Диференцијалне једначине Б

Јован Самарџић, 13/2019

Професорка: Марија Микић

■ - дефиниције

■ - ознаке

■ - теореме

■ - докази

■ - примери

Година курса: 2022/23

Молим да ми све грешке пријавите преко мејла или друштвених мрежа.

0. Основни појмови, дефиниције и теореме

деф. Нека је $D \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ отворен скуп и $F_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$

Систем (1) :

$$\begin{aligned} F_1(x, y_1(x), \dots y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x)) &= 0 \\ &\vdots \\ F_n(x, y_1(x), \dots y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x)) &= 0 \end{aligned}$$

, где су $y_i(x)$ непознате ф-је

назива се систем обичних дј I реда. (општи облик)

деф. Нека је $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ отворен скуп и $f_i : G \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$

Систем (2) :

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ y_n'(x) &= f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{aligned}$$

, где су $y_i(x)$ непознате ф-је

назива се систем обичних дј I реда у нормалном облику

Еквивалентно, имамо векторски запис је: $y' = F(x, y)$

$(y = (y_1, \dots, y_n)$, $y' = (y_1', \dots, y_n')$, $F(x, y) = (f_1(x, y), \dots, f_n(x, y)))$

* Посматрајмо систем дј (3) који је реда m:

$$y_i^{(m_i)}(x) = f_i(x, y_1(x), y_1'(x), \dots, y_1^{(m_1-1)}(x), \quad \dots \quad , y_n(x), y_n'(x), \dots, y_n^{(m_n-1)}(x)), \qquad i = 1, \dots, n$$

где је $m = \sum^n m_i$, $f_i : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$

Сваки систем облика (3) се може свести на (2):

Користимо смене:

$$\begin{array}{llll} y_1 = z_1 & y_2 = z_{m_1+1} & & y_n = z_{m_1+\dots+m_{n-1}+1} \\ y_1' = z_2 & y_2' = z_{m_1+2} & \dots & y_n' = z_{m_1+\dots+m_{n-1}+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(m_1-1)} = z_{m_1} & y_2^{(m_2-1)} = z_{m_1+m_2} & & y_n^{(m_n-1)} = z_m \end{array}$$

Добија се:

$$\begin{array}{llll} z_1' = z_2 & z_{m_1+1}' = z_{m_1+2} & & \vdots \\ z_2' = z_3 & \vdots & \dots & \\ \vdots & & & \\ z_{m_1}' = f_1(x, z_1, z_2, \dots, z_m) & z_{m_1+m_2}' = f_2(x, z_1, z_2, \dots, z_m) & & z_m' = f_n(x, z_1, z_2, \dots, z_m) \end{array}$$

* Због претходног, бавимо се искључиво системима облика (2).
За њега дефинишемо све наредне појмове

деф. Скуп функција $\{\tilde{y}_1(x), \dots, \tilde{y}_n(x)\}$ јесте решење система (2) на интервалу (a,b) ако

постоји $\tilde{y}_i'(x)$ на (a,b) такво да $\tilde{y}_i'(x) = f_i(x, \tilde{y}_1(x), \dots, \tilde{y}_n(x))$, $i = 1, \dots, n$ за $x \in (a,b)$

деф. Геометријско место тачака $\{(x, \tilde{y}_1(x), \dots, \tilde{y}_n(x)) \mid x \in (a,b)\}$ је интегрална крива система (2) која одговара решењу $\{\tilde{y}_1(x), \dots, \tilde{y}_n(x)\}$.

Пример: Решавамо систем: $y_1'(x) = y_2(x) + 1$
$y_2'(x) = y_1(x) + 1$

Користимо метод елиминације: $y_2(x) = y_1'(x) - 1 \overset{1'}{\Rightarrow} y_2'(x) = y_1''(x)$

Убацимо то у другу: $y_1''(x) = y_1(x) + 1$
тј. $y_1''(x) - y_1(x) = 1$ – то је линеарна дј II реда, нехомогена

* деф. Кошијев проблем система (2): $\boxed{\begin{aligned} y'(x) &= F(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}}$ (4)

(наћи решење система (2) које задовољава услов $y(x_0) = y_0$)

деф. Скуп функција $y = \varphi(x, C)$, где $C = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{C} \subset \mathbb{R}^n$ је опште решење система (2) на скупу G

ако за сваку тачку $(x_0, y_0) \in G$, систем једначина $y_0 = \varphi(x_0, C)$ има јединствено реш. $C^0 = (c_1^0, \dots, c_n^0)$ тако да је функција $y = \varphi(x, C^0)$ решење Кошијевог проблема (4).

деф. Када фиксирамо C у општем решењу, добијамо партикуларно решење система (2).

деф. Сингуларна тачка и сингуларно решење система (2) дефинишу се исто као у ДЈА.
(нарушена јединственост) (у свакој тачки је наруш. јединств.)

* Веза између дј n-тог реда и система дј (2):

Посматрамо дј: $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ (5)

Нека је $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ произвољно решење дј (5).

Уведимо смену:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(t) &= \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}_2(t) &= \tilde{x}'(t) \\ &\vdots \\ \tilde{y}_n(t) &= \tilde{x}^{(n-1)}(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_2' &= \tilde{y}_3 \\ &\vdots \\ \tilde{y}_n' &= f(t, \tilde{y}_1(t), \dots, \tilde{y}_n(t)) \end{aligned}$$

Дакле, $\{\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n\}$ је решење система (6) $:= \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_n' = f(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{cases}$

Закључак: (5) $\Leftrightarrow$ (6)

Другим речима, произвољно решење дј (5) генерише решење система дј (6).
Важи и обрнуто.

* Пеанова теорема (за егзистенцију решења)

Нека је $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ отворен скуп, $F: G \to \mathbb{R}^n$ непрекидна и $(x_0, y_0) \in G$.

Тада постоји бар једно решење Кошијевог проблема (4) у некој околини тачке x_0.

* деф. $F: D \to \mathbb{R}^n$ је Липшицова на скупу D у односу на променљиву y, $F \in Lip(D; L)$, ако:

$$(\exists L > 0) \quad (\forall (x, y_1), (x, y_2)) \quad d_2(F(x, y_1), F(x, y_2)) \leq L \cdot d_2(y_1, y_2)$$

деф. F је локално Липшицова на скупу D, $F \in Lip_{loc}(D)$, ако је Липшицова на сваком компакту $K \subset D$.

Пикарова теорема (за јединственост решења)

Нека је $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ отворен скуп, $F: G \to \mathbb{R}^n$ непрекидна + $F \in Lip_{loc}(G)$ и $(x_0, y_0) \in G$.

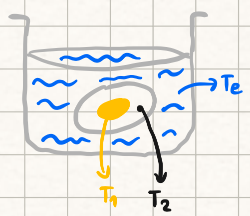
Тада постоји јединствено решење Кошијевог проблема (4) у некој околини тачке x_0.

$\boxed{3.}$ Примена система дј

1) Њутнов закон хлађења:

$$\frac{dT}{dt} = -k\cdot(T-\tau) = k\cdot(\tau-T)$$

($T(t)$ – температура тела у тренутку t, τ – температура средине)



T_e – температура средине (тј. воде)
T_1 – температура унутрашњег дела (тј. жуманцета)
T_2 – температура спољашњег дела (тј. беланцета)

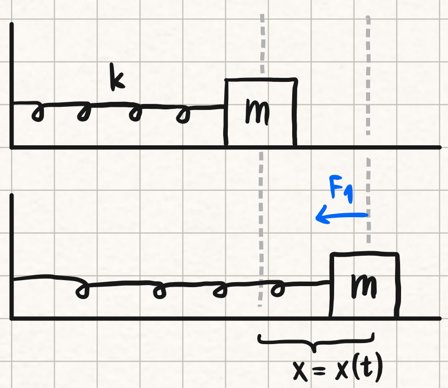
Добијамо:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} &= a\cdot(T_2-T_1) \\ \frac{dT_2}{dt} &= a\cdot(T_1-T_2) + b\cdot(T_e-T_2) \end{aligned}}$$

– спољни слој за жуманце (T_1) је беланце (T_2)
– беланце има два спољна слоја

2) Осцилаторно кретање:

1° На ДЈА:



Хуков закон: $\underline{F_1 = -k\cdot x(t)}$ (нема трења)

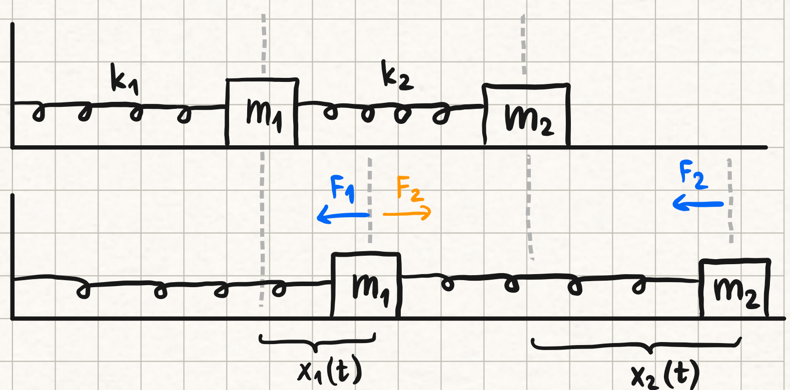
$m\cdot x''(t) = -k\cdot x(t)$
$m\cdot x''(t) + k\cdot x(t) = 0$

(смена: $y(t) = x'(t)$)

$$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -\frac{k}{m}\cdot x(t) \end{aligned}}$$

(систем)

2° Сада уопштавамо:



$$\begin{aligned} m_1\cdot x_1''(t) &= \underline{-k_1\cdot x_1(t)} + \underline{k_2\cdot(x_2(t)-x_1(t))} \\ m_2\cdot x_2''(t) &= \underline{-k_2\cdot(x_2(t)-x_1(t))} \end{aligned}$$

Хоћемо нормалан облик: смене $x_3 = x_1'$, $x_4 = x_2'$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1' &= x_3 \\ x_3' &= -\frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}(x_2-x_1) \\ x_2' &= x_4 \\ x_4' &= -\frac{k_2}{m_2}(x_2-x_1) \end{aligned}}$$

3) Закон о дејству маса (моделовање хемијских реакција)

Интересује нас како ће се током времена мењати концентрација реактаната и производа.

Концентрација је број честица у јединици запремине, уз два услова:

1) хомогеност – равномерно распоређене честице
2) непрекидност – велики број честица

Посматрамо реакцију: $X + Y \xrightarrow{K} Z$ (*) (X, Y - реактанти, Z - производ, K - константа брзине реакције)

Означимо зависност концентрације од времена у реакцији са: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$

- Моделирамо промене концентрација:

До смањења конц. производа у (*) не доводи ништа
До повећања доводи интеракција реактаната

$$\frac{dz}{dt} = +\left(\text{интеракција молекула } X, Y\right) - 0$$

Аналогно: $\frac{dx}{dt} = +0 - \left(\begin{matrix}\text{интеракција са } Y\\ \text{да настане } Z\end{matrix}\right)$ и $\frac{dy}{dt} = +0 - \left(\begin{matrix}\text{интеракција са } X\\ \text{да настане } Z\end{matrix}\right)$

- Концентрацију можемо посматрати и као вероватноћу налажења молекула у јединици запремине.

Такође, претпоставка је да су догађаји налажења X и Y у јединици запремине независни, па:

$$P(X \cap Y)(t) = (P(X) \cdot P(Y))(t) = x(t) \cdot y(t)$$

- До реакције долази ако се X, Y нађу у истој јединици запремине. А то је управо реализација догађаја $X \cap Y$.

Осим тога, вероватноћа зависи и од спољних фактора (температура, pH, ...), а ту информацију носи K.

Закључак:
$$\left.\begin{aligned}(1)\ & z'(t) = K \cdot x(t) \cdot y(t)\\ (2)\ & x'(t) = -K \cdot x(t) \cdot y(t)\\ (3)\ & y'(t) = -K \cdot x(t) \cdot y(t)\end{aligned}\right\}\ \text{систем са три непознате}$$

решено код Марије Костић, стр. 18

Општа хемијска једначина: $aX + bY \underset{k^-}{\overset{k^+}{\rightleftarrows}} cZ$ a, b, c - стехиометријски коефицијенти

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= ck^+ \cdot x^a(t) \cdot y^b(t) - ck^- \cdot z^c(t)\\ \frac{dx}{dt} &= ak^- \cdot z^c(t) - ak^+ \cdot x^a(t) \cdot y^b(t)\\ \frac{dy}{dt} &= bk^- \cdot z^c(t) - bk^+ \cdot x^a(t) \cdot y^b(t)\end{aligned}}$$

Линеарни системи дј

деф. Систем (1): $\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)\,y_1(x) + \dots + a_{1n}(x)\,y_n(x) + b_1(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)\,y_1(x) + \dots + a_{nn}(x)\,y_n(x) + b_n(x) \end{aligned}$, $a_{ij}, b_i : (a,b) \to R$

назива се линеарни систем дј I реда у нормалном облику.

Специјално, ако је $b_i \equiv 0$, $\forall i = 1,\dots,n$, систем је хомоген.
У супротном, систем је нехомоген.

Систем можемо записати и у векторском облику: $y'(x) = A(x)\cdot y(x) + B(x)$.

Дакле, Кошијев проблем постаје (*): $\begin{aligned} y'(x) &= A(x)\,y(x) + B(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$

Т: Ако су ф-је a_{ij}, b_j непрекидне на (a,b) и $(x_0, y_0) \in (a,b) \times R^n$
онда Кошијев проблем (*) има јединствено решење које је дефинисано на $(\tilde{a},\tilde{b}) \subseteq (a,b)$

Д: Хинт: треба доказати Lip_{loc}, па следи из Пикарове теореме

Ово треба за 9 и 10

Напомена: У 8 ћемо показати теорему о максималном интервалу егзистенције.

Она ће нам рећи да ће то решење бити дефинисано на читавом (a,b).

(Ми ћемо доказати за хомоген систем, али важи и за нехомоген)

1. Хомогени линеарни системи дј

* Посматрамо систем (2): $\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)\,y_1(x) + \dots + a_{1n}(x)\,y_n(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)\,y_1(x) + \dots + a_{nn}(x)\,y_n(x) \end{aligned}$, $a_{ij}: (a,b) \to \mathbb{R}$

Рекли смо да је то хомогени линеарни систем дј у нормалном облику.

Може се записати и у облику $Y'(x) = A(x)\cdot Y(x)$

* Желимо да опишемо скуп свих решења лин. система (2)

Уводимо линеарни диференцијални оператор $L_n(Y)(x) := Y'(x) - A(x)Y(x)$.

Тада систем (2) постаје: $L_n(Y)(x) = O_{(n\times 1)}$

T1: Ако су $Y_i(x)$, $1 \le i \le m$ решења система (2) на (a,b),

онда је и $\sum^m c_i \cdot Y_i(x)$, $\forall c_i \in \mathbb{R}$, такође решење система (2) на (a,b).

Д: Нека је $x \in (a,b)$

$$L_n\Big(\sum^m c_i \cdot Y_i(x)\Big) \underset{L_n \text{ је лин.}}{=} \sum^n c_i \cdot \underbrace{L_n(Y_i(x))}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum^m c_i Y_i(x) \text{ јесте решење система.}$$

Примећујемо да систем свакако има тривијално решење $\Rightarrow$ непразан је

Последица: Скуп решења система (2) чини векторски простор (потпростор од C^1)

* Хоћемо да одредимо базу и димензију тог в.п.

деф. Функције y_i су **линеарно независне** на (a,b) ако за сваку уређену n-торку $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ важи:

$$(\forall x \in (a,b)) \quad \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_m y_m(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0.$$

деф. Нека су ф-је y_i дефинисане на (a,b).

Вронскијан функција $y_1, \dots, y_n$ у тачки $x \in (a,b)$ је детерминанта:

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) := \begin{array}{ccc} y_1(x) & & y_n(x) \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \begin{vmatrix} y_{11}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

T2: y_i линеарно зависне на (a,b) $\Rightarrow$ $(\forall x \in (a,b)) \quad W(y_1, \dots, y_n)(x) = 0.$

Д: Пошто су лин. зависне $\Rightarrow$ $\exists \alpha_i$, $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$ тка. $\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$

тј. кад распишемо:
$$\begin{aligned} \alpha_1 y_{11}(x) + \dots + \alpha_n y_{1n}(x) &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_n y_{n1}(x) + \dots + \alpha_n y_{nn}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Како тај систем (по α_i) има нетрив. реш., детерминанта тог система је једнака 0 (по Крамеру)
А детермананта тог система је управо $W(y_1, \dots, y_n)$.

Последица: $(\exists x_0 \in (a,b)) \quad W(y_1, \dots, y_n)(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y_i$ линеарно независне на (a,b).
контрапоз.

T3: Нека су y_i решења система (2) на (a,b).
Уз то, нека су $a_{ij} \in C(a,b)$.

> Да би важило обрнуто од последице морамо додати услов $a_{ij} \in C(a,b)$

Ако су y_i линеарно независни $\Rightarrow$ $(\forall x \in (a,b)) \quad W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0.$

Д: ППС: $(\exists x_0 \in (a,b)) \quad W(y_1, \dots, y_n)(x_0) = 0$

Фиксирајмо то x_0 и посматрајмо систем по α_i: $\alpha_1 y_1(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$
Детерминанта тог система је управо $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) = 0$.

$\xRightarrow{\text{Крамер}}$ систем има нетривијално решење: $\tilde{\alpha}_1^2 + \dots + \tilde{\alpha}_n^2 \neq 0$.

$\xRightarrow{T1}$ $\tilde{y}(x) = \sum^n \tilde{\alpha}_i y_i(x)$ јесте такође решење система

> TEJP
> $a_{ij}, b_i \in C(a,b)$
> $\Downarrow$
> $\forall (x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in G$
> $\exists!$ решење Кошијевог проблема

Приметимо: $\tilde{y}(x_0) = \tilde{\alpha}_1 y_1(x_0) + \dots + \tilde{\alpha}_n y_n(x_0) = 0$
Али и тривијално решење испуњава тај услов (уместо $\tilde{\alpha}_i$ узмемо 0)

(може јер $a_{ij} \in C(a,b)$) ← TEJP
$\Rightarrow$ $\tilde{y} \equiv 0 \Rightarrow \tilde{y}(x) = 0, \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow \tilde{\alpha}_1 y_1(x) + \dots + \tilde{\alpha}_n y_n(x) = 0, \ \forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow$ $y_1, \dots, y_n$ линеарно зависне на (a,b). ↯

деф. Скуп $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ лин. независних реш. система (2) на (a,b) је **фундаментални скуп решења.**

Тада је $\Phi(x) = \begin{bmatrix} y_{11}(x) & & y_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{bmatrix}$ је **фундаментална матрица** система (2) на (a,b).

Т4 (о егзистенцији фундаменталне матрице):

Ако $a_{ij} \in C(a,b) \Rightarrow \Phi$ постоји.

Д: Фиксирајмо $x_0 \in (a,b)$.
Посматрајмо Кошијеве проблеме: $y'(x) = A(x) \cdot y(x)$
$y(x_0) = E_i \quad , \quad i = 1, \dots, n \qquad \left(E_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} , \right.$ једно i = један Кош. проб.$)$

По **ТЕЈР** $\left(a_{ij} \in C(a,b)\right)$, за свако $i = 1, \dots, n$ постоји јединствено решење Кошијевог проблема.
Означимо та решења редом са $y_i(x)$.

Приметимо: $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) = \det E = 1 \neq 0 \xRightarrow{\text{Т2 посл.}} y_1, \dots, y_n$ лин. независна решења.
$\Rightarrow \{y_1, \dots, y_n\}$ чини ФСР система (2) на (a,b). $\Rightarrow$ постоји и Φ.

T5 (о општем решењу хомогеног лин. система (2)):

Нека су $a_{ij} \in C(a,b)$.

Ако је Φ фунд. матрица система дј (2) на (a,b), онда је са $y(x) = \Phi(x) \cdot C$, $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ (**) дефинисано опште решење система дј (2).

Д: 1) Показујемо да овакво y јесте решење система (2):

$$y(x) = \Phi(x) \cdot c = \begin{bmatrix} y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 y_{11}(x) + \dots + c_n y_{1n}(x) \\ \vdots \\ c_1 y_{n1}(x) + \dots + c_n y_{nn}(x) \end{bmatrix} = c_1 \cdot y_1(x) + \dots + c_n \cdot y_n(x) \overset{T1}{\Longrightarrow} \text{јесте решење.}$$

2) Показујемо да су сва решења тог облика:

Означимо са $\tilde{y}(x) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1(x) \\ \vdots \\ \tilde{y}_n(x) \end{bmatrix}$ произвољно решење система (2) и фиксирајмо $x_0 \in (a,b)$.
Можемо да израчунамо: $y_1^0 := \tilde{y}_1(x_0)$, ..., $y_n^0 := \tilde{y}_n(x_0)$. (Δ)

Нађимо решење из фамилије (**) које задовољава услове (Δ): (тражимо коефицијенте c_i)

$$\begin{aligned} c_1 y_{11}(x_0) + \dots + c_n y_{1n}(x_0) &= y_1^0 \\ &\vdots \\ c_1 y_{n1}(x_0) + \dots + c_n y_{nn}(x_0) &= y_n^0 \end{aligned}$$

(y_i – лин. незав. јер је Φ фунд. матр.)

Детерминанта овог система је $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) \overset{T4}{\Longrightarrow} W \neq 0 \overset{\text{Крамер}}{\Longrightarrow} \exists!$ решење $\bar{c} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n) \neq 0$

Стога, постоји решење $\bar{y}(x) = \sum^{n} \bar{c}_i y_i(x)$ система (2) које је облика (**) и задовољава (Δ)

Како и $\bar{y}$ и $\tilde{y}$ испуњавају почетни услов $\overset{\text{ТЕЈР}}{\Longrightarrow}$ $\tilde{y} \equiv \bar{y}$ на (a,b)

Закључак: 1) Векторски простор од скупа решења система (2) је димензије n.

2) Сваки ФСР чини базу тог векторског простора.

2. Нехомогени линеарни системи дј

деф. Посматрамо нехомогени систем дј (4): $\boxed{y'(x) \overset{(1)}{=} A(x)\,y(x) + B(x)}$, тј. $\boxed{L_n(y)(x) = B(x)}$

ТБ (о општем решењу нехомогеног лин. система (4)):

Нека су $a_{ij} \in C(a,b)$.
Нека је y_{OH} опште решење одговарајућег хомогеног система, а y_p неко партикуларно решење нехомогеног.

Тада је опште решење нехомогеног система (4) облика: $y(x) = y_{OH}(x) + y_p(x)$.

Д: 1) $L_n(y)(x) = L_n(y_{OH}+y_p)(x) = L_n(y_{OH})(x) + L_n(y_p)(x) = 0 + B(x) = B(x) \Rightarrow y_{OH}+y_p$ јесте решење.

2) Нека је $\tilde{y}$ произвољно решење система (4) на (a,b)

$$L_n(\tilde{y}-y_p)(x) = L_n(\tilde{y})(x) - L_n(y_p)(x) = B(x) - B(x) = 0$$

$\Rightarrow \tilde{y}-y_p$ је решење хомогеног система $\Rightarrow \tilde{y} = y_{OH} + y_p$

* Други начин за решавање ових система је Лагранжов метод варијације константи.

Посматрамо: (4) $y'(x) = A(x)\,y(x) + B(x)$, $a_{ij}, b_i \in C(a,b)$
(2) $y'(x) = A(x)\,y(x)$

Претпоставимо да знамо да решимо (2): његово опште решење је $y_{OH}(x) = \Phi(x)\cdot C$, $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

Тражимо решење за (4) у облику: $y(x) = \Phi(x)\cdot C(x)$, $C(x) = \begin{bmatrix} C_1(x) \\ \vdots \\ C_n(x) \end{bmatrix}$ (варирамо константе)
Тада је: $y'(x) = \Phi'(x)C(x) + \Phi(x)\,C'(x)$.

Уврстимо то у (4): $\Phi'(x)C(x) + \Phi(x)\,C'(x) = A(x)\cdot\Phi(x)\cdot C(x) + B(x) \overset{\Phi' = A\cdot\Phi}{\Longrightarrow} \Phi(x)\cdot C'(x) = B(x)$

$\Rightarrow C'(x) = \Phi^{-1}(x)\cdot B(x)$

$\Rightarrow C(x) = \int \Phi^{-1}(x)B(x)\,dx + C$, $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

Напомена: Тада је: $y(x) = \Phi(x)\cdot\left(C + \int\Phi^{-1}(x)B(x)\,dx\right) = \underbrace{\Phi(x)\cdot C}_{y_{OH}} + \underbrace{\Phi(x)\cdot\int\Phi^{-1}(x)B(x)\,dx}_{y_p}$

4. Матрична експоненцијална функција

Сада се бавимо линеарним системима дј са константним коефицијентима.

Посматрамо (1): $y'(x) = A \cdot y(x)$, $A = [a_{ij}]$ (бројеви)

Мотивација за наставак:

* Кад смо имали $y' = a \cdot y \Rightarrow y(x) = e^{ax} \cdot c, \quad c \in \mathbb{R}$

А за $y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y(x) = 0 \Rightarrow$ решење смо тражили у облику $e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$

* Дакле, за (1): $y'(x) = A \cdot y(x) \Rightarrow y'(x) =$ „e^{Ax}" $\cdot c$, $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

Шта би било „e^{Ax}"?
Још једна мотивација: знамо да је $e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$

деф. Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$. **Експонент константне квадратне матрице** A је матрица: $e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

Осим тога, дефинишемо и: $A^0 = E_{n \times n}$

Да бисмо доказали коректност горње дефиниције, доказујемо следећа тврђења:

Т1: 1) $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$

2) $\|A \cdot \vec{u}\| \le \|A\| \cdot \|\vec{u}\|$, где $A \in M_n(\mathbb{R})$, $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ и $\|A\| := \left(\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$

3) $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$, где $B \in M_n(\mathbb{R})$

4) $\|A^n\| \le \|A\|^n$, где $n \in \mathbb{N}_0$

5) У Банаховом простору: ред апсолутно конвергира $\Rightarrow$ ред (обично) конвергира.

6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} < +\infty$, за свако $A \in M_n(\mathbb{R})$ – ред конвергентан $\Rightarrow$ деф. је добра

Д: **1)** Пресликавање $f: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$, $f([a_{ij}]) = (\overbrace{a_{11}, \dots, a_{1n}}^{n}, \overbrace{a_{21}, \dots, a_{2n}}^{n}, \dots, a_{nn})$ је очигледно бијекција.

2) $$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \dots a_{1n}} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \boxed{a_{n1} \dots a_{nn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot u = \begin{bmatrix} a_{11}u_1 + \dots + a_{1n}u_n \\ \vdots \\ a_{n1}u_1 + \dots + a_{nn}u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \circ \vec{u} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \circ \vec{u} \end{bmatrix}$$

$$\|A \cdot u\| = \sqrt{(\vec{a}_1 \circ \vec{u})^2 + \dots + (\vec{a}_n \circ \vec{u})^2} \overset{К-Ш}{\leq} \sqrt{\|\vec{a}_1\|^2 \cdot \|\vec{u}\|^2 + \dots + \|\vec{a}_n\|^2 \cdot \|\vec{u}\|^2}$$

$$= \|\vec{u}\| \cdot \sqrt{\|\vec{a}_1\|^2 + \dots + \|\vec{a}_n\|^2} = \|\vec{u}\| \cdot \|A\|$$

3) $$B = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{matrix}} & \dots & \boxed{\begin{matrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{matrix}} \end{bmatrix} = [\vec{b}_1\downarrow \dots \vec{b}_n\downarrow] \Rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot [\vec{b}_1\downarrow \dots \vec{b}_n\downarrow] = [A\vec{b}_1\downarrow \dots A\vec{b}_n\downarrow]$$

$$\|A \cdot B\| \overset{(*)}{=} \left(\sum_{j=1}^{n} \|A \cdot \vec{b}_j\|^2\right)^{1/2} \overset{2)}{\leq} \left(\sum_{j=1}^{n} \|A\|^2 \cdot \|\vec{b}_j\|^2\right)^{1/2} = \|A\| \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \|\vec{b}_j\|^2\right)^{1/2} \overset{(*)}{=} \|A\| \cdot \|B\|$$

(*) норма може и преко колона, јер $\|X\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2$ и $\|x_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 \Rightarrow \|X\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2$

4) директно из 3)

5) Посматрамо ред $\sum^{\infty} \|\vec{u}_n\|$ који конвергира. Желимо да покажемо да ће $\sum^{\infty} \vec{u}_n$ да конвергира.
А да би то важило, довољно је показати да низ парцијалних сума $\vec{S}_n = \sum^{N} \vec{u}_n$ конвергира.

А пошто у комплетном простору сваки Кошијев низ конвергира,
довољно је показати да је низ $\vec{S}_N$ Кошијев.

Фиксирамо $\varepsilon > 0$. За њега $\exists N_0$

$$\Rightarrow \|S_M - S_N\| = \left\| \sum_{n=M+1}^{N} \vec{u}_n \right\| \overset{\text{нej. } \Delta}{\leq} \sum_{n=M+1}^{N} \|\vec{u}_n\| \leq \varepsilon, \quad \text{за } \forall M, N \geq N_0$$

6) Пошто је $\mathbb{R}^{n^2}$ Банахов, а из 1) знамо $M_n \cong \mathbb{R}^{n^2} \Rightarrow M_n$ је Банахов.

Дакле, по 5), да би $\sum^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ конвергирао, довољно је показати да он апсолутно конвергира.

$$\sum^{\infty} \left\| \frac{A^n}{n!} \right\| = \sum^{\infty} \frac{\|A^n\|}{n!} \overset{4)}{\leq} \sum^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} < +\infty$$

$\|A\|$ је број, па је ово развој од $e^{\|A\|}$

деф. Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$. Матрична експоненцијална функција је $e^{xA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n A^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Напомена: И ова дефиниција је добра:

Узмимо $A \in M_n(\mathbb{R})$ и $x_0 > 0$.

Посматрамо $x \in (-x_0, x_0)$: $\sum \frac{\|Ax\|^n}{n!} \overset{4)}{\leq} \sum \frac{|x|^n \cdot \|A\|^n}{n!} \leq \sum \frac{x_0^n \cdot \|A\|^n}{n!} = e^{\|A\| \cdot x_0} < \infty$

$\overset{\text{Вајерштр. крит.}}{\Longrightarrow}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n A^n}{n!}$ апсолутно конвергира за $x \in (-x_0, x_0)$

Вајерштрасов критеријум

$\forall x \in (a,b)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|f_n(x)\| < C_n$

Ако је $\sum^{\infty} C_n$ конвергентан

$\Rightarrow$ $\sum^{\infty} f_n(x)$ је апс. конв. на (a,b)

Посматрамо својства e^A:

Т2: 1) $e^{O_{n \times n}} = E_{n \times n}$

2) $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$

3) $AB = BA \Rightarrow e^A \cdot B = B \cdot e^A$

4) $e^A = \lim_{n \to \infty} \left(E + \frac{A}{n}\right)^n$

5) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

6) $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$

Д: 1) $e^{O_{n \times n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{O_{n \times n}^n}{n!} = E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{O_{n \times n}}{n!} = E + O_{n \times n} = E$

2) Знамо да важи: $AB = BA \Rightarrow (A+B)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A^j B^{n-j}$

Сада: $e^A \cdot e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n$ (може јер су оба реда конвергентна)

При томе: $C_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{A^j}{j!} \cdot \frac{B^{n-j}}{(n-j)!} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A^j B^{n-j} = \frac{1}{n!} (A+B)^n$

Дакле: $e^A \cdot e^B = \sum_{n=0}^{\infty} C_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = e^{A+B}$

3) $e^A \cdot B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n \cdot B}{n!} \underset{\substack{AB=BA \\ n \text{ пута}}}{=} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B \cdot A^n}{n!} = B \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = B \cdot e^A$

4) $\|e^A - (E+\frac{A}{n})^n\| = \|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{A^k}{n^k}\cdot E^{n-k}\|$

$$= \|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\| = \|\sum_{k=0}^{\infty} C_{n,k}\cdot\frac{A^k}{k!}\| = (*)$$

$$\frac{n!}{(n-k)!\cdot n^k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n} \le 1$$

где $C_{n,k} = \begin{cases} 1-\frac{n!}{(n-k)!\cdot n^k}, & k\in\{0,1,\ldots,n\} \\ 1, & k\ge n+1\end{cases} \Rightarrow C_{n,k}\ge 0, \quad \forall n,k\in\mathbb{N}_0$

$$(*) \overset{\Delta}{\le} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|C_{n,k}|}{k!}\cdot\|A^k\| \overset{\substack{T1.4)\\ C_{n,k}\ge 0}}{\le} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_{n,k}}{k!}\cdot\|A\|^k \overset{\substack{\text{развијамо}\\ \downarrow}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!\cdot n^k}\cdot\frac{\|A\|^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{\|A\|^k}{n^k}\cdot \underbrace{1^{n-k}}_{\text{намештамо}} = e^{\|A\|} - \left(1+\frac{\|A\|}{n}\right)^n \xrightarrow[\text{јер су ово бројеви}]{n\to\infty} 0$$

5) $E = e^{O_{n\times n}} = e^{A-A} \overset{2)}{=} e^A\cdot e^{-A} \Rightarrow (e^A)^{-1} = e^{-A}$

6) **Користимо помоћно тврђење:** $\det(E+\varepsilon A) = 1+\varepsilon\cdot trA + o(\varepsilon), \quad \varepsilon\to 0$

$$\det e^A \overset{4)}{=} \det\left(\lim_{n\to\infty}\left(E+\frac{A}{n}\right)^n\right) \overset{\det\text{ - непр.}}{=} \lim_{n\to\infty}\det\left(E+\frac{A}{n}\right)^n \overset{\det M^n = (\det M)^n}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\det\left(E+\frac{A}{n}\right)\right)^n$$

$$\overset{\text{ПТ}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\cdot trA + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}trA + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}trA+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \overset{\substack{\text{развој}\\ \ln(1+x)}}{=} \lim_{n\to\infty} e^{trA+o(1)} = e^{trA}$$

Доказ помоћног тврђења:

Нека је $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ и $f(\varepsilon) = \det(E+\varepsilon A)$ полином по ε $\quad (f(0) = \det E = 1)$

Његов Тејлоров развој је: $f(\varepsilon) = f(0) + f'(0)\cdot\varepsilon + o(\varepsilon)$

$= 1 + \underbrace{f'(0)}_{\text{доказујемо да је ово } = trA}\cdot\varepsilon + o(\varepsilon), \quad \varepsilon\to 0$

$$E+\varepsilon A = \begin{array}{cccc} x_1(\varepsilon) & x_2(\varepsilon) & & x_n(\varepsilon) \\ \hline 1+\varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} & \cdots & \varepsilon a_{1n} \\ \varepsilon a_{21} & 1+\varepsilon a_{22} & \cdots & \varepsilon a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon a_{n1} & \varepsilon a_{n2} & \cdots & 1+\varepsilon a_{nn}\end{array} \Rightarrow f'(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n}\det[x_1(\varepsilon)\ldots x_k'(\varepsilon)\ldots x_n(\varepsilon)] = \sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} 1+\varepsilon a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & \varepsilon a_{1n} \\ \varepsilon a_{21} & & a_{2k} & \cdots & \varepsilon a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon a_{n1} & & a_{nk} & \cdots & \varepsilon a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \sum_{k=0}^{n}\begin{vmatrix} 1 & \cdots & a_{1k} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{2k} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nk} & \cdots & 1\end{vmatrix} = \sum_{k=0}^{n} a_{kk} = trA$$

T3: Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$. Тада важи: $\frac{d}{dx} e^{xA} = A \cdot e^{xA}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Д: $\frac{d}{dx} e^{xA} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n \right)' \overset{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} A^n = A \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot A^{n-1} = A \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \cdot A^m = A \cdot e^{xA}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(*) – У овом кораку диференцирали смо члан по члан.

То смо смели да урадимо, пошто су испуњена следећа три услова:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n$ конвергира – показали, Вајерштрасов критеријум

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} A^n$ равномерно конвергира на свим сегментима у $\mathbb{R}$

(То се показује аналогно као што смо показали да $\sum^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n$ равн. конв.)

3) ф-ја која представља општи члан реда јесте диференцијабилна

Кључно тврђење:

T4: Матрица e^{xA} је фундаментална матрица система $y' = A \cdot y$ $(A \in M_n(\mathbb{R}))$

Д: * По Т3 $\Rightarrow$ $(e^{xA})' = A \cdot e^{xA}$ $\Rightarrow$ задовољава систем

* Другим речима: свака колона матрице e^{xA} је једно решење система $y' = Ay$

А пошто e^{xA} има n колона $\Rightarrow$ имамо n решења

* Да би она била независна, по $\boxed{1}$ Т3. П довољно је наћи једно x_0 ткд. $\det(e^{x_0 A}) > 0$

Ако узмемо $x_0 = 1$ $\Rightarrow$ $\det(e^{x_0 A}) = \det e^{A} = e^{trA} > 0$.

5. Израчунавање експонената матрице

Напомена: Нећемо се задржавати на лин. алгебри, очекује се да знамо како се одређује Жорданова нормална форма

* **Мотивација:** Жорданова теорема каже да за сваку матрицу A постоји база у којој ће она имати облик:

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_n} \end{bmatrix} \qquad (*)$$

Другим речима, важиће: $A = T \cdot J \cdot T^{-1}$

Лако се доказује да је $A^n = T \cdot J^n \cdot T^{-1}$, па важи:

$$e^{xA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot A^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} T \cdot J^n \cdot T^{-1} = T \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot J^n \right) \cdot T^{-1} = T \cdot e^{xJ} \cdot T^{-1}$$

Дакле, $Te^{xJ}T^{-1}$ је такође фундаментална матрица система $y' = A \cdot y$.

* **Циљ:** Корак по корак, показаћемо како за матрицу облика $(*)$ да одредимо e^{xJ}

Напомена: m - димензија матрице, n - бројач (због конзистентности)

1. случај: $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix}$ - дијагонална

Знамо да је тада $J^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^n \end{bmatrix}$, па важи:

$$e^{xJ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} J^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \lambda_m^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_m x} \end{bmatrix}$$

2. случај: $J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ - само један блок и $\beta \neq 0$

Приметимо да J можемо записати у облику: $J = \alpha E + \beta B$, где $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Пошто E комутира са сваком матрицом $\xRightarrow{\boxed{4} T2.2)} e^{xJ} = e^{x(\alpha E + \beta B)} = e^{x\alpha E} \cdot e^{x\beta B}$

па се наш проблем своди на тражење ова два експонента

→ $$\underbrace{e^{x\alpha E}}\ \overset{\text{1. случ.}}{=}\ \begin{bmatrix} e^{\alpha x} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha x} \end{bmatrix} = \underbrace{e^{\alpha x}\cdot E}$$

→ Покушајмо да уочимо правилност: $(\beta B)^2 = \beta B\cdot\beta B = \beta^2\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix} = \beta^2\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix} = -\beta^2 E$

$$(\beta B)^3 = (\beta B)^2\cdot\beta B = -\beta^3 B$$

$$(\beta B)^4 = \beta^4 E$$

Дакле, индуктивно: $\begin{cases}(\beta B)^{2k} = (-1)^k\cdot\beta^{2k}\cdot E\\ (\beta B)^{2k+1} = (-1)^k\cdot\beta^{2k+1} B\end{cases}$

$$\Rightarrow\ \underbrace{e^{x\beta B}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(\beta B)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\cdot(\beta B)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}(\beta B)^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}\beta^{2k}}{(2k)!}\cdot E + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}\beta^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot B$$

$$= \cos(\beta x)\cdot E + \sin(\beta x)\cdot B = \begin{bmatrix}\cos(\beta x) & \sin(\beta x)\\ -\sin(\beta x) & \cos(\beta x)\end{bmatrix} =: \underbrace{R_{\beta x}}$$

Коначно: $e^{xJ} = \underbrace{e^{x\alpha E}}\cdot\underbrace{e^{x\beta B}} = \underbrace{e^{\alpha x}\cdot E}\cdot\underbrace{R_{\beta x}} = e^{\alpha x}\cdot\begin{bmatrix}\cos(\beta x) & \sin(\beta x)\\ -\sin(\beta x) & \cos(\beta x)\end{bmatrix}$

3. случај: $J = \begin{bmatrix}\boxed{D_2} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{D_2}\end{bmatrix}$, где је $D_2 = \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}$ – више блокова

Знамо да је $J^n = \begin{bmatrix}\boxed{D_2^n} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{D_2^n}\end{bmatrix}$

Дакле: $e^{xJ} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot J^n = \begin{bmatrix}\boxed{\sum\frac{x^n}{n!}D_2^n} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\sum\frac{x^n}{n!}D_2^n}\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}\boxed{e^{xD_2}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{e^{xD_2}}\end{bmatrix} \overset{\text{2. случ.}}{=} e^{\alpha x}\cdot\begin{bmatrix}\boxed{R_{\beta x}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{R_{\beta x}}\end{bmatrix}$$

4. случај: $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$ – кечеви изнад дијагонале $(J \in M_{m \times m})$

Слично као у 2, представљамо J у облику: $J = \lambda E + N$, где је $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$

Опет ће да важи: $e^{xJ} = e^{x\lambda E} \cdot e^{xN}$

→ Аналогно као пре: $e^{x\lambda E} = e^{\lambda x} \cdot E$

→ Примећујемо да је N нилпотентна (јер $N^m = O_{m\times m}$). Такође, за $k<m$: $N^n = \left[\begin{array}{c|c} 0 & E_{m-n} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$

$$\Rightarrow e^{xN} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot N^n \overset{\text{остали}=0}{=} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^n}{n!} \cdot N^n + 0$$

$$= E + xN + \frac{x^2}{2} \cdot N^2 + \dots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \cdot N^{m-1} = \begin{bmatrix} 1 & x & \cdots & \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \\ & 1 & x & \\ & & \ddots & x \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Дакле: $e^{xJ} = e^{\lambda x} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x & \cdots & \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \\ & 1 & x & \\ & & \ddots & x \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

5. случај: $J = \begin{bmatrix} D_2 & E_2 & & \\ & D_2 & E_2 & \\ & & \ddots & E_2 \\ & & & D_2 \end{bmatrix}$ – E_2 изнад блокова $(J \in M_{m\times m},\ m = 2k)$

Опет, разлажемо: $J = D + N$ и једноставно се показује да оне комутирају $\Rightarrow e^{xJ} = e^{xD} \cdot e^{xJ}$

→ e^{xD} је већ решено у 3. случају

→ И овде је N нилпотентна: $N^m = O_{m\times m}$, а за $n<m$ важи: $N^n = \left[\begin{array}{c|c} 0 & E_{2(m-n)} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$

Аналогно, добија се: $e^{xN} = \begin{bmatrix} E_2 & E_2 x & & E_2 \cdot \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \\ & E_2 & E_2 x & \\ & & \ddots & E_2 x \\ & & & E_2 \end{bmatrix}$

Одавде видимо и колико је e^{xJ}

ОПШТИ СЛУЧАЈ: $J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{bmatrix}$, где су J_k облика као у претходним случајевима

Примена свега претходног

6. Егзистенција и јединственост Кошијевог проблема

Посматрамо Кошијев проблем у нормалном облику (1): $y' = F(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ $F=(f_1,\dots,f_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$, $y'=(y_1',\dots,y_n')$

Такође, посматрамо интегралну једначину (2): $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t,y(t))\,dt$

Л1 (Лема о еквиваленцији):

Нека је $F: G\to R^n$ непрекидна, $G\subseteq R^{n+1}$ отворен и нека је $(x_0,y_0)\in G$.

Тада непр. диф. ф-ја $y:(a,b)\to R^n$ $(x_0\in(a,b))$ јесте решење (1) $\Leftrightarrow$ y непр. решење за (2)

деф. Непр. диф. ф-ја која задовољава $y' = F(x,y(x))$ зове се класично решење. ((1) без Кошијевог услова)
деф. Непр. ф-ја која задовољава (2) зове се јако решење.

Закључак: Ако је F непрекидна, ова два појма су еквивалентна

* деф. $F: G\to R$, $G\subseteq R^{n+1}$ отворен, $F=F(x,y)$ задовољава Липшицов услов на $\tilde{G}\subset G$ у односу на y ако:

$$(\exists L>0)\ (\forall (x,y_1),(x,y_2)\in\tilde{G})\qquad |F(x,y_1)-F(x,y_2)| \le L\cdot\sum_{i=1}^{n}|y_i^{(1)}-y_i^{(2)}|$$

* деф. $F: G\to R^n$, $G\subseteq R^{n+1}$ отворен, $F=F(x,y)$ задовољава Липшицов услов на $\tilde{G}\subset G$ у односу на y ако:

$$(\exists L>0)\ (\forall (x,y_1),(x,y_2)\in\tilde{G})\qquad d_{2,n}(F(x,y_1),F(x,y_2)) \le L\cdot d_{2,n}(y_1,y_2)$$

где је $d_{2,n}(y_1,y_2) := \|y_1-y_2\| = \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i^{(1)}-y_i^{(2)})^2\right)^{1/2}$ еуклидска метрика

У оба случаја, пишемо $F\in Lip(\tilde{G},L)$ или само $F\in Lip(\tilde{G})$.

* деф. $F: G\to R^n$, $G\subseteq R^{n+1}$ отворен, $F=F(x,y)$ задовољава локални Липшицов услов на G у односу на y ако:

$$(\forall (x_0,y_0)\in G)\ (\exists \text{ околина } U\subseteq G \text{ те тачке})\ (\exists L_U>0)\ (\forall (x,y_1),(x,y_2)\in U)\ d_{2,n}(F(x,y_1),F(x,y_2)) \le L_U\cdot d_{2,n}(y_1,y_2)$$

Пишемо $F\in Lip_{loc}(G)$.

Напомена: $F\in Lip_{loc}(G)$ и $\tilde{G}\subset G$ компакт $\Rightarrow$ $F\in Lip(\tilde{G})$ (ово смо рекли у $\boxed{0}$)

Л2: Нека je $F(x,y) = (f_1(x,y), \dots, f_n(x,y))$ и G нека област.
↳ отворен + повезан

Тада $f_i \in Lip(G)$ $\Leftrightarrow$ $F \in Lip(G)$
↳ деф.1 ↳ деф.2

Д: ($\Rightarrow$) Нека $f_i \in Lip(G, L_i)$ и означимо $L = \max\limits_{1 \le i \le n} L_i$

не зависи од i

Знамо: $|f_i(x,y_1) - f_i(x,y_2)| \le L_i \cdot \sum_{i=1}^{n} |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}| \overset{(\heartsuit)}{\le} L_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \|y_1 - y_2\| \le L \cdot n \cdot \|y_1 - y_2\|$

$\overset{/^2}{\Longrightarrow} |f_i(x,y_1) - f_i(x,y_2)|^2 \le L^2 \cdot n^2 \cdot \|y_1 - y_2\|^2$

$\overset{/\Sigma}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{n} |f_i(x,y_1) - f_i(x,y_2)|^2 \le \sum_{i=1}^{n} L^2 n^2 \|y_1 - y_2\|^2 = L^2 n^3 \|y_1 - y_2\|^2$

$\overset{/\sqrt{\ }}{\Longrightarrow} \|F(x,y_1) - F(x,y_2)\| \le \underbrace{L \cdot n^{3/2}} \cdot \|y_1 - y_2\|$

$(\heartsuit)$ $|y_i| \le \|y\| \le \sum_{i=1}^{n} |y_i|$

Дакле: $F \in Lip(G, L \cdot n^{3/2})$ (по деф. 2)

($\Leftarrow$) Нека $F \in Lip(G, L)$, тј. $(\forall (x,y_1), (x,y_2) \in \tilde{G})$ $\|F(x,y_1) - F(x,y_2)\| \le L \cdot \|y_1 - y_2\|$

$|f_i(x,y_1) - f_i(x,y_2)| \overset{(\heartsuit)}{\le} \|F(x,y_1) - F(x,y_2)\| \le L \cdot \|y_1 - y_2\| \overset{(\heartsuit)}{\le} L \cdot \sum_{i=1}^{n} |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}|$

Дакле: $\forall i = 1, \dots, n$ важи $f_i \in Lip(G, L)$ (по деф. 1)

Напомене:

1) $f \in Lip_{loc}$ $\not\Rightarrow$ $f \in Lip$ (нпр. $f(x) = x^2$)

2) $f \in Lip$ $\not\Rightarrow$ $f \in C^1$ (нпр. $f(x) = |x|$)

3) $f \in C$ $\not\Rightarrow$ $f \in Lip$ (нпр. $f(x) = \sqrt{x}$)

деф. Нека $f: X \to X$.
Тачка $x \in X$ је **фиксна тачка** тог пресликавања ако је $f(x) = x$.

деф. Нека је (X,d) метрички простор.
Пресликавање $f: X \to X$ је **контракција** ако $(\exists q \in (0,1)) \quad d(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x,y), \quad \forall x,y \in X$

T1 (Банахова теорема о фиксној тачки):

Нека је (X,d) комплетан метрички простор и $f: X \to X$ (сам у себе) контракција.

Тада f има тачно једну фиксну тачку.

T2 (Пикарова теорема):

$F(x,y)$ - непрекидна у области G и $F \in Lip_{loc}(G)$ и $(x_0, y_0) \in G$

Тада постоји јединствено решење Кошијевог проблема (1) у некој околини тачке x_0.

Д: → G област $\Rightarrow$ G отворен $\Rightarrow$ за сваку тачку постоји компакт садржан у G

тј. $\forall (x_0, y_0) \in G \quad \exists a,b > 0 \qquad \Pi = \{(x,y): \ |x-x_0| \leq a, \ \|y-y_0\| \leq b\} \subseteq G$

→ Како је F непрекидна, она ће на компакту достизати свој максимум: $\exists M = \max_{\Pi} \|F(x,y)\|$

→ Како је $F \in Lip_{loc}(G)$ и Π је компакт у G $\overset{\text{напомена}}{\Longrightarrow}$ $F \in Lip(\Pi, L_\Pi)$

тј. $(\forall (x,y_1), (x,y_2) \in \Pi) \quad \|F(x,y_1) - F(x,y_2)\| \leq L_\Pi \cdot \|y_1 - y_2\|$

* **План доказа:** Очигледно намештамо на T1 $\Rightarrow$ треба нам неки комплетан м.п. и неко пресликавање

1) Тражимо неки комплетан метрички простор и метрику $(X, \|\cdot\|_X)$

2) Као пресликавање узећемо нешто што личи на интегралну једначину (2) из Л1.

3) За њих ће важити T1 $\Rightarrow$ интегрална једначина (2) има тачно једно решење

$\overset{Л1}{\Longrightarrow}$ Кошијев проблем (1) има тачно једно решење

1) Изаберимо h тако да: $0 < h \le \min\{a, \frac{b}{M}\}$ и $h < \frac{1}{L_\Pi}$ (после ће бити јасније откуд ови услови)

Дефинишемо компакт $\Pi_1 = \{(x,y) : |x-x_0| \le h,\ \|y-y_0\| \le b\} \subset \Pi$ (јер је $h \le a$)

(како је $F \in Lip(\Pi) \Rightarrow F \in Lip(\Pi_1)$)

околина x_0

Означимо са $C(I)$ скуп свих **непрекидних векторских ф-ја** $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ на $I = [x_0-h, x_0+h]$

Уведимо и норму: $\|y\|_c = \max\limits_{x\in I} \|y(x)\|$, $y \in C(I)$

Тада је $(C(I), \|\cdot\|_c)$ комплетан нормиран простор, тј. Банахов простор.

ПАЗИТИ!!! $\|\cdot\|$ није исто што и $\|\cdot\|_c$

Ипак нећемо цео $C(I)$ да гледамо, већ $X_h = \{y \in C(I) : \|y-y_0\|_c \le b\} \subset C(I)$
Он је исто Банахов (јер је затворени подскуп Банаховог простора такође Банахов)

Дакле, гледамо Банахов простор $(X_h, \|\cdot\|_c)$

2) Дефинишемо пресликавање $A(y)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y(t))\,dt$, $x \in I$, $y \in X_h$, y_0 - из (1)

Морамо да докажемо да важи: 1) $A : X_h \to X_h$ (сам у себе)
2) A је контракција

1) Доказујемо да је кодомен од A заправо X_h, тј. $A(y) \in X_h$

(*) F непр. $\Rightarrow \int_{x_0}^{x} F(t,y(t))\,dt$ диф. $\overset{\text{збир}}{\Rightarrow}$ $y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t,y(t))\,dt$ диф. $\Rightarrow$ $y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t,y(t))\,dt$ непр.

Дакле: $A(y) \in C(I)$

x може бити и мање од x_0 па зато пишемо апсолутну

(**) $\|A(y)(x) - y_0\| = \left\| \int_{x_0}^{x} F(t,y(t))\,dt \right\| \le \left| \int_{x_0}^{x} \|F(t,y(t))\|\,dt \right| \overset{\|F\| \le M}{\le} M \cdot \left| \int_{x_0}^{x} dt \right|$

$= M \cdot |x - x_0| \overset{x\in I}{\le} M \cdot h \overset{h \le \frac{b}{M}}{\le} b$, $\forall x \in I$

Дакле: $\|A(y)(x) - y_0\|_c \le b$

Из (*), (**) $\Rightarrow$ $A(y) \in X_h$

2) Нека су $(x, y_1), (x, y_2) \in \Pi_1 \subset \Pi$

$\|A(y_1)(x) - A(y_2)(x)\| = \left\| \int_{x_0}^{x} F(t,y_1(t))\,dt - \int_{x_0}^{x} F(t,y_2(t))\,dt \right\| \overset{\text{исто као пре}}{\le} \left| \int_{x_0}^{x} \|F(t,y_1(t)) - F(t,y_2(t))\|\,dt \right|$

$\overset{F\in Lip(\Pi_1)}{\le} L_\Pi \cdot \left| \int_{x_0}^{x} \|y_1(t) - y_2(t)\|\,dt \right| \overset{\text{деф. } \|\cdot\|_c}{\le} L_\Pi \cdot \|y_1 - y_2\|_c \cdot \left| \int_{x_0}^{x} dt \right| = L_\Pi \cdot \|y_1 - y_2\| \cdot \underbrace{|x - x_0|}_{h}$

$\Rightarrow \|A(y_1)(x) - A(y_2)(x)\|_c = \max\limits_{x\in I} \|A(y_1)(x) - A(y_2)(x)\| \le \underbrace{L_\Pi \cdot h}_{q} \cdot \|y_1 - y_2\|_c$

знамо $L_\Pi \cdot h < 1$

3) Дакле, по Т1, постоји јединствено y^* т.к.д. $A(y^*) = y^*$, тј. $y^* = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y^*(t))\,dt$

$\Rightarrow$ $y^* \in C(I)$ је **непрекидно** решење интегралне једначине (2)

доказали у (*) $\qquad I = (x_0 - h, x_0 + h)$

По Л1, закључујемо да је y^* **непрекидно диференцијабилна ф-ја** која је деф. на **околини од x_0**

и y^* је решење Кошијевог проблема (1), а уз то је јединствено.

Напомена: У **1)** смо дошли до Банаховог, тј. комплетног нормираног простора

Да смо хтели да будемо скроз формални, гледали бисмо комплетни метрички простор (X_h, d)

где је d метрика индукована нормом $\|\cdot\|_c$, тј. $d(y_1, y_2) := \|y_1 - y_2\|$

7. Гронвалова неједнакост

Л1 (Гронвалова неједнакост):

$\alpha, a, b, h \geq 0$ и $u: [\alpha, \alpha+h] \to [0, \infty)$ непрекидна.

Ако је $u(t) \leq \int_\alpha^t (a + b\cdot u(s))\,ds$, $t \in [\alpha, \alpha+h]$ $\Rightarrow$ $u(t) \leq a\cdot h \cdot e^{bh}$, $t \in [\alpha, \alpha+h]$

Л2 (Белман):

$a, b, k \geq 0$ и $u, v: [a,b] \to [0, \infty)$ непрекидне.

Ако је (1) $u(t) \leq k + \int_a^t v(s)\cdot u(s)\,ds$, $t \in [a,b]$ $\Rightarrow$ (2) $u(t) \leq k \cdot e^{\int_a^t v(s)\,ds}$, $t \in [a,b]$

Д: Посматрамо само случај $k>0$ (ако је $k=0$, онда се своди на претходно)

Означимо: $V(t) = k + \int_a^t u(s)\cdot v(s)\,ds$ – пошто су u, v непр. $\Rightarrow$ V је диференцијабилна на $[a,b]$

Приметимо и следеће:
- $V(t) \geq k > 0$ (јер су u, v ненегативне)
- $u(t) \leq V(t)$ (види се из (1))
- $V(a) = k$

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(s)\,ds = f(x)$

Сада: $V'(t) = u(t)v(t) \leq V(t)\cdot v(t)$ $\quad / : V(t)$ (можемо да делимо јер је >0)

Добијамо: $\frac{V'(t)}{V(t)} \leq v(t)$

Ово подсећа на дј која раздваја променљиве, па ћемо користити тај поступак

$\Rightarrow (\ln V(t))' \leq v(t) \quad / \int_a^t$

$\Rightarrow \ln V(t) - \ln V(a) = \ln \frac{V(t)}{V(a)} = \ln \frac{V(t)}{k} \leq \int_a^t v(s)\,ds$

$\Rightarrow \frac{V(t)}{k} \leq e^{\int_a^t v(s)\,ds}$

$\Rightarrow V(t) \leq k \cdot e^{\int_a^t v(s)\,ds}$

Коначно: $u(t) \leq V(t) \leq k\cdot e^{\int_a^t v(s)\,ds}$, $\forall t \in [a,b]$

* Сада склањамо услов да је u ненегативна, а ни k не мора бити ненегативно

ЛЗ (Уопштење Белмана):

$a, b \geq 0$, $k \in \mathbb{R}$, $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидне и $v(t) \geq 0$ $(\forall t \in [a,b])$

Опет важи: (1) $\Rightarrow$ (2).

Д: Означићемо: $M(t) = \int_a^t u(s) \cdot v(s)\, ds$ и $V(t) = \int_a^t v(s)\, ds$ (M је диф, исто као пре)

Приметимо: - $u(t) \leq k + M(t)$
- $M(a) = 0$ и $V(a) = 0$

Сада: $M'(t) = u(t)v(t) \leq v(t) \cdot (k + M(t))$

Добијамо: $M'(t) - v(t) \cdot M(t) \leq k \cdot v(t)$
Ово подсећа на нехомогену линеарну дј I реда.
Зато ћемо обе стране помножити са интеграционим фактором: $e^{\int_a^t (-v(s))ds}$, тј. $e^{-V(t)}$ можемо да множимо јер је позитивно

$$\Rightarrow e^{-V(t)} \cdot M'(t) + e^{-V(t)}(-v(t))\, M(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{-V(t)} \cdot M(t)\right) \leq k \cdot v(t) \cdot e^{-V(t)} \quad / \int_a^t$$

$$\Rightarrow e^{-V(t)} M(t) - \cancel{e^{-V(a)} M(a)}^{\,0} \leq k \cdot \int_a^t v(s)\, e^{-V(s)} ds$$

$$\Rightarrow e^{-V(t)} M(t) \leq k \cdot \left(-e^{-V(t)} + e^{-V(a)}\right) = k \cdot \left(1 - e^{-V(t)}\right) \quad / \cdot e^{V(t)}$$

$$\Rightarrow M(t) \leq k e^{V(t)} - k$$

$$\Rightarrow M(t) + k \leq k \cdot e^{V(t)}$$

Коначно: $u(t) \leq k + M(t) \leq k \cdot e^{V(t)} = k \cdot e^{\int_a^t v(s)ds}$, $\forall t \in [a,b]$

Напомена: Ове теореме су битне за доказе у следећем питању.

Напомена: У претходне две теореме, задали смо услове $a \geq 0$, $b \geq 0$ и нигде их нисмо користили.

Њих можемо избацити, али ту стоје јер је порекло ових теорема из физике, а у том контексту те претпоставке имају смисла.

8. Теорема о непр. зависности решења
Теорема о максималном интервалу

Посматрамо два Кошијева проблема: (1) $\begin{cases} y' = F(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_1 \end{cases}$ и (2) $\begin{cases} y' = F(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_2 \end{cases}$

Т1 (Теорема о непрекидној зависности решења од почетних услова):

Нека је $F: G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ отворен, F је непрекидна и локално Липшицова на G.

Тада: $(\forall (x_0, y_1) \in G)$ $(\exists \beta, k > 0)$ $(\exists$ околина $(a,b) \ni x_0)$ ткд. за $(\forall (x_0, y_2) \in G,\ \|y_1 - y_2\| < \beta)$ важи

да одговарајућа решења за (1) и (2) испуњавају: $\|y_1(t) - y_2(t)\| \leq k \cdot \|y_1 - y_2\|,\ \forall t \in (a,b)$

$y_1(t),\ y_2(t)$

Д: По Пикару: $\exists!$ решење $y_1(x)$ за (1) које је деф. на $(c_1, c_2) \ni x_0$
$\exists!$ решење $y_2(x)$ за (2) које је деф. на $(c_3, c_4) \ni x_0$
} на неком подскупу од $(c_1,c_2) \cap (c_3,c_4)$ биће дефинисана оба решења (означимо тај подскуп са (a_1, b_1))

По леми о екв. та решења су облика: $y_{1,2}(x) = y_{1,2} + \int_{x_0}^{x} F(t, y_{1,2}(t))\, dt$, $t \in (a_1, b_1)$

Претпоставимо да је $x \geq x_0$ (случај $x < x_0$ ради се аналогно)

Дефинишемо $\tilde{y}(x) := y_1(x) - y_2(x)$, $x \in (a_1, b_1)$

Пошто је G отворен, постоји компакт $K \subset G$
Пошто је $F \in Lip_{loc}(G)$ и K компакт $\Rightarrow$ $F \in Lip(K, L)$

$K_{y_1} = [\tilde{a}, \tilde{b}] \times B(y_1, 2\beta) \subset G$
$K_{y_2} = [\bar{a}, \bar{b}] \times B(y_2, \beta) \subset G$
} $\Rightarrow$ $F \in Lip(K, L)$ $K = K_{y_1} \cap K_{y_2}$, $L = \max\{L_{y_1}, L_{y_2}\}$

Интервал (a,b) из теореме биће управо пресек $(a_1, b_1) \cap (\tilde{a}, \tilde{b}) \cap (\bar{a}, \bar{b})$

* Сада: $\forall x \in (a,b)$, $x \geq x_0$

$$\|\tilde{y}(x)\| = \|y_1(x) - y_2(x)\| = \left\| y_1 + \int_{x_0}^{x} F(t, y_1(t))\, dt - y_2 - \int_{x_0}^{x} F(t, y_2(t))\, dt \right\| \overset{\Delta + \text{онн}}{\leq} \|y_1 - y_2\| + \int_{x_0}^{x} \|F(t, y_1(t)) - F(t, y_2(t))\|\, dt$$

$$\leq \|y_1 - y_2\| + L \cdot \int_{x_0}^{x} \|y_1(t) - y_2(t)\|\, dt = \|y_1 - y_2\| + L \cdot \int_{x_0}^{x} \|\tilde{y}(t)\|\, dt$$

$$\Rightarrow \|\tilde{y}(x)\| = \|y_1(x) - y_2(x)\| \overset{\text{7.Л2}}{\leq} \|y_1 - y_2\| \cdot e^{L \cdot \int_{x_0}^{x} dt} = \|y_1 - y_2\| \cdot e^{L(x - x_0)} \leq \|y_1 - y_2\| \cdot \underbrace{e^{L(b - x_0)}}_{k}, \quad \forall x \in [x_0, b]$$

T2 (Теорема о глаткости решења):

$F \in C^{(k)}(G; R^n) \Rightarrow$ решење $\tilde{y}:(a,b)\to R^n$ Кошијевог проблема $\begin{cases} y'(x) = F(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ је из $C^{(k+1)}((a,b), R^n)$.

* **T3:** Нека је $G = I \times D \subset R^{n+1}$ отворен, $F: G \to R^{n+1}$ непрекидна и локално Липшицова на G.

Нека је $y(x)$ решење система дј $y'(x) = F(x, y(x))$ дефинисано на максималном интервалу J, $\sup J < \sup I$.

Ако је $K \subset D$ компакт, онда постоји $x_1 \in J$ ткд. $y(x_1) \notin K$.

Посматрамо систем линеарних дј. (1) $y'(x) = A(x) \cdot y(x)$.

По Т пре $\boxed{1}$: ако су $a_{ij} \in C(a,b) \Rightarrow \exists!$ решење Кош. пр. $\begin{cases} y'(x) = A(x)\, y(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, које је деф. на неком $(\tilde{a}, \tilde{b}) \subset (a,b)$

Последица Т3 је да ако је решење $y(x)$ "садржано" у неком компакту $K \subset D$, онда се оно може продужити на I.

Дакле, показали смо да ће $\exists!$ реш. у некој околини од x_0.
Сада ћемо показати да ће свако решење оваквог система заправо бити деф. на читавом (a,b)

T4 (Теорема о максималном интервалу постојања):

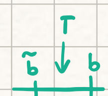
Нека су $a_{ij} \in C(a,b)$. Тада су сва решења система дј (1) дефинисана на целом (a,b).

Д: ппс. $\exists$ решење $\tilde{y}(x)$ деф. на макс. инт. $(\tilde{a}, \tilde{b})$, где је $(\tilde{a}, \tilde{b}) \subset (a,b)$ и (БУО) $\tilde{b} \neq b$.

Нека је $x_0 \in (\tilde{a}, \tilde{b})$ и $x \in [x_0, \tilde{b})$.
По леми о екв. $\exists!$ решење које ће задовољавати Кошијев услов и важи: $\tilde{y}(x) = \tilde{y}(x_0) + \int_{x_0}^{x} A(t) \cdot \tilde{y}(t)\, dt$

$\overset{\Delta + \text{ouн}}{\Longrightarrow} \quad \forall x \in [x_0, \tilde{b}) \quad \|\tilde{y}(x)\| \le \|\tilde{y}_0\| + \int_{x_0}^{x} \|A(t)\| \cdot \|\tilde{y}(t)\|\, dt$

$\overset{\boxed{7}\text{ Л2}}{\Longrightarrow} \quad \forall x \in [x_0, \tilde{b}) \quad \|\tilde{y}(x)\| \le \|\tilde{y}_0\| \cdot e^{\int_{x_0}^{x} \|A(t)\|\, dt}$



Пошто $\tilde{b} \neq b \Rightarrow \exists T \in (\tilde{b}, b) \Rightarrow \forall x \in [x_0, \tilde{b}) \quad \|\tilde{y}(x)\| \le \|\tilde{y}_0\| \cdot e^{\int_{x_0}^{T} \|A(t)\|\, dt} = \text{const}$

То значи да ово решење неће излазити из компакта.
А по Т3 то значи да можемо да га продужимо, па онда $(\tilde{a}, \tilde{b})$ није максималан $\lightning$

Последица: Ако $a_{ij} \in C(a,b)$ онда Кош. пр. $\begin{cases} y'(x) = A(x)\, y(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ има јединств. реш. дефинисано на целом (a,b)

Динамички системи

деф. Динамички систем је нормални систем дј у коме се независна променљива јавља само имплицитно.

Независну променљиву ћемо означавати са t, а непознате ф-је са $x_1, \dots, x_n$

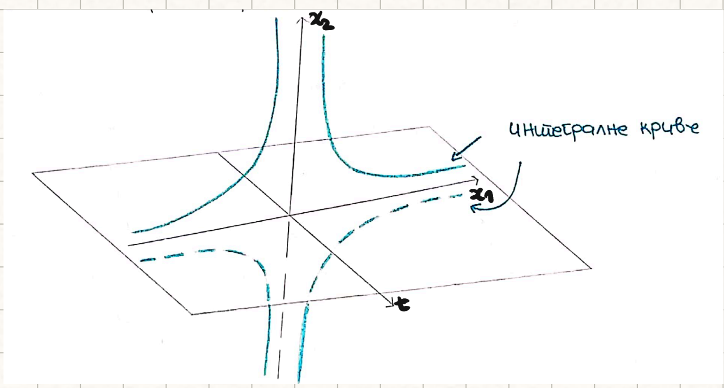
Тј. (1) $\boxed{\begin{array}{l} x_1'(t) = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{array}}$, где $f_i : D \to R$, $D \subset R^n$

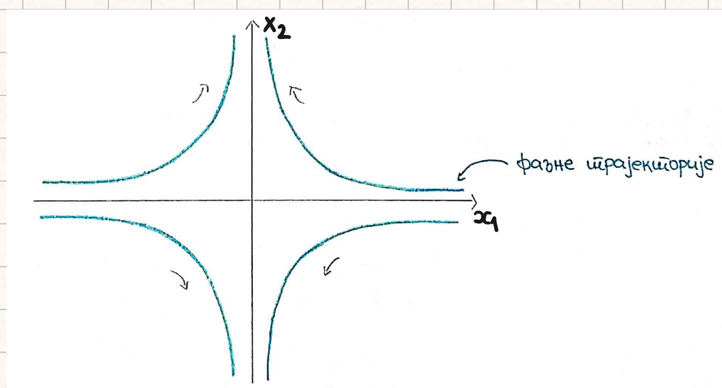
Скраћено, пишемо $X' = F(X)$, где $X = (x_1, \dots, x_n)$ и $F(X) = \big(f_1(X), \dots, f_n(X)\big)$

деф. Нека је $X = X(t)$ произвољно решење система дј (1) на свом макс. интервалу егзистенције I.

Интегрална крива је ГМТ облика $\Gamma = \{(t, X(t)) \mid t \in I\}$

Фазна трајекторија је ГМТ облика $\gamma = \{X(t) \mid t \in I\}$





деф. Фазни портрет чине графици фазних трајекторија са назначеним правцима
(смер одређује раст променљиве t)

Ако фиксирамо неку тачку t_0, $X'(t_0) = F(X(t_0))$ је вектор тангенте произвољне фазне трајекторије у t_0.

деф. Тачка $X^* \in D$ ткд. $F(X^*) = 0$ је положај равнотеже / еквилибријум динамичког система (1).
↳ и брзина и убрзање су нула

деф. Еквилибријум $X^* \in D$ дс (1) је изоловани ако постоји околина X^* у којој нема више еквилибријума.
Иначе је неизоловани.

T: Нека је $X' = F(X)$ дс (1) и $F \in C^1(D)$, D - област.

Нека је $X = X(t)$ решење Кошијевог проблема (2): $\boxed{\begin{array}{l} X' = F(X) \\ X(t_0) = X_0 \end{array}}$ дефинисано на читавом $\mathbb{R}$.

1) Свака фазна трајекторија дс (1) различита од положаја равнотеже је глатка крива

2) Ф-ја $Y(t) := X(t+t_0)$ је решење дс (1) које задовољава услов $Y(0) = X_0$ и деф. је на целом $\mathbb{R}$.

3) Ако се фазне трајекторије дс (1) секу, онда се поклапају.

Д: Код Марије Костић (стр. 75)

Напомена: Својство 2) значи да ако имамо више решења, њима може да одговара иста фазна трајекторија.
(само се кретање одвија са кашњењем t_0)

T: Фазна трајекторија дс (1) може бити:

а) тачка (еквилибријум)
б) глатка крива без самопресецања (непериодично решење)
в) затворена глатка крива (периодично решење)

Фазни портрети 2D линеарног ДС са константним коефицијентима

Посматрамо ДС облика (1): $x_1'(t) = a_{11} \cdot x_1(t) + a_{12} \cdot x_2(t)$ или скраћено $X'(t) = A \cdot X(t)$

$x_2'(t) = a_{21} \cdot x_1(t) + a_{22} \cdot x_2(t)$

Нека су λ_1, λ_2 сопс. вредности и γ_1, γ_2 нешто од следећа два

1° $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ – γ_1, γ_2 сопс. (уопштени) вектори матрице A

2° $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ – γ_1, γ_2 реални и имагинарни делови сопс. вектора

Нека је $T = [\gamma_1{\downarrow} \ \gamma_2{\downarrow}]$ и $J = T^{-1} A T$ Тада је J једног од следећих облика:

$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, за реалне и различите

$J_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, за конјуговано комплексне

$J_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$, за вишеструке реалне, али алг. виш. = геом. виш. (може се свести на дијагоналну)

или $J_4 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$, за вишеструке реалне, али алг. виш. > геом. виш.

У наредним питањима, посматрамо само ДС облика (2) $X'(t) = J \cdot X(t)$

Разликоваћемо случајеве у зависности од сопствених вредности матрице A.

9. Фазни портрет – реалне и различите

Тада је $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, а $\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Дакле, опште решење дс (2) је облика: $X(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

односно: $x_1(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t}$
$x_2(t) = c_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$

1° $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$:

- Прво тражимо еквилибријуме: $\begin{matrix} 0 = x_1' = \lambda_1 x_1 \\ 0 = x_2' = \lambda_2 x_2 \end{matrix} \overset{\lambda_1, \lambda_2 < 0}{\Longrightarrow} X^* = (0,0)$ то је једна фазна трајекторија

- Сада гледамо како ће остале фазне трајекторије да се понашају (тј. смер):

Ако $t \to \infty$: $x_1(t) \to 0$, $x_2(t) \to 0$
Ако $t \to -\infty$: $x_1(t) \to \pm\infty$, $x_2(t) \to \pm\infty$
зависи од c_1, c_2

Дакле, како време одмиче, ове фазне трајекторије се приближавају коорд. поч. (тј. еквилибријуму)

- Скицирамо „лаке" фазне трајекторије:

1) $c_1 = 1$, $c_2 = 0$: $\left.\begin{matrix} x_1(t) = e^{\lambda_1 t} > 0 \\ x_2(t) = 0 \end{matrix}\right\} \overset{\text{морамо да елиминишемо } t}{\Longrightarrow}$ фазна трај. је полуправа $x_2(x_1) = 0$, $x_1 > 0$.

2) $c_1 = -1$, $c_2 = 0$: $x_2(x_1) = 0$, $x_1 < 0$

3) $c_1 = 0$, $c_2 = 1$: $x_1 = 0$, $x_2 > 0$

4) $c_1 = 0$, $c_2 = -1$: $x_1 = 0$, $x_2 < 0$

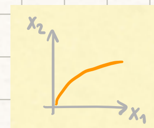
Када имамо лин. систем са конст. коеф,
тада ће за сваку тачку постојати јединствена интегрална крива која је садржи.

Дакле, када извршимо пројекције, попунићемо читаву фазну раван.

- Сада ћемо одредити и све остале фазне трајекторије

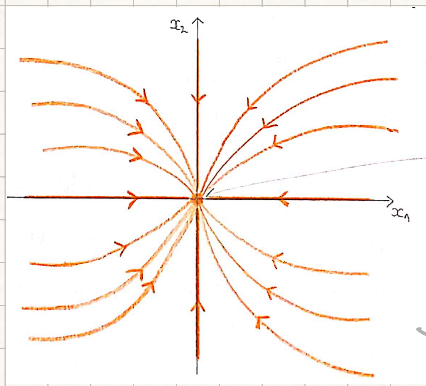
Претпоставимо и да је $c_1, c_2 > 0$ (први квадрант)

$$x_2 = c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} = c_2 \cdot \left(e^{\lambda_1 t}\right)^{\lambda_2/\lambda_1} = c_2 \cdot \left(\frac{x_1}{c_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1} = c \cdot x^{\lambda_2/\lambda_1}, \qquad c > 0$$



Због симетрије, фазне трајекторије изгледају исто и у осталим квадрантима.

Дакле:



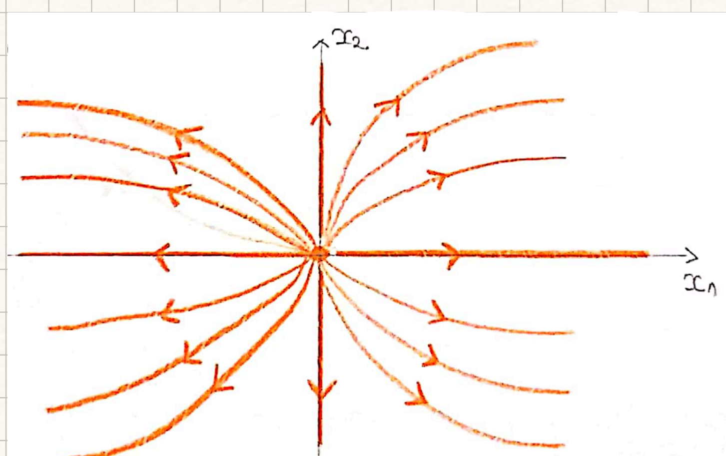
Овај еквилибријум се зове

стабилни чвор

Напомена: „опште" фазне трајекторије не садрже еквилибријум
↳ јер је и он фазна трај.

2° $0 < \lambda_2 < \lambda_1$:

Све исто, само ће бити обрнут смер



Овај еквилибријум се зове

нестабилни чвор

Напомена: Погледај други начин за скицирање фазних трај. код Марије Костић, стр. 83

Пример: Марија Костић, стр. 85

3° $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$:

- $X^* = (0,0)$

- $t \to \infty \quad \Rightarrow \quad x_1(t) \to 0, \quad x_2(t) \to \pm\infty$
  $t \to -\infty \quad \Rightarrow \quad x_1(t) \to \pm\infty, \quad x_2(t) \to 0$

- 1) $c_1 = 1, \; c_2 = 0$: $\quad x_2(x_1) = 0, \quad x_1 > 0$

  2) $c_1 = -1, \; c_2 = 0$: $\quad x_2(x_1) = 0, \quad x_1 < 0$

  3) $c_1 = 0, \; c_2 = 1$: $\quad x_1 = 0, \quad x_2 > 0$

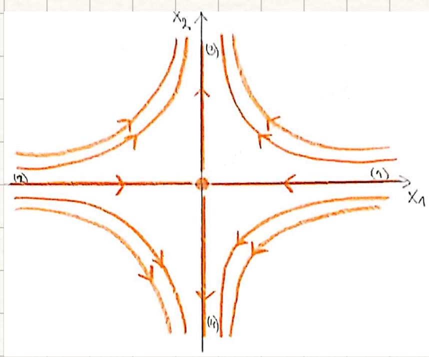
  4) $c_1 = 0, \; c_2 = -1$: $\quad x_1 = 0, \quad x_2 < 0$

- Остаје још да скицирамо остале фазне трајекторије: (користимо онај други начин)

Знамо $X(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \cdot X_1(t) + c_2 \cdot X_2(t)$

Како је $\lambda_1 < 0$, а $\lambda_2 > 0$: када $t \to \infty \Rightarrow X_2(t)$ је доминантнији
када $t \to -\infty \Rightarrow X_1(t)$ је доминантнији

Дакле:



Овај еквилибријум се зове

седло чвор

4° $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 \neq 0$:

- Еквилибријуми су: $\begin{aligned} 0 &= x_1' = 0 \\ 0 &= x_2' = \lambda_2 x_2 \end{aligned} \Rightarrow \quad X^* = (s, 0), \quad s \in R$ (имамо неизоловане еквилибријуме)

- У овом случају, опште решење је облика: $\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \\ x_2(t) &= C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$ (јер $\lambda_1 = 0$)

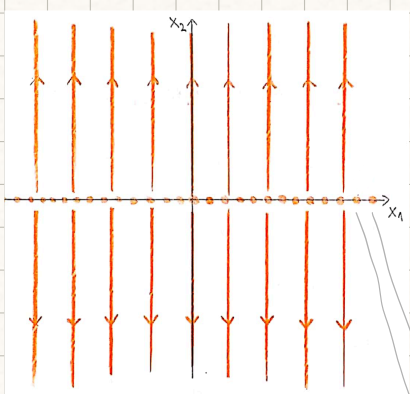
Примећујемо да x_1 не зависи од t и $x_2 > 0$ за $C_2 > 0$ и $x_2 < 0$ за $C_2 < 0$

Дакле, фазне трајекторије су вертикалне полуправе $x_1 = C_1, \ x_2 > 0$ и $x_1 = C_1, \ x_2 < 0$

- Смер ће зависити од знака λ_2:

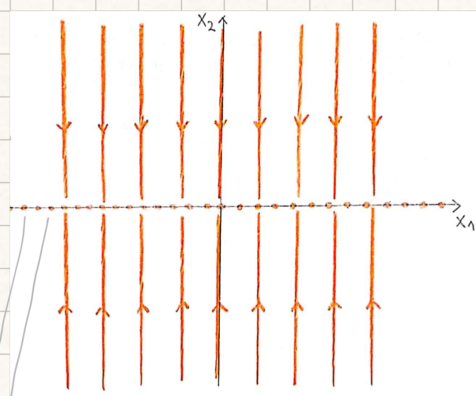
4_1° $\lambda_2 > 0$:

$t \to \infty \Rightarrow x_2(t) \to \pm\infty$



4_2° $\lambda_2 > 0$:

$t \to \infty \Rightarrow x_2(t) \to 0$



Ови еквилибријуми се зову

неизоловани чворови

10. Фазни портрет – конјуговано комплексне

Тада је $J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i \cdot \beta$, $\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ (за $\alpha + i\beta$)

(Комплексно) решење је: $X_k = e^{(\alpha + i\beta)t} \cdot \gamma = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{bmatrix} + i \cdot e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{bmatrix}$

Нама треба реално решење, а знамо да су $\mathrm{Re}\, X_k$, $\mathrm{Im}\, X_k$ лин. нез, па је (реално) опште решење:

$$X(t) = c_1 e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{bmatrix} + c_2 e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{bmatrix},$$

тј. $x_1(t) = e^{\alpha t} \left(c_1 \cdot \cos(\beta t) + c_2 \cdot \sin(\beta t) \right)$

$x_2(t) = e^{\alpha t} \left(-c_1 \cdot \sin(\beta t) + c_2 \cdot \cos(\beta t) \right)$

Приметимо: (*) $x_1^2 + x_2^2 = e^{2\alpha t} \underbrace{(c_1^2 + c_2^2)}_{\text{не зависи од } t}$ $\Rightarrow$ гранамо у зависности од α

$\beta \neq 0$ (иначе $\lambda \in \mathbb{R}$)

1° $\alpha = 0$:

- Еквилибријуми $\begin{matrix} 0 = x_1' = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ 0 = x_2' = -\beta x_1 + \alpha x_2 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $X^* = (0,0)$

- Из (*): $x_1^2 + x_2^2 = c_1^2 + c_2^2$

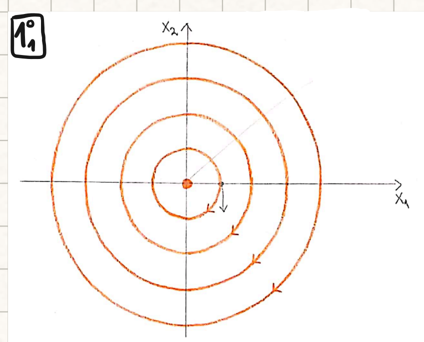
  а) $c_1, c_2 = 0$ $\Rightarrow$ еквилибријум

  б) $c_1 \neq 0 \lor c_2 \neq 0$ $\Rightarrow$ $x_1^2 + x_2^2 = c^2$ – кружница ($c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$)

- Остаје још смер да одредимо.

  1_1° $\beta > 0$: у смеру казаљке на сату

  1_2° $\beta < 0$: супротно од казаљке



Овај еквилибријум се зове **центар**

Зашто овако?

Имамо систем: $\begin{matrix} x_1'(t) = \beta x_2 \\ x_2'(t) = -\beta x_1 \end{matrix}$

Тражимо (x_1', x_2') за било коју фиксирану (x_1, x_2)

$\downarrow$

вектор тангенте у (x_1, x_2)

$\Downarrow$

смер

(ако фиксирамо нпр. $(1,0)$, добијамо горња два случаја)

2° $\alpha \neq 0$:

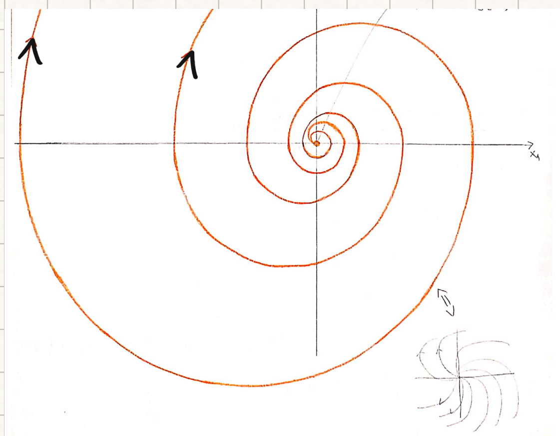
Сада имамо систем облика:
$$x_1' = \alpha x_1 + \beta x_2$$
$$x_2' = -\beta x_1 + \alpha x_2$$

- Еквилибријум је опет само $X^* = (0,0)$

- $x_1^2 + x_2^2 = e^{2\alpha t}(c_1^2 + c_2^2)$

2_1° $\alpha > 0$

$t \to \infty \Rightarrow e^{2\alpha t}$ се повећава, па немамо више кружнице, него се спирално одаљава од $(0,0)$

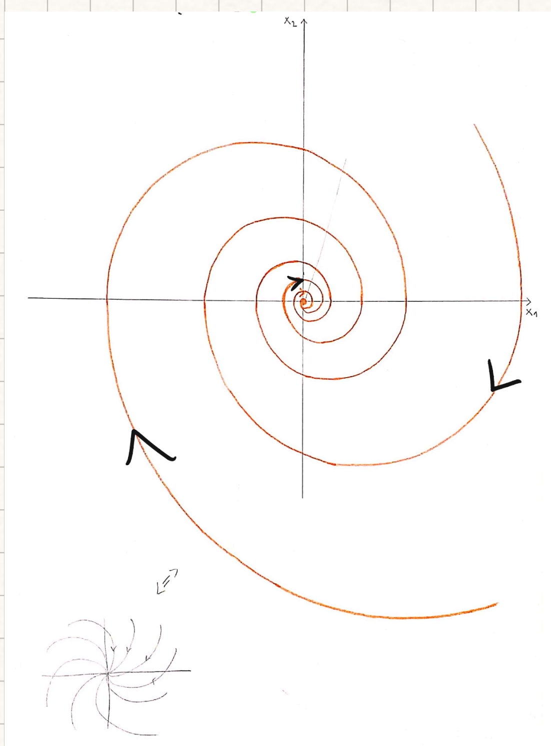


Овај еквилибријум се зове

нестабилни фокус

2_2° $\alpha < 0$

$t \to \infty \Rightarrow e^{2\alpha t}$ се смањује, па се спирално приближава $(0,0)$



Овај еквилибријум се зове

стабилни фокус

11. Фазни портрет – реалне и вишеструке

Знамо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, али постоје две могућности за J у зависности од тога да ли матрицу A можемо дијагонализовати (тј. да ли су алг. и геом. вишеструкост једнаке)

1° $k = m$, тј. $J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

Динамички систем је облика: $\begin{aligned} x_1' &= \lambda x_1 \\ x_2' &= \lambda x_2 \end{aligned}$

Сопствени вектори ће бити $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ опште решење: $\begin{aligned} x_1 &= c_1 e^{\lambda t} \\ x_2 &= c_2 e^{\lambda t} \end{aligned}$

$1_1°$ $\lambda = 0$:

- Еквилибријум: $\begin{aligned} 0 &= x_1' = 0 \\ 0 &= x_2' = 0 \end{aligned}$ $\Rightarrow$ свака тачка фазне равни је еквилибријум

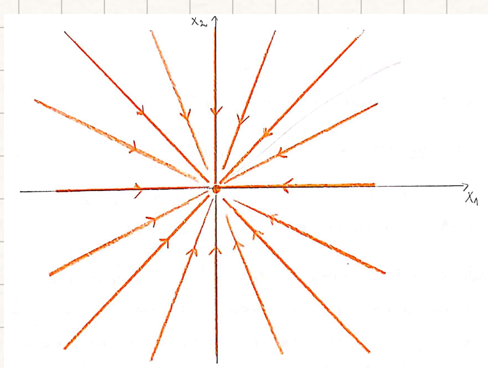
$1_2°$ $\lambda \neq 0$:

- Еквилибријум: $\begin{aligned} 0 &= x_1' = \lambda x_1 \\ 0 &= x_2' = \lambda x_2 \end{aligned}$ $\overset{\lambda \neq 0}{\Longrightarrow}$ $X^* = (0,0)$

$$\left.\begin{aligned}
&c_1 = 0,\ c_2 > 0: && x_1 = 0,\ x_2 > 0 \\
&c_1 = 0,\ c_2 < 0: && x_1 = 0,\ x_2 < 0 \\
&c_1 > 0: && x_2 = c_2 \cdot e^{\lambda t} = c_2 \cdot \frac{x_1}{c_1} = \frac{c_2}{c_1} \cdot x_1, \quad x_1 > 0 \\
&c_1 < 0: && x_2 = \frac{c_2}{c_1} \cdot x_1, \quad x_1 < 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{полуправе}$$

$1_{2_1}°$ $\lambda < 0$:

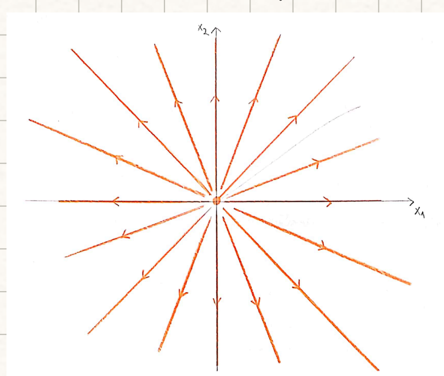
$t \to \infty \Rightarrow x_1 \to 0,\ x_2 \to 0$



Овај еквилибријум се зове **стабилна звезда**

$1_{2_2}°$ $\lambda > 0$:

$t \to \infty \Rightarrow x_1 \to \infty,\ x_2 \to \infty$



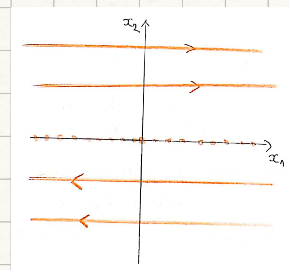
Овај еквилибријум се зове **нестабилна звезда**

2° $\overset{2}{\overset{\shortparallel}{k}} > \overset{1}{\overset{\shortparallel}{m}}$, тј. $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

Динамички систем је облика: $\begin{aligned} x_1' &= \lambda x_1 + x_2 \\ x_2' &= \lambda x_2 \end{aligned}$

Сопс. вектор ће бити $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, а његов уопштени $\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ опште реш: $\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{\lambda t} + c_2 \cdot t e^{\lambda t} \\ x_2(t) &= c_2 e^{\lambda t} \end{aligned}$

2_1° $\lambda = 0$:



- Еквилибријуми: $\begin{aligned} 0 &= x_1' = x_2 \\ 0 &= x_2' = 0 \end{aligned}$ $\Rightarrow$ $X^* = (s, 0)$

- $\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 + c_2 t \\ x_2(t) &= c_2 \end{aligned}$ $\Rightarrow$ фазне трајекторије су полуправе $x_2 = c$, $c \neq 0$

2_2° $\lambda \neq 0$:

- Еквилибријум: $\begin{aligned} 0 &= x_1' = \lambda x_1 + x_2 \\ 0 &= x_2' = \lambda x_2 \end{aligned}$ $\Rightarrow$ $X^* = (0,0)$

- За $c_2 = 0$: добијамо две лаке фаз. трај: $x_1 = c_1 \cdot e^{\lambda t}$, $x_2 = 0$ $\Rightarrow$ $x_2(x_1) = 0$, $\begin{matrix} x_1 > 0 \\ x_1 < 0 \end{matrix}$

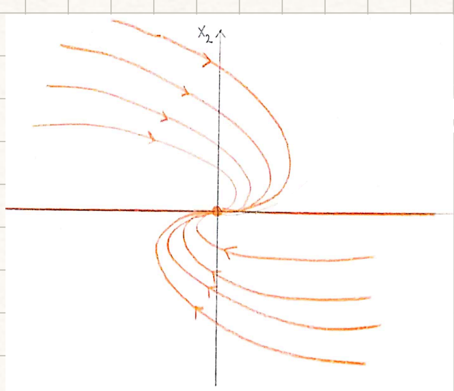
- За $c_2 \neq 0$: $x_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$ $\Rightarrow$ $e^{\lambda t} = \frac{x_2}{c_2}$ $\Rightarrow$ $\begin{matrix} c_2 > 0 & \Rightarrow & x_2 > 0 \\ c_2 < 0 & \Rightarrow & x_2 < 0 \end{matrix}$

Приметимо $t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{x_2}{c_2}$

Сада: $x_1(t) = e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t) = \frac{x_2}{c_2}\left(c_1 + c_2 \cdot \frac{1}{\lambda} \ln \frac{x_2}{c_2}\right)$, $\quad x_2(t) = \frac{e^{\lambda t}}{c_2}$

$2_{2_1}^\circ$ $\lambda < 0$:

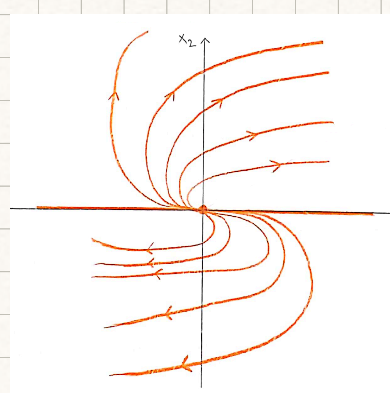
$t \to \infty \Rightarrow x_1(t) \to 0, \; x_2(t) \to 0$



Овај еквилибријум се зове
стабилан дегенерисан чвор

$2_{2_2}^\circ$ $\lambda > 0$:

$t \to \infty \Rightarrow x_1(t) \to \infty, \; x_2(t) \to \infty$



Овај еквилибријум се зове
нестабилан дегенерисан чвор

12. Класификација положаја равнотеже

Сада посматрамо ДС (1) $X'(t) = A \cdot X(t)$, где $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Карактеристична једначина ове матрице је $\det(A-\lambda E) = 0$, тј. $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$

Ако означимо $p = \operatorname{tr} A$ и $q = \det A$ $\Rightarrow$ $\lambda^2 - p\lambda + q = 0$

Приметимо да за решења λ_1, λ_2 ове једначине важи: $\boxed{\lambda_1 + \lambda_2 = p}$ и $\boxed{\lambda_1 \cdot \lambda_2 = q}$ Вијетове формуле

(ово су сопс. вредности)

У зависности од $D = p^2 - 4q$ разликујемо следеће случајеве:

I) $D > 0$: реалне и различите

(1) $q < 0$: различитог знака $\Rightarrow$ седло

(2) $q > 0$: истог знака

(2.1) $p > 0$: позитивне $\Rightarrow$ нестабилан чвор

(2.2) $p < 0$: негативне $\Rightarrow$ стабилан чвор

(3) $q = 0$: тачно једна је нула (ако би биле две, онда $D=0$)

(3.1) $p > 0$: $\lambda_2 = p$ $\Rightarrow$ неизоловани чворови $(S,0)$, смер од

(3.2) $p < 0$: $\lambda_2 = p$ $\Rightarrow$ неизоловани чворови $(S,0)$, смер ка

II) $D < 0$: конјуговано комплексна

(1) $p = 0$: реални делови су нула $(\alpha = 0)$ $\Rightarrow$ центар

(2) $p > 0$: нестабилан фокус

(3) $p < 0$: стабилан фокус

III) $D = 0$: реално вишеструко решење

$m = 2$ $m = 1$

(1) $p > 0$: позитивно је $\Rightarrow$ нестабилна звезда или нестабилан дегенерисан чвор

(зависи од броја сопс. вектора)

(2) $p < 0$: негативно је $\Rightarrow$ стабилна звезда или стабилан дегенерисан чвор

(зависи од броја сопс. вектора)

(3) $p = 0$: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\Rightarrow$ свака тачка равни или свака тачка праве сопс. вектора

(зависи од броја сопс. вектора)

$\boxed{13.}$ Тополошка конјугованост динамичких система

Нека је $E \subset \mathbb{R}^n$, $F: E \to \mathbb{R}^n$.

деф. Нека је $\varphi(t, x_0)$ јединствено решење Кош. проб. $\boxed{\begin{array}{l} x' = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{array}}$ деф. на макс. интервалу егзистенције I_{x_0}

За свако $t \in I_{x_0}$, ток динамичког система је непрекидно пресликавање $\phi^t: E \to E$, $\phi^t(x_0) = \varphi(t, x_0)$

Дакле, сваком $x_0 \in E \subset \mathbb{R}^n$ доделимо решење одговарајућег Кошијевог проблема.

Другим речима, ако фиксирамо $x_0 \in E$, онда му додељујемо $\varphi(\cdot, x_0): I_{x_0} \to E$, а то је трајекторија дс кроз x_0.

А ако је x_0 променљива из $K \subset E$, ток је кретање свих тачака скупа K током времена.

деф. Нека су $\varphi^t: \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ $\psi^t: \mathbb{Y} \to \mathbb{Y}$ токови за редом:
(i) $x' = F(x)$, $F: \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$
(ii) $y' = G(y)$, $G: \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^n$

За ова два дс кажемо да су тополошки еквивалентни ако:

хомеоморфизам = изоморфизам између тополошких простора

постоје хомеоморфизам $h: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ и непрекидно $\tau: \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, где је $t \mapsto \tau(t, x)$ бијекција,

ткд. $(\forall t \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{X})$ важи (**): $h(\varphi^t(x)) = \psi^{\tau(t,x)}(h(x))$

Другим речима, ако хомеоморфизам слика фазне трајекторије од (i) у фазне трајекторије од (ii) при чему се чува оријентација, онда су ти дс тополошки еквивалентни.

↳ ако је ток $\varphi^t(x)$ усмерен од x_1 ка x_2, онда је ток $\psi^t(y)$ усмерен од $h(x_1)$ ка $h(x_2)$.

деф. Ако је $\tau(t, x) = t$, за $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{X}$, тада су дс (i), (ii) тополошки конјуговани.

Другим речима, дс (i), (ii) су тополошки конјуговани ако постоји хомеоморфизам $h: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ ткд:

$$h(\varphi^t(x_0)) = \psi^t(h(x_0)), \qquad \text{где } x_0 \in \mathbb{X}$$

Дакле, ако фиксирамо $x_0 \in \mathbb{X}$, $\varphi^t(x_0)$ ће бити трајекторија која пролази кроз x_0, а пресликавањем h она се слика у трајекторију која пролази кроз $h(x_0)$.

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r, "\varphi^t"] \arrow[d, "h"'] & \varphi^t(x_0) \arrow[d, "h"] \\ y_0 \arrow[r, "\psi^t"] & \psi^t(y_0) \end{tikzcd}$$

T1: Положај равнотеже ДС пресликава се у положај равнотеже њему тополошки конјугованог ДС.

Д: Нека је x^* еквилибријум за (i) и нека је $y^* := h(x^*)$

(i), (ii) топ. конј. $\Rightarrow$ постоји хомеоморфизам $h: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ т.д. $h(\varphi^t(x)) = \psi^t(h(x))$, $x \in \mathbb{X}$

Сада: $\psi^t(y^*) = \psi^t(h(x^*)) = h(\varphi^t(x^*)) \overset{(*)}{=} h(x^*) = y^*$

(*) x^* еквилибријум $\Leftrightarrow$ $\varphi^t(x^*) = x^*$
(фиксан)

Дакле, $y^* = h(x^*)$ је еквилибријум (ii)

T2: Периодичне трајекторије ДС пресликавају се у периодичне трајекторије њему тополошки конјугованог ДС.

Д: Нека је $\varphi^t(x_0)$ периодична трај. за (i) и нека је $y_0 := h(x_0)$

(i), (ii) топ. конј. $\Rightarrow$ постоји хомеоморфизам $h: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ т.д. $h(\varphi^t(x)) = \psi^t(h(x))$, $x \in \mathbb{X}$

Због периодичности: $\varphi^{t+T}(x_0) = \varphi^t(x_0)$

Сада: $\psi^t(y_0) = \psi^t(h(x_0)) = h(\varphi^t(x_0)) = h(\varphi^{t+T}(x_0)) = \psi^{t+T}(h(x_0)) = \psi^{t+T}(y_0)$

Дакле, $\psi^t(y_0)$ јесте периодична трајекторија ДС (ii)

Напомена: Ако су тополошки еквивалентни $\Rightarrow$ НЕ МОРА бити исти основни период

Али ако су топ. конјуговани, онда јесу исти.

* Занима нас да ли линеаризован дс може дати квалитативно добру слику нелинеарног дс у околини еквилиб, тј. да ли ће нам то дати тополошка конјугованост

Посматрамо дс (1) $X' = A \cdot X$, где је $A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(X^*) \end{bmatrix}$, где је $X^* = (0, \dots, 0)$ еквилиб. (1)

Посматрамо и (2) $X' = F(X)$, где $F(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X))$

деф. Нека су $\lambda_i \in \mathbb{C}$ сопствене вредности матрице A дс (1)

Еквилибријум X^* нелин. дс (2) је хиперболички ако $(\forall \lambda_i)\ Re(\lambda_i) \neq 0$.
Иначе је нехиперболички

ТЗ (Хартман - Гробманова):

Нека је $E \subset R^n$ отворен и $X^* \in E$, $F \in C^1(E)$ и $F(X^*) = 0$.
Нека је ϕ^t ток дс (2).
Нека је $\mathbb{O} = (0, \dots, 0)$ хиперболички еквилибријум дс (1).

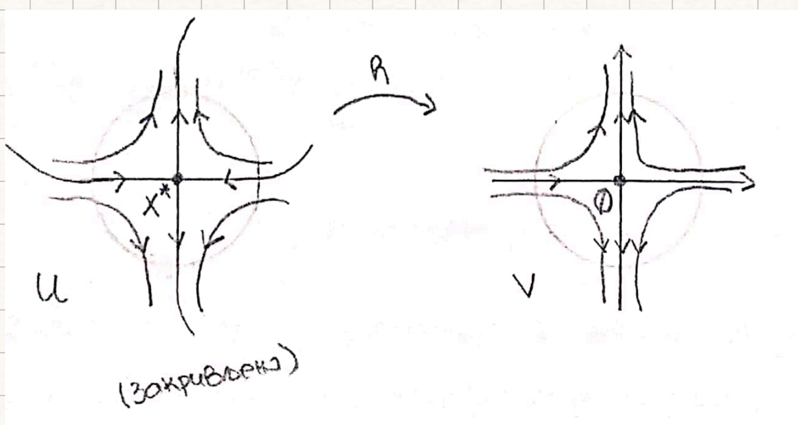
Тада постоје околине $\mathcal{U}, V \subset R^n$, $X^* \in \mathcal{U}$, $\mathbb{O} \in V$ и постоји хомеоморфизам $h : \mathcal{U} \to V$

ткд. $(\forall X_0 \in \mathcal{U})$ ($\exists$ отворен интервал $I_0 \subset R$, $0 \in I_0$) ткд. $(\forall t \in I_0)$ важи:

$$h(\phi^t(X_0)) = e^{At} h(X_0)$$

$\psi^t = e^{At}$

Другим речима, ток дс (2) је тополошки конјугован току дс (1).



Т4: Линеарни ДС (3) $X' = AX$ и (4) $Y' = BY$ су тополошки C^k конјуговани ($\exists C^k$ – дифеоморфизам)

акко су матрице A и B сличне $(\exists T \quad A = T^{-1}BT)$

Д: Показујемо само $(\Leftarrow)$

Нека су $\varphi^t = e^{At}$, $\psi^t = e^{Bt}$ токови ДС (3) и (4) редом.

Знамо да је $B = TAT^{-1}$ и да је $h(X) = TX$ један C^k– дифеоморфизам (јер $\exists T^{-1}$)

Сада: $h(\varphi^t(X)) = T \cdot \varphi^t(X) = T \cdot e^{At} X = T \cdot e^{T^{-1}BT \cdot t} \cdot X = T \cdot T^{-1} \cdot e^{Bt} \cdot T \cdot X = e^{Bt} \cdot h(X) = \psi^t(h(X))$

Дакле, ДС (1) и (2) јесу тополошки C^k конјуговани

14. Стабилност еквилибријума система дј

Посматрамо дс (1) $X' = F(X)$, где $F: D \to R^n$, $D \subset R^{n+1}$ задовољава услове Пикарове теореме.

Претпоставимо да овај дс има тривијално решење деф. на $[t_0, \infty)$.
Тада је $X^* = 0$ еквилибријум овог дс.

деф. Еквилибријум $X^* = 0$ дс (1) је стабилан по Љапунову када $t \to \infty$ ако:

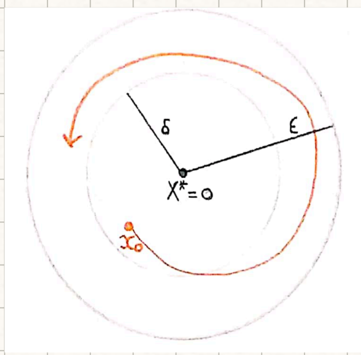
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ (\forall \text{ трајекторију } X(t) \text{ дс (1) ткд. } X(t_0) = X_0) \quad \|X_0\| < \delta \Rightarrow \|X(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

Иначе, кажемо да је нестабилан по Љапунову.

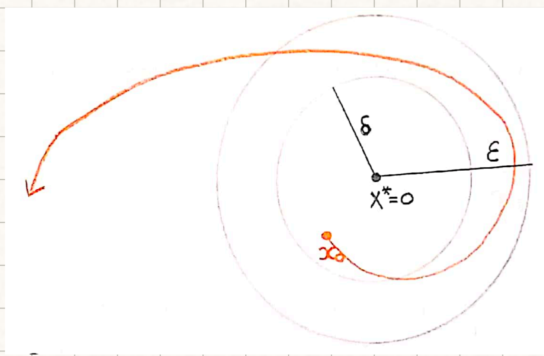
деф. Еквилибријум $X^* = 0$ дс (1) је асимптотски стабилан по Љапунову када $t \to \infty$

ако је стабилан и $(\exists \delta > 0)\ (\forall \text{ трајекторију } X(t) \text{ дс (1) ткд. } X(t_0) = X_0) \quad \|X_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \|X(t)\| = 0$

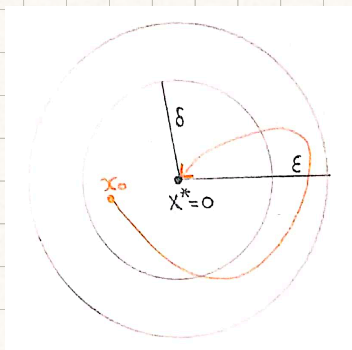
Геометријске интерпретације:



стабилан



нестабилан



асимптотски стабилан

Пример: испитујемо стабилност за $X' = A \cdot X$ (преко сопствених вредности)

код Марије Костић, стр. 131

* Питамо се да ли можемо испитивање стабилности еквилибријума нелинеарних дс свести на испитивање стабилности еквилибријума лин. дс са конст. коеф. (ових као у примеру)

Посматрамо дс (1) $X' = F(X)$, $F \in C^2(D)$ (у општем случају нелинеаран)

и дс (2) $X' = A \cdot X$, где је $A = F(X^*)$ Јакобијева матрица ф-је F у тачкама еквилиб. X^* дј (1).

Претпоставимо да је $X^* = 0$.

Тада дс (2) представља линеаризацију дс (1) у околини 0 јер: $F(X) = F(X^*) + dF(X^*) \cdot X + \sigma(X)$

Т1 (Прва теорема Љапунова - метод сопствених вредности):

Нека су λ_i сопствене вредности матрице A дс (2).

1) $(\forall \lambda_i)$ $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ $\Rightarrow$ еквилибријум X^* дс (1) је асимптотски стабилан

2) $(\exists \lambda_i)$ $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ $\Rightarrow$ еквилибријум X^* дс (1) је нестабилан

* Примећујемо да не можемо применимо Т1 ако имамо $\lambda_i = 0$.
Тада радимо по дефиницији или ово што следи

Посматрамо ф-ју $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ која је позитивно дефинитна у некој околини $O(X^*)$ и важи $V \in C^1(O(X^*))$

То значи: $V(X)^* = 0$ и $V(X) > 0$ за $X \in O(X^*) \setminus \{X^*\}$

Нека је $X = X(t)$ трајекторија дс (1) и $X(t_0) = X \in O(X^*)$

Тада је извод дуж те трајекторије у тачки X:

$$\mathring{V}(X) := \frac{d}{dt} V(X(t)) \Big|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{dx_i}{dt}} \Big|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(X) \cdot \boxed{f_i(X)} = \nabla V(X) \circ F(X)$$

скаларни производ

$X' = F(X)$
$\Updownarrow$
$x_i' = f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$

деф. Нека је $V(X)$ која је позитивно дефинитна у околини $O(X^*)$ и $V \in C^1(O(X^*))$

$V(X)$ је функција Љапунова дс (1) ако је: $\mathring{V}(X) \le 0$, $\forall X \in O(X^*)$

$V(X)$ је строга функција Љапунова дс (1) ако је: $\mathring{V}(X) < 0$, $\forall X \in O(X^*) \setminus \{X^*\}$

T2 (Друга теорема Љапунова):

Нека је X^* еквилибријум ДС (1), где $F \in C^1(D)$.

Ако у некој околини $O(X^*)$ $(O(X^*) \subset D)$ постоји позитивно дефинитна ф-ја $V \in C^1(O(X^*))$ и ако је:

1) $\mathring{V}(X) \leq 0, \quad \forall X \in O(X^*) \setminus \{X^*\} \quad \Rightarrow \quad X^*$ је стабилан

2) $\mathring{V}(X) < 0, \quad \forall X \in O(X^*) \setminus \{X^*\} \quad \Rightarrow \quad X^*$ је асимптотски стабилан

3) $\mathring{V}(X) > 0, \quad \forall X \in O(X^*) \setminus \{X^*\} \quad \Rightarrow \quad X^*$ је нестабилан.

Д: (за 9 и 10)

код Марије Костић, стр. 141

Напомена: Често се узима $V(X) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$, где $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 > 0$

15. Примена 2D динамичких система

* Модел љубави

$R(t)$ - интензитет Ромеових осећања према Јулији у тренутку t
$J(t)$ - интензитет Јулијиних осећања према Ромеу у тренутку t

$R'(t)$ - брзина промене Ромеових осећања током времена
$J'(t)$ - брзина промене Јулијиних осећања током времена

a_R - интензитет којим је Ромео охрабрен својим осећањима
p_R - интензитет којим је Ромео охрабрен Јулијиним осећањима
a_J - интензитет којим је Јулија охрабрена својим осећањима
p_J - интензитет којим је Јулија охрабрена Ромеовим осећањима

Постоје 4 типа личности:
(исто за обоје)

1) $a>0,\ p>0$: емотивни љубавник
2) $a>0,\ p<0$: нарцис
3) $a<0,\ p>0$: опрезан љубавник
4) $a<0,\ p<0$: самотњак

* Посматрамо ДС: $\begin{bmatrix} R'(t) \\ J'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_R & p_R \\ p_J & a_J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix}$

$p = trA = a_R + a_J$, $q = det A = a_R a_J - p_R p_J$, $D = p^2 - 4q$

Пример 1: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow p=5,\ q=4,\ D=9 \overset{\boxed{12}}{\Rightarrow}$ $X^*(0,0)$ је нестабилни чвор

Добија се $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Дакле, опште решење је:
$$R(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{4t}$$
$$J(t) = -c_1 e^{t} + 2c_2 e^{4t}$$

Ту се онда може комбиновати тако што задајемо почетне услове (ко је кога волео, мање или више ...)

На крају цртамо графике $R(t)$ и $J(t)$ (дакле x оса је t, не црта се у фазној равни)

(код Марије Костић, стр. 111)

Има још 2 примера

* Модел предатор - плен

$x = x(t)$ - бр. јединки популације плена у тренутку t
$y = y(t)$ - бр. јединки популације предатора у тренутку t

A - стопа раста популације плена
B - ефикасност предатора
C - продуктивност предатора $(C = B\cdot\delta)$ (способност да се размноже)
D - стопа смртности предатора

Претпоставке модела:

- једини начин да плен умре јесте да буде уловљен
- ако нема предатора, популација плена расте експоненцијално
- ако нема плена, популација предатора опада експоненцијално
- репродукција предатора је директно пропорционална броју јединки плена који поједу (везано за C)

Малтусов динамички модел

* Посматрамо ДС (1):

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax - Bxy \qquad f(x,y) \\ y'(t) &= Cxy - Dy \qquad g(x,y) \end{aligned}$$

- Еквилибријуми: $\begin{aligned} x(A-By) &= 0 \\ y(Cx-D) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow X_1^* = (0,0)$ и $X_2^* = \left(\frac{D}{C}, \frac{A}{B}\right)$

- Испитујемо стабилност: пошто је ДС нелин. прво ћемо га линеаризовати.

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-By & -Bx \\ Cy & Cx-D \end{bmatrix}$$

* $X_1^* = (0,0) \Rightarrow J_1 = J(X_1^*) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -D \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = A, \ \lambda_2 = -D \overset{1.\text{Т.Љ.}}{\Rightarrow} X_1^*$ је нестабилан

Приметимо да је почетни систем локално тополошки конјугован са ДС $X' = J_1 X$ (по Х-Г)

(јер је $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ и еквилибријум X_1^* је хиперболички)

* $X_2^* = \left(\frac{D}{C}, \frac{A}{B}\right) \Rightarrow J_2 = J(X_2^*) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{BD}{C} \\ \frac{AC}{B} & 0 \end{bmatrix} \overset{\dots}{\Rightarrow} \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{AD}$ (не може 1.Т.Љ.)

Испоставиће се да јесте стабилан (доказ иде на крају)

да не прекида ток мисли

- x-нула изоклина: $f(x,y)=0 \Rightarrow x(A-By)=0 \Rightarrow x=0 \lor y=\frac{A}{B}$

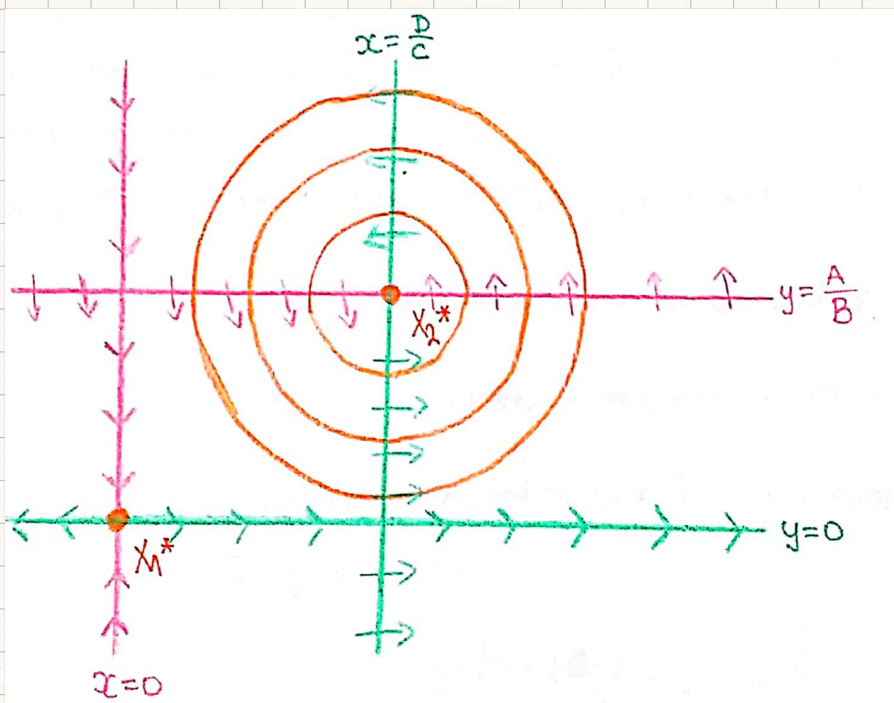
  - дуж $x=0$: $g(0,y)=-Dy \Rightarrow \begin{cases} \text{ако } y<0 \Rightarrow y'>0 \Rightarrow \uparrow \\ \text{ако } y>0 \Rightarrow y'<0 \Rightarrow \downarrow \end{cases}$

  - дуж $y=\frac{A}{B}$: $g(x,\frac{A}{B})=\frac{A}{B}(Cx-D) \Rightarrow \begin{cases} \text{ако } Cx-D>0, \text{ тј. } x>\frac{D}{C} \Rightarrow y'>0 \Rightarrow \uparrow \\ \text{ако } Cx-D<0, \text{ тј. } x<\frac{D}{C} \Rightarrow y'<0 \Rightarrow \downarrow \end{cases}$

- y-нула изоклина: $g(x,y)=0 \Rightarrow y(Cx-D)=0 \Rightarrow y=0 \lor x=\frac{D}{C}$

  - дуж $y=0$: $f(x,0)=Ax \Rightarrow \begin{cases} \text{ако } x<0 \Rightarrow x'>0 \Rightarrow \rightarrow \\ \text{ако } x>0 \Rightarrow x'<0 \Rightarrow \leftarrow \end{cases}$

  - дуж $x=\frac{D}{C}$: $f(\frac{D}{C},y)=\frac{D}{C}(A-By) \Rightarrow \begin{cases} \text{ако } A-By>0, \text{ тј. } y<\frac{A}{B} \Rightarrow x'>0 \Rightarrow \rightarrow \\ \text{ако } A-By<0, \text{ тј. } y>\frac{A}{B} \Rightarrow x'<0 \Rightarrow \leftarrow \end{cases}$



Напомене: 1) Скицирали смо само у I квадранту зато што нас занима само понашање у околини X_2^*
Нема смисла да број јединки буде негативан

2) Осцилаторност система има смисла

Предатор лови $\Rightarrow$ мање плена, више предатора $\Rightarrow$ предатори гладни умиру $\Rightarrow$ више плена
и тако у круг

Доказ за стабилност X_2^*:

Како је X_2^* нехиперболички, не можемо ни применити Х-Г теорему.
Зато ћемо да пробамо са II теоремом Љапунова.

Потражимо ф-ју V у облику $V(x,y) = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(y)$ и претпоставимо да је константна дуж решења

Намештамо да важи: $\frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x,y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot g(x,y) = 0$ $\quad (\nabla V \circ F = 0)$

$$\Rightarrow \quad \tilde{f}'(x) \cdot f(x,y) + \tilde{g}'(y) \cdot g(x,y) = \tilde{f}'(x) \cdot x \cdot (A - By) + \tilde{g}'(y) \cdot y \cdot (Cx - D) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\tilde{f}'(x) \cdot x}{Cx - D} = \frac{\tilde{g}'(y) \cdot y}{A - By}$$

Две стране зависе од различитих променљивих $\Rightarrow$ једнакост само када су обе константе

Стога, нека је: $\frac{\tilde{f}'(x) \cdot x}{Cx - D} = 1 \quad \wedge \quad \frac{\tilde{g}'(y) \cdot y}{A - By} = 1$ (тражимо једну ф-ју па можемо фиксирати)

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\tilde{f}(x) = Cx - D\ln|x| \qquad \tilde{g}(y) = By - A\ln|y|$$

Дакле, за сад имамо ф-ју $V(x,y) = Cx - D\ln|x| + By - A\ln|y|$

Сетимо се да наше V мора бити позитивно дефинитна.
Зато ћемо да одредимо локални минимум ф-је V. (да бисмо наместили да достиже нулу)

$$\left.\begin{aligned} V_x'(x,y) &= C - \frac{D}{x} = 0 \\ V_y'(x,y) &= B - \frac{A}{y} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad M = \left(\frac{D}{C}, \frac{A}{B}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} V''_{x^2} &= \frac{D}{x^2} \\ V''_{y^2} &= \frac{A}{y^2} \\ V''_{xy} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad d^2V(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{D}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{A}{y^2} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad d^2V(M) = \begin{bmatrix} \frac{C^2}{D} & 0 \\ 0 & \frac{B^2}{A} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} D_1 &= a_{11} > 0 \\ D_2 &= a_{11} \cdot a_{22} > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ поз. дефинитна матрица $\Rightarrow$ M јесте локални минимум ф-је V.

Знамо да ће V остати константна дуж решења и кад јој додамо/одузмемо константу.

$\Rightarrow$ узимамо ф-ју $V_1(x,y) = V(x,y) - V\left(\frac{D}{C}, \frac{A}{B}\right)$ која јесте позитивно дефинитна

- јесте позитивно дефинитна (у тачки минимума, V_1 је 0 а у свим осталим је позитивна)
- $V_1 \in C^1(O(X_2^*))$
- $\dot{V}(x) = 0$

$$\Bigg\} \overset{2.Т.Љ.}{\Longrightarrow} \quad X_2^* \text{ је стабилан}$$