Елементи актуарске математике

Јован Самарџић, 13/2019

Професорка: Ленка Главаш

- дефиниције
- ознаке
- теореме
- докази
- примери

Година курса: 2022/23

Молим да ми све грешке пријавите преко мејла или друштвених мрежа.

0. Основни појмови

Актуарска математика = математика неживотног осигурања + теорија ризика.

Историјат:
- страх од глади ⇒ залиха
- Хамурабијев законик
- Рим
- прве полисе: Барселона и Фиренца
- Србија: Душанов законик, Милош Обреновић, Ђорђе Вајферт.

* Осигурање је заштита од ризика губитка вредности (који се дешава случајно) услед неповољних околности.

а) животно:
- пензијско, осигурање живота;
- осигуравач гледа једну ствар: смрт; (има једну врсту ризика)
- дугорочно;
- математички апарат: статистика + економија.

б) неживотно:
- здравствено, каско, последице незгода, имовина;
- осигуравач гледа две ствари: 1) да ли ће се десити, 2) колика је штета;
- краткорочно;
- математички апарат: случајни процеси.

* Актуар – одређује стратегије и политике рада осигуравајућих кућа.

Полиса осигурања – уговор који склапају осигураник и осигуравач.

Премија осигурања – износ који осигуравач плаћа осигуранику у случају несреће.

Портфолио осигурања – скуп свих полиса које је издао један осигуравач.

Реосигурање – уговор између осигуравача (прерасподела ризика).

* Постоје два типа модела краткорочних полиса осигурања:

а) модел колективног ризика: не водима рачуна од ког осигураника стиже захтев (iid)

б) модел индивидуалног ризика: узима у обзир различитости осигураника (Бајесовски приступ)

Када правимо моделе, правимо баланс између реалности и једноставности.

1. Крамер - Лундбергов модел

* Посматрамо основни (општи) модел колективног ризика:

суфицит = почетни капитал + приход - расход $\xrightarrow{\text{време}}$

→ Суфицит се моделира процесом ризика: $\{K(t),\ t \geq 0\}$. (вредност капитала коју поседује осигуравач, у тренутку t)
→ Почетни капитал је $K(0)$, што често означавамо и са u.
→ Укупан приход од премија је $\Pi(t)$.
→ Укупан расход од одштета је $S(t)$.

Дакле: $$K(t) = u + \Pi(t) - S(t), \qquad t \geq 0.$$

* Компоненте основног модела колективног ризика:

* $(T_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ - тренуци пристизања захтева за одштетом: $0 \equiv T_0 < T_1 < \dots < T_j < \dots$, сс. (нису независне јер постоји уређење)
(пр. да у истим тренуцима и исплаћујемо)

* $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ - времена између два захтева: $Y_j := T_j - T_{j-1}$, $j \in \mathbb{N}$.

* $\{N(t),\ t \geq 0\}$ - број захтева до t: $N(t) := \#\{j \in \mathbb{N} :\ T_j \leq t\}$. (бројачки процес)

* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ - величине захтева: низ сс. позитивних и iid случ. вел. са ф-јом расподеле F.

* $\{S(t),\ t \geq 0\}$ - збир исплаћених одштета: $S(t) := \sum_{j=1}^{N(t)} X_j$.

Напомене:
1) (T_n) и (X_n) су независни. (самим тим су $\{N(t)\}$ и (X_n) су независни)

2) $T_j = \sum_{k=1}^{j} Y_k$. (можемо и низ T_n да деф. преко Y_n, свј. је)

3) $N(t) = \sup\{j \in \mathbb{N} :\ T_j \leq t\}$ и $\sup \emptyset = 0$.

4) $\{N(t) = k\} = \{T_k \leq t \leq T_{k+1}\}$.

5) $T_k = \inf\{t \geq 0 :\ N(t) = k\}$

6) $S(t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_j \cdot I\{T_j \in [0,t]\}$

Напомена: T_k и N су генерисани истом σ-алгебром (зато што један можемо преко другог по 3) и други можемо преко првог по 5))

* Шта су овде главни задаци теорије ризика?

1) Реалан, али једноставан модел за S (односно за N);

2) Теоријска својства за S и N (моменти, коначнодим. расподеле, асимпт. понашање);

3) Ефикасна метода за симулацију процеса S и N;

4) Давање савета (висина премије, реосигурање ...).

* Тренутак разарања је $\tau := \inf\{t \geq 0 : K(t) < 0\}$ и $\inf \emptyset = +\infty$

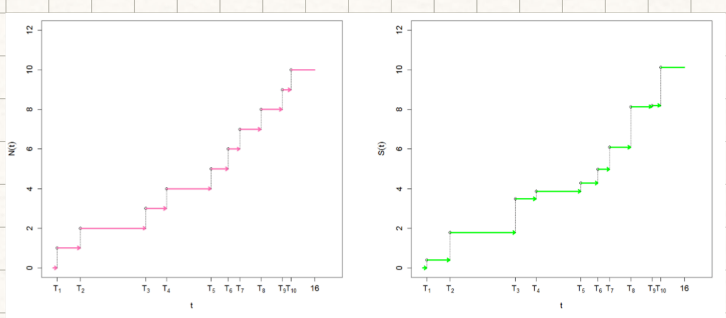
Напомена: $\tau = +\infty$ ако $\inf\{K(t),\ t > 0\} > 0$.

* деф. У Крамер-Лундберговом моделу, процес ризика је дат са:

$$K(t) = u + c \cdot t - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j, \qquad t \geq 0.$$

где је c брзина акумулације уплата премија.

Претпоставке модела:
* Y_n – iid са $\mathcal{E}(\lambda)$;
* $\{N(t)\}$ – хомоген Пуасонов процес;
* $\{S(t)\}$ – сложен Пуасонов процес (случајна сума);
* $EX_n = m \in (0, +\infty)$;
* $DX_n = \sigma^2 \leq +\infty$ (потенцијални проблем за $\sigma^2 = \infty$: не може ЦГТ).



Трајекторије хомогеног Пуасоновог процеса (лево) и збирног Пуасоновог процеса (десно)

→ скокови у T_j величине 1;
→ скокови у T_j величине X_j.

Трајекторија за $K(t)$

2. Број захтева за одштетом. Пуасонов процес

* Враћамо се на општи случај: питамо се шта је природно очекивати од N, као од бројачког процеса?

→ $N(t) \in \mathbb{N}_0$ (дискр. скуп вредности);
→ N је неопадајући;
→ прост бројачки процес ($0 < T_1 < T_2 < \dots$, тј. сс немамо два истовремена захтева)

→ $N(t)$ може имати неку од следећих расподела:

1° Пуасонова: ако $EN(t) = DN(t)$; $(E = \lambda, \quad D = \lambda)$
2° Биномна: ако $EN(t) > DN(t)$; $(E = np, \quad D = np(1-p))$
3° Нег. биномна: ако $EN(t) < DN(t)$; $(E = r\frac{1-p}{p}, \quad D = r\frac{1-p}{p^2})$

Напомене: 1) Све три расподеле имају исту карактеризацију: $p_k = P\{V = k\} = (a + \frac{b}{k})\, p_{k-1}, \quad -b < a < 1$

2) Нег. бин. има две интерпретације, а ми ћемо користити другу:

а) бројимо покушаје до r-тог успеха;
б) бројимо неуспехе до r-тог успеха; (згодније јер крећемо од 0).

деф. $f(s,t] := f(t) - f(s)$. (скраћен запис)

* деф. 1 Случајни процес $\{N(t),\ t \geq 0\}$ је Пуасонов процес ако:

1) $N(0) = 0$ сс;

2) има независне прираштаје;

3) постоји функција средње вредности $\mu : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ ткд. је

* неопадајућа * непр. здесна * $\mu(0) = 0$

и $N(s,t] \in \mathcal{P}(\mu(s,t])$, $0 \leq s < t$;

4) cadlag својство: трајекторије процеса сс имају леву граничну вредност за $t > 0$ и сс су непрекидне здесна за $t \geq 0$.

Напомене: 1) ф-ја μ индукује локално ограничену меру на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$: $\boldsymbol{\mu}((s,t]) = \mu(s,t] = \mu(t) - \mu(s)$

2) Ако постоји $\lambda: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ ткд. $\mu(s,t] = \int_s^t \lambda(u)\,du$,
та ф-ја је **функција интензитета Пуасоновог процеса.**

N је једнозначно одређен функцијом интензитета.

3) Ако је $\mu(t) = \lambda t$, $\lambda = const$ је **интензитет Пуасоновог процеса**
а N је **хомогени Пуасонов процес.**

Специјално, за $\lambda = 1$, N је **стандардни хомогени Пуасонов процес.**

Напомена: Хомог. Пуас. процес стационарне прираштаје (расподела зависи само од растојања не и положаја) (тривијално је, само извучемо λ)

4) ф-ја ср. вр. μ представља **операционо време / унутрашњи сат** бројачког процеса N.

Зато што, у средњем смислу, мери учесталост приспећа захтева за одштетом: $EN(t) = \mu(t)$.

5) Нехомог. Пуас. процес омогућава да се **убрза/успори време**

Згодно за моделирање сезонских утицаја.

Четврто својство из деф. често није оперативно, па зато уводимо и тзв. **инфинитезималну дефиницију.**

деф. 2 Случајни процес $\{N(t),\ t \geq 0\}$ је **Пуасонов процес са ф-јом интензитета $\lambda(\cdot)$** ако:

1) $N(0) = 0$ сс;

2) има независне прираштаје;

3) $P\{N(t,t+h] > 1\} = o(h)$, $h \to 0^+$

4) $P\{N(t,t+h] = 1\} = \underbrace{\lambda(t)\cdot h}_{\text{правоугаоник}} + o(h)$, $h \to 0^+$

* Да бисмо сагледали вероватносну структуру процеса, довољно је знати његову коначнодим. расподелу.

↳ по Колмогоровљевој теореми о егзистенцији

Користећи чињеницу да је N неопадајући процес $N(t_1) \leqslant N(t_2) \leqslant ... \leqslant N(t_n)$, сс.

$$\begin{aligned}
&P\{N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_1 + k_2, ..., N(t_n) = k_1 + k_2 + ... + k_n\} \\
&= P\{N(t_1) = k_1, N(t_1, t_2] = k_2, ..., N(t_{n-1}, t_n] = k_n\} \\
&\overset{\text{нез. прир.}}{=} P\{N(t_1) = k_1\} \cdot P\{N(t_1, t_2] = k_2\} \cdot ... \cdot P\{N(t_{n-1}, t_n] = k_n\} \\
&\overset{\mathcal{P}}{=} \frac{\mu^{k_1}(t_1) e^{-\mu(t_1)}}{k_1!} \cdot \frac{\mu^{k_2}(t_1, t_2] e^{-\mu(t_1, t_2]}}{k_2!} \cdot ... \cdot \frac{\mu^{k_n}(t_{n-1}, t_n] e^{-\mu(t_{n-1}, t_n]}}{k_n!} \\
&\overset{\text{сви се скрате}}{=} e^{-\mu(t_n)} \prod_{j=1}^{n} \frac{\mu^{k_j}(t_{j-1}, t_j]}{k_j!}.
\end{aligned}$$

* **Теорема 1 (конструкција хомогеног Пуасоновог процеса):**

а) **Егзистенција хомогеног Пуасоновог процеса:**

Нека је $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ iid случ. вел. са $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелом, $\lambda > 0$.

Означимо: (*) $T_0 = 0$, $T_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$;

(**) $N(t) = \#\{j \in \mathbb{N} : T_j \leq t\}$

Тада је $N = \{N(t), t \geq 0\}$ деф. са (**) хомогени Пуасонов процес са интензитетом λ.

б) **Репрезентација хомогеног Пуасоновог процеса као процеса обнављања:**

Нека је $N = \{N(t), t \geq 0\}$ хомогени Пуасонов процес са интензитетом $\lambda > 0$.

Нека је $0 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq ...$ низ тренутака приспећа захтева (T_j - тренуци обнављања), у складу са процесом N.

Тада $N(t)$ има репрезентацију (**), а T_n има репрезентацију (*),

где је $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ неки низ iid случ. вел. са $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелом

Напомена: Ово може да служи као још једна деф. хомогеног Пуас. процеса.

3. Хомоген Пуасонов процес

* У претх. питању смо већ причали о хом. Пуас. пр.

Занимљиво је да може да се докаже да је хомогени Пуас. процес
једини прост бројачки процес са независним и са стационарним прираштајима.

Овај процес припада разним класама случ. процеса које су нам значајне:

- процес обнављања [5]
- процес чистог грађења
- ланац Маркова
- Левијев процес
- потпуно случајан процес (захтеви се дешавају грубо случајно)

Следећа теорема даје нам однос хом. и нехом. Пуас. процеса

Теорема 1 (трансформација временског аргумента):

Нека је μ ф-ја средње вредности Пуасоновог процеса N.

Нека је $\tilde{N}$ стандардни хомогени Пуасонов процес.

1) $\{\tilde{N}(\mu(t)),\ t \geq 0\}$ је Пуасонов процес са ф-јом средње вредности $\mu(t)$;

2) Ако је μ: * строго растућа
   * непрекидна
   * $\lim_{t\to\infty} \mu(t) = +\infty$

да би постојало $\mu^{-1}(t)$

$\{N(\mu^{-1}(t)),\ t \geq 0\}$ је стандардни хомогени Пуасонов процес.

Напомена: Ово смо ставили да би процес из дела б) био деф. на целом $\mathbb{R}^+$.

Ако би било $\lim_{t\to\infty} \mu(t) = y_0 < +\infty$, инверз би постојао само на $[0, y_0]$,
самим тим би и процес био деф. на $[0, y_0]$.

кад рачунамо вероватноће

Ипак, у вероватносном смислу, „цео процес" се не разликује од „ограниченог".

Напомена: N и $\tilde{N}$ су исти у вероватносном смислу, што означавамо $N \overset{D}{=} \tilde{N}$.

Теорема 2: Нека је $\{\tilde{T}_n, n\in\mathbb{N}\}$ низ тренутака приспећа у станд. хом. Пуасоновом процесу $\tilde{N}$.
Нека је N_1 Пуасонов процес са ф-јом ср. вр. $\mu(t)$ ком одговарају тренуци T_n.

Тада је $\mu(T_n) = \tilde{T}_n$.

Доказ: $N_1(t) \overset{T1}{=} \tilde{N}(\mu(t)) = \#\{i\in\mathbb{N} : \tilde{T}_i \le \mu(t)\} = \#\{i\in\mathbb{N} : \mu^{-1}(\tilde{T}_i) \le t\} \Rightarrow \mu^{-1}(\tilde{T}_i) = T_i \Rightarrow \tilde{T}_i = \mu(T_i)$.

* **Лема 1:** На простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, нека су дефинисани низ случ. вел. $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и случ. процес $\{N(t), t\ge 0\}$ ткд. важи:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = Z$, сс;

2) $\forall t\ge 0$, $N(t) \in \{0,1,2,\dots\}$ сс;

3) $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = +\infty$ сс. (неограничен одозго)

Тада важи: $\lim\limits_{t\to\infty} Z_{N(t)} = Z$ сс.

Доказ: Нека су A, B, C догађаји које нам горњи услови сугеришу:

$$A = \{\omega\in\Omega \mid Z_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} Z(\omega)\} \overset{cc}{\Rightarrow} P(A) = 1;$$

$$B = \{\omega\in\Omega \mid (\forall t\ge 0)\ N(t,\omega) \in \mathbb{N}_0\} \overset{cc}{\Rightarrow} P(B) = 1;$$

$$C = \{\omega\in\Omega \mid N(t,\omega) \xrightarrow{t\to\infty} +\infty\} \overset{cc}{\Rightarrow} P(C) = 1.$$

Приметимо да је тада и $P(ABC) = 1$.

$$P(ABC) = 1 - P(A^c \cup B^c \cup C^c)$$

формула укљ. и искљ.

$$= 1 - \left[P(A^c) + P(B^c) + P(C^c) - P(A^cB^c) - P(A^cC^c) - P(B^cA^c) - P(A^cB^cC^c)\right] = 1 - 0 = 1.$$

испуњена сва три услова

Сад је: $(\forall\omega\in ABC)\ \lim\limits_{t\to\infty} Z_{N(t,\omega)}(\omega) = Z(\omega)$

Како је ABC сс. следи да је и ова конвергенција сс.

Теорема 3 (Јаки закон великих бројева):

Нека је $\{N(t),\ t \geq 0\}$ хомоген Пуасонов процес са интензитетом $\lambda > 0$. Тада:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \lambda, \qquad \text{сс}$$

Доказ: * По $\boxed{2}$ Т1.б), знамо да хом. Пуас. процес можемо представити на следећи начин:

$$N(t) = \#\{i \in \mathbb{N} :\ T_i \leq t\}, \qquad t \geq 0$$

где је $T_0 = 0$ и $T_n = Y_1 + \ldots + Y_n$, где су $\{Y_j\}$ iid са $\mathcal{E}(\lambda)$.

може јер $EY_j = \frac{1}{\lambda} < +\infty$

* Применимо (стари) ЈЗВБ на $\{Y_j\}$: $\quad \dfrac{\sum^n Y_j}{n} = \dfrac{T_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{1}{\lambda} \quad$ сс.

Низ T_n расте ка $\frac{n}{\lambda}$ $\Rightarrow$ T_n нема тачака нагомилавања ни у једном коначном интервалу.

$\Rightarrow$ вредности процеса N су коначне на сваком кон. инт. $[0,t]$.

Пошто је N неограничен процес $\left(N(t) \xrightarrow{t\to\infty} +\infty\right)$, испуњени су услови 1, 2, 3 за Л1.

* Када применимо Л1 на $Z_n = \frac{T_n}{n}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{T_{N(t)}}{N(t)} \xrightarrow{t\to\infty} \dfrac{1}{\lambda}$

Из напомене 4) у $\boxed{1}$: $\{N(t) = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$

$$\overset{/ : N(t,\omega)}{\Rightarrow} \quad \underset{\downarrow \atop 1/\lambda}{\frac{T_{N(t,\omega)}}{N(t,\omega)}} \leq \underline{\frac{t}{N(t,\omega)}} < \frac{T_{N(t,\omega)+1}}{N(t,\omega)} \cdot \frac{N(t,\omega)+1}{N(t,\omega)+1} = \underset{\downarrow \atop 1/\lambda}{\frac{T_{N(t,\omega)+1}}{N(t,\omega)+1}} \cdot \underbrace{\frac{N(t,\omega)+1}{N(t,\omega)}}_{\downarrow \atop 1}$$

Ако фиксирамо ω, заправо имамо реалне бр., па можемо применити теорему о 2 полицајца.

$$\Rightarrow \frac{t}{N(t)} \underset{t\to\infty}{\xrightarrow{\text{сс.}}} \frac{1}{\lambda} \quad \xRightarrow{\text{теорема о непр. пресл.}} \quad \frac{N(t)}{t} \underset{t\to\infty}{\xrightarrow{\text{сс.}}} \lambda.$$

Теорема 4 (Централна гранична теорема):

Нека је $\{N(t),\ t \geq 0\}$ хомоген Пуасонов процес са интензитетом $\lambda > 0$. Тада:

$$\frac{N(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} \xrightarrow[t \to \infty]{D} Z \in \mathcal{N}(0,1)$$

Доказ: $X \in \mathcal{P}(\lambda) \Rightarrow \varphi_X(s) := E(e^{isX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{isk} \cdot P\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{isk} \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{is}} = e^{\lambda(e^{is}-1)}$

Дакле: $\varphi_{N(t)}(s) = e^{\lambda t(e^{is}-1)}$, јер $N(t) \in \mathcal{P}(\lambda t)$.

Због тога: $\varphi_{\frac{N(t)-\lambda t}{\sqrt{\lambda t}}}(s) = e^{-is\frac{\lambda t}{\sqrt{\lambda t}}} \cdot \varphi_{N(t)}\left(\frac{s}{\sqrt{\lambda t}}\right) = e^{-is\frac{\lambda t}{\sqrt{\lambda t}}} \cdot e^{\lambda t\left(e^{i \cdot \frac{s}{\sqrt{\lambda t}}} - 1\right)}$

$$= e^{-is\sqrt{\lambda t}} \cdot e^{\lambda t\left(1 + \frac{is}{\sqrt{\lambda t}} - \frac{s^2}{2!\,\lambda t} + o\left(\frac{1}{t}\right) - 1\right)}$$

$$= e^{-\frac{s^2}{2} + o(1)} \xrightarrow{t \to \infty} e^{-\frac{s^2}{2}}$$

а то је баш карактеристична ф-ја за $\mathcal{N}(0,1)$.

* **Примери:** **презентација 2** (погледати слике)

5. Процес обнављања

Хом. Пуас. процес нам није довољно реалистичан.
Зато ћемо да уопштимо: жртвујемо мало једноставности зарад веће реалистичности.

деф. Нека је $\{Y_i\}$ низ iid случ. вел. које су сс. позитивне.

Нека је $T_0 = 0$, $T_n = Y_1 + \dots + Y_n$ и $N(t) = \#\{i \in \mathbb{N} : T_i \leq t\}$.

Низ T_n је **низ тренутака обнављања**, а процес $\{N(t), t \geq 0\}$ је **процес обнављања**.

(Дакле, ако су $\{Y_i\} \in \mathcal{E}(\lambda)$, онда имамо хом. Пуас. проц.)

деф. **Шпаре-Андерсонов модел осигурања** је као следећи корак у односу на Крамер-Лундбергов: уместо хом. Пуас. процеса, као бројач се узима (општи) процес обнављања.

* Теорема 1 (Јаки закон великих бројева):

Нека је $\{N(t), t \geq 0\}$ процес обнављања ткд. $EY_1 = \frac{1}{\lambda} < +\infty$. Тада:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \lambda, \quad \text{сс}$$

Доказ: аналогно $\boxed{3}$ Т3 (на усменом пишемо цео)

* Лема 1 (Валдов идентитет):

Нека је $\{N(t), t \geq 0\}$ процес обнављања ткд. $EY_1 = \frac{1}{\lambda} < +\infty$. Тада:

$$E T_{N(t)+1} = EY_1 \cdot (EN(t) + 1).$$

Доказ:

Дефинише се сл. низ (Z_n) са:

$$Z_i = \begin{cases} 0, & \text{ако је } i > N(t)+1 \\ 1, & \text{ако је } i \leq N(t)+1 \end{cases}, \quad i \in \mathbb{N}$$

$$E(T_{N(t)+1}) = E\Big(\sum_{j=1}^{N(t)+1} Y_j\Big) = E\Big(\sum_{j=1}^{+\infty} Y_j \cdot Z_j\Big) \overset{\text{TMK}}{=} \sum_{j=1}^{+\infty} E(Y_j Z_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{+\infty} EY_j \cdot EZ_j = \sum_{j=1}^{+\infty} EY_1 \cdot P\{N(t)+1 \geq j\}$$

Y_j и Z_j су независне (*)

Y_n - iid

$$= EY_1 \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} P\{N(t) \geq j\} = EY_1 \Big(1 + \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} P\{N(t) > j\}}_{EN(t)}\Big)$$

(*) Y_j и Z_j су независне акко су Y_j и $I_{\{Z_j = 1\}}$ независне

$$\{Z_j = 1\} = \{N(t)+1 \geq j\} = \{N(t) \geq j-1\} = \{\underbrace{T_{j-1}}_{=\sum_{k=1}^{j-1} Y_k} \leq t\}$$

$\sum_{k=1}^{j-1} Y_k$ и Y_j су независне јер је (Y_n) је низ независних сл. величина

$\blacksquare$

Теорема 2 (Елементарна теорема обнављања):

Нека је $\{N(t),\ t \geq 0\}$ процес обнављања ткд. $EY_1 = \frac{1}{\lambda} < +\infty$. Тада:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{EN(t)}{t} = \lambda \qquad \left(\begin{array}{l} EN(t) \text{ се понаша као } \lambda t, \\ \text{тј. као лин. } \phi\text{-ја} \end{array} \right)$$

(нисмо писали сс. јер се ради о конв. реалног низа, а не случајних величина)

Доказ: Приметимо: $\lambda \overset{T1}{\leq} E\left(\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}\right) \overset{\text{Фатуова лема}}{\leq} \liminf_{t\to\infty} \frac{EN(t)}{t}$.

Дакле, довољно је да докажемо да је $\limsup_{t\to\infty} \frac{EN(t)}{t} \leq \lambda$.

То радимо тзв. **техником одсецања**:

Нека је $c = const > 0$.

Уводимо: $Y_i^{(c)} := \min\{Y_i, c\}$ (носач је само $[0,c]$) - овај низ наслеђује iid.

$T_n^{(c)} := \sum_{i=1}^{n} Y_i^{(c)}$, $T_0^{(c)} := 0$ $\overset{Y_i^{(c)}\text{-iid}}{\Rightarrow}$ $\{T_n^{(c)}\}$ је низ тренутака обнављања.

$\Rightarrow N_c(t) := \#\{i \in N : T_i^{(c)} \leq t\}$ је процес обнављања

Приметимо: $N(t) \leq N_c(t)$ (јер $Y_i^{(c)} \leq Y_i$)

$\overset{\text{(наметнамо)}}{\Rightarrow} \limsup_{t\to\infty} \frac{EN(t)}{t} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{EN_c(t)}{t}$ (па ћемо доказати да је то такође $\leq \lambda$)

Како је: $ET_{N_c(t)+1} \overset{Л1}{=} EY_1^{(c)}(EN_c(t)+1)$ $\Rightarrow$ $EN_c(t) = \frac{ET_{N(c)+1}}{EY_1^{(c)}} - 1$.

и: $T_{N_c(t)}^{(c)} \leq t$ и $Y_{N_c(t)+1}^{(c)} = \min\{Y_{N_c(t)+1}, c\}$ $\Rightarrow$ $T_{N_c(t)+1}^{(c)} = T_{N_c(t)}^{(c)} + Y_{N_c(t)+1}^{(c)} \leq t + c$.

то је: $\limsup_{t\to\infty} \frac{EN(t)}{t} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{EN_c(t)}{t} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{ET_{N(c)+1}^{(c)}}{t \cdot EY_1^{(c)}} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{t+c}{t \cdot EY_1^{(c)}} = \frac{1}{EY_1^{(c)}}$

Пошто је c било произвољно, када пустимо $c \to \infty$, добијамо $EY_1^{(c)} \to EY_1$, па по ТМК:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{EN(t)}{t} \leq \frac{1}{EY_1} = \lambda,$$ чиме је доказ комплетиран.

Теорема 3 (Асимптотско понашање дисперзије процеса обнављања):

Нека је $\{N(t),\ t \geq 0\}$ процес обнављања ткд. $\underbrace{EY_1 = \frac{1}{\lambda} < +\infty}$ и $\underbrace{DY_1 < +\infty}$. Тада:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{DN(t)}{t} = \frac{DY_1}{(EY_1)^3} = \lambda^3 \cdot DY_1 \quad \text{сс.}$$

(D се такође понаша као лин. ф-ја)

Теорема 4 (Централна гранична теорема за процес обнављања):

Нека је $\{N(t),\ t \geq 0\}$ процес обнављања ткд. $\underbrace{EY_1 = \frac{1}{\lambda} < +\infty}$ и $\underbrace{DY_1 < +\infty}$. Тада:

$$\frac{N(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda^3 \cdot DY_1 \cdot t}} \xrightarrow[t\to\infty]{D} Z \in \mathcal{N}(0,1)$$

$\boxed{4.}$ Расподела времена приспећа

Теорема 1 (Зај. расп. тренутака приспећа, односно дужина интервала између узастопних приспећа)

Нека је $\{N(t),\ t \geq 0\}$ Пуасонов процес са непрекидном и сс позитивном ϕ-јом инт. λ.

1) $$f_{T_1,\dots,T_n}(x_1,\dots,x_n) = e^{-\mu(x_n)} \cdot \prod_{j=1}^{n} \lambda(x_j) \cdot I\{0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n\}.$$

2) $$f_{Y_1,\dots,Y_n}(x_1,\dots,x_n) = e^{-\mu(x_1+\dots+x_n)} \cdot \prod_{j=1}^{n} \lambda(x_1+\dots+x_n), \qquad x_j \geq 0$$

Доказ: 1) Код нехом. Пуас. процеса, низ $\{Y_j\}$ није iid. Зато, морамо корак уназад.

* Нека је $\tilde{N}$ стандардан хом. П.п: $\tilde{N}(t) = \#\{i \in N : \tilde{T}_i \leq t\}$, где $\tilde{T}_n = \sum^{n} \tilde{Y}_i$, где $\{\tilde{Y}_i\}$ - iid.

Знамо: $\tilde{Y}_1 = \tilde{T}_1$, $\tilde{Y}_2 = \tilde{T}_2 - \tilde{T}_1$, ..., $\tilde{Y}_n = \tilde{T}_n - \tilde{T}_{n-1}$,

одакле добијамо Јакобијан: $$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ -1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & -1 & 1 & 0 \\ & & & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

С обзиром да су $\{\tilde{Y}_i\}$ iid $\Rightarrow$ $f_{\tilde{Y}_1,\dots,\tilde{Y}_n}(y_1,\dots,y_n) = \prod_{j=1}^{n} f_{\tilde{Y}_j}(y_j) = \prod^{n} e^{-y_j} = e^{-\sum^{n} y_j}$.

$$\Rightarrow f_{\tilde{T}_1,\dots,\tilde{T}_n}(x_1,\dots,x_n) = f_{\tilde{Y}_1,\dots,\tilde{Y}_n}(y_1(x_1,\dots,x_n),\dots,y_n(x_1,\dots,x_n)) \cdot |J|$$

$$= f_{\tilde{Y}_1,\dots,\tilde{Y}_n}(x_1, x_2-x_1, \dots, x_n-x_{n-1}) \cdot I\{0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n\}$$

$$= e^{-(x_1+x_2-x_1+\dots+x_n-x_{n-1})} \cdot I\{0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n\} = e^{-x_n} \cdot I\{0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n\}$$

* Како је μ строго растућа + непрекидна $\Rightarrow$ постоји μ^{-1}.

$$F_{T_1,T_2,\dots,T_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) = P\{\underline{T_1} \leqslant x_1, \underline{T_2} \leqslant x_2, \dots, \underline{T_n} \leqslant x_n\}$$
$$\overset{\boxed{3}T2}{=} P\{\underline{\mu^{-1}(\widetilde{T}_1)} \leqslant x_1, \underline{\mu^{-1}(\widetilde{T}_2)} \leqslant x_2, \dots, \underline{\mu^{-1}(\widetilde{T}_n)} \leqslant x_n, \}$$
$$\overset{/\circ\mu}{=} P\{\widetilde{T}_1 \leqslant \mu(x_1), \widetilde{T}_2 \leqslant \mu(x_2), \dots, \widetilde{T}_n \leqslant \mu(x_n)\}$$
$$= \int_0^{\mu(x_1)} \int_0^{\mu(x_2)} \dots \int_0^{\mu(x_n)} \boxed{f_{\widetilde{T}_1,\widetilde{T}_2,\dots,\widetilde{T}_n}(t_1,t_2,\dots,t_n)} dt_n d\dots dt_2 dt_1$$
$$= \int_0^{\mu(x_1)} \int_0^{\mu(x_2)} \dots \int_0^{\mu(x_n)} \boxed{e^{-t_n} I\{0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \dots \leqslant t_n\}} dt_n d\dots dt_2 dt_1$$

Коначно, када обе стране диференцирамо по горњим границама, добијамо тражени израз

Притом, уместо $\mu(x_i)$ у индикатору пишемо само x_i (јер је μ растућа)

2) Сада када знамо $f_{T_1,\dots,T_n}$, из ње рачунамо $f_{Y_1,\dots,Y_n}$.

$T_1 = Y_1, \quad T_2 = Y_1 + Y_2, \quad \dots, \quad T_n = Y_1 + \dots + Y_n \quad \Rightarrow \quad |J| = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{vmatrix} = 1.$

$$\begin{aligned} f_{Y_1,\dots,Y_n}(x_1,\dots,x_n) &= f_{T_1,\dots,T_n}\big(y_1(x_1,\dots,x_n), \dots, y_n(x_1,\dots,x_n)\big) \cdot |J| \\ &= f_{T_1,\dots,T_n}(x_1,\ x_1+x_2,\ \dots,\ x_1+\dots+x_n) \\ &= e^{-\mu(x_1+\dots+x_n)} \cdot \prod_{j=1}^{n} \lambda(x_1+\dots+x_j) \end{aligned}$$

(не пишемо I зато што $x_1 \le x_1+x_2 \le \dots \le x_1+\dots+x_n$)

$\boxed{6.}$ Својство Пуасоновог процеса преко статистика поретка

Теорема 1 (својство статистика поретка Пуасоновог процеса):

Нека је $\{N(t),\ t \geq 0\}$ Пуас. проц. са непр. и сс. позитивном φ-јом инт. λ и φ-јом ср. вр. μ.

Нека је $\{X_i\}$ низ iid случ. вел. са густином расподеле $\dfrac{\lambda(x)}{\mu(t)}$, $0 < x < t$.

$$\Rightarrow \quad (T_1, \dots, T_n \mid N(t) = n) \overset{D}{=} (X_{(1)}, \dots, X_{(n)}).$$

тј.
$$f_{T_1,\dots,T_n \mid N(t)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{n!}{\mu^n(t)} \cdot \prod_{j=1}^{n} \lambda(x_j) \cdot I\{0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq t\}$$

Специјално, за хомоген Пуас. проц. интензитета λ, $\{X_i\}$ ће бити iid низ из $\mathcal{U}[0,t]$ и важи:

$$f_{T_1,\dots,T_n \mid N(t)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{n!}{t^n} \cdot I\{0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq t\}$$
– не зависи од λ.

Доказ:

Доказ. Густина расподјеле $T_1, T_2, \dots, T_n | N(t) = n$ дата је са

$$L = \lim_{\substack{h_i \to 0^+ \\ 1 \leq i \leq n}} \frac{P\{T_1 \in (x_1, x_1 + h_1], T_2 \in (x_2, x_2 + h_2], \dots, T_n \in (x_n, x_n + h_n] | N(t) = n\}}{h_1 h_2 \dots h_n}, \quad 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < t.$$

Изаберимо довољно мале h_i, $1 \leq i \leq n$ тако да интервали $(x_i, x_i + h_i] \subseteq [0, t]$ буду међусобно дисјунктни.

Тада је

$$P\{T_1 \in (x_1, x_1 + h_1], T_2 \in (x_2, x_2 + h_2], \dots, T_n \in (x_n, x_n + h_n] | N(t) = n\}$$
$$= P\{N(x_1) = 0, N(x_1 + h_1) - N(x_1) = 1, N(x_2) - N(x_1 + h_1) = 0, N(x_2 + h_2) - N(x_2) = 1,$$
$$\dots, N(x_n) - N(x_{n-1} + h_{n-1}) = 0, N(x_n + h_n) - N(x_n) = 1 | N(t) = n\}$$
$$= \frac{P\{N(x_1) = 0, N(x_1 + h_1) - N(x_1) = 1, \dots, N(x_n + h_n) - N(x_n) = 1, N(t) - N(x_n + h_n) = 0\}}{P\{N(t) = n\}}$$

нез. прир.
$$= \frac{e^{-\mu(x_1)}\big(\mu(x_1 + h_1) - \mu(x_1)\big)e^{-(\mu(x_1+h_1) - \mu(x_1))} \dots \big(\mu(x_n + h_n) - \mu(x_n)\big)e^{-(\mu(x_n+h_n) - \mu(x_n))}e^{-(\mu(t) - \mu(x_n+h_n))}}{\frac{(\mu(t))^n e^{-\mu(t)}}{n!}}$$
$$= \frac{e^{-\mu(t)} \prod_{i=1}^{n} \mu(x_i, x_i + h_i]}{\frac{(\mu(t))^n e^{-\mu(t)}}{n!}} = \frac{n!}{(\mu(t))^n} \prod_{i=1}^{n} \mu(x_i, x_i + h_i].$$

Сада је

$$L = \lim_{\substack{h_i \to 0^+ \\ 1 \leq i \leq n}} \frac{n!}{(\mu(t))^n} \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu(x_i, x_i + h_i]}{h_i} = \frac{n!}{(\mu(t))^n} \prod_{i=1}^{n} \lambda(x_i),$$

јер је

$$\lim_{h_i \to 0^+} \frac{\mu(x_i + h_i) - \mu(x_i)}{h_i} = \mu'(x_i) = \lambda(x_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Пример: презентација 4, претпоследњи слајд

Пример 6.1. Нека је N хомоген Пуасонов процес са интензитетом $\lambda > 0$ и $0 < T_1 < T_2 < \dots$ с.с. Нека су X_1, X_2 независне случајне величине са $\mathcal{U}[0,1]$ расподелом и

$$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2\}, \quad X_{(2)} = \max\{X_1, X_2\}.$$

Тада је

$$\big((T_1, T_2) \mid N(t) = 2\big) \stackrel{d}{=} (X_{(1)}, X_{(2)}).$$

Показујемо да је

$$P\{T_1 \leqslant x_1, T_2 \leqslant x_2 \mid N(t) = 2\} = P\{X_{(1)} \leqslant x_1, X_{(2)} \leqslant x_2\}, \; \boxed{0 < x_1 < x_2 < t.}$$

Са једне стране,

условна

$$P\{T_1 \leqslant x_1, T_2 \leqslant x_2 \mid N(t) = 2\} = \frac{P\{T_1 \leqslant x_1, T_2 \leqslant x_2, N(t) = 2\}}{P\{N(t) = 2\}}$$

$\in \mathcal{P}(\lambda t)$

сви случајеви

$$= \frac{P\{N(x_1) = 2, N(x_1, t] = 0\} + P\{N(x_1) = 1, X(x_1, x_2] = 1, N(x_2, t] = 0\}}{\frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2}}$$

нез. прир. + $\mathcal{P}$

$$= \frac{\frac{(\lambda x_1)^2 e^{-\lambda x_1}}{2} e^{-\lambda(t - x_1)} + \lambda x_1 e^{-\lambda x_1} \lambda(x_2 - x_1) e^{-\lambda(x_2 - x_1)} e^{-\lambda(t - x_2)}}{\frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2}}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t} \lambda^2 \left(\frac{x_1^2}{2} + x_1(x_2 - x_1)\right)}{\frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2}} = \frac{2x_1 x_2 - x_1^2}{t^2}.$$

Са друге стране, користећи формулу потпуне вероватноћ, добијамо

ф.п.в

$$\begin{aligned}
&P\{\min\{X_1, X_2\} \leqslant x_1, \max\{X_1, X_2\} \leqslant x_2\} \\
&= P\{\max\{X_1, X_2\} \leqslant x_2\} - P\{\min\{X_1, X_2\} > x_1, \max\{X_1, X_2\} \leqslant x_2\} \\
&= P\{X_1 \leqslant x_2, X_2 \leqslant x_2\} - P\{X_1 > x_1, X_2 > x_2, X_1 \leqslant x_2, X_2 \leqslant x_2\} \\
&= \Big(P\{X_1 \leqslant x_2\}\Big)^2 - \Big(P\{x_1 < X_1 \leqslant x_2\}\Big)^2 = \left(\frac{x_2}{t}\right)^2 - \left(\frac{x_2 - x_1}{t}\right)^2 \\
&= \frac{2x_1 x_2 - x_1^2}{t^2}.
\end{aligned}$$

Дакле, хомоген Пуасонов процес је повезан са униформном расподелом.

деф. Нека је $\{\tilde N(t),\ t\geq 0\}$ стандардни хомоген Пуас. процес.
Нека је $\mu(t),\ t\geq 0$, ф-ја ср. вр. неког Пуасоновог процеса деф. на $[0,+\infty]$.
Нека је Θ недегенерисана, сс позитивна случ. вел. независна од процеса $\tilde N$.

Случ. процес $N(t) := \tilde N(\Theta\cdot\mu(t)),\ t\geq 0$ је **мешовити Пуас. процес** са мешајућом променљивом Θ.

Напомена: Θ служи за рандомизацију времена.
Због тога, мешовити П.п. можемо користити да моделирамо хетерогеничност осигураника.

Напомена: 1) Наслеђена својства:
- својство Маркова
- својство изражено преко статистика поретка

2) Изгубљена својства:
- независност прираштаја
- расподела засека више није Пуасонова
- прераспршеност: $DN(t) > EN(t)$ (код $\tilde N$ су једнаки)

Нека је $\boxed{N(t):=\tilde N(\Theta\mu(t))}$, $t\geq 0$ и претпоставимо $D\Theta<+\infty$.
Тада важи: $\begin{cases} E(N(t)\mid\Theta=\theta)=E(\tilde N(\theta\mu(t)))\stackrel{\downarrow}{=}\theta\mu(t) & (*)\\ D(N(t)\mid\Theta=\theta)=D(\tilde N(\theta\mu(t)))\stackrel{\downarrow}{=}\theta\mu(t) & (**)\end{cases}$ ($\tilde N$ је стд. хом. П.п.)

$$\Rightarrow \boxed{EN(t)}\stackrel{\text{ТВ}}{=}E(E(N(t)\mid\Theta))\stackrel{(*)}{=}E(\Theta\mu(t))=\mu(t)\cdot E\Theta$$
$$\boxed{DN(t)}\stackrel{7\,\text{Т1}}{=}E(D(N(t)\mid\Theta))+D(E(N(t)\mid\Theta))\stackrel{(**)}{=}E(\Theta\mu(t))+D(\Theta\mu(t))$$
$$=EN(t)\left(1+\frac{\mu(t)\cdot D\Theta}{E\Theta}\right)\quad \frac{\mu(t)\cdot D\Theta}{E\Theta}>0 \quad \text{"прераспршеност"}$$

Пример: Негативни биномни процес је један мешовити П.п:

Изаберемо: $\mu(t)=t$ и $\Theta\in\gamma(\alpha,\beta)$ где $\alpha\in\mathbb N$

$$P\{N(t)=k\}=P\{\tilde N(\Theta\underbrace{\mu(t)}_{t})=k\}\stackrel{\text{ф.г.в.}}{=}\int_0^\infty P\{\tilde N(\Theta t)=k\mid\Theta=x\}\overbrace{\frac{x^{\alpha-1}e^{-\beta x}\beta^\alpha}{(\alpha-1)!}}^{f_\Theta(x)\text{ за }\gamma(\alpha,\beta)}dx \quad \alpha\in\mathbb N$$

убацимо $\Theta=x$
$$=\int_0^\infty P\{\tilde N(xt)=k\}\frac{x^{\alpha-1}e^{-\beta x}\beta^\alpha}{(\alpha-1)!}dx\stackrel{\mathcal P(xt)}{=}\int_0^\infty \frac{(tx)^ke^{-tx}}{k!}\frac{x^{\alpha-1}e^{-\beta x}\beta^\alpha}{(\alpha-1)!}dx$$
$$=\frac{t^k\beta^\alpha}{k!(\alpha-1)!}\int_0^\infty x^{k+\alpha-1}e^{-x(t+b)}dx$$

намештамо: $\cdot\frac{(k+\alpha-1)!}{(k+\alpha-1)!}\cdot\frac{(t+\beta)^{k+\alpha}}{(t+\beta)^{k+\alpha}}$
$$=\frac{t^k\beta^\alpha}{k!(\alpha-1)!}\frac{(k+\alpha-1)!}{(t+\beta)^{\alpha+k}}\int_0^\infty \underbrace{\frac{x^{k+\alpha-1}e^{-x(t+b)}(t+\beta)^{k+\alpha}}{(k+\alpha-1)!}}_{f_{\gamma(\alpha+k,\beta+t)(x)},\ \text{па је }\int_0^\infty=1}dx$$
$$=\binom{k+\alpha-1}{\alpha-1}\left(\frac{t}{t+\beta}\right)^k\left(\frac{\beta}{t+\beta}\right)^\alpha.$$

Дакле, $\boxed{N(t)\sim\mathcal{NB}\left(\alpha,\frac{\beta}{t+\beta}\right)}$.

Пример: презентација 4, последњи слајд

7. Математичко очекивање и дисперзија збира исплаћених одштета

У претходним питањима, бавили смо се нашим бројачким процесом, тј. N.
Сада се наш фокус пребацује на процес S који представља збир исплаћених одштета.

Лема 1: $DZ = E[D(Z|W)] + D[E(Z|W)]$, где $DZ < +\infty$.

Доказ: $DZ = EZ^2 - (EZ)^2 \overset{TB}{=} E[E(Z^2|W)] - E^2[E(Z|W)]$

$$\overset{D+E^2}{=} E[D(Z|W) + E^2(Z|W)] - E^2[E(Z|W)]$$

$$= E[D(Z|W)] + E[E^2(Z|W)] - E^2[E(Z|W)] = E[D(Z|W)] + D[E(Z|W)]$$

Теорема 1: Нека је $\{N(t), t\geq 0\}$ бројачки процес обнављања и $S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j$, $t \geq 0$, где је $\{X_i\}$ iid низ.
Такође, нека је $EX_1 = m < \infty$ и $DX_1 = \sigma^2 < \infty$.

1) $ES(t) = m \cdot EN(t)$;

2) $DS(t) = \sigma^2 \cdot EN(t) + m^2 DN(t)$.

Доказ: 1) Приметимо: $E(S(t)\,|\,N(t)=n) = E\left(\sum^{N(t)} X_j \,\middle|\, N(t)=n\right) \overset{N,X_j - \text{нез.}}{=} E\left(\sum^{n} X_j\right) = \sum^{n} EX_j \overset{iid}{=} n \cdot m$,

па је: $E(S(t)\,|\,N(t)) = m \cdot N(t)$ (*)

Дакле: $ES(t) \overset{TB}{=} E[E(S(t)\,|\,N(t))] \overset{(*)}{=} E(mN(t)) = m \cdot EN(t)$.

2) Приметимо: $D(S(t)\,|\,N(t)=n) = (\text{аналогно}) = D\left(\sum^{n} X_j\right) = n\sigma^2$.

па је: $D(S(t)\,|\,N(t)) = \sigma^2 N(t)$ (**)

Дакле: $DS(t) \overset{Л1}{=} E[D(S(t)\,|\,N(t))] + D[E(S(t)\,|\,N(t))]$

$$\overset{(*)(**)}{=} E(\sigma^2 N(t)) + D(mN(t)) = \sigma^2 EN(t) + m\,DN(t).$$

Занима нас њихово асимптотско понашање, тј. кад $t \to \infty$. (користимо у $\boxed{10}$)

У $\boxed{5}$ смо видели да за процес обнављања N код ког је $EY_1 = \frac{1}{\lambda} \leq +\infty$ (може и ∞) важи:

$$EN(t) = \lambda t + o(t) \quad \text{и} \quad DN(t) = \lambda^3 DY_1 t + o(t), \quad t \to \infty$$

Када то убацимо у Т1, добијамо:

$$ES(t) = m\lambda t(1 + o(1)), \quad t \to \infty$$

$$DS(t) = \lambda t(\sigma^2 + m^2\lambda^2 DY_1)(1 + o(1)), \quad t \to \infty$$

Закључак: 1) $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{ES(t)}{t} = \lambda m;$

2) $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{DS(t)}{t} = \lambda(\sigma^2 + m^2\lambda^2 DY_1).$

оба се понашају као линеарна функција од t.

9. Збир независних случ. величина
Конволуција функција расподеле

Ово је „излет питање", тј. само је техничко.

* Нека су X, Y сл. вел. са ф-јом расподеле $F_{X,Y}(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$.

Нека је $Z = h(X,Y)$, тада је: $F_Z(z) = P\{h(X,Y) \leq z\} = \int_D dF_{X,Y}(x,y)$, где $D = \{(x,y) \in R^2 \mid h(x,y) \leq z\}$.

Специјално, за $Z = X+Y$, где су X, Y независне, тада је: $D = \{(x,y) \in R^2 \mid x+y \leq z\}$ и:

$$F_Z(z) = P\{X+Y \leq z\} \overset{\text{нез.}}{=} \int_D dF_X(x)\, dF_Y(y) = \int_{R^2} I\{(x,y) \mid x+y \leq z\}\, dF_X(x)\, dF_Y(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-x} dF_Y(y) \right) dF_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} F_Y(z-x)\, dF_X(x).}$$

Још специјалније, ако су X, Y aпс. непр, онда постоје и густине f_X, f_Y, па:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_Y(z-x)\, f_X(x)\, dx$$

$$\text{и} \quad f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(z-x)\, f_X(x)\, dx \qquad \text{(дакле и } X+Y \text{ је апс. непр.)}$$

деф. Ако су F, G ф-је расп, онда $(F*G)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-t)\, dG(t)$ зовемо конволуција ф-ја расп. F и G.

Особине: 1) Ако су X, Y независне, важи: $F_{X+Y} = F * G = G * F$; (видели на ТВ)

2) Ако су још и сс позитивне, онда је: $F_{X+Y}(x) = \int_0^x F(x-t)\, dG(t)$, $x > 0$.

(јер је $F(x-t) = 0$, за $x < t$ и $G(t) = 0$, за $t < 0$)

* деф. Нека је $\{X_n\}$ iid низ сл. вел. са ф-јом расп. F, при чему $F(0) = 0$. (значи сви X_n су сс позитивни)

n-та конволуција функције расподеле F се дефинише као:

→ $F^{0*}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ дакле $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, због сс. поз (а то је „празна сума")

→ $F^{n*}(x) = P\{X_1 + \ldots + X_n \leq x\}$

Напомена: n-та конволуција је деф. рекурзивно: $F^{(n+1)*} = F^{n*} * F$.

* Сада се враћамо на тему:

Желимо да одредимо G_t - ф-ју расподеле за случ. вел. $S(t)$:

$$G_t(x) = P\{S(t) \le x\} = P\{\sum^{N(t)} X_j \le x\} \overset{\text{ф.п.в}}{=} \sum^{\infty} P\{\sum^{N(t)} X_j \le x \mid N(t) = n\} \cdot P\{N(t) = n\}$$

$$\overset{N,X \text{ - нез.}}{=} \sum^{\infty} P\{\sum^{n} X_j \le x\} \cdot P\{N(t) = n\}$$

Закључак: $G_t(x) = \sum^{\infty} F^{n*}(x) \cdot P\{N(t) = n\}$, за $x \geq 0$

* Ово се доста компликовано одређује, некад је и немогуће. Зато се користе нумеричке методе:

1) Panjer-ов алгоритам: тачне расподеле, али доста рестриктивно:

→ X_1 је дискретна сл.вел. са вредностима у $\mathbb{N}_0$ (величине одштета припадају „решетци")

→ N је (недег.) дискретна сл.вел. ткд: $p_k = P\{N=k\} = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$

(Сетимо се: у $\boxed{2}$ смо видели да оне три расподеле испуњавају то својство.
Испоставља се да су то једине три такве расподеле.
Зато је овај услов доста рестриктиван.)

2) Монте Карло: апроксимативно
3) bootstrap: апроксимативно

* Наводимо својства која процеси $N(t)$ и $S(t)$ деле:

Лема 1: Ако N има нез. прираштаје, онда их има и S.

Лема 2: Ако N има стац. и нез. прираштаје, онда их има и S.

10. Граничне теореме за збир исплаћених одштета

Нека је $\{S(t),\ t\geq 0\}$ процес збира исплаћених одштета: $S(t) = \sum^{N(t)} X_j$, $t \geq 0$,

где је $N(t)$ процес обнављања, а $\{X_j\}$ iid низ сс поз. сл.вел.

Коначно, нека је $\{T_j\}$ низ тренутака обнављања и нека је: $Y_j = T_j - T_{j-1}$.

Теорема 1 (Јаки закон великих бројева за збирни процес): Ако су $EX_1 = m < \infty$ и $EY_1 = \frac{1}{\lambda} < \infty$, онда:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{t} = \lambda m, \quad \text{сс.}$$

Доказ: $\frac{S(t)}{t} = \frac{S(t)}{N(t)} \cdot \frac{N(t)}{t}$

Нека је: $A = \{\omega \in \Omega \mid \frac{N(t)}{t} \xrightarrow{t\to\infty} \lambda\}$, $B = \{\omega\in\Omega \mid \frac{S(t)}{N(t)} \xrightarrow{t\to\infty} m\}$

По ЈЗВБ за N (5 Т1): $P(A) = 1$.
Takође, важи и: $P(B) = 1$ $\left(\frac{S(t)}{N(t)} = \frac{X_1 + \dots + X_{N(t)}}{N(t)} \xrightarrow{N(t)\to\infty} m, \text{ по (обичном) ЈЗВБ за } X_i \right)$

$\Rightarrow P(AB) = 1 \quad \Rightarrow \quad \forall \omega \in AB \quad \frac{S(t,\omega)}{t} \xrightarrow{t\to\infty} \lambda m.$

Теорема 2 (Централна гранична теорема за збирни процес): Ако су $DX_1 = \sigma^2 < \infty$ и $DY_1 < \infty$, онда:

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| P\left\{ \frac{S(t) - ES(t)}{\sqrt{DS(t)}} \leq x \right\} - \Phi(x) \right| = 0,$$

где је Φ ф-ја расп. за $\mathcal{N}(0,1)$.

Напомена: Овај облик ЦГТ зовемо „равномерна верзија".

Класични облик, тј. „тачка-по-тачка верзија" би изгледао овако:

$$P\left\{ \frac{S(t) - ES(t)}{\sqrt{DS(t)}} \leq x \right\} \longrightarrow \Phi(x), \quad x\in\mathbb{R} \qquad (\text{тј. конверг. у расподели})$$

Напомена: У обе теореме можемо убацити асимпт. изразе [7] за $ES(t)$ и $DS(t)$ (у сврхе центрирања и скалирања)

нпр. из ЈЗВБ добијамо: $\lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{ES(t)} = 1$, сс (*)

Напомена: Аналогна тврђења важе и за низ парц. сума $\{S_n\}$.

* **Желимо ово да искористимо за нормалну апроксимацију ф-је $G_t(x)$:**

Уз претпоставке $DX_1, DY_1 < \infty$, можемо искористити Т2.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| P\left\{ \frac{S(t)-ES(t)}{\sqrt{DS(t)}} \le x \right\} - \phi(x) \right| \overset{\left[\substack{\text{смена}\\ z = x\cdot\sqrt{D}+E}\right]}{=} \sup_{z\in\mathbb{R}} \left| P\{S(t)\le z\} - \phi\left(\frac{z-ES(t)}{\sqrt{DS(t)}}\right) \right| \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

Закључак: $G_t(x) \approx \phi\left(\frac{x-ES(t)}{\sqrt{DS(t)}}\right)$, за довољно велико t.

Ово нам служи за прављење интервала поверења за $S(t)$.

Ипак, избегава се коришћење ове апроксимације (погледати $\boxed{22}$)

$\boxed{8.}$ Класични принципи одређивања премије

деф. **Принцип одређивања премије** је правило које говори колика би требало да буде премија за дати ризик.

Шта то математички значи?

деф. За актуаре, **ризик** је сл. вел. R, која има ф-ју расп. G_R.

Тада је принцип одређивања премије заправо функционал $H: \underbrace{R}_{\text{ризик}} \mapsto \underbrace{\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}}_{\text{одштета}}$.

деф. Ризик **се може осигурати** по принципу H ако важи: $H(R) < \infty$.

Једна могућност је да узмемо $R = S(t)$. Тада је $H(R) = \Pi(t)$.[1]

За сваки од принципа, прво наведемо општи случај, па онда и у овом спец. случају.

1) **принцип еквивалентности:** $H(R) = ER$, $\Pi(t) = ES(t)$.

Овде је у питању фер тржишна премија $\Rightarrow$ не доноси прилив вишка капитала (зато је бескорисан)

$\Pi(t) - S(t)$, а по $\boxed{10}(*)$: $\lim \frac{S(t)}{ES(t)} = 1$.

2) **принцип очекиване вредности:** $H(R) = (1+\rho)ER$, $\Pi(t) = (1+\rho)ES(t)$.

$\rho > 0$ се зове **заштитни додатак**

Што је ρ веће, увећава се вишак, али и висина премије (па компанија постаје неконкурентна).

Коришћење овога опет оправдава ЈЗВБ ($ES(t) = \lambda t \mu(1+o(1))$, $t \to \infty$)

У наредна два укључујемо и DR.

3) **принцип дисперзије:** $H(R) = ER + \tilde{\rho} DR$, $\Pi(t) = ES(t) + \tilde{\rho} DS(t)$.

Када је N процес обнављања, овај процес је асимпт. еквивалентан принципу 2)
(тј. количник премија по овим принципима, конвергира ка $const > 0$, при $t \to \infty$)

4) **принцип стд. одступања:** $H(R) = ER + \tilde{\rho}\sqrt{DR}$, $\Pi(t) = ES(t) + \tilde{\rho}\sqrt{DS(t)}$.

Приметимо: по $\overset{x=\rho}{\text{ЦГТ}}$ важи $P\{S(t) - \Pi(t) \leq 0\} \xrightarrow{t\to\infty} \Phi(\tilde{\rho})$

Када је N процес обнављања, овај процес је асимпт. еквивалентан принципу 1) (зато је лош)

итд. (принцип нулте корисности ...)

* Која су пожељна својства за $H(\cdot)$?

1) ненегативност додатка: $H(R) \geq ER$

2) адитивност: $H(R_1+R_2) = H(R_1) + H(R_2)$, R_1, R_2 - независни ризици

3) конзистентност: $H(R+c) = H(R) + c$, $c > 0$

4) пропорционалност: $H(cR) = c \cdot H(R)$, $c > 0$ (пример: промена валуте)

5) немогућност преваре клијента: $H(R) \leq k$

k - макс. вредност одштете која може бити исплаћена за дати ризик R.

принцип	својство				
	1)	2)	3)	4)	5)
еквивалентности	✓	✓	✓	✓	✓
очекиване вредности	✓	✓	✗	✓	✗
дисперзије	✓	✓	✓	✗	✗
стд. одступања	✓	✗	✓	✓	✗

Пример: презентација 6, слајд 8.

Напомена: Све време мислимо о нето премији, а не бруто (ту одузимамо трошкове спровођења осигурања)

11. Величине одштета. Расподеле са лаким и тешким репом

деф. $x_F := \sup\{t \in \mathbb{R} : F(t) < 1\}$.

Ако претпоставимо $x_F = +\infty$, то значи да је десни крај носача неограничен.

деф. Нека је F ф-ја расп. случ. вел. X и нека је $F(0) = 0$ и $x_F = +\infty$.

Десни реп расподеле сл. вел. X је функција: $\overline{F}(x) = 1 - F(x) = P\{X > x\}$, $x > 0$.

Веза репа и момената:

Нека је X ненег. сл. вел. и нека је $F(0) = 0$ и $x_F = +\infty$.

Тада је: $\sum^{\infty} P\{X \geq n\} \leq EX \leq 1 + \sum^{\infty} P\{X \geq n\}$

и: $\sum^{\infty} P\{X \geq \sqrt{n}\} \leq EX^2 \leq 1 + \sum^{\infty} P\{X \geq \sqrt{n}\}$

Из тога, добијамо: $EX = \int_0^{\infty} \overline{F}(x)\,dx$ и $EX^2 = \int_0^{\infty} \overline{F}(\sqrt{x})\,dx$

Закључујемо да од асимпт. понашања репа зависи да ли су моменти коначни или не.

Веза репа и услова ЦГТ:

Нека је $\{X_n\}$ низ независних (не мора ненег.) сл. вел. ткд: $EX_n = m_n < \infty$ и $DX_n = \sigma_n^2 < \infty$

Линдебергов услов (из ког следи ЦГТ) каже: $(\forall \varepsilon > 0)$ $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^{n} \int_{|x - m_j| \geq \varepsilon B_n} |x - m_j|^2\, dF_j(x) = 0.$ $\left(B_n^2 = \sum^{n} \sigma_j^2\right)$

Дакле, гледамо само шта се дешава на репу: $(-\infty, m_j - \varepsilon B_n] \cup [m_j + \varepsilon B_n, \infty)$.

деф. Нека је F ф-ја расп. и нека је $F(0) = 0$ и $x_F = +\infty$.

1) F има лак реп ако: $\limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(x)}{e^{-\lambda x}} < \infty$, за неко $\lambda > 0$.

2) F има тежак реп ако: $\limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(x)}{e^{-\lambda x}} = \infty$, за свако $\lambda > 0$

Дакле, еталон за поређење нам је реп експоненцијалне расподеле $\mathcal{E}(\lambda)$.

Примери: 1) $\mathcal{E}(\nu)$ има лак реп:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\nu x}}{e^{-\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{-x(\nu-\lambda)}=\begin{cases}0, & \nu>\lambda\\ 1, & \nu=\lambda\end{cases}$$

2) Паретова II типа има тежак реп:

$$F(x)=1-\left(\frac{x_0}{x_0+x}\right)^{\alpha},\ x\geqslant 0,\ x_0,\alpha>0.$$

Тада је

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{x_0}{x+x_0}\right)^{\alpha}}{e^{-\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\overset{\infty}{\frac{e^{\lambda x}}{x^{\alpha}}}\overset{x_0^{\alpha}}{\left(\frac{x_0}{\frac{x_0}{x}+1}\right)^{\alpha}}=+\infty,\ \forall\lambda>0.$$

3) $\mathcal{N}(0,1)$ има лак реп:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\Phi(x)}{e^{-\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}{e^{-\lambda x}}\overset{\downarrow}{=}\frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{e^{-\lambda x}}=\frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}}\lim_{x\to+\infty}e^{x/2(2\lambda-x)}=0,$$

можемо пронаћи $\lambda>0$ тако да је $2\lambda-x<0$, тј. $\lambda<\frac{x}{2}$, што можемо изабрати, јер $x\to+\infty$. Приметимо да смо користили Лопиталово правило да бисмо се решили интеграла.

4) Усечена нормална ($Y=|X|$) има лак реп:

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{|X|\leqslant y\}=P\{-y\leqslant X\leqslant y\}=\Phi(y)-\Phi(-y)=2\Phi(y)-1,\ y\geqslant 0.$$

Дакле, $\overline{F}_Y=2\Phi(y)$, а за ову функцију расподеле смо показали да има лак реп у претходном примеру.

Показаћемо алат за поређење тежина репова:

деф. $x_0 := \inf\{t\in\mathbb{R} : F(t)>0\}$.

деф. Нека је V ненег. сл. вел. за коју постоји EV и чија је ф-ја расподеле F.
Нека је $u\in(x_0,x_F)$ задати ниво/праг (припада носачу).

Функција средњег прекорачења датог нивоа је: $e_F(u) := \underset{\text{средње}}{E}(\underbrace{V-u}_{\text{прекорачење}}\,|\,V>u)$, $u\in(x_0,x_F)$.

Лема 1: $e_F(u)=\dfrac{1}{\overline{F}(u)}\displaystyle\int_u^{\infty}\overline{F}(t)\,dt$, $u\in(x_0,x_F)$.

Доказ:

Доказ: Користећи везу репа расподјеле са моментима $E(V)=\int_0^\infty(1-F(x))dx$ имамо да важи

$$e_F(u)=E(V-u|V>u)\overset{\downarrow}{=}\int_0^\infty(1-F_{V-u|V>u}(x))dx=\int_0^\infty\left(1-\frac{F(x+u)-F(u)}{1-F(u)}\right)dx$$

$$=\int_0^\infty\frac{1-F(u)-F(x+u)+F(u)}{1-F(u)}dx=\frac{1}{1-F(u)}\int_0^\infty(1-F(x+u))dx=\begin{Bmatrix}t=x+u\\ dt=dx\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{1}{1-F(u)}\int_u^\infty(1-F(t))dt$$

Пример: $V \in \mathcal{E}(\nu)$: $P\{V-u \leq x \mid V>u\} = \dfrac{1-e^{-(u+x)\nu} - 1 + e^{-u\nu}}{e^{-u\nu}} = 1-e^{-\nu x} \Rightarrow (V-u \mid V \geq u) \overset{D}{=} V.$ ово је очекивано (memoryless property)

$$\Rightarrow e_F(u) = E(V-u \mid V>u) = \frac{1}{\nu} = const < \infty.$$

Теорема 1: 1) Ако $e_F(u) \xrightarrow{u\to\infty} c \in [0,\infty) \Rightarrow F$ има лак реп;

2) Ако $e_F(u) \xrightarrow{u\to\infty} \infty \Rightarrow F$ има тежак реп.

Пример: Презентација 6, последња два слајда: мале одштете = лак реп

велике одштете = тежак реп − погледати 17 за α-стабилност

Напомена: На вежбама смо показали трансформације које лак реп претварају у тешки

12 Правилно променљиве ф-је и случ. величине

деф. Мерљива функција $F: (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ је правилно променљива (у бесконачности) са индексом правилне променљивости $\alpha \in \mathbb{R}$ ако:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = x^{\alpha}, \qquad \forall x > 0$$

Класу прав. пром. ф-ја означавамо са $\Pi\Pi_{\alpha}$.

деф. Специјално, за $\alpha = 0$, дефинишемо споро променљиве ф-је.

Примери: 1) x^{α} је правилно променљива $\left(\lim_{t\to\infty} \frac{t^{\alpha}x^{\alpha}}{t^{\alpha}} = x^{\alpha}\right)$

2) Ако $L \in \Pi\Pi_0$, $x^{\alpha}L(x)$ је правилно променљива (тривијално)

3) $\ln x$ је споро променљива $\left(\lim_{t\to\infty} \frac{\ln t + \ln x}{\ln t} = 1 + \lim_{t\to\infty} \frac{\ln x}{\ln t} = 1\right)$

4) $(\ln x)^{\alpha}$, $\ln(x^{\alpha})$ су споро променљиве за $\alpha > 0$ (следи из претходних)

5) $x^{\alpha}\ln x$, $(x\ln x)^{\alpha}$ су правилно променљиве (следи из 2) и 4))

6) Ако $\lim_{x\to\infty} F(x) = c \in (0,\infty)$, F је споро променљива.

7) $\operatorname{arctg} x$ је споро променљива (по претходном)

8) $\sin x$, $2+\cos x$, $x-[x]$ нису правилно променљиве

деф. Мерљива функција $F: (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ је правилно променљива у нули ако $F(\frac{1}{x}) \in \Pi\Pi_{\alpha}$.

деф. Мерљива функција $F: (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ је правилно променљива у x_0 ако $F(x_0 - \frac{1}{x}) \in \Pi\Pi_{\alpha}$.

А можемо и у прву деф. да заменимо $t\to\infty$ са $t\downarrow 0$ / $t \uparrow x_0$.

деф. Мерљива функција $F: (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ је брзо променљива (у бесконачности) ако „$F \in \Pi\Pi_{\pm\infty}$"

Пример: 1) e^{x}, e^{-x}, $1+e^{x}$ су брзо променљиве

2) $1+e^{-x}$ је споро променљива

деф. Нека је V сс. поз. случајна величина са ф-јом расп. F.

V је правилно променљива са индексом репа $\alpha \geq 0$ ако је $\overline{F} \in \Pi\Pi_{-\alpha}$, тј.

Напомена: Ако $\overline{F} \in \Pi\Pi_{-\alpha}$, онда важи: $EV^{\beta} = \begin{cases} < +\infty, & \text{за } \beta < \alpha \\ = +\infty, & \text{за } \beta > \alpha. \end{cases}$ (за $\beta = \alpha$ не знамо ништа)

Обрат овога не важи!

13. Канонска репрезентација ПП функција

Теорема 1 (о канонској репрезентацији споро промењљиве ф-је): Нека је L позитивна мерљива ф-ја.

L је споро промењљива $\Leftrightarrow$ може се записати као: $L(x) = c_0(x) \cdot \exp\left\{ \int_{x_0}^{x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt \right\}$, за $x_0 > 0$,

где је $c_0(\cdot)$ позитивна мерљива ф-ја ткд: $\lim_{t\to\infty} c_0(t) = c_0 \in (0,\infty)$

и за $\varepsilon(\cdot)$ важи: $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$.

Последица: Ако $F \in ПП_\alpha$, $\alpha \neq 0$, важи: $F(x) \xrightarrow{x\to\infty} \begin{cases} \infty, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases}$

Последица: Ако $L \in ПП_0$, онда $\forall \delta > 0$ важи: $\frac{L(x)}{x^\delta} \xrightarrow{x\to\infty} 0$ и $x^\delta L(x) \xrightarrow{x\to\infty} +\infty$. (мала у односу на степену)

Пример:

Пример 13.1. Нека је $L(x) = \ln(x)$, тада је њена каноснка репрезентација

$$L(x) = \exp\left\{ \int_e^x \frac{dt}{t \ln t} \right\}, \qquad \left(c_0(x) = 1, \quad \varepsilon(x) = \frac{1}{x \ln x}, \quad x_0 = e \right)$$

проверавамо

јер је

$$\exp\left\{ \int_e^x \frac{dt}{t\ln t} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \ln t = u \\ \frac{dt}{t} = du \end{array} \right\} = \exp\left\{ \int_1^{\ln x} \frac{du}{u} \right\} = \exp\left\{ \ln u \Big|_1^{\ln x} \right\} = e^{\ln(\ln x)} = \ln x.$$

Пример: За $L(x) = \exp\left\{ (\ln x)^{\frac{1}{3}} \cdot \cos\left((\ln x)^{\frac{1}{3}} \right) \right\}$ важи да је $ПП_0$ и:

$\underline{\lim}_{x\to\infty} L(x) = 0$, $\overline{\lim}_{x\to\infty} L(x) = \infty$ (бесконачно осцилује)

* Посматрамо интегрална својства ПП ф-ја:

Теорема 2 (Карамата): Нека је $f: (0,\infty) \to (0,\infty)$ Лебег интегр. на свим коначним интервалима.

Нека је $f(x) = \frac{L(x)}{x^\alpha}$, где $L \in ПП_0$

1) $\alpha \le 1$: $\int_0^x f(t)\, dt \sim \frac{x f(x)}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{L(x)}{x^{\alpha-1}}$, при $x \to \infty$;

2) $\alpha > 1$: $\int_x^\infty f(t)\, dt \sim \frac{x f(x)}{\alpha - 1} = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{L(x)}{x^{\alpha-1}}$, при $x \to \infty$;

3) $\alpha = 1$: $\lim_{x\to\infty} \frac{x f(x)}{\int_0^x f(t)\,dt} = 0 \overset{(*)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x f(x)}{\int_x^\infty f(t)\,dt}$. (мора и $\int_x^\infty f(t)\,dt < \infty$)

Напомена: Део 2) је важан јер ако је f густина ненег. сл. вел. V $\Rightarrow$ овај интеграл је заправо реп

Доказ: 2)

$$\int_x^\infty f(t)dt = \int_x^\infty \frac{L(t)}{t^\alpha} dt \sim L(x) \int_x^\infty \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{L(x)}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{t^{\alpha-1}} \Big|_x^\infty = \frac{L(x)}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}}.$$

14. Својство субекспоненцијалности ПП расподела

Теорема 1 (затвореност ПП расподела у односу на конволуцију):

Нека су X, Y независне, ненегативне, ПП случ. вел. са истим индексом репа $\alpha \geq 0$.

Тада је $X+Y$ такође ПП сл. вел. са индексом α и: $P\{X+Y>x\} \overset{x\to\infty}{\sim} P\{X>x\} + P\{Y>x\}$. (оба репа доприносе збиру)

Доказ:

* Због ненегативности: $\{X>x\} \cup \{Y>x\} \subset \{X+Y>x\}$ (ако је један већи од x онда је и збир већи)

$$\overset{/oP}{\Rightarrow} P\{X+Y>x\} \geq P\{X>x\} + P\{Y>x\} - P\{X>x, Y>x\}$$
$$\overset{нез.}{=} P\{X>x\} + P\{Y>x\} - P\{X>x\}\cdot P\{Y>x\}$$
$$= (P\{X>x\} + P\{Y>x\})(1+o(1)), \quad x\to\infty \quad (*)$$

$P\{X>x\}\to 0$, $P\{Y>x\}\to 0$ ↑Л2

(јер је производ ова два занемарљиво мали у односу на њихов збир, при $x\to\infty$) x^2, $2x$

* Нека је $\delta \in (0, \frac{1}{2})$. Тада $\forall x>0$ важи: $0 < \delta x < (1-\delta)x < x$. (очигледно)

Посматрамо: $[\underbrace{\{X\leq\delta x\}}_{A} \cap \underbrace{\{Y\leq(1-\delta)x\}}_{B}] \cup [\underbrace{\{X\leq(1-\delta)x\}}_{C} \cap \underbrace{\{Y\leq\delta x\}}_{D}] \subset \{X+Y\leq x\}$ (довољан један услов да важи)

касније → $\overset{Л1}{\Rightarrow} \underbrace{\{X\leq(1-\delta)x\}}_{C} \cap \underbrace{\{Y\leq(1-\delta)x\}}_{B} \cap \underbrace{[\{X\leq\delta x\}\cup\{Y\leq\delta x\}]}_{A\cup D} \subset \{X+Y\leq x\}$

$\overset{супр. дог.}{\Rightarrow} \{X+Y>x\} \subset \{X>(1-\delta)x\} \cup \{Y>(1-\delta)x\} \cup \{X>\delta x, Y>\delta x\}$

$\overset{субад.}{\Rightarrow} P\{X+Y>x\} \leq P\{X>(1-\delta)x\} + P\{Y>(1-\delta)x\} + P\{X>\delta x, Y>\delta x\}$

Докажимо да је десна страна једнака $(P\{X>(1-\delta)x\} + P\{Y>(1-\delta)x\})(1+o(1))$, $x\to\infty$

(тј. докажимо да је и овде производ занемарљиво мали у односу на збир)

$$\frac{P\{X>(1-\delta)x\}+P\{Y>(1-\delta)x\}}{P\{X>\delta x\}\cdot P\{Y>\delta x\}} = \frac{1}{P\{Y>\delta x\}}\cdot\frac{P\{X>(1-\delta)x\}}{P\{X>\delta x\}} + \frac{1}{P\{X>\delta x\}}\cdot\frac{P\{Y>(1-\delta)x\}}{P\{Y>\delta x\}} \overset{Л3}{\sim} \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\alpha}\left[\frac{1}{P\{X>\delta x\}}+\frac{1}{P\{Y>\delta x\}}\right]$$

По Л2, ово тежи ∞, па реципрочна вредност тежи ка 0 $\Rightarrow$ јесте занемарљиво мало.

Дакле: $P\{X+Y>x\} \leq (P\{X>(1-\delta)x\} + P\{Y>(1-\delta)x\})(1+o(1))$, $x\to\infty$ $(**)$

* Овим је доказ готов, јер:

због ПП: $P\{X>(1-\delta)x\} \sim (1-\delta)^{-\alpha}\cdot P\{X>x\}$

$$1 \overset{(*)}{\leq} \varliminf_{x\to\infty} \frac{P\{X+Y>x\}}{P\{X>x\}+P\{Y>x\}} \leq \varlimsup_{x\to\infty}\frac{P\{X+Y>x\}}{P\{X>x\}+P\{Y>x\}} \overset{(**)}{\leq} \varlimsup_{x\to\infty}\frac{\boxed{P\{X>(1-\delta)x\}}+\boxed{P\{Y>(1-\delta)x\}}}{P\{X>x\}+P\{Y>x\}}$$

$$\leq \frac{(1-\delta)^{-\alpha}\cdot(\cancel{P\{X>x\}+P\{Y>x\}})}{\cancel{P\{X>x\}+P\{Y>x\}}} = (1-\delta)^{-\alpha} \xrightarrow{\delta\to 0} 1$$

↑ δ – произвољно

Напомена: X, Y не морају бити из исте расподеле (зато теорема има ширу употребљивост)

* Доказујемо помоћна тврђења која смо користили:

Лема 1: $A \subset C$, $D \subset B \Rightarrow (A \cap B) \cup (C \cap D) = C \cap B \cap (A \cup D)$.

Доказ: $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup (C \cap D)) \cap (B \cup (C \cap D)) = \overbrace{(A \cup C)}^{C} \cap \overbrace{(A \cup D) \cap (B \cup C)}^{A \cup D} \cap \overbrace{(B \cup D)}^{B}$

Лема 2: $P\{V > x\} \xrightarrow{x \to \infty} 0$. (тј. реп $\overline{F}$ је нерастућа ф-ја)

Доказ: очигледно

Лема 3: V - пп сл. вел. са индексом репа α $\Rightarrow \dfrac{P\{V > \delta x\}}{P\{V > (1-\delta)x\}} \xrightarrow{x \to \infty} \left(\dfrac{\delta}{1-\delta}\right)^{-\alpha}$.

Доказ: $\dfrac{P\{V > \delta x\}}{P\{V > (1-\delta)x\}} = \dfrac{P\{V > \delta x\}}{P\{V > x\}} \cdot \dfrac{P\{V > x\}}{P\{V > (1-\delta)x\}} \overset{\text{пп}}{=} \delta^{-\alpha} \cdot \dfrac{1}{(1-\delta)^{-\alpha}} = \left(\dfrac{\delta}{1-\delta}\right)^{-\alpha}$.

* Наведимо и последице:

Последица 1: Нека је X ненег. и пп сл. вел. са индексом репа $\alpha \geq 0$.

Нека је $\{X_n\}$ низ независних копија X и: $S_n = \sum^{n} X_j$, $M_n = \max\limits_{1 \leq j \leq n} X_j$

$P\{S_n > x\} \overset{(*)}{\sim} n \cdot P\{X > x\} \overset{(**)}{\sim} P\{M_n > x\}$, при $x \to \infty$ (пп није неопходно!!!)

(репови се акумулирају, а реп збира понаша се као реп максимума)

Уз то, S_n, M_n су пп са индексом репа α.

Напомена: Својство (*) у 1), зове се **субекспоненцијалност**.

Доказ: 1) * Субексп. следи директно из Т1.

* Докажимо и (**):

$$\begin{aligned}
P\{M_n > x\} &= 1 - P\{M_n \leqslant x\} = 1 - P\{X_1 \leqslant x, X_2 \leqslant x, ..., X_n \leqslant x\} \\
&= 1 - \prod_{j=1}^{n} P\{X_j \leqslant x\} = 1 - \Big(P\{X \leqslant x\}\Big)^n \\
&= 1 - \boxed{(1 - \overline{F}(x))^n} \\
&\overset{\text{биномна формула}}{=} 1 - \left(1 - n \cdot \overline{F}(x) + \binom{n}{2}\overline{F}^2(x) + ... + (-1)^n \overline{F}^n(x)\right) \\
&= n\overline{F}(x) - + \binom{n}{2}\overline{F}^2(x) + ... + (-1)^{n-1}\overline{F}^n(x) \\
&= n\overline{F}(x)(1 + o(1)), \ x \to +\infty.
\end{aligned}$$

$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-\overline{F}(x))^j$

десни реп опада ка нули при $x \to \infty$ (л2)

Напомена: Важи и: $P\{M_n > x\} = P\{X_1 > x\} + P\{X_1 \le x, X_2 > x\} + \dots + P\{X_1 \le x, \dots, X_{n-1} \le x, X_n > x\} \overset{\text{нез.}}{=} \overline{F}(x) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (F(x))^j$

Напомена:

1) $\frac{M_n}{S_n} \xrightarrow{P} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^x y\, dF(y)$ је споро променљива ф-ја (по x)

2) $\frac{M_n}{S_n} \xrightarrow{P} 1 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{F}$ је споро променљива ф-ја

3) $\frac{M_n}{S_n} \xrightarrow{D} V \quad \Leftrightarrow \quad \overline{F}$ је правилно променљива са индексом $-\alpha \in (0,1)$.

↑ недегенерисана

Последица 2: Нека је X ненег. и ПП сл. вел. са индексом репа $\alpha \geq 0$.
Нека су $X_1, \dots, X_n$ независне копије X и $c_1, \dots, c_n > 0$ константе.

Тада: $P\{\sum^n c_j X_j > x\} \sim \sum^n c_j^\alpha \cdot P\{X > x\}$, при $x \to \infty$.

Доказ:

Доказ. Ако је X правилно променљива случајна величина са индексом репа $\alpha \geqslant 0$ и $c > 0$, тада је cX правилно променљива са индексом репа α, јер

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{P\{cX > tx\}}{P\{cX > t\}} = \lim_{s \to +\infty} \frac{\overline{F}(sx)}{\overline{F}(s)} = x^{-\alpha},$$

где је $s = \frac{t}{c}$. Дакле, $c_j X_j$ је правилно променљива са индексом репа α, па применом прве последице имамо

$$P\left\{\sum_{j=1}^n c_j X_j > x\right\} \sim \sum_{j=1}^n P\{c_j X_j > x\} \overset{:c_j,\ \text{iid}}{=} \sum_{j=1}^n \overline{F}\left(\frac{x}{c_j}\right) \sim \sum_{j=1}^n c_j^\alpha P\{X > x\}, \ x \to +\infty,$$

јер је $P\left\{X_j > \frac{x}{c_j}\right\} = \overline{F}\left(\frac{x}{c_j}\right) \sim \overline{F}(x) c_j^\alpha, \ x \to +\infty.$

15. Субексп. расподеле. Довољан услов субексп.

деф. Нека је V сс. позитивна сл.вел. са ф-јом расп. F.

V је субекспоненцијална случајна величина ако за сваки $n \geq 2$ важи:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} = n$$

деф. Класу свих субекспоненцијалних расподела на $(0, +\infty)$ означавамо са S.

Напомена: Нека је $\{X_n\}$ низ независних копија од V и $S_n = \sum^{n} X_j$, $M_n = \max X_j$

Приметимо: $1 - F^{n*}(x) = 1 - P\{\sum^{n} X_j \leq x\} = P\{S_n > x\}$

Знамо и: $n\overline{F}(x) \sim P\{M_n > x\}$, при $x \to \infty$ (сетимо се: за ово није била неопх. ПП)

Дакле, израз из деф. се своди на: $\lim_{x \to \infty} \frac{P\{S_n > x\}}{P\{M_n > x\}} = 1$, за свако $n \in \mathbb{N}$.

Закључак: ПП $\subset S$. (јер по последици 1 из $\boxed{14}$, ПП ф-је испуњавају овај услов)

* Пошто је прекомпликовано проверавати за свако n, дајемо следећу теорему:

Теорема 1 (довољан услов субекспоненцијалност):

Нека је F нека функција расподеле, таква да $F(0) = 0$ и $x_F = \infty$. Тада:

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq 2 \quad \Rightarrow \quad F \in S.$$

Доказ: додатак 8

16. Основна својства субексп. расподела

* Некад је компликовано проверавати и онај услов. Зато, у спец. случају, може и ово:

Теорема 1 (Питманови услови):

ф-ја стопе хазарда (теорија преживљавања)

Нека је F апс. непр. ф-ја расп. са густином f и нека је $q(x) = \frac{f(x)}{\overline{F}(x)}$ ф-ја која $\xrightarrow{x\to\infty} 0$

1) $F \in S \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x e^{yq(x)} f(y)\, dy = 1.$

2) Ако је ф-ја $x \mapsto e^{xq(x)} f(x)$ интеграбилна на $[0,+\infty)$ $\quad \Rightarrow \quad F \in S.$

* **деф.** Нека је V сл. вел. са ф-јом расп. F ткд. $F(0) = 0$ и $x_F = \infty$.

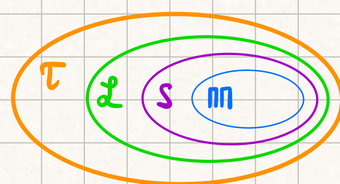
F има **дугачак реп** ако: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1, \quad \forall y > 0$ (тј. свако $y \in \mathbb{R}$)

па може смена $\Rightarrow$ исти облик

Класу расподела са дугачким репом означавамо са $\mathcal{L}$.

Напомена: Горе је могло да пише и $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1$ (реципрочна вр. има исти lim)

Теорема 2:
1) $F \in S \quad \Rightarrow \quad F \in \mathcal{L};$
2) $F \in S \quad \Rightarrow \quad F \in \mathcal{T}$ – тежак реп



Доказ: додатак 8

Теорема 3: Ако $F \in S$, онда $(\forall \varepsilon > 0)(\exists C \in (0,+\infty))(\forall n \geq 2, \forall x \geq 0)$ $\frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq C \cdot (1+\varepsilon)^n$ (процена одозго)

Теорема 4: Ако $F \in S$ и G ф-ја расп. ткд. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} = c \in (0,\infty) \quad \Rightarrow \quad G \in S.$

(F, G имају пропорционално еквивалентне репове)

Примери субексп. расподела: презентација 8, слајд 10.

22. Укупна вредност одштета у субексп. случају

Пример/мотивација: Нека је дат Крамер-Лундбергов модел, са хом. Пуас. процесом N интензитета $\lambda>0$.

Претпоставимо и да величине одштета X_j имају субексп. расподелу. Тада важи:

$$P\{S(t)>x\} \sim \lambda t \cdot P\{X_1>x\}, \quad \text{при } x\to\infty.$$

Доказ:

$$\frac{P\{S(t)>x\}}{P\{X_1>x\}} \overset{\text{ф.п.в.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P\{S(t)>x \mid N(t)=n\}}{P\{X_1>x\}} \cdot P\{N(t)=n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P\{S_n>x\}}{P\{X_1>x\}} \cdot P\{N(t)=n\}$$

$$\overset{/\lim}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{P\{S(t)>x\}}{P\{X_1>x\}} = \lim_{x\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P\{S_n>x\}}{P\{X_1>x\}} \cdot P\{N(t)=n\} \overset{\text{ТДК}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}}{n!} \lim_{x\to\infty} \frac{P\{S_n>x\}}{P\{X_1>x\}}$$

$$\overset{\substack{X_j \text{ - субексп.} \\ \text{(примена деф)}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}}{n!} \cdot n \overset{\text{деф.}}{=} EN(t) = \lambda t, \quad \text{за фикс. } t>0.$$

Зашто може ТДК?

Фиксирајмо $\varepsilon>0$. По $\boxed{16}$ Т3, $\exists c\in(0,\infty)$ $\forall n\geq 2,\ x\geq 0$: $\frac{P\{S_n>x\}}{P\{X_1>x\}} \leq c(1+\varepsilon)^n$

Приметимо: $\sum_{n=0}^{\infty} c(1+\varepsilon)^n \cdot P\{N(t)=n\} = \sum_{n=0}^{\infty} c(1+\varepsilon)^n \cdot \frac{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}}{n!} = ce^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t(1+\varepsilon))^n}{n!} = ce^{\lambda t\varepsilon} < \infty$

Дакле, по поредбеном критеријуму и горњи ред конвергира.

Теорема 1: Нека је $S=\{S(t),\ t\geq 0\}$ збирни процес деф. са $S(t)=\sum_{j=1}^{N(t)} X_j$.

При томе је N процес обнављања, а $\{X_n\}$ iid низ сл. вел. са ф-јом расп. F и важи:

(а) $F\in S$

(б) $EN(t)<\infty$ (мења сс.поз. $\{X_j\}$)

(в) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+\varepsilon)^n P\{N(t)=n\} < \infty$, за неко $\varepsilon>0$ (ово ће нам омогућити да применимо ТДК)

Тада за ф-ју расп. $G_t(x) = P\{S(t)\leq x\}$ важи:

1) $G_t \in S$

2) $\bar{G}_t(x) \sim EN(t)\cdot \bar{F}(x)$, при $x\to\infty$ (пропорционално еквивалентни репови)

Доказ:

2) аналогно примеру

1) следи из 2, по $\boxed{16}$ Т4

17. Сумирање случ. вел. и стабилне расподеле

* Наредна три питања су пакет.

* Основни задаци: 1) Какве расподеле могу бити граничне (слаба конверг. $\Leftrightarrow$ у расподели) за низ линеарно нормираних S_n-ова?

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{D} ?, \qquad \text{при } n \to \infty.$$

2) Услови за $F(\cdot)$, па да горе важи слаба конвергенција?

3) Како бирамо нормирајуће константе a_n, b_n?

* Бавимо се првим основним задатком:

деф. 1 Случ. вел. X је стабилна ако: $c_1 X_1 + c_2 X_2 \overset{D}{=} aX + b$,
где су X_1, X_2 нез. копије X; $c_1, c_2 \geq 0$; $a = a(c_1, c_2) > 0$; $b = b(c_1, c_2)$

Специјално, за $b = 0$, кажемо строго стабилна.

деф. 2 Случ. вел. X је стабилна ако: $S_n \overset{D}{=} a_n X + b_n$, тј. $\frac{S_n - b_n}{a_n} \overset{D}{=} X$.

Ове две дефиниције су еквивалентне.

Теорема 1: 1) За сваку стаб. сл. вел. X постоји $\alpha \in (0,2]$ ткд. за c_1, c_2 из деф. 1 важи: $a = (c_1^\alpha + c_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$;

2) a_n из деф. 2 дата је са: $a_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$, где је α иста вредност као изнад.

Број $\alpha \in (0,2]$ је индекс стабилности, а за X онда кажемо да је α-стабилна.

Пример: Постоје само три стабилне расподеле чију ф-ју расп. можемо експлицитно записати:

1) $\alpha = 2$: Нормална: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$

2) $\alpha = 1$: Кошијева: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sigma}{\sigma^2 + (t-m)^2} dt$

3) $\alpha = \frac{1}{2}$: Левијева: $F(x) = \int_{m}^{x} \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(t-m)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\sigma}{2(t-m)}} dt$, $x > m$

Пример: Пуасонова расподела није стабилна.

деф. Случ. вел. X је **бесконачно дељива** ако: $X \overset{D}{=} \sum_{j=1}^{n} X_{nj}$, $\forall n \in N$ $(X_{n1}, \dots, X_{nn}$ - iid$)$

Другим речима: ако је F ф-ја расп. за X, онда $\forall n \in N$ постоји F_n ткд. $F = F_n^{n*}$.

Теорема 2: X - стабилна $\Rightarrow$ X - бесконачно дељива.

Обрнуто не важи (нпр. Пуасонова јесте беск. дељ. и није стабилна)

Лема 1: Случ. проц. има <u>независне</u> и <u>стационарне</u> прираштаје $\Rightarrow$ његове једнодим. расп. су беск. дељ.

Закључак: Нека је $\{S(t), t \geq 0\}$ сложен Пуасонов процес. Тада је G_t бесконачно дељива ф-ја расп.

уопштење ЦГТ

Теорема 3 (гранично својство стабилних расподела): (овим решавамо први основни задатак)

Класа стабилних (недег.) расподела поклапа се са класом свих могућих (недег.) граничних расподела код слабе конвергенције низа линеарно нормираних S_n-ова.

18. Карактеристичне ф-је и примери густина стаб. расп.

Теорема 1 (спектрална репрезентација стабилних расподела):

Ако је X стабилна, онда је њена карак. ф-ја облика:

$$\varphi_X(t) := E(e^{itX}) = \exp\left\{-\sigma^{\alpha}\cdot|t|^{\alpha}\cdot(1-i\beta\cdot\operatorname{sgn}(t)\cdot\omega(t,\alpha)) + i\mu t\right\},$$

где је $\omega(t,\alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}, & \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi}\cdot\ln|t|, & \alpha = 1 \end{cases}$

Пишемо: $X \in S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$.

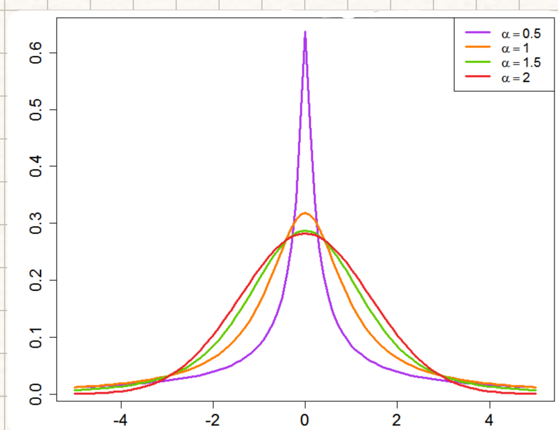
Објаснимо и шта представљају ови параметри:

- $\mu \in \mathbb{R}$ – параметар положаја
- $\sigma \geq 0$ – параметар размере ($\sigma = 0$: дегенерисана расп.)
- $\beta \in [-1,1]$ – параметар асиметрије ($\beta = 0$: симетрична)
- $\alpha \in (0,2]$ – индекс стабилности (моменти $< \infty$, асимпт. понашање репа, норм. константе)

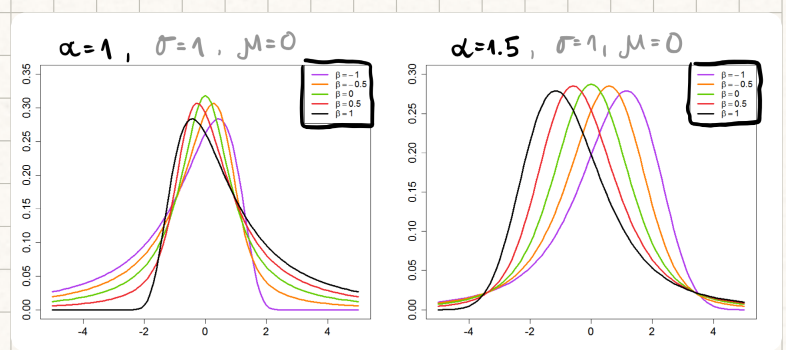
Напомена: $\beta = 1$, $\alpha \geq 1$: леви реп занемарљив у односу на десни, тј. $P\{X \leq -x\} = o(P\{X \geq x\})$, $x \to \infty$.
Погледати таблице из $\boxed{11}$ (велике одштете)

Напомена: $S\alpha S := S_\alpha(1,0,0)$.

Примери:



$\alpha \to 2 \Rightarrow$ све стабилније изгледа



Шалтамо β

19. Области привлачења стабилних расподела

* Сада се бавимо другим основним задатком:

деф. Случ. вел. X припада **области привлачења** α-стабилне расподеле S_α ако:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists a_n > 0,\ b_n \in \mathbb{R}) \quad \frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{D} S_\alpha, \quad \text{при } n \to \infty \qquad \left(S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j,\ X_j - \text{iid копије } X\right)$$

Пишемо $X \in DA(S_\alpha)$ – domain of affection

Кажемо и да за низ $\{X_n\}$ важи ЦГТ са расподелом S_α као границом.

Теорема 1 (Карактеризација области привлачења):

1) ϕ-ја расп. F припада области привлачења нормалне расподеле

акко је $\int_{-x}^{x} t^2 \, dF(t)$ споро промењива у бесконачности.

2) ϕ-ја расп. F припада области привлачења α-стабилне расп. за $\alpha \in (0,2)$ (дакле без $\mathcal{N}$)

акко: $F(-x) = \frac{c_1 + o(1)}{x^\alpha} \cdot L(x)$ и $\bar{F}(x) = \frac{c_2 + o(1)}{x^\alpha} \cdot L(x)$ (Pareto-like)

где $L \in \Pi\Pi_0$ и $c_1, c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$ (нису истовремено 0)

Другим речима: леви и десни реп од F су $\Pi\Pi_{-\alpha}$.

Последица 1: Недег. сл. вел. X са ϕ-јом расп. F припада области привлачења $\mathcal{N}$ акко:

$EX^2 < \infty$

$\vee$ $EX^2 = \infty$ и $\overbrace{P\{|X| > x\} = o\left(\frac{1}{x^2} \int_{-x}^{x} t^2 \, dF(t)\right)}^{(*)}$, при $x \to \infty$

Идеја доказа: * Ако $EX^2 < \infty \Rightarrow \int_{-x}^{x} t^2 \, dF(t) \xrightarrow{x \to \infty} EX^2 \overset{T1}{\Rightarrow} X \in DA(S_2)$.

* Спора пром. ϕ-је $\int_{-x}^{x} t^2 \, dF(t)$ је еквивалентна услову $(*)$

Последица 2: $X \in DA(S_\alpha)$, $\overset{\text{без } \mathcal{N}}{\alpha \in (0,2)} \Rightarrow E|X|^\delta \begin{cases} < \infty, & \delta < \alpha \\ = \infty, & \delta > \alpha \end{cases}$

* И на крају трећи основни задатак

Теорема 2: Нека је $X \in DA(S_\alpha)$, $\alpha \in (0,2]$ са ф-јом расп. F.

1) Ако је $EX^2 < \infty$, онда $b_n = nEX = ES_n$, $a_n = \sqrt{nDX} = \sqrt{DS_n}$ (дакле ово је ЦГТ)

2) Ако је $\underbrace{EX^2 = \infty,\ \alpha = 2}$ или $\underbrace{\alpha < 2,}$ онда:

$$b_n = \begin{cases} nEX, & \alpha \in (1,2] \\ 0, & \alpha \in (0,1) \\ 0, & \alpha = 1 \text{ и } X \text{ симетрична} \end{cases}$$

$a_n = n^{\frac{1}{\alpha}} \cdot L(n)$, $L \in \Pi_0$ се бира на „одговарајући" начин (зависи од F)

20. Расподеле екстремних вредности

Радимо исто што и у претходна три питања, само уместо парцијалне суме гледамо парцијални максимум / минимум.

Зашто нас максимуми уопште занимају? Због таблица у 11 (велике одштете)

Подсетимо се: $M_n := \max\limits_{1\le j\le n} X_j$.

* Основни задаци: 1) Какве расподеле могу бити граничне (слаба конверг.) за низ линеарно нормираних M_n-ова?

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{D} ?, \quad \text{при } n\to\infty.$$

2) Услови за $F(\cdot)$, па да горе важи слаба конвергенција?

Напомена: Зашто (и сад, а и пре) уопште нормирамо? Па погледајмо шта се добије уколико то не урадимо:

$$(*)\quad P\{M_n \le x\} = P\{\bigcap^n \{X_j \le x\}\} \overset{iid}{=} \prod^n P\{X_j\le x\} = (F(x))^n \Rightarrow M_n \xrightarrow{P} x_F = \sup\{t\in\mathbb{R} \mid F(t)<1\}, \quad n\to\infty$$

користимо

Тај закључак је логичан, па нисмо добили ништа информативно.

деф. ф-је расп. H_1, H_2 су **истог типа** ако $\exists a>0, b\in\mathbb{R}$ ткд. $H_2(x) = H_1(ax+b)$.

Другим речима, за одговарајуће V_1, V_2 важи: $V_2 \overset{D}{=} \frac{V_1 - b}{a}$.

деф. Недег. сл. вел. X је **максимум стабилна / М-стабилна** ако: $M_n \overset{D}{=} a_n X + b_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ и неке $a_n>0, b_n\in\mathbb{R}$.

Напомена: $\frac{M_n - b_n}{a_n} \overset{D}{=} X \overset{(*)}{\Leftrightarrow} (F(a_n x + b_n))^n = F(x) \Leftrightarrow F^n, F$ су истог типа.

Теорема 1 (гранично својство стабилних расподела): (овим решавамо први основни задатак)

Класа М-стабилних (недег.) расподела поклапа се са класом свих могућих (недег.) граничних расподела код слабе конвергенције низа линеарно нормираних M_n-ова.

Теорема 2 (о екстремалним типовима)

Ако за свако $n \in \mathbb{N}$, постоје $a_n > 0$ и $b \in \mathbb{R}$ ткд. $P\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \le x\} \overset{(*)}{=} (F(a_n x + b_n))^n \xrightarrow{n\to\infty} G(x)$,

за свако $x \in C(G)$ (скупу тачака непрекидности нед. ф-је расп. G)

онда је G истог типа као једна од следеће три:

а) Гумбелова: $G_0(x) = e^{-e^{-x}}$ (тзв. двојна експоненцијална)

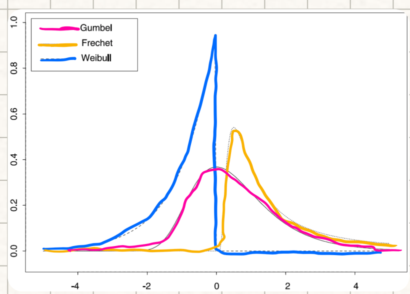
б) Фрешеова: $G_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ e^{-x^{-\alpha}}, & x > 0 \end{cases}$, $\alpha > 0$ (носач $\mathbb{R}^+$)

в) Вејбулова: $G_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^{\alpha}}, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, $\alpha > 0$ (носач $\mathbb{R}^-$)

дате су њихове α-параметризације

ово је Вејбулова екстремних вредности, а не она из таблица из $\boxed{11}$: $\overline{H}(x) = e^{-cx^{\alpha}}$
веза са „старом" Вејбуловом: $G_{2,\alpha}(x) = \overline{H}(-x)$, $x \le 0$

Заједно, ове три фамилије чине **расподеле екстремних вредности**.
Оне су једине такве расподеле које су при томе и недегенерисане.



Лема 1:

1) X - Гумбелова $\Rightarrow$ $M_n \overset{D}{=} X + \ln n$

2) X - Фрешеова $\Rightarrow$ $M_n \overset{D}{=} n^{\frac{1}{\alpha}} \cdot X$

3) X - Вејбулова $\Rightarrow$ $M_n \overset{D}{=} n^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot X$

(имамо a_n, b_n)

21. Области привлачења расп. екстремних вр.

Пример 1: $\{X_n\} \in \mathcal{E}(1) \quad \Rightarrow \quad M_n$ има Гумбелову расподелу.

Пример 2: $\{X_n\}$ има стандардну Кошијеву $\quad \Rightarrow \quad M_n$ има Фрешеову расподелу.

1

Нека је $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ низ независних једнако расподељених случајних величина са експоненцијалном $\varepsilon(1)$ расподелом. За Гумбелову расподелу знамо да је $a_n = 1$ и $b_n = \ln n$, па је

$$P\{M_n - \ln n \leqslant x\} \overset{\text{ЈМ}}{=} P\{M_n \leqslant x + \ln n\} \overset{(*)}{=} \Big(P\{X_1 \leqslant x + \ln n\}\Big)^n$$
$$\overset{\mathcal{E}(1)}{=} \left(1 - e^{-(x+\ln n)}\right)^n = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-e^{-x}}, \ x \in \mathbb{R}.$$

2

Нека је $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ низ независних једнако расподељених случајних величина са густином расподеле

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sigma}{1+x^2}} \quad x \in \mathbb{R}. \qquad \text{Коши}$$

Тада је

$$\underline{\overline{F}(x)} = \int_x^\infty \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}dt \sim \underline{\frac{1}{\pi x}}, \quad x \to +\infty.$$

Покажимо последњу релацију.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F}(x)}{(\pi x)^{-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}dt}{(\pi x)^{-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

Дакле, реп Кошијеве расподеле се понаша као степена функција, па је

$$P\left\{M_n \leqslant \frac{nx}{\pi}\right\} = \left(P\left\{X_1 \leqslant \frac{nx}{\pi}\right\}\right)^n = \left(1 - \overline{F}\left(\frac{nx}{\pi}\right)\right)^n$$
$$= \left(1 - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x} + o(1)\right)\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-x^{-1}}, \ x > 0.$$

* Бавимо се другим основним задатком:

деф. Сл. вел. X припада **области привлачења (за максимуме) расподеле екстремних вредности** за $G(\cdot)$ ако за свако $n \in \mathbb{N}$, постоје $a_n > 0$ и $b_n \in \mathbb{R}$ ткд. $P\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right\} = (F(a_n x + b_n))^n \xrightarrow{n\to\infty} G(x)$.

Пишемо: $X \in MDA(G)$

→ Прво гледамо Фрешеову расподелу, јер је најинтересантнија: има тешки реп, па може у таблицу из 11.
$(1 - G_{1,\alpha}(x) = 1 - e^{-x^{-\alpha}} \sim x^{-\alpha}$, при $x \to \infty)$

Теорема 1 (карактеризација обл. привлачења Фрешеове расподеле):

1) $F \in MDA(G_{1,\alpha})$, $\alpha > 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ а) $x_F = +\infty$
б) $\overline{F}$ је ПП у ∞, са индексом $-\alpha$.

2) $F \in MDA(G_{1,\alpha})$, $\alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{M_n}{a_n} \xrightarrow{D} G_{1,\alpha}$, при $n \to \infty$

Сугестија: можемо узети $a_n = \inf\{x \in R : \underbrace{F(x) \geq 1 - \tfrac{1}{n}}_{\text{ф-ја квантила за } F}\}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad (a_n = n^{\frac{1}{\alpha}} L(n),\ L \in \Pi_0)$

Пример: Следеће расподеле припадају области привлачења Фрешеове расподеле: (имају тешке репове)

1) Фрешеова
2) Паретова
3) Бурова
4) стабилна ткд. $\alpha \neq 2$
5) лог-гама

$\Bigg\}$ $\overline{F}(x) \sim K \cdot x^{-\alpha}$, тј. $a_n = (Kn)^{\frac{1}{\alpha}}$ (имају исто асимпт. понашање репа)

→ Сада гледамо Вејбулову:

Теорема 2 (карактеризација обл. привлачења Вејбулове расподеле):

1) $F \in MDA(G_{2,\alpha})$, $\alpha > 0$ $\Leftrightarrow$ а) $x_F < +\infty$
б) $\bar{F}$ је ПП у тачки x_F, са индексом $-\alpha$.

2) $F \in MDA(G_{1,\alpha})$, $\alpha > 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{M_n - x_F}{a_n} \xrightarrow{D} G_{2,\alpha}$, при $n \to \infty$

Сугестија: можемо узети $a_n = x_F - \inf\{x \in R : F(x) \geqslant 1 - \frac{1}{n}\}$, $n \in N$

Пример: Следеће расподеле припадају области привлачења Вејбулове расподеле: (имају тешке репове)

1) Вејбулова
2) униформна на $[0, c]$
3) бета

→ Коначно, гледамо Гумбелову: она има лак $\left(1 - G_0(x) = 1 - e^{-e^{-x}} \sim e^{-x}, \text{ при } x \to \infty\right)$

1) Гумбелова
2) експоненцијална
3) нормална
4) Вејбулова (обе)
5) лог-нормална

23. Вероватноћа разарања. Услов чистог профита

* До краја курса бавимо се процесом ризика $\{K(t),\ t\geq 0\}$.[1]

Подсетимо се: $K(t) = \underbrace{u}_{K(0)\to\infty} + \underbrace{\Pi(t)}_{c\cdot t,\ t\geq 0 \text{ Крамер-Лунд.}} - \underbrace{S(t)}_{\text{овим смо се бавили}}$.

деф. Разарање је догађај: РАЗАРАЊЕ $:= \{K(t)<0,\ \text{за неко } t>0\}$.

Напомена: У реалности, $K(t)$ никад не дође до 0, већ постоје границе које, кад се пређу, значе банкрот.

деф. Тренутак разарања је (проширена) случ. вел: $\tau := \inf\{t>0:\ K(t)<0\}$

РАЗ $=\emptyset \Rightarrow \inf=\infty$

деф. Вероватноћа разарања је: $\Psi(u) := P\{\text{РАЗАРАЊЕ} \mid \overbrace{K(0)=u}^{\text{хоћемо да буде ф-ја од } u}\} = P\{\overbrace{\tau<\infty}^{\text{коначан}}\}$, $u>0$

деф. Вероватноћа преживљавања: $\varphi(u) := 1-\Psi(u)$, $u>0$.

Примедба: $\text{РАЗАРАЊЕ} \overset{\text{деф.}}{=} \{\inf_{t>0} K(t)<0\} \overset{(*)}{=} \{\inf_{n\in N} K(T_n)<0\} \overset{\text{општи модел}}{=} \{\inf_{n\in N}(u+\Pi(T_n)-S(T_n))<0\}$

$\overset{\text{К-Л}}{=} \{\inf_{n\in N}(u+c\cdot T_n-\sum^n X_j)<0\} \overset{T_n=\sum^n y_j}{=} \{\inf_{n\in N}(u+\sum^n(cy_j-X_j))<0\}$

$\overset{\inf(t)=-\sup(-t)}{=} \{\sup_{n\in N}\sum^n(X_j-cy_j)>u\}$

Закључак: $\text{РАЗАРАЊЕ} = \{\sup_{n\in N}\sum_{j=1}^n(X_j-cy_j)>u\}$

деф. $Z_j := X_j - c\cdot y_j$ (iid) (величина j-те одштете умањена за приход од премија који је прикупљен од претх. одштете)

$V_n := \sum_{j=1}^n Z_j$, за свако $n\in N$

Другим речима: $\Psi(u) = P\{\sup_{n\in N} V_n > u\}$

(*) - до промена капитала долази само у T_n-овима,
тј. само то су нам „критични" тренуци

* Под претпоставком $EX_1, EY_1 < \infty$ $\Rightarrow$ за $\{Z_n\}$ важи јаки закон великих бројева, тј:

$$\frac{V_n}{n} \xrightarrow{cc} EZ_1, \quad \text{при } n \to \infty$$

Одавде видимо: $V_n \xrightarrow{cc} \begin{cases} +\infty, & \text{ако } EZ_1 > 0 \\ -\infty, & \text{ако } EZ_1 < 0 \end{cases}$

Нама је критично кад $V_n \xrightarrow{cc} \infty$, па доносимо следећи закључак:

Лема 1 (Разарање са вероватноћом 1):

Ако $EY_1 < \frac{1}{\lambda} < \infty$ и $EX_1 = m < \infty$ и важи $EZ_1 \geq 0$,

тада је $\psi(u) = 1$, за свако $u > 0$. (разарање је неизбежно)

Доказ: $EZ_1 > 0$: видимо по претходном

$EZ_1 = 0$: закључујемо из теорије случ. лутања (не пишемо)

* деф. Процес ризика K задовољава **услов чистог профита** ако $EZ_1 < 0$. (тј. $V_n \xrightarrow{cc} -\infty$)

Пример: Дат је Крамер-Лундбергов модел.

Нека је ф-ја $\Pi(\cdot)$ одређена по **принципу очекив. вр.** или **принципу дисперзије**,

онда $\Pi(t) = (1+\rho)\, ES(t) = \boxed{(1+\rho)\frac{EX_1}{EY_1}} \cdot t$ $\Rightarrow$ брзина акумулације капитала је $c = (1+\rho)\frac{EX_1}{EY_1}$

Специјално, $EZ_1 = -\rho EX_1 < 0$, тј. важи услов чистог профита.

пс: Ако је ф-ја $\Pi(\cdot)$ одређена по **принципу еквиваленције**:

$\Pi(t) = \underbrace{\frac{EX_1}{EY_1}}_{=c} \cdot t$ $\Rightarrow$ $EZ_1 = EX_1 - c \cdot EY_1 = 0$ $\Rightarrow$ разарање са вероватноћом 1.

Дакле, ево још један показатељ зашто се овај принцип не користи.

24. Услов малих одштета. Лундбергов коеф.

деф. Чланови iid низа $\{X_n\}$ испуњавају услов малих одштета ако ф-ја генератриса момената $M_{X_1}(s) := E(e^{sX_1})$ постоји у некој отвореној околини нуле $(-s_0 < s < s_0)$

Теорема 1: Ако X_1 испуњава услов малих одштета $\Rightarrow$ она има лак реп.

Доказ: Знамо да M_{X_1} постоји на $(-s_0, s_0)$

То значи да за $\forall s \in (0, s_0)$, $\forall x > 0$: $P\{X_1 > x\} \overset{e^x \text{ je монотона}}{=} P\{e^{sX_1} > e^{sx}\} \overset{\text{Марковљева неједнакост}}{\leq} \frac{Ee^{sX_1}}{e^{sx}} = \frac{M_{X_1}(s)}{e^{sx}} = e^{-sx} \cdot M_{X_1}(s)$

$$\overset{/\overline{\lim}}{\Rightarrow} \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{P\{X_1 > x\}}{e^{-sx}} \leq M_{X_1}(s) < \infty, \quad \text{за} \quad s \in (0, s_0).$$

деф. Дат је модел неживотног осиг. где је бројачки процес произвољан процес обнављања и процес ризика испуњава услов чистог профита.

Затим нека M_{Z_1} постоји у некој отв. околини нуле. (*)

Ако постоји јединствено позитивно решење A за једначину (по s): $M_{Z_1}(s) = 1$, то решење A је Лундбергов коефицијент.

Напомена: Чак иако важи услов малих одштета, не мора да значи да A постоји.

Напомена (*): M_{Z_1} постоји ако постоје M_{X_1}, M_{cY_1} и важи: $M_{Z_1}(s) = M_{X_1}(s) \cdot M_{cY_1}(-s)$.

25. Крамер - Лундбергова оцена

Теорема 1 (Крамер-Лундбергова оцена за мале одштете / Лундбергова нej. / Основна теорема актуарске математике):

(исто) Дат је модел неживотног осиг. где је бројачки процес произвољан процес обнављања и процес ризика испуњава $\underbrace{\text{услов чистог профита}}$.

Претпоставимо да Лундбергов коеф. A постоји. Тада важи:

$$\psi(u) \leq e^{-Au}, \quad \forall u > 0$$

(најинформативнија оцена за вероватноћу разарања)

Доказ: додатак 11

Коментари:
1) Вероватноћа разарања је веома мала ако је почетни капитал веома велики.
2) Што је A мање, портфолио је ризичнији.

Теорема 2 (Крамерова граница за мале одштете):

Дат је Крамер-Лундбергов модел у ком процес ризика испуњава $\underbrace{\text{услов чистог профита}}$ $\left(\rho = c \cdot \frac{EY_1}{EX_1} - 1 > 0\right)$

Претпоставимо: да је ф-ја расп. F за X_1 апс. непр.
да M_{X_1} постоји у околини $(-s_0, s_0)$
да A постоји и припада $(0, s_0)$.

Тада постоји Крамерова константа C ткд: $\lim\limits_{u \to \infty} e^{Au} \cdot \psi(u) = C$.

Коментар: Вредност C зависи од:
- A
- ρ (заштитни додатак)
- EX_1 и других својстава X_1 (одређених са F)

26. Вероватноћа разарања у случају великих одштета

користи се за доказ 25 Т2

* **Лема 1:** Дат је Крамер-Лундбергов модел у ком процес ризика испуњава услов чистог профита.

Нека је $EX_1 < \infty$ и ф-ја расп. F за X_1 је апс. непр. Тада важи:

врв. преживљ.
$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{1}{(1+\rho)\,EX_1}\cdot\int_0^u \overline{F}(t)\cdot\varphi(u-t)\,dt,$$
$$= \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho}\cdot\int_0^u \varphi(u-t)\,dF_I(t),$$
$\left(\varphi(0) = \frac{\rho}{1+\rho} = 1 - \frac{EX_1}{cEY_1}\right.$ (лако се изводи) $\left.\right)$

где је $F_I(x) = \frac{1}{EX_1}\cdot\int_0^x \overline{F}(t)\,dt$ $(x>0)$ тзв. интегрисани реп расподеле.

Напомена: F_I поседује својства ф-је расподеле $\left(\lim_{x\to\infty} F_I(x) = 1\right)$

* **Лема 2:** Нека важе исти услови из Л1 и нека је $\{X_{I,n}\}$ iid низ сл.вел. са ф-јом расп. F_I. Тада:

$$\varphi(u) = \frac{\rho}{1+\rho}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\rho)^n}\cdot P\left\{\sum_{j=1}^{n} X_{I,j} \le u\right\}\right)$$
$$= \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+\rho)^n}\,F_I^{n*}(u), \qquad u>0$$

Последица: $\psi(u) = \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\rho)^n}\,\overline{F_I^{n*}}(u).$

Напомена: Ако неко $M \sim \mathcal{G}(p)$ $\Rightarrow$ $P\{M=n\} = p\cdot q^n$ $(q=1-p)$.
Ако је $\{X_j\}$ iid низ и M и $\{X_j\}$ су нез. $\Rightarrow$ $S_M = \sum^{M} X_j$ има сложену геом. расп.

У леми: $X_{I,n}$ је X_j; $\frac{1}{1+\rho}$ је q $\Rightarrow$ φ је ф-ја расп. сложене геом. суме.

* Теорема 1 (Крамер-Лундбергова теорема за велике одштете):

Дат је Крамер-Лундбергов модел у ком процес ризика испуњава услов чистог профита.

Тада су следећи услови еквивалентни:

Л2

(а) $F_I \in S$

(б) $f \in S$

(в) $\lim\limits_{u \to \infty} \dfrac{\Psi(u)}{1 - F_I(u)} = \dfrac{1}{\rho}$

(кључна разлика у односу на мале одштете: овде опада степено, а тамо експоненцијално)

Напомена: Ако је F од X_1:
- Паретова
- Бурова
- Вејбулова ($\tau \in (0,1)$)
- лог-нормална / лог-гама
- Бенктандерова типа I и II

(из таблица за велику одштету)

онда: 1) $F \in S$

2) $F_I \in S$

Примери: презентација 11