2 = 2a$

$MF_1 + MF_2 = e(MA_1 + MA_2) = e \cdot A_1A_2 = 2a$

Теорема: Нека је M произвољна тачка **хиперболе** $\mathcal{E}$ која има жиже F_1 и F_2

Тада је $|MF_1 - MF_2| = 2a$

Доказ: (потпуно аналогно)



d_1, d_2 - директрисе

$e = \frac{MF_1}{MA_1} = \frac{MF_2}{MA_2} = \frac{NF_1}{NB_1} = \frac{NF_2}{NB_2}$

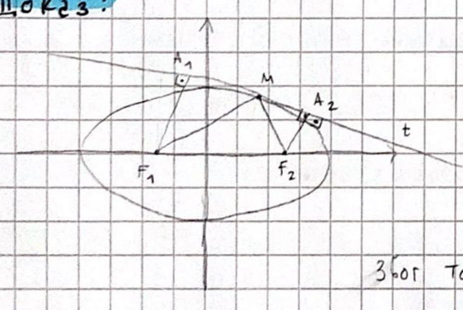
$|NF_1 - NF_2| = e(NB_1 - NB_2) = e \cdot B_1B_2 = e \cdot A_1A_2$

$|NF_1 - NF_2| = |NF_1 - PF_1| = NP = 2a$

$|MF_1 - MF_2| = e|MA_1 - MA_2| = e|A_1A_2| = 2a$

Теорема: Светлосни зрак који извире из жиже **елипсе** и одбија се о њу пролази кроз другу жижу

Доказ:



A_1, A_2 - подножја нормала из F_1, F_2 на t

t - тангента на елипсу кроз M

Провером (рачун) може се добити $\frac{MF_1}{F_1A_1} = \frac{MF_2}{F_2A_2}$

$\left(t: \frac{m_1 x_1}{a^2} + \frac{m_2 x_2}{b^2} = 1, \ F_{1,2}(\pm c, 0) \quad M(m_1, m_2) \right.$

$\left. F_iA_i \text{ - удаљеност } F_i \text{ од } t \right)$

Због тога $\Rightarrow \Delta A_1F_1M \sim \Delta A_2F_2M$

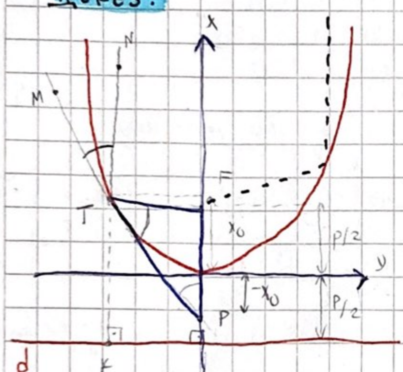
Дакле $\sphericalangle F_1MA_1 = \sphericalangle F_2MA_2$

Теорема: Светлосни зрак који извире из жиже **хиперболе** и одбија се о њу, (као да) пролази кроз другу жижу. (надовезује се на правац)

Доказ: потпуно аналогно претходном

Теорема: Светлосни зрак који извире из жиже **параболе** и одбија се о њу, паралелан је оси параболе

Доказ:



зрак се одбија паралелно

$\iff TN \parallel Ox_1$

$\iff \measuredangle TPF = \measuredangle MTN = \measuredangle PTF$

$\iff TF = FP$

Дакле довољно је доказати $TF \overset{?}{=} FP$

пресек осе Ox и t

$$P: \begin{cases} Ox: & y = 0 \\ t: & yy_0 = p(x + x_0) \end{cases} \quad , \text{ где је } T(x_0, y_0)$$

Дакле $0 = p(x + x_0) \implies x = -x_0 \implies P(-x_0, 0)$

Зато је $FP = x_0 + \frac{p}{2}$

Такође: $TF \underset{\text{параболе } e=1}{=} TK = x_0 + \frac{p}{2}$

$\implies TF = FP$

чиме је тврђење доказано

22. Свођење криве другог реда на канонски облик

Деф. **Крива другог реда** је скуп тачака равни за које $f(x_1,x_2)=0$, где је

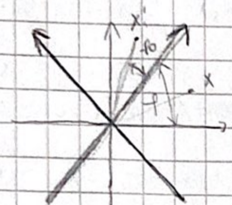
$$f(x_1,x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0$$

$(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0,\quad a_{ij}\in \mathbb{R})$

* идеја је да нађемо шта све може бити крива другог реда решавањем једначине

Члан a_{12} геометријски указује да је крива постављена косо у тренутном коорд. систему. Због тога, променићемо коорд. систем тако да $a_{12}=0$. (исправљамо га)

Ротирање коорд. система за φ $\iff$ ротирање свих тачака за $-\varphi$



$x_1' = \rho\cos\varphi_0$, $x_2' = \rho\sin\varphi_0$ - позиције у новом

$$x_1 = \rho\cos(\varphi_0+\varphi) = \rho\cos\varphi_0\cos\varphi - \rho\sin\varphi_0\sin\varphi$$
$$x_2 = \rho\sin(\varphi_0+\varphi) = \rho\sin\varphi_0\cos\varphi - \rho\sin\varphi_0\cos\varphi$$

$$\Rightarrow\quad x_1 = x_1'\cos\varphi - x_2'\sin\varphi$$
$$x_2 = x_1'\sin\varphi + x_2'\cos\varphi$$
, и ово уврстимо:

$$a_{11}(x_1'\cos\varphi - x_2'\sin\varphi)^2 + 2a_{12}(x_1'\cos\varphi - x_2'\sin\varphi)(x_1'\sin\varphi + x_2'\cos\varphi) + a_{22}(x_1'\cos\varphi + x_2'\sin\varphi)^2 +$$
$$+ 2a_{13}(x_1'\cos\varphi - x_2'\sin\varphi) + 2a_{23}(x_1'\sin\varphi + x_2'\cos\varphi) + a_{33} = 0$$

Издвојимо све што је уз $x_1'x_2'$. То ће (у новом систему) бити $2a_{12}'$, и то треба да буде 0

$$2a_{12}' = -2a_{11}\cos\varphi\sin\varphi + 2a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2a_{22}\cos\varphi\sin\varphi$$
$$= -(a_{11}-a_{22})\sin 2\varphi + 2a_{12}\cos 2\varphi = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{ctg\,2\varphi} = \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}$$

(у наставку пишем без примова, али их подразумевам)

Остаје нам: $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0$

1° $a_{11}\neq 0$, $a_{22}\neq 0$

$$a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}\left(x_2 + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 + a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} = 0$$

Сада извршимо **транслацију** система: $x_1'' = x_1 + \frac{a_{13}}{a_{11}}$, $x_2'' = x_2 + \frac{a_{23}}{a_{22}}$

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33} = 0$$ (изостављам '' уз свако a)

2° Тачно један је 0, без умањења општости: $a_{11}=0$, $a_{22}\neq 0$

$$a_{22}\left(x_2 + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 + 2a_{13}x_1 + a_{33} - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} = 0$$

Аналогно, транслација: $x_1''' = x_1$, $x_2''' = x_2 + \frac{a_{23}}{a_{22}}$

$$a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + a_{33} = 0$$ (изостављам ''' уз свако a)

Радимо одвојене дискусије по знаку коефицијената

1_1° $\operatorname{sgn} a_{11} = \operatorname{sgn} a_{22} = \operatorname{sgn} a_{33}$ $\to$ **празан скуп**

1_2° $\operatorname{sgn} a_{11} = \operatorname{sgn} a_{22} = -\operatorname{sgn} a_{33}$ $\to$ **елипса** , $a^2 = \left|\frac{a_{33}}{a_{11}}\right|$, $b^2 = \left|\frac{a_{33}}{a_{22}}\right|$

1_3° $\operatorname{sgn} a_{11} = \operatorname{sgn} a_{22}$, $a_{33} = 0$ $\to$ **тачка** (координатни почетак)

1_4° $\operatorname{sgn} a_{11} = -\operatorname{sgn} a_{22} = -\operatorname{sgn} a_{33}$ $\to$ **хипербола** $a^2 = \left|\frac{a_{33}}{a_{11}}\right|$ $b^2 = \left|\frac{a_{33}}{a_{22}}\right|$

1_5° $\operatorname{sgn} a_{11} = -\operatorname{sgn} a_{22}$, $a_{33} = 0$ $\to$ **две праве које се секу**

$$x_1^2 + \frac{x_2^2}{\frac{a_{22}}{a_{11}}} = \frac{x_1^2}{1} - \frac{x_2^2}{\frac{-a_{22}}{a_{11}}} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0$$

$$\left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b}\right)\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}\right) = 0$$ - једначине тих правих

2_1° $a_{13} \neq 0$ $\to$ **парабола**

транслација: $x_1' = x_1 + \frac{a_{33}}{2a_{13}}$, $x_2' = x_2$

$$\frac{a_{22}}{2a_{13}} x_2^2 + x_1 = 0 \implies x_2^2 = 2\,\frac{-a_{13}}{a_{22}}\,x_1$$

2_2° $a_{13} = 0$

Нека је $\lambda = -\frac{a_{33}}{a_{22}}$

$2_{2_1}^\circ$ $\lambda > 0$ $\to$ **две паралелне праве**

$2_{2_2}^\circ$ $\lambda = 0$ $\to$ **једна права** (двострука $\parallel$ са x_1 осом)

$2_{2_3}^\circ$ $\lambda < 0$ $\to$ **празан скуп**

23. Инваријанте кривих другог реда

деф. **Инваријанта** је величина која се не мења при изабраној групи трансформација

деф. Нека је $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0$ крива другог реда

Уведимо ознаке:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \hat{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Тада једначина криве постаје: $X^T A X + 2b^T X + a_{33} = 0$ (1)

или још краће: $\hat{X}^T \hat{A} \hat{X} = 0$ (2)

То је заправо кад се распише: (1) $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + a_{33} = 0$

(2) $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

деф. **Траг криве** $T = a_{11} + a_{12}$

Мала детерминанта $D = \det A$

Велика детерминанта $\Delta = \det \hat{A}$

Теорема: Величине T, D, Δ су инваријанте у односу на ротације и транслације

Доказ: **1° ротације**

(из питања 11) Формула ротације за φ: $X = R_\varphi X'$, где је $R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$

$$(R_\varphi X')^T A R_\varphi X' + 2b^T R_\varphi X' + a_{33} = 0$$

$((AB)^T = B^T A^T)$ $\quad (X')^T \underbrace{R_\varphi^T A R_\varphi} X' + 2b^T R_\varphi X' + a_{33} = 0 \implies A' = R_\varphi^T A R_\varphi$

(Коши-Бине) ⁎ $D' = \det A' = \det(R_\varphi^T A R_\varphi) = \underbrace{\det R_\varphi^T}_{1} \det A \underbrace{\det R_\varphi}_{1} = \det A = D$ (измножити)

$(Tr(XY) = Tr(YX))$ ⁎ $T' = Tr\, A' = Tr(R_\varphi^T A R_\varphi) = Tr(A \underbrace{R_\varphi^T R_\varphi}_{E}) = Tr\, A = T$ (измножити)

⁎ За Δ користимо запис (2), па уводимо нову (проширену) матрицу ротације

$$\hat{X} = \hat{R}_\varphi \hat{X}', \quad R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{X}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{bmatrix}$$

На исти начин добија се $\hat{A}' = \hat{R}_\varphi^T \hat{A} \hat{R}_\varphi$

$$\Delta' = \det \hat{A}' = \det(\hat{R}_\varphi^T \hat{A} \hat{R}_\varphi) = \underbrace{\det \hat{R}_\varphi^T}_{1} \det \hat{A} \underbrace{\det \hat{R}_\varphi}_{1} = \det \hat{A} = \Delta$$

2° транслације

Формула транслације је $X = X' + V$ $\quad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$

као и $\hat{X} = \hat{T}\hat{X}'$, $\quad \hat{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{X}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{bmatrix}$

$$(X'+V)^T A (X'+V) + 2b^T (X'+V) + a_{33} = 0$$

Уврштавањем је $A' = A$, па тривијално и $T' = T$ и $D' = D$

$$(\hat{T}\hat{X}')^T \hat{A}\hat{T}\hat{X}' = \hat{X}'^T \underbrace{\hat{T}^T \hat{A} \hat{T}} \hat{X}' = 0 \Rightarrow \hat{A}' = \hat{T}^T \hat{A} \hat{T}$$

$$\Delta' = \det \hat{A}' = \det(\hat{T}^T \hat{A} \hat{T}) = \underbrace{\det \hat{T}^T}_{1} \det \hat{A} \underbrace{\det \hat{T}}_{1} = \det \hat{A} = \Delta$$

Деф. $\quad P = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$

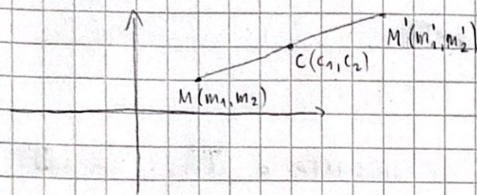
	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$D > 0$	$\Delta \cdot T > 0$ елипса	тачка
	$\Delta \cdot T < 0$ празан скуп	
$D < 0$	хипербола	две праве које се секу
$D = 0$	парабола	$P < 0$ две паралелне праве
		$P = 0$ једна права
		$P > 0$ празан скуп

Такође, може се доказати да је P инваријанта при ротацији, али не и при транслацији

(24) Центар криве другог реда

деф. Тачка C је **центар криве другог реда** Γ ако важи да за свеку тачку $M \in \Gamma \Rightarrow S_c(M) \in \Gamma$

пр.



$m_1' = c_1 + (c_1 - m_1)$
$m_2' = c_2 + (c_2 - m_2)$

Дакле $S_c(M) = M'(2c_1 - m_1, 2c_2 - m_2)$

* Транслирајмо координатни систем тако да C буде координатни почетак

$T: X_1 = X_1' + c_1, \quad X_2 = X_2' + c_2 \Rightarrow C(0,0)$ и $S_c(M) = N(-m_1, -m_2)$

Пошто $M \in \Gamma$ и $M' \in \Gamma$: $M: a_{11}' m_1'^2 + 2a_{12}' m_1' m_2' + a_{22}' m_2'^2 + 2a_{13}' m_1' + 2a_{23}' m_2' + a_{33}' = 0$

$M': a_{11}' m_1'^2 + 2a_{12}' m_1' m_2' + a_{22}' m_2'^2 - 2a_{13}' m_1 - 2a_{22}' m_2' + a_{33}' = 0$

Одузимањем добијемо: $4a_{13}' m_1' + 4a_{23}' m_2' = 0 \Rightarrow a_{13}' m_1' + a_{23}' m_2' = 0$

Пошто то мора да важи за свеку тачку $M \in \Gamma \Rightarrow$ **$a_{13}' = a_{23}' = 0$**
у супротном, то је једначина праве

Решење једначине (користимо питање 22)

крива	број центара	
елипса	1	
хипербола	1	
парабола	0	
тачка	1	
две праве које се секу	1	
две паралелне праве	∞	(све тачке на једној правој)
једна права	∞	(све тачке праве)
празан скуп	∞	(све тачке равни)

- $a_{13}' = a_{11} c_1 + a_{12} c_2 + a_{13} = 0$ и $a_{23}' = a_{12} c_1 + a_{22} c_2 + a_{23} = 0$

(проверимо шта, након транслације, стоји уз x_1', а шта уз x_2')

Скраћено: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, c_2) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial x_2}(c_1, c_2) = 0$ (извод где је x_1, тј. x_2 пром.)

Тражење (решења) центра $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_{13} \\ -a_{23} \end{bmatrix}}_{B}$

(мала детерм.)

1° $\det A \neq 0 \Rightarrow$ јединствено решење

2° $\det A = 0 \Rightarrow$ бесконачно или 0 решења

Користећи табелу, добијамо горње решење

деф. **Дијаметар** је права која садржи центар криве

Једначина дијаметра : $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \cdot v_2 = 0$

(v_1, v_2 - параметри које кад „шетамо" добијамо све могуће дијаметре)
дакле једна права (дијаметар) је одређена са v_1 и v_2, тј. $(v_1, v_2) = \vec{u_d}$

деф. **Конјуговани дијаметар** d' за дијаметар d је скуп средишта свих тетива криве које су паралелне том дијаметру d.

Теорема: Конјуговани дијаметар d' (за d) има једначину $\frac{\partial f}{\partial x_1}(s_1, s_2) v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(s_1, s_2) v_2 =$

Доказ: Уведимо ознаке $\mathbf{p} \overset{\hat{x}}{=} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} \overset{\hat{A}}{=} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$

где је $P(p_1, p_2)$ пресек дијаметра и криве, а v вектор правца дијамет

$\Rightarrow$ Параметарска једначина d је $\begin{matrix} x_1 = p_1 + \lambda v_1 \\ x_2 = p_2 + \lambda v_2 \end{matrix}$, скраћено $\mathbf{x = p + \lambda v}$, $\lambda \in$

А из претх питања знамо $\mathbf{p^T A p} = 0$ (крива)

$m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 1 \end{bmatrix}$ Изаберимо $\mathbf{M} \in \Gamma$ и тетиву те криве Γ која је паралелна са дијаметром и одређена једначином $x = m + \lambda v$ (тетива пролази кроз M)

Тражимо пресек тетиве и криве : $(m + \lambda v)^T A (m + \lambda v) = 0$

(измножимо) $m^T A m + 2 m^T A v \lambda + v^T A v \lambda^2 = 0$. $(M \in \Gamma \Rightarrow m^T A m = 0)$

$2 m^T A v \lambda + v^T A v \lambda^2 = 0$

1° $\lambda = 0$ $\quad$ 2° $\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2 m^T A v}{v^T A v}$ (добија се 1x1 матр

1° нам даје тачку M, а 2° даје другу тачку M_1 $(x = m + \lambda v)$

25. Афина пресликавања

деф. **Линеарно пресликавање** је пресл. $L: V^k \to V^k$ за које важи $L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v)$

деф. **Афино пресликавање** је пресл. $f: E^k \to E^k$ за које важи да је његово придружено пресликавање $\bar{f}: V^k \to V^k$, $\bar{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$ линеарно.

Лема: У реперу (O,e) афино пресл. f се записује: $[f(M)]_{(O,e)} = A[M]_{(O,e)} + [f(O)]_{(O,e)}$

Доказ: A - матрица лин. пресликавања $\bar{f}$ у бази e $\;(A = [\bar{f}(e_1) \ldots \bar{f}(e_n)])$

$$[f(M)]_{O,e} = [\overrightarrow{Of(M)}]_e = [\overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f(O)f(M)}]_e = [\overrightarrow{Of(O)}]_e + [\overrightarrow{f(O)f(M)}]_e$$

$$= [f(O)]_{O,e} + [\bar{f}(\overrightarrow{OM})]_e = A[\overrightarrow{OM}]_e + [f(O)]_{(O,e)} = A[M]_{(O,e)} + [f(O)]_{(O,e)}$$

- Дакле афина трансф. је одређена матрицом лин. пресл. $\bar{f}$ (A)

примери:
- ротација
- скалирање
- смицање
- транслација
- хомотетија

Теорема: $(\det A \neq 0)$

1) f је бијекција
2) f чува колинеарност и компланарност тачака (права → права, раван → раван)
3) f чува однос дужина дужи (чува средиште, као и тежиште)
4) f чува оријентацију ако је $\det A > 0$
5) f чува паралелност прави, површина (паралелограм → паралелограм)
6) Ако је F фигура у равни: $P(f(F)) = |\det A| \cdot P(F)$
7) Ако је F фигура у простору: $V(f(F)) = |\det A| \cdot V(F)$

Доказ:

1) $X' = AX + B$ (по леми)

$AX = X' - B$

$X = \underbrace{A^{-1}}_{A'} X' - \underbrace{A^{-1}B}_{B'} = f^{-1}$, па је по леми f^{-1} афино

Дакле, матрица за f^{-1} је A^{-1}.

2) Нека су A, B, C колинеарне

$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB} \Rightarrow \bar{f}(\overrightarrow{AC}) = \bar{f}(\lambda \overrightarrow{CB}) = \lambda \bar{f}(\overrightarrow{CB})$

$\Rightarrow \overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda\, \overrightarrow{f(C)f(B)}$

Дакле $f(A)$, $f(B)$ и $f(C)$ су колинеарне (и то са истим λ)

3) слично

4) потребно је дефинисати оријентацију троугла и базе + теорема 2

5) ппс. $f(p) \cap f(q) = \{M\}$

$$\left.\begin{array}{ll} \exists P \in p & f(P) = M \\ \exists Q \in q & f(Q) = M \end{array}\right\} \overset{f\text{-бијекција}}{\Longrightarrow} P = Q \Rightarrow p \cap q \neq \emptyset \ \lightning$$

6), 7) нису објашњени

Теорема (2): Ако су A, B, C и D, E, F тројке неколинеарних тачака у равни, онда постоји јединствено афино пресл. f ткд $D = f(A)$, $E = f(B)$, $F = f(C)$

Доказ: $A(a_1, a_2)$; $B(b_1, b_2)$; $C(c_1, c_2)$; $D(d_1, d_2)$; $E(e_1, e_2)$; $F(f_1, f_2)$

* Одредимо прво пресликавање g које слика $M(0,0) \to D$; $N(1,0) \to E$; $P(0,1) \to F$

$g: x' = Ax + B$ Пошто је $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{e_2}$

$\overrightarrow{MN} \xrightarrow{f} \overrightarrow{DE}$ (база, не E) $\quad \overrightarrow{MP} \xrightarrow{f} \overrightarrow{DF}$

$\Rightarrow$ координате $\overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{DF}$ су колоне матрице A

$$A = \begin{bmatrix} e_1 - d_1 & f_1 - d_1 \\ e_2 - d_2 & f_2 - d_2 \end{bmatrix} \ ; \text{ док је } B = [g(0)]_{(0,e)} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

пошто се $(0,0) \to D$

и тиме смо једнозначно одредили g

* Аналогно постоји јединствено h које слика $M \to A$, $N \to B$, $P \to C$

па је $f = g \circ h^{-1}$

Лема: Композиција афиних пресликавања је афино пресликавање

Доказ: $f: x' = Ax + B$, $g: x' = Cx + D$

$g \circ f = g(f(x)) = g(Ax + B) = C(Ax + B) + D = (CA) \cdot x + (CB + D)$

(26.) Класификација површи другог реда

деф. **Површ другог реда** је скуп тачака у простору за које $f(x_1,x_2,x_3)=0$ где је

$$f(x_1,x_2,x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + 2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44} = 0$$

$$(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 > 0,\ a_{ij} \in R)$$

Ради лакшег записа уводимо: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Једначина постаје: $x^T A x + 2b^T x + a_{44} = 0$

* Идеја је иста као у питању 22 - да видимо **шта се све крије** иза ове једначине

- Прво се решавамо мешовитих чланова, тј. мењамо коорд. систем

Пошто је $A = A^T$, онда је A симетрична матрица, па из линеарне алгебре знамо:

Лема (ЛА): Симетрична матрица A је слична дијагоналној матрици

$(C^TC = E,$ тј. $C^T = C^{-1})$ оријентација иста

Тачније, постоји ортогонална матрица **C**, $\det C = 1$

таква да $\underbrace{C^{-1}AC}_{C^TAC} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}}_{D}$, где су $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ сопс. вр. A

Уведимо сада **нови коорд. систем**: $x = Cx'$ Тиме смо **заротирали** коорд. систем

$$(Cx')^T A (Cx') + 2b^TCx' + a_{44} = 0$$

$$x'^T \underbrace{C^TAC}_{D} x' + 2b^TCx' + a_{44} = 0$$

$$x'^T D x' = \begin{bmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 + \lambda_3(x_3')^2$$

a_{14}' a_{24}' a_{34}'

Сада је једначина (без ' уз x): $\lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \lambda_3x_3^2 + 2\mu_1x_1 + 2\mu_2x_2 + 2\mu_3x_3 + a_{44} = 0$

(линеарни чланови су се променили, али су и даље линеарни)

1° rang $A = 3$ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0)$ извршимо транслацију: $x_1' = x_1 + \frac{\mu_1}{\lambda_1}$, $x_2' = x_2 + \frac{\mu_2}{\lambda_2}$, $x_3' = x_3 + \frac{\mu_3}{\lambda_3}$

$\lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \lambda_3x_3^2 + \overset{a_{44}'}{\nu} = 0$. Означимо са $a^2 = \left|\frac{\nu}{\lambda_1}\right|$, $b^2 = \left|\frac{\nu}{\lambda_2}\right|$, $c^2 = \left|\frac{\nu}{\lambda_3}\right|$

- 1°_1 $\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2 = \operatorname{sgn}\lambda_3 = \operatorname{sgn}\nu$: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = -1$ → **празан скуп** (имагинарни елипсоид)
- 1°_2 $\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2 = \operatorname{sgn}\lambda_3 = -\operatorname{sgn}\nu$: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ → **елипсоид**
- 1°_3 $\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2 = \operatorname{sgn}\lambda_3$, $\nu = 0$: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 0$ → **тачка** $(0,0)$

$\hookrightarrow 1_4^\circ$ $\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2 = -\operatorname{sgn}\lambda_3 = -\operatorname{sgn}\nu$: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} - \dfrac{x_3^2}{c^2} = -1$ → **двограни хиперболоид**

$\hookrightarrow 1_5^\circ$ $\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2 = -\operatorname{sgn}\lambda_3 = \operatorname{sgn}\nu$: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} - \dfrac{x_3^2}{c^2} = 1$ → **једнограни хиперболоид**

$\hookrightarrow 1_6^\circ$ $\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2 = -\operatorname{sgn}\lambda_3$ и $\nu = 0$: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} - \dfrac{x_3^2}{c^2} = 0$ **елиптички конус**

$\hookrightarrow 2^\circ$ $\operatorname{rang} A = 2$ (б.у.о. $\lambda_3 = 0$), опет извршимо транслацију: $x_1' = x_1 + \dfrac{\mu_1}{\lambda_1}$, $x_2' = x_2 + \dfrac{\mu_2}{\lambda_2}$, $x_3' = x_3$

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2\mu_3 x_3 + \nu = 0$$

$\hookrightarrow 2_a^\circ$ $\mu_3 \neq 0$, још једна транслација: $x_1' = x_1$; $x_2' = x_2$; $x_3' = x_3 + \dfrac{\nu}{2\mu_3}$

$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2\mu_3 x_3 = 0$. Означимо $a^2 = \left|\dfrac{\mu_3}{\lambda_1}\right|$, $b^2 = \left|\dfrac{\mu_3}{\lambda_2}\right|$

$\hookrightarrow 2_1^\circ$ $\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2 = \operatorname{sgn}\mu_3$. У том случају окренемо x_3 осу ($x_3 = -x_3'$)

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3$$ → **елиптички параболоид**

$\hookrightarrow 2_2^\circ$ $\operatorname{sgn}\lambda_1 = -\operatorname{sgn}\lambda_2 = \operatorname{sgn}\mu_3$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3$$ → **хиперболички параболоид**

(седло)

$\hookrightarrow 2_б^\circ$ $\mu_3 = 0$

$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \nu = 0$ – у равни x_1x_2 то је крива II реда (x_3 – слободна)
(па то што добијемо „шетамо" по x_3 оси)

$\hookrightarrow 2_3^\circ$ $\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2 = \operatorname{sgn}\nu$, у равни то је празан скуп.

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = -1$$ → **празан скуп**

$\hookrightarrow 2_4^\circ$ $\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2 = -\operatorname{sgn}\nu$, у равни то је елипса

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$ → **елиптички цилиндар**

$\hookrightarrow 2_5^\circ$ $\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2$, $\nu = 0$, у равни то је тачка

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 0$$ → **права** (оса x_3)

$\hookrightarrow 2_6^\circ$ $\operatorname{sgn}\lambda_1 = -\operatorname{sgn}\lambda_2 = -\operatorname{sgn}\nu$, у равни то је хипербола

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$ → **хиперболички цилиндар**

$\hookrightarrow 2_7^\circ$ $\operatorname{sgn}\lambda_1 = -\operatorname{sgn}\lambda_2$, $\nu = 0$, у равни то су две праве које се секу

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0$$ → **две равни које се секу**

3° rang $A = 1$, имамо једначину

$$\lambda_1 x_1^2 + 2\mu_2 x_2 + 2\mu_3 x_3 + \nu = 0$$

3°_a $\mu_2 \neq 0 \lor \mu_3 \neq 0$. Тада $\exists \theta$, $\cos\theta = \frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_2^2+\mu_3^2}}$, $\sin\theta = \frac{-\mu_3}{\sqrt{\mu_2^2+\mu_3^2}}$

- Заротирајмо у равни x_2x_3 за угао θ (како бисмо елиминисали x_3)

$\Rightarrow \lambda_1 x_1^2 + 2\sqrt{\mu_2^2+\mu_3^2}\cdot x_2 + \nu = 0$

- Транслацијом у правцу x_2 (како бисмо елиминисали слоб. члан)

3°_1 $x_1^2 = 2\lambda x_2$ $\longrightarrow$ параболички цилиндар

3°_b $\mu_2 = \mu_3 = 0$, остаје нам $\lambda_1 x_1^2 = -\nu$

3°_2 $\nu < 0$ $\Rightarrow$ две паралелне равни

3°_3 $\nu = 0$ $\Rightarrow$ једна (двострука) раван

3°_4 $\nu > 0$ $\Rightarrow$ празан скуп (две имаг. паралелне равни)

(27.) Праволинијске површи

деф. Нека је α било каква равенска крива, а $\beta(M) \neq 0$ векторско поље дуж те криве α. **Праволинијска површ** је унија свих правих $p(M)$, које су одређене тачком $M \in \alpha$ и чији вектор правца $u_p \in \beta$.

У том случају, α се назива **директриса површи**

пр. хеликоид

деф. Специјално, ако је $\beta = \text{const}$ (ако су све $p(M)$ паралелне), онда ту површ називамо **цилиндар**, а праве називамо **изводнице**

Са друге стране, ако су све праве конкурентне, површ је **конус**, а њихова заједничка тачка **врх конуса**

деф. Површ је **k-струко праволинијска** ако кроз сваку тачку површи пролази k правих које целе припадају површи.

Став: Једнограни хиперболоид је 2-струко праволинијска површ

Доказ:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1 - \frac{x_2^2}{b^2} \iff \left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_3}{b}\right)\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_3}{b}\right) = \left(1 - \frac{x_2}{b}\right)\left(1 + \frac{x_2}{b}\right)$$

Уводимо фамилије правих: $p(\lambda)$: $\left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_3}{c}\right) = \lambda\left(1 - \frac{x_2}{b}\right)$

$$\lambda\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_3}{c}\right) = \left(1 + \frac{x_2}{b}\right)$$

$q(\mu)$: $\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_3}{c}\right) = \mu\left(1 - \frac{x_2}{b}\right)$

$$\mu\left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_3}{c}\right) = \left(1 + \frac{x_2}{b}\right)$$

Очигледно за свако λ и μ, праве p и q целе припадају хиперболоиду
Треба само доказати да се за свако λ и μ оне секу у тачно једној тачки

То се изводи решавањем система по x, y, z $\left(x = \frac{x_1}{a},\ y = \frac{x_2}{b},\ z = \frac{x_3}{c}\right)$

(Имамо 4 једначине, али четврта се може добити од прве три, па нам зато остаје систем 3 једначине са 3 непознате)

Став: Хиперболички параболоид је 2-струко праволинијска површ

Доказ: $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3$ - једначина хип. пар.

Изаберимо произвољну тачку $M(m_1, m_2, m_3)$ која припада параболоиду и ненула вектор $V(v_1, v_2, v_3)$.

Права одређена са M и V припада параболоиду ако и само ако

$$\frac{(m_1 + \lambda v_1)^2}{a^2} - \frac{(m_2 + \lambda v_2)^2}{b^2} = 2(m_3 + \lambda v_3)$$

Да би једначина била тачна за свако λ, коеф. полинома морају бит
иначе би горња једначина имала коначно много (2) решења.

Уз (λ^2) имамо: $\frac{v_1^2}{a^2} - \frac{v_2^2}{b^2} = 0$

(λ) : $\frac{2m_1v_1}{a^2} - \frac{2m_2v_2}{b^2} = 2v_3$

Слободни члан : $\frac{m_1^2}{a^2} - \frac{m_2^2}{b^2} = 2m_3$ што је увек тачно јер тачка M припада параболоиду

Из прве једначине имамо два решења за v_1, v_2 $\left(v_2 = \sqrt{k} \cdot (\pm v_1) \quad k = \frac{b^2}{a^2}\right.$
У другој једначини, v_3 је једнозначно одређено у зависности од v_1 и v

Дакле имамо два решење за $V(v_1, v_2, v_3)$, па самим тим и две праве

(28.) Сферни троугао. Неједнакости

деф. **Сфера** је елипсоид у ком је $a=b=c=r$
Јединична сфера је сфера у којој је $r=1$

деф. Нека је Σ јединична сфера са центром у координатном почетку $O(0,0,0)$
Велики круг на сфери је пресек те сфере са било којом равни која садржи центар

НАПОМЕНА 1: Нека су $A, B \in \Sigma$ две тачке.
Ако A, B **јесу** дијаметрално супр. постоји ∞ великих кругова који их садрже.
Ако A, B **нису** дијаметрално супр. постоји 1 велики круг који их садржи
(зато што тада A, B, O одређују тачно једну раван)

деф. **Сферни троугао** је одређен са три тачке A, B, C које не припадају истом великом кругу

НАПОМЕНА 2: Три тачке припадају истом великом кругу ако и само ако су вектори $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ колпланарни (лин. зависни)

Странице сферног троугла су краћи од лукова великих кругова $\widehat{AB}, \widehat{AC}, \widehat{BC}$
(то је заправо кружни лук, мери се у радијанима) (постоји због напомене 1)

Угао сферног троугла је угао између тангенти на велике кругове у пресечној тачки.

Темена сферног троугла су већ поменуте тачке A, B, C

* Тражимо вектор (јединични) правца $\vec{t_{AB}}$ тангенте на круг $\widehat{AB}$ у тачки A

За тај вектор $\vec{t_{AB}}$ знамо: $\|\vec{t_{AB}}\| = 1$, $\vec{t_{AB}} \perp \vec{OA}$, $\vec{t_{AB}} \in OAB$ (припада равни круга)

$$\vec{t_{AB}} \circ \vec{OB} > 0$$

Грам-Шмитовим поступком поступком (на $\vec{OA}, \vec{OB}$), добија се $\vec{t_{AB}} = \dfrac{\vec{OB} - \cos\widehat{AB}\,\vec{OA}}{\|\vec{OB} - \cos\widehat{AB}\,\vec{OA}\|}$ да буде јединични

Такође, користи се следеће својство $\vec{OA} \circ \vec{OB} = \|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OB}\| \cos\widehat{AB} = \cos\widehat{AB}$

$$\|\vec{OB} - \cos\widehat{AB}\,\vec{OA}\|^2 = (\vec{OB} - \cos\widehat{AB}\cdot\vec{OA}) \circ (\vec{OB} - \cos\widehat{AB}\cdot\vec{OA}) = 1 - \cos^2\widehat{AB} = \sin^2\widehat{AB}$$

Дакле: $\vec{t_{AB}} = \dfrac{\vec{OB} - \cos\widehat{AB}\cdot\vec{OA}}{\sin^2\widehat{AB}}$ $(0 < \measuredangle AOB < 90^\circ$, па је $\sin\widehat{AB} > 0)$

Закључујемо:
$$\alpha = \measuredangle(\vec{t_{AB}}, \vec{t_{AC}})$$
$$\beta = \measuredangle(\vec{t_{BA}}, \vec{t_{BC}})$$
$$\gamma = \measuredangle(\vec{t_{CA}}, \vec{t_{CB}})$$

POWER COLLECTION

Неједнакости: **1)** $|b-c| < a < b+c$ (неједнакост троугла)

2) $a+b+c < 2\pi$

Доказ: **1)** Из дефиниције странице сфер троугла $a, b, c \in (0, \pi]$

Takође, углови сфер. троугла $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$

Косинусна теорема се може записати и овако $(\pm \sin b \sin c)$

$$\cos a = \cos(b+c) + \sin b \sin c(\cos\alpha + 1)$$
$$\cos a = \cos(b-c) + \sin b \sin c(\cos\alpha - 1)$$

* Пошто $b, c \in (0,\pi)$: $\sin b > 0$, $\sin c > 0$; очигледно и $\cos\alpha + 1 > 0$

па то значи $\cos a > \cos(b+c)$

1° $b+c > \pi \Rightarrow a < \pi < b+c$

2° $b+c \in (0,\pi) \Rightarrow a < b+c$ $\Big\} \Rightarrow a < b+c$

(cos опада на том интервалу)

* Слично, $\cos a < \cos(b-c) \underset{|b-c| \in (0,\pi)}{\Longrightarrow} |b-c| < a$

2) $\cos a = \cos(2\pi - a)$, па: $\cos(b+c) < \cos(2\pi - a)$ $\quad (a, b, c \in (0,\pi))$

1° $b+c > \pi$: (cos расте на $(\pi, 2\pi)$) $b+c < 2\pi - a$

2° $b+c \in (0,\pi)$: $b+c < \pi < 2\pi - a$ $\Big\} \Rightarrow a+b+c < 2\pi$

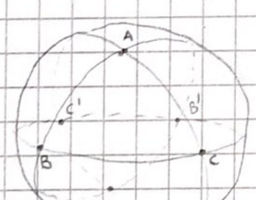
деф. **Сферни двоугао** је део сфере између два велика круга

Лема: Површина сферног двоугла је $P_\alpha = 2\alpha$

Доказ: $P_{сфере} = 4r^2\pi = 4\pi$. Дакле $\dfrac{P}{\alpha} = \dfrac{P_{сфере}}{2\pi} = \dfrac{4\pi}{2\pi} \Rightarrow P = 2\alpha$

Став: Површина сферног троугла је $P_\Delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi$

Доказ:



$$2P_\alpha + 2P_\beta + 2P_\gamma = P_{сфере} + 4P_\Delta$$
$$2(2\alpha) + 2(2\beta) + 2(2\gamma) = 4\pi + 4P_\Delta$$
$$P_\Delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

Последица: $\alpha + \beta + \gamma > \pi$

(29.) Косинусна и синусна теорема сферне геометрије

Косинусна теорема: $\cos \widehat{BC} = \cos \widehat{AB} \cos \widehat{AC} + \sin \widehat{AB} \sin \widehat{AC} \cos \alpha$

$(\cos a = \cos c \cos b + \sin c \sin b \cos \alpha)$

Доказ: $\vec{OB} \circ \vec{OC} = \cos \widehat{BC}$ $\quad (\|OB\| = \|OC\| = 1)$

$$\vec{t_{AB}} = \frac{\vec{OB} - \cos \widehat{AB} \cdot \vec{OA}}{\sin \widehat{AB}}, \quad \vec{t_{AC}} = \frac{\vec{OC} - \cos \widehat{AC}\, \vec{OA}}{\sin \widehat{AC}}$$

$$\Rightarrow \vec{OB} = \sin \widehat{AB} \cdot \vec{t_{AB}} + \cos \widehat{AB} \cdot \vec{OA}, \quad \vec{OC} = \sin \widehat{AC}\, \vec{t_{AC}} + \cos \widehat{AC} \cdot \vec{OA}$$

па је $\vec{OB} \circ \vec{OC} = \sin \widehat{AB} \sin \widehat{AC} (\vec{t_{AB}} \circ \vec{t_{AC}}) + 0 + 0 + \cos \widehat{AB} \cos \widehat{AC} \cdot 1$

$(\alpha \overset{def}{=} \measuredangle(\vec{t_{AB}}, \vec{t_{AC}}))$ $\quad = \cos \widehat{AB} \cos \widehat{AC} + \sin \widehat{AB} \sin \widehat{AC} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \alpha$

$$\Rightarrow \cos \widehat{BC} = \cos \widehat{AB} \cos \widehat{AC} + \sin \widehat{AB} \sin \widehat{AC} \cos \alpha$$

Синусна теорема: $\dfrac{\sin a}{\sin \alpha} = \dfrac{\sin b}{\sin \beta} = \dfrac{\sin c}{\sin \gamma} = const$

Доказ: Косинусна теорема: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$

тј $\cos \alpha = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$

Пошто $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$, онда је $\sin \alpha > 0$, па $\sqrt{1-\cos^2\alpha} = +\sin \alpha$

Дакле: $\sin \alpha = \dfrac{\sqrt{1-(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) + 2\cos a \cos b \cos c}}{\sin b \cdot \sin c}$

па је $\dfrac{\sin a}{\sin \alpha} = \dfrac{\sin a \sin b \sin c}{\sqrt{1-(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}} = k$

Потпуно аналогно, добија се $\dfrac{\sin b}{\sin \beta} = k$ и $\dfrac{\sin c}{\sin \gamma} = k$.