Диференцијалне једначине А

Јован Самарџић, 13/2019
Јана Стојановић, 34/2019

Професорка: Марија Микић

- 🟥 - дефиниције
- 🟪 - ознаке
- 🟧 - теореме
- 🟦 - докази
- 🟩 - примери

Година курса: 2021/22

Молим да ми све грешке пријавите преко мејла или друштвених мрежа.

0. Основни појмови, дефиниције и теореме

Посматрајмо једначину: $F'(x) = f(x)$, где је $f(x)$ унапред позната функција.

Ако би наш задатак био да пронађемо једно решење једначине ⇒ тражимо једну примитивну ф-ју.
Ако би се ипак тражила сва решења ⇒ тражимо неодређени интеграл за $F(x)$.

Ово је пример једне диференцијалне једначине.

деф. Нека је $D \subseteq R^{n+2}$ отворен скуп и нека је $y = y(x)$ непозната ф-ја.
Једначина облика $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, $n \geq 1$, назива се **обична диференцијална једначина.**

деф. Када је непозната функција заправо ф-ја више променљивих, то је **парцијална дј.**
(јер се јављају парцијални изводи)

деф. **Ред диференцијалне једначине** је ред највишег извода који се у њој појављује.

деф. За n=1 у обичној диф. једн. добијамо $F(x, y, y') = 0$. То је **општи облик дј I реда.**

Ако ову једначину представимо у облику $y' = f(x,y)$, то је **нормални облик дј I реда.** (*)
(није увек могуће)

Некада није могуће аналитички решити диференцијалне једначине.
Наводимо три методе које се у том случају најчешће користе:

1) **квалитативна анализа:** испитујемо својства ф-ја које се налазе у једначини.

   нпр. да ли ће решење бити периодично, ограничено, колико ће имати нула итд.
   Такође проверавамо да ли решење уопште постоји и његову јединственост.

2) **нумеричка анализа:** тражимо приближна решења.

3) **геометријски приступ:** скицирамо графике решења.

деф. Функција $y=\varphi(x)$ је решење дј $(*)$ на интервалу (a,b) ако је:

1) диференцијабилна на (a,b);
2) таква да задовољава једначину $(*)$ на (a,b).

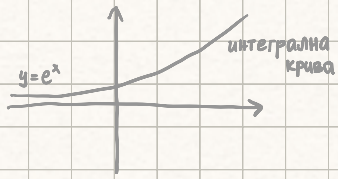
деф. Интегрална крива је крива у равни xOy која представља график решења $y=\varphi(x)$ за $(*)$.

Напомена: Осим у експлицитном облику, решење $y=\varphi(x)$ може се појавити и у имплицитном облику.

Каже се да је једначином $\Phi(x,y)=0$ (Δ) деф. решење дј $(*)$ у имплицитном облику ако постоји имплицитна ф-ја $y=\varphi(x)$, $x\in I$ која је деф. једначином (Δ) и она представља решење једначине $(*)$ на скупу I.

Тада се једначина $\Phi(x,y)=0$ назива интеграл дј $(*)$.

Пример: Тражимо: $y'=y$ ($y(x)$ - непозната функција)



Очигледно, једно решење је $y=e^x$.
Али приметимо да је $\forall c\in R$, $y=c\cdot e^x$ такође решење.

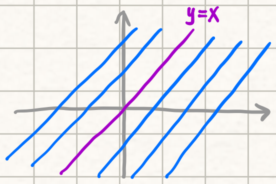
деф. Нека је $S=I\times X$ област, $S\subset R^2$.
Кажемо да је фамилија функција $y=\varphi(x,c)$ $(x\in I,\ c\in C\subset R)$ опште решење дј $(*)$ у S ако за сваку тачку $(x_0,y_0)\in S$ постоји јединствено c_0 ткд. важи $y_0=\varphi(x_0,c)$.

При томе, ф-ја $y=\varphi(x,c_0)$ мора бити решење дј $(*)$ које задовољава услов $y(x_0)=y_0$.

Напомена: Ако је опште решење деф. у имплицитном облику једначином $\Phi(x,y,c)=0$, онда се ова једначина назива општи интеграл дј $(*)$.

деф. Свако решење дј $(*)$ које је добијено доделом допустиве вредности c_0 параметру c назива се партикуларно решење.

Пример: Посматрамо следећу дј: $y'=1$.



Опште решење је: $y=x+c$.
Једно партикуларно решење је: $y=x$. $(c=c_0=0)$

Може се десити да фамилијом која представља опште решење нису описана сва могућа реш. д.ј.
Такође, може се десити да се опште решење састоји из више фамилија.

Због овога, уводимо наредни појам:

деф. Решење дј (*) је сингуларно решење ако је у свакој његовој тачки нарушена јединственост решења.

деф. Сингуларна тачка је тачка кроз коју пролазе бар два решења.

Дакле, сингуларно решење (тачније његова интегрална крива) се састоји од сингуларних тачака.

Поставља се питање: ако имамо неку криву чија је свака тачка сингуларна тачка,
да ли та крива мора представљати интегралну криву неког решења?

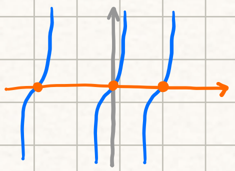
Одговор: Не мора.

Пример (јако битан): Решавамо д.ј. $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$.

Фамилија $y(x) = (x+c)^3$ је фамилија решења наше д.ј. (проверимо)
Такође, $y(x) \equiv 0$ је решење. Оно се не може добити из горње фамилије.

Значи фамилијом нису описана сва решења.

- Геометријски: Са слике видимо да су све тачке на x оси сингуларне.



$\Rightarrow$ $y \equiv 0$ - сингуларно решење

- Алгебарски: Нека је $x_0 \in R$ произв. тачка кроз коју пролази график решења

Тражимо ф-ју фамилије која пролази кроз $(x_0, 0)$: $0 = (x_0+c)^3 \Rightarrow c = -x_0 \Rightarrow y(x) = (x-x_0)^3$.

Пошто и $y(x) = 0$ пролази кроз $(x_0, 0)$ ⇒ нарушена јединственост у овој тачки
Како је x_0 произвољно ⇒ нарушена јединственост у свакој тачки x осе.
Дакле, $y=0$ (x оса) је решење чија је свака тачка синг. ⇒ $y=0$ је сингуларно решење.

- Посматрајмо координатни почетак - кроз њега пролази бесконачно решења. (лепљење)
Штавише, ово важи за сваку тачку са x осе. (слика)

Ова решења нису ни партикуларна, ни сингуларна.
Рећи ћемо да су то „нека" решења.

(ɯ и ɯ су такође решења јер
су те ф-је диф. (извод се поклапа))

деф. **Кошијев проблем** за дј (*) гласи:

Наћи решење дј $y' = f(x,y)$ при чему $y(x_0) = y_0$.

Три кључна питања код Кошијевог проблема:

1) егзистенција?
2) ако постоји, јединственост?
3) на ком максималном интервалу ће то решење бити јединствено?

Историјски, прво су се решења дј тражила у облику коначне комбинације елем. ф-ја и неодређених интеграла таквих ф-ја (то су **квадратуре**) – ово се зове **метода квадратура**.

Овако се може решити само мали број дј, онда су људи почели да испитују егзист. решења и анализу њихових својстава – ово се зове **квантитативна анализа дј**.

Формулишимо две основне теореме квантитативне анализе:

Нека је G отворен скуп и $(x_0, y_0) \in G$.
Како је G отворен $\Rightarrow$ $\exists a>0,\ b>0$, ткд. правоугаоник $\Pi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-x_0|<a,\ |y-y_0|<b\} \subset G$.

Пеанова теорема (даје егзистенцију решења)

Ако је $f \in C(\Pi)$, онда постоји решење Кошијевог проблема у некој околини тачке x_0.

Напомена: ако изаберемо тачку из Π, постојаће решење које пролази кроз ту тачку.

Пикарова теорема (даје јединственост решења) $\nearrow$ $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L \cdot |y_1 - y_2|$.

Ако је $f \in C(\Pi)$ и ако је f **Липшицова у односу на променљиву y** (тј. $f \in Lip(\Pi)$), онда постоји јединствено решење Кошијевог проблема у некој околини тачке x_0.

Још једна корисна теорема:

Довољни услови егзистенције и јединствености Кошијевог проблема су: $f \in C(G)$, $f'_y \in C(G)$.

Пример: $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$. (исти као онај)

- Јесте непрекидна $\overset{\text{Пеано}}{\Longrightarrow}$ решење постоји.
- Није Липшицова (кретање дуж праве $y=0$), па не може Пикарова.

$\boxed{1.}$ Поље праваца и интегралне криве

Посматрајмо дј I реда у нормалном облику: $y' = f(x,y)$.

Знамо да је са $y'(x_0)$ одређен нагиб ф-је $y(x)$ у тачки $(x_0, y_0) = (x_0, y(x_0))$.
Самим тим, интегрална крива која пролази кроз (x_0, y_0) мора у тој тачки имати нагиб $y'(x_0)$.

Користећи ово, можемо скицирати график решења. Наиме, можемо скицирати правце инт. кривих посматране дј цртајући кратке линије у равни xOy.

На тај начин добијамо поље праваца.

Алгоритам: а) рачунари: 1) изаберу тачке (x_i, y_i), $i = \overline{1,n}$ из неког задатог скупа;
2) рачунају $f(x_i, y_i) = y'(x_i)$;
3) исцртају на екрану.

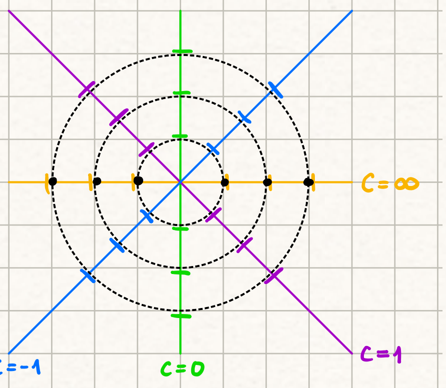
б) људи: 1) изаберу нагиб c;
2) одреде ј-ну криве за коју је $f(x,y) = c$, тј. изоклину;
3) нацртамо изоклину.

Пример: $y' = \frac{x}{y}$.

Једначине изоклина: $f(x,y) = -\frac{x}{y} = c$, $y \neq 0$ (*)

$y = -\frac{x}{c}$, $c \neq 0$ (**)

И сад фиксирамо c:
→ $c = 1 \Rightarrow y = -x$
→ $c = -1 \Rightarrow y = x$
→ $c = 0 \Rightarrow x = 0$ (због *)
→ „$c = \infty$" $\Rightarrow y = 0$ (због **)



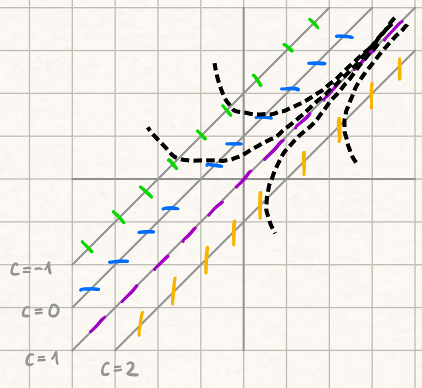
Са слике можемо проценити да су интегралне криве полукружнице. (реш. мора бити ф-ја)

Приметимо да ни једно решење није деф. на целој реалној правој.
Ово је пример дј. чија решења не можемо продужити на R.
Такође, домен сваког решења је различит.

Пример: $y' = 1 + x - y$

Изоклине: $1 + x - y = c$

$c = 0 \Rightarrow y = x + 1$
$c = 1 \Rightarrow y = x$
$c = 2 \Rightarrow y = x - 1$
$c = -1 \Rightarrow y = x + 2$



Када се нагиби поклапају са изоклином (случај $c=1$), проверавамо да ли је та изоклина и интегрална крива:

$1 = 1 + x - x \Rightarrow y(x) = x$ јесте интегрална крива.

Да ли постоји интегрална крива која додирује $y=x$?

$f(x,y) = 1 + x - y$ је непрекидна $\xRightarrow{\text{Пеано}}$ за сваку тачку из равни постоји решење чија инт. крива пролази кроз ту тачку

Да ли се интегралне криве могу пресећи?

Ако имамо дј I реда у нормалном облику, нагиб је јединствен $\Rightarrow$ нема пресека
Ако имамо дј I реда у општем облику, нема правила.

Други начин (извели спец. за овај пример):

f Липшицова $\xRightarrow{\text{Пикаро}}$ како год да изаберемо тачку из равни, постојаће тачно једна инт. крива која пролази кроз њу.

Дакле, у овом случају, интегралне криве не могу да се додирују.

$\boxed{2.}$

Дј која раздваја променљиве.
Дј са тоталним диференцијалом

деф. Дј облика $y' = f(x)\, g(y)$ зове се диф. једначина која раздваја променљиве. (*)

Како бисмо обезбедили егзистенцију реш. нека је: $f \in C(a,b)$, $g \in C(c,d)$, $(a,b) = I$, $(c,d) = J$

1) $\forall y \in J \quad g(y) \neq 0$

Пп. да једначина има решење на I $\Rightarrow$ $y' = f(x)\, g(y)$, $\forall x \in I$.

Раздвојимо променљиве: $\frac{y'}{g(y)} = f(x) \overset{/\int}{\Rightarrow} \int \frac{y'}{g(y)}\, dx = \int f(x)\, dx$

Смена $\left\{\begin{matrix} y(x) = t \\ y'dx = dt \end{matrix}\right\}$: $\int \frac{dt}{g(t)} = \int f(x)\, dx$.

Ако су $G(t)$, $F(x)$ примитивне ф-је за $\frac{1}{g(t)}$, $f(x)$, након враћања смене добијамо:

$$G(y) = F(x) + C$$ - фамилија решења

2) $\exists y_0 \in J \quad g(y_0) = 0$ (изолована нула)

Константна ф-ја $y(x) = y_0$ је решење посматране дј.

Потребно је испитати природу тог решења. Може преко Пикара, али и на други начин.

Посматрамо несвојствени интеграл $\int_{y_0}^{\bar{y}} \frac{dy}{g(y)}$:

1° конвергира $\Rightarrow$ кроз (x_0, y_0) пролази бесконачно интегралних кривих;
2° дивергира $\Rightarrow$ кроз (x_0, y_0) пролази тачно једна интегрална крива.

Специјалан случај овога доказујемо у Л1 (одмах након примера).

Пример: $y' = 3y^{2/3}$ (опет)

У $\boxed{0}$ смо видели да је $y = 0$ синг. реш.

Посматрајмо несвојствени интеграл $\int_{0}^{\bar{y}} \frac{dy}{y^{2/3}}$: $\frac{2}{3} < 1$ $\Rightarrow$ конвергира

$\Rightarrow$ постоји бесконачно реш. кроз $(x_0, 0)$

Лема 1: Посматрамо дј $y' = g(y)$.

Ако су испуњени услови Пикарове теореме $(g \in C(a,b),\ g \in Lip(a,b))$ и $g(y_0) = 0$, онда несвојствени интеграл $\int_{y_0}^{\bar{y}} \frac{dy}{g(y)}$ дивергира.

Доказ: БУО Претпоставимо $g(y) > 0$, за $y \in (y_0, \bar{y})$

$$g \in Lip(a,b) \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| = |g(y) - 0| = g(y) \leq L \cdot (y - y_0), \quad за \quad y \in (y_0, \bar{y})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{g(y)} \geq \frac{1}{L(y-y_0)}, \quad за \quad y \in (y_0, \bar{y})$$

Тада је
$$\int_{y_0}^{\bar{y}} \frac{dy}{g(y)} \geq \frac{1}{L} \cdot \int_{y_0}^{\bar{y}} \frac{dy}{y - y_0} = \left\{ \begin{matrix} y - y_0 = t \\ dy = dt \end{matrix} \right\} = \frac{1}{L} \cdot \int_{0}^{\bar{y}-y_0} \frac{dt}{t}$$

Последњи интеграл дивергира,
Самим тим, по поредбеном критеријуму, и почетни $\int_{y_0}^{\bar{y}} \frac{dy}{g(y)}$ дивергира.

* Посматрајмо сада дј. $M(x,y) + N(x,y) \cdot y' = 0.$ (**)

Приметимо да сваку дј I реда у нормалном облику можемо записати у овом облику.

Ако постоји $f(x,y)$ ткд. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$, онда је (**) дј са тоталним диференцијалом.

Зашто се зове овако? Претпоставимо да постоји такво f. Тада:

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \qquad (=0)$$

Ако (**) јесте дј са тот. диф, онда су са $f(x,y) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ имплицитно задата реш. (**):

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}(c) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot y' = M(x,y) + N(x,y) \cdot y'$$

Занима нас под којим условима постоји таква функција f?

Теорема 1: Ако су $M = M(x,y)$, $N = N(x,y)$ непр. диф. на просто повезаној области D

и ако важи $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$ за $\forall (x,y) \in D$,

онда постоји ф-ја f ткд. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$.

3. Линеарна дј првог реда

деф. $a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)$ је општи облик линеарне дј I реда. $\big(a(x), b(x), c(x) \in C(a,b)\big)$

Ако $a(x) \neq 0$, добијамо стандардни облик: $y' + p(x)\,y = q(x)$. $\left(p(x) = \frac{b(x)}{a(x)},\quad q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}\right)$

Ако је $q(x) = 0$, добијамо хомогену лин. дј I реда: $y' + p(x)\,y = 0$.
Иначе је нехомогена.

Напомена: Хомогена је истовремено и дј која раздваја променљиве.

Такође, скуп њених решења је увек непразан, јер увек има трив. реш. $y = 0$.

деф. Нека је L пресликавање век. простора $(C^1(a,b), +, \cdot)$ у $(C(a,b), +, \cdot)$ деф. са:

$$(\forall y \in C^1(a,b))\ (\forall x \in (a,b)) \qquad L(y(x)) = y'(x) + p(x)\,y(x)$$

Тада је L линеарно и зовемо га линеарни диференцијални оператор.

Напомена: Приметимо: ако имамо хомогену, то можемо записати као $L(y)(x) = 0$.
Дакле, наш проблем се сада своди на тражење језгра $\operatorname{Ker} L$.

* Како решавамо лин дј I реда $y' + p(x)\,y = q(x)$?

I начин: Метод интеграционог фактора:

Тражимо помоћну функцију $\mu = \mu(x)$ ткд. кад помножимо обе стране,
на левој страни добијемо производ извода ф-ја y и μ:

$$(y(x)\cdot\mu(x))' = q(x)\,\mu(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad y'\mu + y\mu' = q\mu$$

Ако то успемо: $y(x)\,\mu(x) = \int \mu(x)\,q(x)\,dx + c$, тј. $y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int q(x)\,\mu(x)\,dx + c\right)$, $c \in \mathbb{R}$

Како проналазимо такво $\mu(x)$?

После множења: $\mu(x)\,y'(x) + \utilde{\mu(x)}\,\utilde{y(x)}\,\utilde{p(x)}$ и то треба да буде $(\mu y)' = \mu y' + \utilde{\mu' y}$

Дакле: $\mu'(x) = \mu(x)\,p(x)$, а то раздваја променљиве.

$$\Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = p \quad \left(\begin{array}{l}\text{пошто } \mu \text{ бирамо,}\\ \text{нећемо бирати } \mu = 0\end{array}\right) \Rightarrow \ln|\mu(x)| = \int p(x)\,dx + \cancel{c} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

свј. које c па га фикс.

Коначно: $y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)\,e^{\int p(x)dx}\,dx + c\right)$, $c \in \mathbb{R}$.

Докажимо да су овим изразом описана сва решења наше дј:

Нека је $y=\tilde{y}(x)$ произвољно решење дј на неком интервалу. Тада:

$$\left(\tilde{y}(x)\cdot e^{\int p(x)dx} - \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)' = \tilde{y}'(x)e^{\int p(x)dx} + \tilde{y}(x)p(x)e^{\int p(x)dx} - q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$= e^{\int p(x)dx}\left(\tilde{y}'(x)+\tilde{y}(x)p(x)-q(x)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{y}(x)\cdot e^{\int p(x)dx} - \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = c \quad \Rightarrow \quad \tilde{y}(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right), \quad c\in R.$$

II начин: **Лагранжов метод варијације константи:**

Прво решавамо одговарајућу хомогену линеарну дј:

$y'(x)+p(x)y(x)=0$, а то је дј која раздваја променљиве

Лако добијамо да су сва решења облика: $y(x)=c\cdot e^{-\int p(x)dx}$, $c\in R$

Затим „варирамо константу": тражимо решења у облику $y(x)=c(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}$.

Тада је $y'(x)=c'(x)e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$. Убацимо то у нашу једначину:

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx} - \cancel{c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}} + \cancel{c(x)e^{-\int p(x)dx}p(x)} = q(x)$$

$$\Rightarrow c'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow c'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + c$$

Коначно, опет добијамо исто: $y(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right)$, $c\in R$.

(Већ смо доказали да су сва решења овог облика)

III начин: $\underset{\substack{\downarrow\\ \text{опште за}\\ \text{нехомогену}}}{y_{ON}(x)} = \underset{\substack{\downarrow\\ \text{опште за}\\ \text{хомогену}}}{y_{OH}(x)} + \underset{\substack{\downarrow\\ \text{партикуларно}\\ \text{за нехомогену}}}{y_{PN}(x)}.$

Зашто ово важи?

$$L(y)(x) = L(y_{OH}+y_{PN})(x) \overset{L\text{-лин.}}{=} L(y_{OH})(x) + L(y_P(x)) = 0 + q(x) = q(x)$$

Напомена: На почетку смо рекли $a(x), b(x), c(x) \in C(a,b)$.
То смо урадили да бисмо обезбедили постојање решења. (по Пеану)

Дакле, ова решења су дефинисана на интервалу (a,b). (тј. локално)

$\boxed{4.}$ Динамички модели раста популације

деф. **Популација** је група јединки исте врсте које насељавају одређени простор и могу да се размножавају.

деф. **Величина популације** је број јединки популације.

Може да зависи од: 1) фактора који не зависе од густине (клима, катастрофе...)
2) фактора који зависе од густине (храна, вода, светлост ...)

деф. **$P(t)$**: вел. популације у тренутку t.

* деф. **Малтусов модел:**
$$P'(t) = k\cdot P(t)$$
$$P(0) = P_0$$

→ Брзина раста популације пропорционална је величини популације.

Дакле, ово је ништа друго него Кошијев проблем.
Уз то, наша дј раздваја променљиве, па лако налазимо опште реш:

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = k \quad \Rightarrow \quad \int \frac{P'(t)}{P(t)} = kt + c, \qquad c\in R$$

$$\Rightarrow \quad \ln|P(t)| = kt + c$$

$$\Rightarrow \quad P(t) = c_1\cdot e^{kt}, \qquad c_1\in R$$

Како је $P(0) = P_0 \quad \Rightarrow \quad P_0 = c_1 e^0$

$$\Rightarrow \quad c_1 = P_0$$

$\Rightarrow$ решење Кошијевог проблема је $P(t) = P_0\cdot e^{kt}$.

* деф. **Логистички модел:** $P'(t) = k\cdot P(t)\cdot\left(1-\frac{P(t)}{K}\right)$, $P(t_0) = P_0$ K - макс. капацитет система

→ 1) Док је број јединки мали, долази до експоненцијалног раста;
  2) Када популација постане велика, брзина раста опада.

И у овом случају имамо дј која раздваја променљиве. Опет ћемо да је решимо:

$$\frac{P'(t)}{P(t)\left(1-\frac{P(t)}{K}\right)} = k \quad \overset{\int}{\Rightarrow} \quad \int \frac{P'(t)\,dt}{P(t)\left(1-\frac{P(t)}{K}\right)} = kt + c,\quad c\in R$$

$$\overset{P(t)=u}{\Longrightarrow} \quad \int \frac{K\,du}{u(K-u)} = kt + c$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{K-u+u}{u(K-u)}\,du = \int\frac{du}{u} + \int\frac{du}{K-u} = -\underline{\ln\left|\frac{K-u}{u}\right|} = kt + c \qquad \text{(напомена)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{K-u}{u} = \frac{K}{u} - 1 = C_1 e^{-kt},\quad C_1 > 0$$

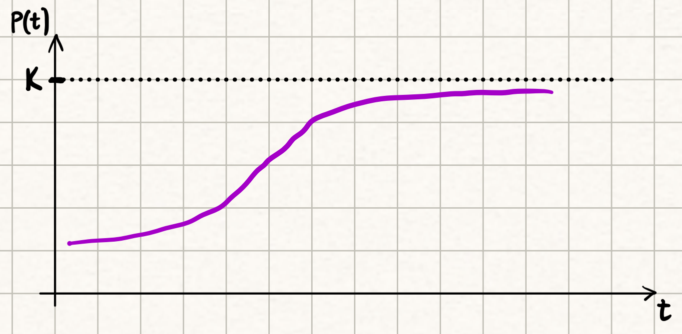
$$\Rightarrow \quad u = \underline{P(t) = \frac{K}{1+C_1\cdot e^{-kt}}}$$

Како је $P(t_0) = P_0$ $\Rightarrow$ $P_0 = \frac{K}{1+C_1e^{-kt_0}}$

$\Rightarrow$ $C_1 = e^{kt_0}\frac{K-P_0}{P_0}$

$\Rightarrow$ решење Кошијевог проблема је $\underline{P(t_0) = \frac{KP_0}{P_0+(K-P_0)\cdot e^{-k(t-t_0)}}}$

Напомена: Решење овог модела има интегралну криву коју зовемо **логистичка крива:**



5. Неке примене дј

5.1. Физика (кретање)

деф. $v = v(t)$ - брзина материјалне тачке која се креће по x-оси.
$x = x_0$ - њен положај у тренутку $t = t_0$.

Одређујемо закон кретања, тј. ф-ју $x = x(t)$ која одређује положај тачке.
Очекивано, овај проблем се своди на решавање Кошијевог проблема: $x'(t) = v(t)$
$x(t_0) = x_0$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} v(s)\,ds \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)\,ds.$$

I Њутнов закон: Свако тело остаје у стању мировања или равномерног праволинијског кретања, све док га нека сила не примора да то стање промени.

II Њутнов закон: $F = m \cdot a$

Ово можемо записати и овако: $F(t, x, x') = m \cdot x''(t)$ - то је дј II реда

↳ сила зависи од x, $x' = v$, t

Напомена: II ⇒ I (јер $F = 0 \Rightarrow x''(t) = 0 \Rightarrow x(t) = v_0 t + x_0$)

5.2 Њутнов закон хлађења

деф. T_0 - температура тела у тренутку t_0.

τ - температура средине, $\tau < T_0$, $\tau = const$

$T(t)$ - температура тела у тренутку t

Њутнов закон хлађења: $T'(t) = -k(T(t)-\tau)$, $k > 0$
$T(0) = T_0$

Чинилац $(T(t)-\tau)$ нам говори да је брзина хлађења сразмерна разлици темп. тела и средине.
Минус нам говори да температура опада.

Ово је нови Кошијев проблем и опет имамо дј која раздваја промењиве.
Уколико бисмо уместо $\tau = const$ имали $\tau(t)$, онда имамо линеарну дј.

Решимо сада наш Кошијев проблем:

$$\frac{T'(t)}{T(t)-\tau} = -k \quad \Rightarrow \quad \int \frac{T'(t)\,dt}{T(t)-\tau} = -kt + c, \quad c \in R$$

$$\overset{T(t)=u}{\Rightarrow} \quad \ln|u-\tau| = -kt + c$$

$$\Rightarrow \quad |u-\tau| = e^{-kt+c} = c_1 \cdot e^{-kt}, \quad c_1 = e^c > 0$$

$$\Rightarrow \quad u - \tau = c_2 \cdot e^{-kt}, \quad c_2 \in R\setminus\{0\}$$

$$\Rightarrow \quad T(t) = \tau + c_2 \cdot e^{-kt}$$

$$T(0) = T_0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = T_0 - \tau$$

$\Rightarrow$ решење Кошијевог проблема је $T(t) = \tau + (T_0 - \tau)\cdot e^{-kt}$

Напомена: Да бисмо добили k, потребна нам је темп. тела у још неком тренутку.

5.3 Археологија (закон радиоактивног распада)

Идеја: Концентрација изотопа ^{14}C у живом организму је стална. Након смрти, она опада. Ту чињеницу користимо за одређивање старости материјала.

деф. $N(t)$ - број нераспаднутих језгара ^{14}C у тренутку t

λ - константа радиоактивног распада

$N_0 = N(0)$

$T_{1/2}$ - време полураспада (време потребно да се распадне половина свих језгара)

Закон радиоактивног распада: $N'(t) = -\lambda \cdot N(t)$, $\lambda > 0$
$N(0) = N_0$

Ово је нови Кошијев проблем и опет имамо дј која раздваја променљиве.
Решимо га:

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \int \frac{N'(t)}{N(t)}\, dt = -\lambda t + c, \quad c \in R$$

$$\Rightarrow \quad N(t) = c_1 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$N_0 = c_1 \cdot e^{-\lambda \cdot 0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = N_0$$

$$\Rightarrow \quad N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Како одређујемо λ?

Преко полураспада: $\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot T_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$

Дакле, решење Кошијевог проблема је $N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$

Напомена: По конвенцији $T_{1/2}$ за ^{14}C је 5730 ± 40 година.

5.4 Хемија (закон о дејству маса)

Питамо се: како ће се мењати концентрација реактаната и производа током времена?

Под концентрацијом подразумевамо број честица у јединици запремине, уз два услова:

1) хомогеност (равномерно распоређене честице)
2) непрекидност (велик број честица)

Посматрамо: $aX + bY \underset{k^-}{\overset{k^+}{\rightleftarrows}} cZ$, k^+, k^- - константе брзина директног и повратног смера реакције

Моделујемо реакцију: $X + Y \xrightarrow{k} Z$.

Означимо зависност концентрације од времена у реакцији са: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Моделирамо промене концентрација:

$$\left.\begin{array}{l}\text{До смањења конц. производа у (1) не доводи ништа.}\\ \text{До повећања доводи интеракција реактаната.}\end{array}\right\} \quad \frac{dz}{dt} = \left(\begin{array}{c}\text{интеракција молекула}\\ \text{реактаната } X \text{ и } Y\end{array}\right) - 0$$

Аналогно:

$$\frac{dx}{dt} = 0 - \left(\begin{array}{c}\text{интеракција са } y\\ \text{да настане } z\end{array}\right), \qquad \frac{dy}{dt} = 0 - \left(\begin{array}{c}\text{интеракција са } x\\ \text{да настане } z\end{array}\right)$$

Концентрација јесте број молекула у јединици запремине,
али то можемо видети и као вероватноћу налажења молекула у јединици запремине.

Претпоставка је да су догађаји налажења реактаната X и Y у јединици запремине независни:

$$P(X \cap Y)(t) = (P(X) \cdot P(Y))(t) = x(t) \cdot y(t).$$

Ако се X и Y нађу у јединици запремине, долази до реакције.
А то је управо реализација догађаја $X \cap Y$.

Осим тога, вероватноћа зависи и од услова (темп, pH, ...), а ту информацију носи k.

Закључак:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & z'(t) = k \cdot x(t) \cdot y(t)\\ (2) & x'(t) = -k \cdot x(t) \cdot y(t)\\ (3) & y'(t) = -k \cdot x(t) \cdot y(t)\end{array}\right\} \text{ систем дј, са три непознате функције } (x, y, z)$$

Напомена: Једначина (1) нам говори брзину реакције. Зове се **закон о дејству маса**.

6. Пикарова теорема

Посматрајмо Кошијев проблем (*): $y' = f(x, y)$

$y(x_0) = y_0$

Посматрајмо и интегралну једначину (**): $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$

Питамо се да ли решење Кошијевог проблема постоји, да ли је јединствено и на ком интервалу је дефинисано.

Егзистенцију нам даје Пеанова теорема, јединственост Пикарова, а макс. интервал деф. нам даје теорема о максималном интервалу постојања.

Лема 1 (о еквиваленцији): Нека је $(x_0, y_0) \in D$ и $f \in C(D)$.

$y = \varphi(x) \in C^1(a,b)$ је решење Кошијевог проблема (*) акко је $y = \varphi(x)$ непрекидно решење (**).

Доказ: (⇒) Нека је $y = \varphi(x) \in C^1(a,b)$ решење (*).

Посматрајмо једнакост $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$: обе стране су непр. на (a,b).
То значи да можемо интегралити у границама од x_0 до x:

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\,ds, \quad \text{тј.} \quad \varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\,ds.$$

Дакле, $y = \varphi(x)$ заиста јесте непрекидно решење интегралне једначине (**).

(⇐) Нека је $y = \varphi(x) \in C(a,b)$ реш. инт. једначине (**): $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\,ds$. (Δ)

Тада је $f(s, \varphi(s)) \in C(a,b) \Rightarrow \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\,ds \in C^1(a,b)$

Диференцирањем (Δ): $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, $x \in (a,b)$ (може због горњег реда)
Значи: $\varphi \in C^1(a,b)$ задовољава једначину из (*).

Знамо и $\varphi(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(s, \varphi(s))\,ds \Rightarrow \varphi(x_0) = y_0 \Rightarrow$ задовољава услов из (*)

Дакле, $y = \varphi(x)$ заиста јесте диференцијабилно решење Кошијевог проблема (*).

Припремамо се да докажемо Пикарову теорему.

деф. Тачка $x \in X$ је непокретна / фиксна тачка пресликавања $f: X \to X$ ако је $f(x) = x$.

деф. Метрички простор је комплетан ако је у њему сваки Кошијев низ конвергентан.

деф. Нека је (X, d) метрички простор и $f: X \to X$.
f је контракција ако постоји $0 < q < 1$ ткд. $d(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in X$.

деф. Функција $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^2)$ задовољава Липшицов услов у односу на променљиву y на скупу D ако постоји $L > 0$ ткд. $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D$.

Пишемо $f \in Lip(D, L)$.

Теорема 1 (Банахова): Свака контракција комплетног метричког простора X у самог себе има тачно једну фиксну тачку.

Посматрајмо интегралну једначину $(**)$: $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds, \quad f \in C(a, b)$

деф. Нека је X неки простор непрекидних ф-ја.
Дефинишемо један интегрални оператор $A: X \to X$ са $A(y)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$

Сада се интегрална једначина може записати као $y - A(y) \equiv 0$.
↳ нула ф-ја

По л1, то значи да Кошијев проблем $(*)$ има јединс. реш. ако A има тачно једну фиксну тачку.

Теорема 2 (I теорема о средњој вредности за интеграле):

Нека $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $m = \inf_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{[a,b]} f(x)$ и $g(x) \geq 0$ $(x \in [a,b])$.

Тада постоји $\mu \in [m, M]$ ткд. $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \mu \int_a^b g(x)\, dx$.

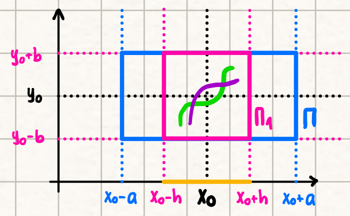
Специјално, ако $f \in C[a,b]$, онда постоји $c \in (a,b)$ ткд. $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x)\, dx$.

Пикарова теорема: Нека је $f \in Lip(\Pi)$, $\quad \underline{\Pi} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x-x_0| \le a, \ \ |y-y_0| \le b\}$.

Тада постоји јединствено решење $y \in C^1[x_0-h, \ x_0+h]$ Кошијевог проблема (*).

При томе: $h < \frac{1}{L}$, $0 < h \le \min\{a, \frac{b}{M}\}$, $\quad M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi} |f(x,y)|$.

Доказ: Идеја целог доказа је да се позовемо на Банахову теорему.



- Прво ћемо конструисати комплетан метрички простор:

$$X_h := \{ y \in \underline{C[x_0-h, \ x_0+h]} : \ \underbrace{|x-x_0| \le h, \quad |y(x)-y_0| \le b}_{\text{график } \in \Pi_1} \}$$

$$d_{X_h}(\underline{y_1}, \underline{y_2}) := \max_{|x-x_0|\le h} |y_1(x) - y_2(x)|$$

Како је простор непр. ф-ја комплетан, а X_h његов затворени подскуп,
$\overset{A2}{\Rightarrow}$ (X_h, d_{X_h}) је такође комплетан метрички простор.

- Сада тражимо функцију која ће нам касније служити као контракција:

Узмимо онај интегрални оператор $A(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$.
Докажимо да A слика X_h баш у X_h.

→ $(\forall y \in X_h)$ $A(y)$ је непрекидна функција?

f јесте непр. $\Rightarrow$ $\int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$ је диф. $\Rightarrow$ $A(y)$ је диф. $\Rightarrow$ $A(y)$ је непр.

→ Да ли график остаје у Π_1? За $\forall y \in X_h$ $\forall x \in [x_0-h, \ x_0+h]$ важи:

$$|A(y)(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds \right| \overset{(!)}{\le} \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, y(s))|\, ds \right| \overset{(!!)}{\le} M \cdot \left| \int_{x_0}^{x} ds \right|$$

$$= M \cdot |x-x_0| \le M \cdot h \underset{h \le \min\{a, \frac{b}{M}\}}{\le} b$$

Дакле, $A(y) \in X_h$.

(!) - увучемо апс. у интеграл, по О.И.Н.
али не знамо да ли је $x < x_0$,
зато пишемо и спољну

(!!) - како је Π_1 компакт
достиже се макс. вр.
па знамо да M постоји

* Остаје да докажемо да A заиста јесте контракција. То радимо по дефиницији:

Изаберимо две произвољне ф-је $y_1, y_2 \in X_h$

$$d_{X_h}(A(y_1), A(y_2)) := \max_{|x-x_0|\le h} |A(y_1)(x) - A(y_2)(x)|$$

$$= \max_{|x-x_0|\le h} \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))\, ds - \int_{x_0}^{x} f(s, y_2(s))\, ds \right|$$

$$= \max_{|x-x_0|\le h} \left| \int_{x_0}^{x} \big(f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) \big)\, ds \right|$$

$$\overset{\text{О.И.Н.}}{\le} \max_{|x-x_0|\le h} \left| \int_{x_0}^{x} | f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) |\, ds \right|$$

$$\overset{f \in \mathrm{Lip}(\Pi)}{\le} L \cdot \max_{|x-x_0|\le h} \left| \int_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_2(s)|\, ds \right|$$

$$\overset{\substack{\text{Т2}\\ \text{спец.}}}{=} L \cdot \max_{|x-x_0|\le h} \Big| \underbrace{|y_1(c) - y_2(c)|}_{f(c)} \cdot \underbrace{(x-x_0)}_{\int_{x_0}^{x} 1\, ds} \Big| \qquad (\text{узели смо } g(x) = 1)$$

$$\le L \cdot \underline{h} \cdot \max_{|x-x_0|\le h} |y_1(x) - y_2(x)| \qquad (f(c) \le \max f(x))$$

$$= \underbrace{L \cdot h}_{q} \cdot d_{X_h}(y_1, y_2).$$

По услову теореме је $h < \frac{1}{L}$, то значи $q < 1$ $\Rightarrow$ A јесте контракција.

* Коначно, можемо да применимо Банахову теорему.

То значи да A има јединствену фиксну тачку $y^* \in X_h$.

Другим речима, y^* је јединствено реш. инт. једн. (**) и деф. је на $[x_0-h, x_0+h]$.

По ЛМ: Кошијев проблем има јединствено реш. које је $C^1[x_0-h, x_0+h]$.

$\boxed{7.}$ Дј вишег реда

деф. $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ је општи облик дј n-тог реда. (1)

При томе, $y(x)$ је непозната функција, $F: D \to R^n$ и $D \subseteq R^{n+2}$ је отворен.

деф. $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ је нормални облик дј n-тог реда. (2)

При томе, $y(x)$ је непозната функција, $F: G \to R^n$ и $G \subseteq R^{n+1}$ је отворен.

Дј у нормалном облику су од великог значаја, јер су разрађене технике њиховог решавања.

Наравно, не можемо увек из општег добити нормалан облик.
Ипак, испоставља се да је то могуће када су испуњени услови теореме о имплицитној функцији.

Сада ћемо уопштити појмове које смо увели за дј I реда.

деф. ф-ја $\varphi(x)$, $x \in (a,b)$ је решење дј (2) на (a,b)
ако $\exists\, \varphi', \dots, \varphi^{(n)}(x)$ на (a,b) и ако задовољава дј (2).

деф. Кошијев проблем за дј (2) гласи:

Одредити решење $y = \varphi(x)$ дј (2) ткд: $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_1$, …, $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Ово ћемо геометријски интерпретирати на ДЈБ, када будемо радили системе дј.

деф. Фамилија ф-ја $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$, $x \in (a,b) = I$, $(C_1, \dots, C_n) \in C \subseteq R^n$
је опште решење дј (2) у области $\tilde{G} = I \times X \subseteq G$ ако за $\forall (x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \tilde{G}$ систем

$$y_i = \varphi^{(i)}(x_0, C_1, \dots, C_n) \qquad i = \overline{0, n-1}$$

има јединствено решење $(C_1^0, \dots, C_n^0) \in C$
ткд. ф-ја $y = \varphi(x, C_1^0, \dots, C_n^0)$ јесте решење дј (2).

Геометријски, интегралне криве пролазе кроз тачку, али у простору веће димензије.

Уопштавамо и тврђења:

Теорема 1 (Пеанова): Нека $f \in C(G)$.

Тада за сваку тачку $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in G$ постоји Кошијево реш. дј (2) кроз ту тачку.

Теорема 2 (Пикарова):

Нека $f \in C(G)$ и нека f испуњава Липшицов услов по свакој од променљивих $y, y', \dots y^{(n-1)}$ на сваком компакту садржаном у G.

Тада за сваку тачку $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in G$ постоји јединст. реш. $y = \varphi(x)$ Кошијевог проблема дј (2) деф. у некој околини тачке x_0.

Теорема 3:

Нека $f, \frac{\partial f}{\partial y}, \dots \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \in C(G)$.

Тада за сваку тачку $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in G$ постоји јединст. реш. $y = \varphi(x)$ Кошијевог проблема дј (2) деф. у некој околини тачке x_0.

Напомена: Сва три тврђења важе ЛОКАЛНО.

деф. Општи облик линеарне дј n-тог реда је једначина

$$\tilde{a}_0(x)\cdot y^{(n)}(x) + \tilde{a}_1(x)\cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + \tilde{a}_{n-1}(x)\cdot y'(x) + \tilde{a}_n(x)y = \tilde{b}(x)$$

$\tilde{a}_i(x)$ су коефицијенти. (функције на (a,b))

$\tilde{b}(x)$ је слободни члан. (функција на (a,b))

деф. Ако је $b(x) \equiv 0$, дј је хомогена.
Иначе је нехомогена.

деф. Ако је $\tilde{a}(x) \neq 0$, добијамо стандардни облик линеарне дј n-тог реда:

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)\cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)\cdot y'(x) + a_n(x)y = b(x).$$

На даље, посматрамо ову једначину.

Теорема 4 (Теорема о егзистенцији и јединствености решења): (ТЕЈР)

Ако $a_i(x),\ b(x) \in C(a,b)$,

онда $\forall (x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in G$ постоји јединст. реш. $y = \varphi(x) \in C^{(n)}(a,b)$ Кошијевог проблема дј (2).

Напомена: Сада је решење на (a,b), а не само у околини x_0.

* Посматрамо хомогену лин. дј n-тог реда:

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)\cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)\cdot y'(x) + a_n(x)y = 0 \qquad (3)$$

Како бисмо обезбедили постојање решења, по ТЕЈР је довољно да претпоставимо $a_i \in C(a,b)$.
Приметимо да увек имамо тривијално решење $y(x) = 0$, $x \in (a,b)$.

деф. Нека је L_n пресликавање век. простора $(C^{(n)}(a,b), +, \cdot)$ у $(C(a,b), +, \cdot)$ деф. са:

$$(\forall y \in C^{(n)}(a,b))\ (\forall x \in (a,b)) \quad L_n(y(x)) = y^{(n)}(x) + a_1(x)\cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)\cdot y'(x) + a_n(x)y$$

Тада је L_n линеарно и зовемо га линеарни диференцијални оператор.

Напомена: Приметимо: ако имамо хомогену, то можемо записати као $L_n(y)(x) = 0$.
Дакле, наш проблем се сада своди на тражење језгра $\mathrm{Ker}\, L_n$

Користећи L_n, доказаћемо да скуп свих решења дј (3) образује векторски простор у односу на сабирање функција и множење функција скаларом.

Теорема 5: Ако су $y_i(x)$ $(i = \overline{1,k})$ решења дј (3) на (a,b)

онда је и ф-ја $y(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot y_i(x)$ реш. дј (3) на (a,b). $(\forall c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R})$

Доказ: Нека је $x \in (a,b)$.

$$L_n\left(\sum c_i y_i(x)\right) \overset{L_n\text{- лин.}}{=} \sum c_i \cdot \underbrace{L_n(y_i)(x)}_{\substack{0 \\ (y_i\text{ - решење})}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot y_i(x) \text{ јесте решење.}$$

Закључак: Скуп решења дј (3) је векторски потпростор за $(C^{(n)}(a,b), +, \cdot)$.

(непразан ($y \equiv 0$) и лин. комб. остаје у њему)

Занима нас димензија и база тог век. потпростора.
Одговор на то тражимо у наредна два питања.

$\boxed{8.}$ Хомогене лин. Дј n-тог реда

(лин. нез. функција, Вронскијан)

деф. Нека су $f_i:(a,b)\to R$ $(i=\overline{1,m})$ функције и $D\subset(a,b)$

$(\forall(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in R^m)(\forall x\in D)$ $\sum^m \alpha_i f_i(x)=0 \Rightarrow \alpha_i=0$: линеарно независне функције на D.

$(\exists(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in R^m, \sum^m \alpha_i^2\neq 0)(\forall x\in D)$ $\sum^m \alpha_i f_i(x)=0$ линеарно зависне функције на D.

Пример: 1) $f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=e^{-x}$.

Нека су $\alpha_1,\alpha_2\in R$ и важи $\forall x\in(a,b)$ $\alpha_1 e^x+\alpha_2 e^{-x}=0$
Диференцирањем, добијамо: $\alpha_1 e^x-\alpha_2 e^{-x}=0$ } (систем)

Фиксирамо $x=x_0\in(a,b)$: добијамо систем лин. једначина по α_1,α_2.

$\Delta=\begin{vmatrix} e^{x_0} & e^{-x_0}\\ e^{x_0} & -e^{-x_0}\end{vmatrix}=-2\neq 0 \overset{\text{Крамер}}{\Longrightarrow}$ систем има јединствено решење.
Уз то, Δ не зависи од x_0, па систем има јединствено решење за $\forall x\in(a,b)$.

А како $\alpha_1=\alpha_2=0$ јесте решење, оно мора бити и јединствено.
Дакле, e^x и e^{-x} су лин. нез. на (a,b).

2) Аналогно, $\sin x$ и $\cos x$ су лин. нез. на (a,b).

деф. Нека $f_1,\dots,f_n$ имају све изводе до реда $n-1$ на интервалу $(a,b)\subset R$.

Вронскијан / детерминанта Вронског ф-ја $f_1,\dots,f_n$ на (a,b) је функционална детерминанта

$$W(f_1,\dots,f_n)(x):=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x)\\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}$$

Приметимо да је ово управо детерминанта која нам се појавила у примеру.

Теорема 1: Нека $f_1, \dots, f_n$ имају све изводе до реда $n\text{-}1$ на интервалу $(a,b) \subset R$.

Ако су те ф-је лин. зависне на (a,b), онда $W(f_1, \dots, f_n)(x) = 0, \quad \forall x \in (a,b)$.

Доказ: Нека су $f_1, \dots, f_n$ лин. зависне $\Rightarrow$ $\exists \alpha_i \in R \; (i=\overline{1,n})$, $\sum^n \alpha_i^2 \neq 0$ и $\sum^n \alpha_i f_i(x) = 0$.

Пошто постоје сви изводи до $(n\text{-}1)$, онда ћемо диференцирати $(n\text{-}1)$ пут.
У истом кораку, фиксираћемо $x = x_0 \in (a,b)$

$$\left.\begin{array}{lcccl}
\alpha_1 f_1(x_0) & + & \dots & \alpha_n f_n(x_0) & = 0 \\
\alpha_1 f_1'(x_0) & + & \dots & \alpha_n f_n'(x_0) & = 0 \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\
\alpha_1 f_1^{(n-1)}(x_0) & + & \dots & \alpha_n f_n^{(n-1)}(x_0) & = 0
\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{ово је систем} \\ \text{по } \alpha_1, \dots, \alpha_n\end{array}$$

Овај систем има и тривијално, али и нетривијално решење $\Rightarrow$ $\Delta = 0$.
(због лин. зав.)

А шта је Δ овог система? Па управо Вронскијан $\Rightarrow$ $W(f_1, \dots, f_n)(x_0) = 0$.
Како је x_0 произвољно, ово онда важи за $\forall x \in (a,b)$.

Последица: Ако $f_1, \dots, f_n$ имају све изводе до реда $n\text{-}1$ на $(a,b) \subset R$
(контрапозиција) и ако $W(f_1, \dots, f_n)(x_0) \neq 0$ за неко $x_0 \in (a,b)$ $\Rightarrow$ $f_1, \dots, f_n$ су лин. независне на (a,b).

Обрнуто не мора да важи! (пример: $f_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, $f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$ су лин. нез. и $W = 0$)

Да ли можемо да додамо неки услов ткд. имамо обрнут случај?
Можемо: непрекидност. Тај услов управо прави везу са нашом дј.

Теорема 2: Нека су $a_i \in C(a,b)$ и нека су $y_i = y_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ лин. независна реш. дј (3) на (a,b).

Тада је $\forall x \in (a,b)$ $W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0$.

Доказ: на ДЈБ.

Последица: Нека су $a_i \in C(a,b)$.

Решења $y_1, \dots, y_n$ дј (3) јесу лин. незав. на (a,b) акко $\exists x_0 \in (a,b)$ $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) \neq 0$.

Доказ: ($\Rightarrow$) овај смер је Т2.

($\Leftarrow$) овај смер је последица Т1.

$\boxed{9.}$

Хомогене лин. дј n-тог реда

(фунд. скуп решења, теорема о општем решењу)

Подсетимо се: у $\boxed{7}$ смо доказали да је скуп решења векторски простор.
Тражимо његову димензију и базу.

деф. **Фундаментални скуп решења** дј (3) на (a,b) је сваки скуп од n лин. независних решења дј (3) на (a,b).

(Ово ће бити једна база нашег векторског простора)

Теорема 1 (о егзистенцији фундаменталног скупа решења):

Ако су $a_i \in C(a,b)$, онда дј (3) има фундаментални скуп решења на (a,b).

Доказ: Нека је $x_0 \in (a,b)$.

По ТЕЈР постоје решења $y_i = y_i(x)$ на (a,b) за дј (3) ткд. задовољавају услове:

$$\begin{array}{llllll}
y_1: & y_1(x_0)=1, & y_1'(x_0)=0, & \dots, & y_1^{(n-1)}(x_0)=0 \\
y_2: & y_2(x_0)=0, & y_2'(x_0)=1, & \dots, & y_2^{(n-1)}(x_0)=0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
y_n: & y_n(x_0)=0, & y_n'(x_0)=0, & \dots, & y_n^{(n-1)}(x_0)=1
\end{array}$$

(Бирамо $y_i = 1$ или $y_i = 0$, јер знамо $\forall x_0, y_0, \dots, y_{n-1}$ постоји решење.)

Тада је $W(y_1,\dots,y_n)(x) = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \xRightarrow{\boxed{8}\,\text{Т2. п}} \quad y_1,\dots,y_n$ су лин. нез. реш (3)

$\xRightarrow{\text{деф.}} \quad y_1,\dots,y_n$ јесте фунд. скуп. реш.

Напомена: Фунд. скуп. реш. није јединствен. Постоји их бесконачно. (изаберемо друге y_i)

Теорема 2 (о општем решењу):

Нека су $a_i \in C(a,b)$
Ако је $y_1, \dots, y_n$ фунд. скуп реш. дј (3) на (a,b), онда је опште решење дј (3) облика:

$$\sum^{n} c_i \cdot y_i(x) \quad , \qquad c_i \in R$$

Доказ: По $\boxed{7}$ T5: за $\forall (c_1, \dots, c_n) \in R^n$ и $y(x) = \sum^{n} c_i \cdot y_i(x)$ јесте реш. дј (3) на (a,b).

Треба да докажемо да је свако решење дј (3) овог облика:

Нека је $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ произвољно решење дј (3) на (a,b).
Нека је $x_0 \in (a,b)$ фикс. тачка и нека је: $y_0 = \tilde{y}(x_0)$, $y_1 = \tilde{y}'(x_0)$, …, $y_{n-1} = \tilde{y}^{(n-1)}(x_0)$.

Тражимо решење из фамилије $y(x) = \sum^{n} c_i y_i(x)$ које испуњава услове: $y(x_0) = y_0$
(тражимо $(c_1, \dots, c_n)$)

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1} \end{aligned}$$

Применимо исти трик: диференцирајмо $\sum^{n} c_i y_i(x)$ n-1 пут и фиксирајмо $x = x_0$:

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 y_1(x_0) & + & \dots & + & c_n y_n(x_0) & = & y_0 \\ c_1 y_1'(x_0) & + & \dots & + & c_n y_n'(x_0) & = & y_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & + & \dots & + & c_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = & y_{n-1} \end{array}$$

Решења дј су лин. нез. $\Rightarrow$ $W(y_0, \dots, y_{n-1})(x_0) \neq 0$
А Δ система нам је управо Вронскијан $\Rightarrow$ $\Delta \neq 0$ $\Rightarrow$ систем има јединств. реш.
Означимо то решење система са $(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n)$.

Стога, и решења $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ и решења $y(x) = \sum^{n} \tilde{c}_i \cdot y_i(x)$ испуњавају услове.

По TEJP, решење је јединствено $\Rightarrow$ $\tilde{y} = \sum^{n} \tilde{c}_i \cdot y_i(x)$

Коначно, формулишимо тврђење због ког смо све ово и радили:

Теорема 3: Нека су $a_i \in C(a,b)$.

Скуп свих решења хомогене лин. дј n-тог реда јесте n-димензиони векторски простор.

Сваки фундаментални скуп решења образује једну базу тог векторског простора.

$\boxed{10.}$ Нехомогене лин. дј n-тог реда

Сада се мало враћамо уназад.

Посматрајмо нехомогену дј: $y^{(n)}(x) + a_1(x)\cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)\cdot y'(x) + a_n(x)y = b(x).$ (*)

Посматрајмо и одг. хомогену: $y^{(n)}(x) + a_1(x)\cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)\cdot y'(x) + a_n(x)y = 0$ (**)

Теорема 1: Нека су $a_i, b \in C(a,b)$ $(i=\overline{1,n})$.
Ако је $y_p(x)$ неко партик. реш. (*) и $y_H = \sum^n c_i y_i(x)$ опште реш. (**) на (a,b)

онда је $y(x) = y_H(x) + y_p(x)$ опште решење (*) на (a,b).

Доказ: * Прво докажимо да $y(x)$ јесте решење (*):

$$\forall x \in (a,b) \quad L_n(y)(x) = L_n(y_H + y_p)(x) \overset{L\text{-лин.}}{=} L_n(y_H)(x) + L_n(y_p)(x) = 0 + b(x) = b(x).$$

* Сада докажимо да су сва решења дј (*) тог облика.

Нека је $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ неко реш. дј (*) на (a,b).

Тада је $\tilde{y}(x) - y_p(x) := \varphi(x)$ решење дј (**): $L_n(\varphi)(x) = L_n(\tilde{y})(x) - L_n(y_p)(x) = b(x) - b(x) = 0.$

$\underset{(\text{т.о.о.р.})}{\overset{\boxed{9}\,T2}{\Longrightarrow}} \exists \tilde{c}_i \in R \ (i=\overline{1,n})$ ткд. $\tilde{y}(x) - y_p(x) = \sum^n \tilde{c}_i y_i(x)$ (y_i чине фунд. скуп реш за (**))

$\Rightarrow \tilde{y} = y_p(x) + \sum^n \tilde{c}_i y_i(x)$

Како је $\tilde{y}$ произвољно, ово важи за свако решење дј (*).

Метода варијације константи:

Нека је познато опште решење $y(x) = \sum^{n} c_i\, y_i(x)$ дј $(**)$.
Занима нас да ли можемо варирати константе (као код лин. дј I реда)?

Другим речима, можемо ли константе заменити непр-диф. ф-јама $c_i = c_i(x)$ ткд. је $\sum^{n} c_i(x)\, y_i(x)$ опште решење нехомогене дј $(*)$ на (a,b).

Потражимо решење дј $(*)$ у облику $y(x) = \sum^{n} c_i(x)\, y_i(x)$.

Тада је: $y' = \sum c_i' y_i + \sum c_i y_i'$.
Намећемо услов $(*1)$: $\sum c_i'(x)\, y_i(x) = 0$, одакле следи $y'(x) = \sum^{n} c_i(x)\, y_i'(x)$.

↳ ово радимо да олакшамо рачун
али при томе ризикујемо да се закуцамо
Наравно, то се неће десити, што ћемо и видети

Опет диференцирамо: $y'' = \sum c_i' y_i' + \sum c_i \cdot y''$
Намећемо услов $(*2)$: $\sum c_i'(x)\, y_i'(x) = 0$, одакле следи $y''(x) = \sum^{n} c_i(x) \cdot y_i''(x)$.

Понављамо поступак n-1 пут:

$$\left.\begin{array}{lll} (*1) & \sum c_i'(x)\, y_i(x) & = 0 \\ (*2) & \sum c_i'(x)\, y_i'(x) & = 0 \\ \vdots & & \vdots \\ (*n\text{-}1) & \sum c_i'(x)\, y_i^{(n-2)}(x) & = 0 \end{array}\right\} \quad (C1)$$

одакле следи $y^{(n-1)}(x) = \sum^{n} c_i(x) \cdot y_i^{(n-1)}(x)$, $\quad x \in (a,b)$

Тада је $y^{(n)}(x) = \sum^{n} c_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x) + \sum^{n} c_i(x)\, y_i^{(n)}(x)$, $\quad x \in (a,b)$

Све добијене изводе убацујемо у почетну дј $(*)$:

$$\underline{\sum^{n} c_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x)} + \underline{\sum^{n} c_i(x)}\, \underline{y_i^{(n)}(x)} + \underline{a_1(x)} \cdot \underline{\sum^{n} c_i(x)}\, \underline{y_i^{(n-1)}(x)} + \dots + \underline{a_n(x)}\, \underline{\sum^{n} c_i(x)}\, \underline{y_i(x)} = \underline{b(x)}, \qquad x \in (a,b)$$

$$\underline{\sum^{n} c_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x)} + \underline{\sum^{n} c_i(x)} \cdot \underbrace{\left(\underline{y_i^{(n)}(x)} + \underline{a_1(x)\, y_i^{(n-1)}(x)} + \dots + \underline{a_n(x)\, y_i(x)} \right)}_{=0 \quad (y_i \text{ – елем. фунд. скупа реш.})} = \underline{b(x)}, \qquad x \in (a,b)$$

$$\Rightarrow \sum^{n} c_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x) = b(x) \qquad (C2)$$

Коначно, (C1) и (C2) образују систем од n једначина и n непознатих.
При томе, за фиксирано x добија се систем лин. једначина:

$$\left.\begin{array}{lcccccccl} (*1) \to & c_1'(x)\, y_1(x) & + & c_2'(x)\, y_2(x) & + & \dots & + & c_n'(x)\, y_n(x) & = 0 \\ (*2) \to & c_1'(x)\, y_1'(x) & + & c_2'(x)\, y_2'(x) & + & \dots & + & c_n'(x)\, y_n'(x) & = 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ (*n\text{-}1) \to & c_1'(x)\, y_1^{(n-2)}(x) & + & c_2'(x)\, y_2^{(n-2)}(x) & + & \dots & + & c_n'(x)\, y_n^{(n-2)}(x) & = 0 \\ (C2) \to & c_1'(x)\, y_1^{(n-1)}(x) & + & c_2'(x)\, y_2^{(n-1)}(x) & + & \dots & + & c_n'(x)\, y_n^{(n-1)}(x) & = b(x) \end{array}\right\} \quad (C)$$

Приметимо да је дет. матрице система управо Вронскијан $W(y_1, \dots, y_n)(x) = W(x) \neq 0$ (лин. нез.)

Такође, како је det непр. ф-ја, то је $W(x)$ непрекидна на (a,b).

Зато, фиксирајући редом тачку $x \in (a,b)$ и примењујући Крамерово правило, закључујемо да систем (C) има јединствено решење.

$c_i'(x) = \alpha_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ (то је решење, при чему $\alpha_i \in C(a,b)$ јер $y_i, W \in C(a,b)$)

Одавде лако добијамо непознате функције: $c_i(x) = \int \alpha_i(x)\,dx + \beta_i = B_i(x) + \beta_i$ $(i = \overline{1,n})$

Када ово убацимо, уверавамо се да ово јесу решења:

$$y(x) = \sum^{n} c_i(x)\, y_i(x) = \sum^{n} (B_i(x) + \beta_i)\, y_i(x) = \underbrace{\sum^{n} B_i(x)\, y_i(x)}_{\substack{\text{партик. реш.} \\ \text{нехомогене} \\ \text{(проверити)}}} + \underbrace{\sum \beta_i\, y_i(x)}_{\substack{\text{опште реш.} \\ \text{хомогене}}}$$

$\overset{T1}{\Rightarrow}$ $y(x) = \sum^{n} c_i(x)\, y_i(x)$ јесте опште решење дј (*).

$\boxed{11.}$ Хомогене лин. дј n-тог реда

(константни коеф. случај једнострукух)

Посматрамо дј $y^{(n)}(x) + a_1 \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} \cdot y'(x) + a_n y = 0.$ $\quad (a_i \in \mathbb{R}, \ i = \overline{1,n}) \quad$ (1)

Све a_i можемо да посматрамо као const ф-је.
Како су const ф-је непрекидне $\overset{\text{ТЕЈР}}{\Longrightarrow}$ $\forall x_0, y_0, \dots$ постоји јединствено решење деф. на $\mathbb{R}$

Како да нађемо фунд. скуп решења?

Мотивисани скупом решења за хомогену лин. дј I реда $\left(y' + ay = 0 \Rightarrow y(x) = c \cdot e^{-ax} \right)$
тражимо решење у облику $y(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
↖ напомена

Тада је $y^{(i)}(x) = \lambda^i \cdot e^{\lambda x}$.
Заменом у дј (1) добијамо: $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda^1 + a_n)\, e^{\lambda x} = 0$

$$\Rightarrow \quad \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Израз који смо добили зове се **карактеристична једначина** дј (1).

Теорема 1: Ако је $\lambda = \lambda_0$ решење карактеристичне једначине,
онда функција $y(x) = e^{\lambda_0 x}$ јесте решење дј (1) на $\mathbb{R}$.

Доказ: Из претходног.

деф. $P_n(\lambda) := \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$ је **карактеристични полином.**

Дакле, решавање дј (1) смо свели на тражење нула полинома $P_n(\lambda)$.

Напомена: 1) $(\forall x \in \mathbb{R})$ исто важи $(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$ чак и када је $\lambda \in \mathbb{C}$. (проверити)

2) Ако $\varphi \in C^{(n)}((a,b); \mathbb{C})$ и $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ $\quad (\varphi_1, \varphi_2$ - реалне ф-је$)$, важи:

$$L_n(\varphi)(x) = L_n(\varphi_1)(x) + i \cdot L_n(\varphi_2)(x) = 0$$

Другим речима, ако је φ реш. дј (1), онда су и φ_1 и φ_2 решења дј (1).

У зависности од природе решења карактеристичне једначине, разликујемо више случајева:

I случај – решења карак. једначине су међусобно различита:

1° Различита и реална:

Теорема 2: Ако су $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ различита реална решења карак. једначине, онда функције $y_i = e^{\lambda_i x}$ образују фундаментални скуп решења дј (1) на R.

Доказ: По Т1: $y_i = e^{\lambda_i x}$ јесу решења дј (1) на R.

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{(Вандерм.)}}{=} e^{\sum \lambda_i x} \cdot \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0, \quad \forall x \in R.$$

Дакле, y_i су лин. нез. ф-је $\Rightarrow$ заиста образују фунд. скуп реш. дј (1) на R.

Последица: Ако су решења карак. ј-не различита и реална, онда је опште решење хомогене лин. дј (1) на R облика: $y(x) = \sum^{n} c_i e^{\lambda_i x}$.

Вандермондова детерминанта: $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$ (може ова јер $\det A = \det A^T$)

Индукцијом доказујемо: $\det A = \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i)$

(БИ) $n = 2$: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1$.

(ИК) $n-1 \Rightarrow n$: од сваке колоне одузмемо $\lambda_1 \cdot$(претходна колона) и то почевши од друге.

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_2 - \lambda_1 & \dots & (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n - \lambda_1 & \dots & (\lambda_n - \lambda_1)\lambda_n^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & \dots & (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2^{n-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n - \lambda_1 & \dots & (\lambda_n - \lambda_1)\lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1) \dots (\lambda_n - \lambda_1)}_{\prod_{2 \le j \le n} (\lambda_j - \lambda_1)} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-2} \\ 1 & \lambda_3 & \dots & \lambda_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}}_{\text{(ИХ)} \Rightarrow \prod_{2 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i)} = \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

1°_2 Различита, али конјуговано комплексна:

Теорема 3: Ако је $\lambda_{1,2} = a \pm i\cdot b$ $(a,b\in \mathbb{R},\ b\neq 0)$ пар конј. комплексних решења карак. једначине, онда дј (1) има два лин. нез. реш. на R облика:

$$y_1(x) = e^{ax}\cos(bx)\ , \qquad y_2(x) = e^{ax}\sin(bx).$$

Доказ: По Т1: $y(x) = e^{(a+ib)x} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}\left(\cos(bx) + i\cdot\sin(bx)\right)$.
По напомени 2) у Т1: $y_1(x) = e^{ax}\cos(bx)$, $y_2(x) = e^{ax}\sin(bx)$ јесу решења дј (1) на R.

$$W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{ax}\cos(bx) & e^{ax}\sin(bx) \\ ae^{ax}\cos(bx) - be^{ax}\sin(bx) & ae^{ax}\sin(bx) + be^{ax}\cos(bx) \end{vmatrix}$$

$$= \cancel{ae^{2ax}\cos(bx)\sin(bx)} + be^{2ax}\cos^2(bx) - \cancel{ae^{2ax}\cos(bx)\sin(bx)} + be^{2ax}\sin^2(bx)$$

$$= be^{2ax} \overset{(b\neq 0)}{\neq} 0$$

Дакле, y_1 и y_2 су лин. независна реш. дј (1) на R.

Резиме:

Ако су λ_i $(i=\overline{1,k})$ различите реалне нуле карак. полинома,
а $a_j \pm i\cdot b_j$ $(j=\overline{1,s})$ различите комплексне нуле карак. полинома и $n = k+2s$

онда су базна решења хомогене лин. дј (1) облика:

$$(*)\quad \begin{cases} y_i(x) = e^{\lambda_i x} \\ y_j(x) = e^{a_j x}\cos(b_j x), \qquad y_{s+j}(x) = e^{a_j x}\sin(b_j x). \end{cases}$$

Јасно, ако су сва решења карак. j-не међусобно различита,
скуп ф-ја (*) образује један фунд. скуп реш. дј (1) на R.

Опште решење дј (1) на R је скуп свих лин. комбинација елемената фунд. скупа.

$\boxed{12.1}$

Хомогене лин. дј n-тог реда

(константни коеф. случај вишеструких)

Наставља се на претходно питање. Испитали смо случај I.

II случај - решења карак. једначине су вишеструка:

2° Вишеструко решење је реално:

Нека је $\lambda = \lambda_1$ реална нула реда k $(2 \leq k \leq n)$ полинома P_n.

У овом случају, не можемо само да k пута придружимо исто решење зато што неће бити лин. нез, па то не може бити база.

Због тога, морамо да нађемо још нека решења.

Због k-струкости важи: $P_n(\lambda_1) = 0$, $P_n'(\lambda_1) = 0$, ..., $P_n^{(k-1)}(\lambda_1) = 0$ и важи $P_n^{(k)}(\lambda_1) \neq 0$. (!)

Приметимо: $L_n(e^{\lambda x}) = P_n(\lambda)\, e^{\lambda x} = 0$ (само уврстимо и извучемо)

$$L_n(x^m e^{\lambda x}) = L_n\left(\frac{d^m e^{\lambda x}}{d\lambda^m}\right) \overset{L\text{-лин.}}{=} \frac{d^m}{d\lambda^m} L_n(e^{\lambda x}) = \frac{d^m}{d\lambda^m}\left(P_n(\lambda)\, e^{\lambda x}\right)$$

$$\overset{\text{Лајбниц}}{=} \sum^{m} \binom{m}{i} P_n^{(i)}(\lambda)\, x^{m-i} e^{\lambda x} \overset{(!)}{=} 0, \quad m = \overline{0, k-1}, \quad \forall x \in R$$

Дакле, функције облика $y_m(x) = x^m e^{\lambda x}$ $(m = \overline{0, k-1})$ јесу решења дј (1).

Али да ли чине базу?

Теорема 1: Ако је $\lambda = \lambda_1$ реално решење вишеструкости k за карак. j-ну онда дј (1) има следећа лин. независна реш. на R:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = x \cdot e^{\lambda_1 x}, \quad \dots, \quad y_k = x^{k-1} \cdot e^{\lambda_1 x}$$

Доказ: Већ смо доказали да ово јесу решења.
Докажимо (по деф.) да су лин. независна:

$$(\forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \in R) \quad \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_k y_k(x) = 0 \iff \alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 x e^{\lambda_1 x} + \dots + \alpha_k x^{k-1} e^{\lambda_1 x} = 0$$

$$\iff e^{\lambda_1 x}\left(\alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_k x^{k-1}\right) = 0$$

$$\iff \alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_k x^{k-1} = 0$$

$$\overset{\forall x \in R}{\iff} \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0.$$

2°_2 Вишеструко решење је комплексно:

Поступамо потпуно аналогно:

Теорема 2: Ако је $\lambda_{1,2} = a \pm i \cdot b$ $(a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0)$ пар конј. комплексних решења реда k карак. ј-не, онда Дј (1) има следећа лин. независна реш. на $\mathbb{R}$:

$$y_1(x) = e^{ax}\cos(bx), \quad y_2(x) = x e^{ax}\cos(bx), \quad \dots, \quad y_k(x) = x^{k-1}e^{ax}\cos(bx),$$

$$y_{k+1}(x) = e^{ax}\sin(bx), \quad y_{k+2}(x) = x\, e^{ax}\sin(bx), \quad \dots, \quad y_{2k}(x) = x^{k-1}e^{ax}\sin(bx)$$

$\boxed{12.2}$

Нехомогене лин. дј n-тог реда

(константни коеф.)

Нека је $a_i \in R$, $b \in C(a,b)$

Посматрајмо нехомогену дј: $y^{(n)}(x) + a_1 \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} \cdot y'(x) + a_n y = b(x)$ (2)

По $\boxed{10}$ Т1: Опште решење дј (2) је $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$

Знамо да одредимо $y_H(x)$ - то смо радили у $\boxed{11}$ и $\boxed{12.1}$.

Како тражимо y_P? У општем случају: варирамо константу, тј. решавамо онај систем. ($\boxed{10}$)

Ипак, испоставља се да у једном спец. случају можемо олакшати тражење y_P.

Теорема 3: Нека је: * $b(x) = P_m(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + Q_r(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

* $k = \max\{m, r\}$.

* $s = \begin{cases} 0, & \alpha + ib \text{ није реш. карак. j-не за одг. хомогену} \\ \text{вишеструкост}, & \alpha + ib \text{ јесте реш. карак. j-не за одг. хомогену} \end{cases}$

Тада дј (2) има партикуларно решење облика:

$$y_P(x) = x^s e^{\alpha x} \left(\tilde{P}_k(x) \cos(\beta x) + \tilde{Q}_k(x) \sin(\beta x) \right)$$

Како онда одређујемо шта је тачно $y_P(x)$?

Диференцирамо y_P n пута, убацимо у (2).
Тада су нам непознате само коефицијенти полинома $\tilde{P}_k$ и $\tilde{Q}_k$.

Нађемо њих ⇒ одредили смо $y_P(x)$.

13. Осцилаторност решења лин. дј II реда

Посматрамо дј: $z'' + p_1(x)\, z' + p_2(x)\, z = 0$ $\quad (p_1, p_2 \in C(a,b))$ $\quad (1)$

Ово је лин. дј.
Желимо да некако склонимо члан који садржи први извод.
Тада бисмо имали директнију везу између другог извода и саме функције.

Смена: $z = y \cdot u$, где је $y = y(x)$ – нова непозната ф-ја
$u = u(x)$ – наместићемо га мало касније

Уврстимо у (1): $y''u + 2y'u' + yu'' + p_1(x)(y'u + yu') + p_2(x)\, yu = 0$

$$y''u + y'(2u' + p_1(x)\,u) + y(u'' + p_1(x)\,u' + p_2(x)\,u) = 0$$

Да не би било првог извода, намештамо (тј. бирамо) $u(x)$ ткд. $2u' + p_1(x)u = 0$.

Очигледно, ово је дј која раздваја променљиве, па лако добијамо: $u(x) = e^{-\frac{1}{2}\int p_1(x)\,dx}$.

Дакле, увођењем ове смене, дј (1) сада постаје: $y'' + q(x)\, y = 0$ $\quad (2)$

деф. **Нула решења** дј је свака тачка $\bar{x}$ у којој то решење сече x-осу, тј. $y(\bar{x}) = 0$.

деф. Нетривијално решење дј (2) је **осцилаторно** на (a,b) ако има бесконачно нула на том инт.
Иначе је **неосцилаторно**.

Напомена: x_0 је нула неког реш. дј (1) $\Leftrightarrow$ x_0 је нула одг. реш. дј (2)

Ово важи јер $z = y \cdot u$, а видимо да је $u > 0$, $\forall x \in (a,b)$

Пример: Испитајмо осцилаторност произвољног нетрив. реш. дј $y'' + m^2 y = 0$.

Колико нула $\bar{x}$ има на сегменту $[a,b]$?

Решимо дату дј: то је хомогена лин. дј. II реда, па решење тражимо у облику $y(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Њена карак. ј-на је $\lambda^2 + m^2 = 0$.

1° $m = 0$: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = C_1 + C_2 x \quad (C_1, C_2 \in R)$

1₁° $C_2 \neq 0$: $0 = C_1 + C_2 \bar{x} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = -\frac{C_1}{C_2}$

$-\frac{C_1}{C_2} \in [a,b]$ $\qquad$ $-\frac{C_1}{C_2} \notin [a,b]$

У овом случају, на $[a,b]$ имамо или 1 нулу или немамо нула.

1₂° $C_2 = 0$: $0 = C_1 \quad \Rightarrow$ тривијално решење y (оно нас не занима)

У овом случају, на $[a,b]$ немамо нула.

Дакле, у 1° нема осцилаторних решења на $[a,b]$.

2° $m \neq 0$: $\lambda_{1,2} = \pm i \cdot m \quad \Rightarrow \quad y(x) = C_1 \cos(mx) + C_2 \sin(mx) \quad (C_1, C_2 \in R,\ C_1^2 + C_2^2 > 0$ иначе трив. реш.$)$

$$\frac{y(x)}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} \cos(mx) + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} \sin(mx) = \sin\theta \cos(mx) + \cos\theta \sin(mx) = \sin(\theta + mx)$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \sqrt{C_1^2+C_2^2} \cdot \sin(\theta + mx)$$

$$0 = y(\bar{x}) = \sqrt{C_1^2+C_2^2} \cdot \sin(\theta + m\bar{x}) \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta + m\bar{x}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \theta + m\bar{x} = k\pi$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x}_k = \frac{k\pi - \theta}{m}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Растојање између две нуле: $\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k = \frac{(k+1)\pi - \theta - k\pi + \theta}{m} = \frac{\pi}{m}$

Број нула на $[a,b]$ је $\left[\frac{b-a}{\pi/m}\right]$ или $\left[\frac{b-a}{\pi/m}\right] + 1$

Дакле, у 2° нема осцилаторних решења на $[a,b]$.

није const
општије од примера

Лема 1: Свако нетривијално решење дј $y'' + q(x)\,y = 0$ $(q(x) \in C(a,b))$ на $[\alpha, \beta] \subseteq (a,b)$

може имати само коначно много нула.

Доказ: ппс. Произвољно нетрив. реш. $y = \varphi(x)$ на $[\alpha, \beta]$ има пребројиво много нула: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

По Болцано - Вајерштрасу: сваки ограничен низ у $\mathbb{R}$ има бар једну тачку нагомилавања
тј. има конв. подниз.

Низ (x_n) испуњава услове, па он има подниз $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x^*$.

Како је (x_n) низ нула, то је и (x_{n_k}) низ нула, тј. $\forall k \in \mathbb{N}$ $\varphi(x_{n_k}) = 0$
Како је $\varphi \in C^2(a,b)$ $\Rightarrow$ φ је непрекидна $\overset{деф.}{\Rightarrow}$ $\varphi(x^*) = 0$.

По Ролу: за сваки од $(x_{n_{k-1}}, x_{n_k})$ постоји тачка η_{n_k} ткд. $\varphi'(\eta_{n_k}) = 0$.
Тако добијамо нови низ (η_{n_k}).

Знамо $\eta_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x^*$.
Како је и $\varphi' \in C(a,b)$ $\Rightarrow$ $\varphi'(\eta_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} \varphi'(x^*)$ $\xRightarrow{\varphi'(\eta_{n_k})=0}$ $\varphi'(x^*) = \varphi(x^*) = 0$.

Ове услове задовољава и трив. реш.
Пошто је $q(x) \in C(a,b)$ $\overset{TEJP}{\Longrightarrow}$ $\varphi(x)$ је тривијално решење. ↯

Напомена: Шта ако на $[\alpha, \beta]$ има непребројиво много нула?

Свеједно је: само изаберемо пребројив подскуп тог непребројивог скупа.
Поента је да нас свакако занима само подскуп скупа решења.

Теорема 1 (Штурмова):

Нека су дате две дј: (*) $y'' + q_1(x)y = 0$, при чему $q_1(x) \leq q_2(x)$ $(q_1, q_2 \in C(a,b))$

(**) $y'' + q_2(x)y = 0$

Тада између сваке две суседне нуле произвољног нетривијалног решења дј (*) постоји бар једна нула произвољног нетривијалног решења дј (**).

Доказ: Нека су x_0 и x_1 две суседне нуле произвољног нетривијалног решења дј (*) $y = \varphi_1(x)$.

БУО Узмимо $\varphi_1(x) > 0$, $x \in (x_0, x_1)$ (аналогно за $\varphi_1(x) < 0$)

Тада сигурно важи: $\varphi_1'(x_0) > 0$ и $\varphi_1'(x_0) < 0$ (!)

ппс. $y = \varphi_2(x)$ је нетривијално реш. дј (**) и нема нула на сегменту $[x_0, x_1]$.
То значи да је график $\varphi_2(x)$ или скроз изнад или скроз испод $[x_0, x_1]$.
БУО Узмимо $\forall x \in [x_0, x_1]$ $\varphi_2(x) > 0$ (аналогно за $\varphi_2(x) < 0$)

Посматрајмо систем:

$$\left.\begin{array}{lll} \varphi_1'' + q_1(x)\,\varphi_1 = 0, & x \in (x_0, x_1) & /\cdot \varphi_2 \\ \varphi_2'' + q_2(x)\,\varphi_2 = 0, & x \in (x_0, x_1) & /\cdot \varphi_1 \end{array}\right] -$$

$$\Rightarrow \underbrace{\varphi_1''(x)\,\varphi_2(x) - \varphi_2''(x)\,\varphi_1(x)}_{(!!)} + (q_1(x) - q_2(x))\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x) = 0$$

$$\Rightarrow -W'(\varphi_1, \varphi_2)(x) + (q_1(x) - q_2(x))\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x) = 0$$

$$\overset{\int_{x_0}^{x_1}}{\Rightarrow} -W(\varphi_1, \varphi_2)(x_1) + W(\varphi_1, \varphi_2)(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} (q_1(x) - q_2(x))\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,dx = 0.$$

$$\overset{\substack{\varphi_1(x_0)=0 \\ \varphi_1(x_1)=1}}{\Rightarrow} \underbrace{\varphi_1'(x_1)}_{<0}\underbrace{\varphi_2(x_1)}_{>0} - \underbrace{\varphi_1'(x_0)}_{>0}\underbrace{\varphi_2(x_0)}_{>0} + \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{(q_1(x) - q_2(x))}_{\leq 0}\underbrace{\varphi_1(x)}_{\geq 0}\underbrace{\varphi_2(x)}_{>0}\,dx = 0.$$

Добијамо Л < 0, а Д $= 0$ ↯

(!) Које могућности имамо?

а)

$\varphi'(x_0) > 0$

$\varphi'(x_0) < 0$

б)

↳ $\varphi'(x_0) = 0$ и $\varphi(x_0) = 0$

Немогуће: трив. га испуњава па би по ТЕЈР $\Rightarrow \varphi_1 \equiv 0$ ↯

(!!) $W(\varphi_1, \varphi_2)(x) = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1'$

$W'(\varphi_1, \varphi_2)(x) = \varphi_1'\varphi_2' + \varphi_1\varphi_2'' - \varphi_2'\varphi_1' + \varphi_2\varphi_1''$

$= \varphi_1''\varphi_2 + \varphi_2''\varphi_1$

Напомена: Погледати задатке 1-5 са вежби (10. час)

14. Непригушене осцилације

деф. **Фреквенција** је број осцилација у јединици времена.

деф. **Померај** / **елонгација** је растојање од равнотежног положаја.

деф. **Амплитуда** је максималан померај.

Нека је тело масе m фиксирано опругом за непокретан зид и креће се хоризонтално.

Са $x=0$ означићемо равнотежни положај (тада на њега не делују спољне силе)

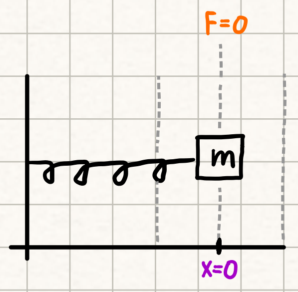
деф. k - **коеф. еластичности**
c - **коеф. трења** / **коеф. отпора средине**

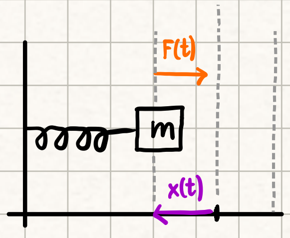
→ Сила којом опруга делује на тело (која га враћа у $x=0$) је **реституциона сила.**
Она је пропорционална промени помераја, тј. $-k \cdot x(t)$

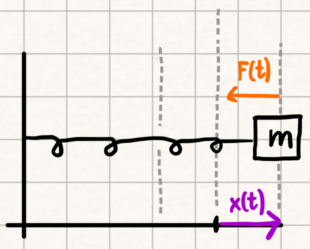
као ваздух
код мотора

→ Ако постоји, **трење** / **сила отпора** / **сила пригушења**, пропорционална је брзини: $-c \cdot x'(t)$

→ На тело делује и **спољна сила** $F(t)$ у смеру кретања.
↑ не ова са слике







По II Њутновом закону: $mx''(t) = -kx(t) - cx'(t) + F(t)$

Добијамо: $mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F(t)$ - лин. дј II реда са конст. коеф.

деф. **Непригушене осцилације** настају када нема трења / отпора средине, тј. $c=0$.

→ Ако уз то нема ни дејства спољне силе, добијамо: $mx''(t) + kx(t) = 0$

Карак. j-на ове дј је: $\lambda^2 m + k = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$

Дакле: $x(t) = c_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$

$$\Rightarrow \frac{x(t)}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) = \sin\left(\theta + \underline{\sqrt{\frac{k}{m}}}\,t\right) = \sin\left(\theta + \underline{w_0}\,t\right)$$

$\overset{A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}}{\Rightarrow} x(t) = A\cdot\sin\left(\theta + \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)$ - заиста је осцилаторно кретање.

→ Размотримо случај када на тело делује и нека спољна сила: $mx''(t) + kx(t) = \underline{F_0\cos(wt)}$

(Зашто овај облик? Зато што су спољне силе најчешће осцилаторног карактера.
При томе: F_0 је амплитуда, а w је фреквенција.)

(осцилације кад постоји спољна сила ћемо касније[45] назвати принудним)

Имамо нехомогену лин. дј II реда.

1° $w \neq \underline{w_0}$: $x_p(t) = a\cos(wt) + b\sin(wt) \Rightarrow \dots \Rightarrow x_p(t) = \frac{F_0}{m(w_0^2-w^2)}\cdot\cos(wt)$

$x(t) = x_H(t) + x_p(t) \Rightarrow x(t) = A\sin(\theta + w_0 t) + \frac{F_0}{m(w_0^2-w^2)}\cdot\cos(wt).$

2° $w = \underline{w_0}$: $x_p(t) = at\cos(w_0 t) + bt\sin(w_0 t) \Rightarrow \dots \Rightarrow x_p(t) = \frac{F_0}{2mw_0}\cdot t\cdot\sin(w_0 t).$

$x(t) = x_H(t) + x_p(t) \Rightarrow x(t) = A\sin(\theta + w_0 t) + \frac{F_0}{2mw_0}\cdot t\cdot\sin(w_0 t).$

* Приметимо да су у 1° осцилације ограничене.

У 2° то не важи: када $t\to\infty$, тада $x(t)\to\infty$ (чак и када је F_0 јако мало).
Тада кажемо да је дошло до **резонанце**.
То значи ако се фреквенције изједначе, долази до повећања амплитуде.

Приметимо да чак и када је w близу w_0 (дакле опет 1°) амплитуде су веће $\left(\frac{F_0}{m(w_0^2-w^2)}\right)$

Примери резонанце:
- љуљашка
- поскакивање возила на неравном путу
- урушавање моста
- оперски певач и стаклена чаша

15.

Пригушене осцилације

У реалним условима немамо вакуум него неку другу средину.
Сила отпора зависи од средине, али и брзине и облика тела.

Када имамо отпор средине, осцилације временом слабе, јер се део енергије троши на савладавање тог отпора.
Губитак енергије се може надокнадити спољном силом (нпр. љуљамо бебу)

деф. Пригушене осцилације настају када има отпора средине, тј. $c \neq 0$.

→ Прво посматрајмо случај без спољне силе

Коју дј посматрамо? $mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0 \quad /:m$

$$x''(t) + 2p \cdot x'(t) + w_0^2 x(t) = 0$$

где је $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, а $p = \frac{c}{2m}$ тзв. фактор пригушења.

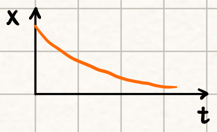
Карактеристична једначина ове дј је: $\lambda^2 + 2p\lambda + w_0^2 = 0$.

Раздвајамо случајеве у зависности од дискриминанте: $D = 4p^2 - 4w_0^2$:

1° $D > 0 \quad (p^2 > w_0^2)$

Тада су решења реална и различита: $\lambda_{1,2} = \frac{-2p \pm \sqrt{D}}{2}$.

⇒ скуп решења дј је: $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ $(c_1, c_2 \in R)$

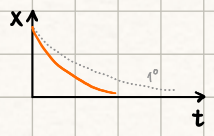


У овом случају немамо осцилаторно кретање, већ померај тежи 0 током времена.

2° $D = 0 \quad (p^2 = w_0^2)$ – ово зовемо критичан пригушен систем

Тада су решења реална и једнака: $\lambda_{1,2} = \frac{-2p}{2} = -p$

⇒ скуп решења дј је: $x(t) = c_1 e^{-pt} + c_2 \cdot te^{-pt}$ $(c_1, c_2 \in R)$



Померај још брже тежи нули.

3° $D < 0$ $(p^2 < w_0^2)$ - трење мање у односу на реституциону силу

Тада су решења конј- комплексна: $\lambda_{1,2} = -p \pm i \cdot \sqrt{w_0^2 - p^2} = -p \pm i \cdot w_1$

$\Rightarrow$ скуп решења дј је: $x(t) = c_1 e^{-pt} \cos(w_1 t) + c_2 e^{-pt} \sin(w_1 t)$ $(c_1, c_2 \in R)$

Тј. $x(t) = A \cdot e^{-\frac{c}{2m}t} \sin(\theta + \sqrt{w_0^2 - p^2}\, t)$ (извођење опет исто)

🟪 - имамо осцилације

🟩 - амплитуда се смањује - пригушење

→ Сада посматрамо случај када имамо и спољну силу - принудна осцилација

Коју дј посматрамо? $mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F(t)$ $/:m$

$$x''(t) + 2p \cdot x'(t) + w_0^2\, x(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega t), \qquad \omega \neq \omega_0$$

Подсетимо се: $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$.

Хомогени случај смо већ решили: $x_H(t)$ ће бити једно од 1°, 2°, 3°.

По облику десне стране, закључујемо да ће партик. реш. бити облика $x_P(t) = A \cdot \cos(\omega t - \theta)$

$$\text{Тј.} \quad x_P(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{(2wp)^2 + (w_0^2 - w^2)^2}} \cdot \cos(\omega t - \theta)$$

* Интересује нас под којим условима систем може довести до оштећења.
Другим речима, занима нас када је амплитуда највећа.

$x_P(t)$ има највећу амплитуду када је $p(w) = 4w^2p^2 + w_0^4 - 2w_0^2 w^2 + w^4$ најмање
Лако се проверава да се то постиже за $w = \sqrt{w_0^2 - 2p^2}$.

Одавде уочавамо да за мале вредности пригушења p важи $w \approx w_0 \Rightarrow$ прети резонанца.

Наравно, p никад није скроз 0, па неће доћи до резонанце.
Ипак, и овде може доћи до озбиљне штете. Овај случај зове се практична резонанца.

Пример: Да би се код аутомобила ово избегло, уграђују се амортизери.
Тиме се спречава да се природна фрекв. изједначи са фрекв. спољних сила.

16. Елементи аналитичке теорије лин. дј

(регуларне тачке)

Прво се подсетимо неких ствари из анализе:

деф. Функција $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ је аналитичка у тачки x_0 ако се у околини те тачке може представити у облику конвергентног степеног реда:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad , \qquad \text{где је} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

деф. f је аналитичка у области G ако је аналитичка у свакој тачки те области.

Напомена 1: Ако је f аналитичка у некој области $\Rightarrow$ f је бесконачно диф. у тој области.

Обрнуто не важи. $\left(f(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \end{cases} \right)$

Напомена 2: Ако ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ има позитиван радијус конвергенције R,

онда се унутар свог интервала конв. може диференцирати и интегралити члан по члан.

Добијени редови имају исти радијус конв. као и полазни ред.

Пример: $y'' - x^2 y = 0.$

Пошто је (скоро) немогуће погодити партикуларно решење,
покушаћемо да га нађемо у облику степеног реда у околини тачке 0: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$

Претпоставимо да овај ред можемо да диф. 2 пута (члан по члан)
у некој области $|x| < R$.

Тада $\forall x \in (-R, R)$: $\quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$, $\quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1)\, a_n\, x^{n-2}$

Мењамо: $\quad \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1)\, a_n\, x^{n-2} - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1)\, a_n\, x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

Смањујемо први бројач за 4, како бисмо добили x^{n+2}, како бисмо спојили два реда:

$$\sum_{n=-2}^{\infty} (n+4)(n+3)\, a_{n+4}\, x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

Бројачи нам не почињу од истог броја, па одвајамо прва два члана из првог:

$$2a_2 + 6a_3x + \sum_{n=0}^{\infty}(n+4)(n+3)a_{n+4}x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2} = 0$$

$$2a_2 + 6a_3x + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+4)(n+3)a_{n+4} - a_n\right]x^{n+2} = 0$$

Ово важи за $\forall x\in(-R,R)$, па зато:

$$2a_2 = 0\,,\quad 6a_3 = 0\,,\quad (n+4)(n+3)a_{n+4} - a_n = 0$$

$$\Rightarrow\quad a_2 = 0\,,\quad a_3 = 0\,,\quad a_{n+4} = \frac{a_n}{(n+4)(n+3)}$$ – имамо рекурентну везу

Тражимо општи облик сваког члана, тако што уочавамо правилности.
Добија се:

$$a_{4k} = \frac{a_0}{4\cdot3\cdot\ldots\cdot(4k)(4k-1)}\,,\quad k\in\mathbb{N} \qquad\qquad a_{4k+1} = \frac{a_0}{5\cdot4\cdot\ldots\cdot(4k+1)(4k)}\,,\quad k\in\mathbb{N}$$

$$a_{4k+2} = 0\,,\quad k\in\mathbb{N}_0 \qquad\qquad a_{4k+3} = 0\,,\quad k\in\mathbb{N}_0$$

Наше решење је:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = \sum_{k=0}^{\infty}a_{4k}x^{4k} + \sum_{k=0}^{\infty}a_{4k+1}x^{4k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}\cancelto{0}{a_{4k+2}x^{4k+2}} + \sum_{k=0}^{\infty}\cancelto{0}{a_{4k+3}x^{4k+3}}$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}a_{4k}x^{4k} + a_1x + \sum_{k=1}^{\infty}a_{4k+1}x^{4k+1}$$

$$y(x) = a_0\underbrace{\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{4k}}{4\cdot3\cdot\ldots\cdot(4k)(4k-1)}\right)}_{y_1(x)} + a_1\underbrace{\left(x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{4k+1}}{5\cdot4\cdot\ldots\cdot(4k+1)(4k)}\right)}_{y_2(x)}$$

Врло је вероватно да ће y_1 и y_2 да нам буду базна решења.
То ћемо и доказати.

$$R_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4\cdot3\cdot\ldots\cdot(4n)(4n-1)}}{\frac{1}{4\cdot3\cdot\ldots\cdot(4n+4)(4n+3)}} = \lim_{n\to\infty}(4n+4)(4n+3) = \infty \qquad (\text{тј. конв. } \forall x\in\mathbb{R})$$

$R_2 = \infty$ (аналогно)

Одавде следи да је [redacted] била добра претпоставка.

$$W(y_1,y_2)(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0)\\ y_1'(0) & y_2'(0)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad\Rightarrow \text{лин. нез. на } \mathbb{R} \Rightarrow \text{ јесте база}$$

Дакле, $y(x)$ заиста јесте скуп свих решења.

Некада, ипак, није могуће добити решење у облику степеног реда.
Занима нас под којим условима то јесте могуће?

Због једноставности, посматрајмо дј II реда: $y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0$ (1)

деф. Тачка x_0 је регуларна тачка дј (1) ако су $a_1(x)$ и $a_2(x)$ аналитичке у тој тачки.

деф. Тачка x_0 је сингуларна тачка дј (1) ако бар једна од $a_1(x)$, $a_2(x)$ није аналитичка у тој тачки.

Овде се припремамо за доказ главне теореме:

деф. Кошијев производ два реда: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, где $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ конвергира ако један од редова конвергира, а други условно конвергира.

Лема 1: Нека су $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ степени редови ткд. $|c_n| \leq C_n$.

Ако ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ конвергира за $|x| < r$ $\Rightarrow$ и ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ конвергира за $|x| < r$.

Доказ: Ово је поредбени критеријум (доказ на анализи)

Лема 2: Ако ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ конвергира за $|x| < R_0$

онда $(\forall x: |x| = r < R_0)$ $(\exists M > 0)$ ткд. $|c_n| \cdot r^n < M$. $(n \in \mathbb{N}_0)$

Доказ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ конвергира за $|x| = r$ $\Rightarrow$ $|c_n x^n| = |c_n| \cdot r^n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ (општи члан реда)

Стога: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $|c_n| \cdot r^n \leq 1$, $\forall n > n_0$

Дакле, само изаберемо $M = \max\{1, |c_0|, |c_0| \cdot r, \dots, |c_{n_0}| \cdot r^{n_0}\}$.

Напомена: Не обухватамо тачке са руба интервала конвергенције $(r < R_0)$

Теорема 1: Ако су a_1, a_2 аналитичке ф-је у области $|x| < R_0$, онда је свако решење дј (1) аналитичка ф-ја у области $|x| < R_0$.

Другим речима, тада се свако решење дј (1) може се представити у облику степ. реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ који конвергира у области $|x| < R_0$.

Напомена: По овоме, ако је x_0 регуларна тачка, онда има смисла тражити решење дј (1) у облику степ. реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ у околини x_0.

Доказ: a_1 - аналитичка $\Rightarrow$ $a_1(x) = \sum\limits^{\infty} p_n x^n$, $|x| < R_0$
a_2 - аналитичка $\Rightarrow$ $a_2(x) = \sum\limits^{\infty} q_n x^n$, $|x| < R_0$

* Покушајмо да нађемо реш. дј (1) у облику $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.
Уз то, претпоставимо да овај ред конвергира за $|x| < R_0$.

Тада је: $y'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)\, c_{n+1} x^n$

и $y''(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, c_n x^{n-2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\, c_{n+2}\, x^n$

Уврстимо у (1): $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\, c_{n+2}\, x^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n x^n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)\, c_{n+1} x^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n x^n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$

$$\overset{\text{Кош. пр.}}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\, c_{n+2}\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} (k+1)\, c_{k+1} x^k \cdot p_{n-k}\, x^{n-k}\Big) + \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} c_k x^k \cdot q_{n-k}\, x^{n-k}\Big) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\Big[(n+1)(n+2)\, c_{n+2} + \sum_{k=0}^{n}\big((k+1)\, c_{k+1}\, p_{n-k} + c_k\, q_{n-k}\big)\Big] \cdot x^n = 0$$

$$\overset{\forall x}{\Longrightarrow} (n+1)(n+2)\, c_{n+2} = -\sum_{k=0}^{n}\big((k+1)\, c_{k+1}\, p_{n-k} + c_k\, q_{n-k}\big), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$ – рекурентна формула **(*)**

Приметимо: из ове везе c_2 можемо да изразимо преко c_0, c_1
Рекурзивно, свако c_{n+2} можемо да изразимо преко c_0, c_1.

Ако бисмо као у примеру груписали чланове уз c_0 и уз c_1, добили бисмо два лин. нез. решења наше дј (1) – остала реш. су лин. комбинација.

* Остаје да потврдимо претпоставку: докажимо да $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ конвергира за $|x| < R_0$.

Идеја је да искористимо Л1. За то нам треба још један низ.

Како редови $a_1(x) = \sum p_n x^n$, $a_2(x) = \sum q_n x^n$ конвергирају за $|x| < R_0$,
по Л2 важи:

$$\underset{\text{тј. } \forall r < R_0}{(\forall x:\ |x| = r < R_0)}\ (\exists M > 0) \quad \text{ткд.} \quad |p_n| r^n \leq M, \quad |q_n| r^n \leq M, \quad \text{за} \quad \forall n \in N_0$$

$$\text{тј.} \quad |p_n| \leq M \cdot r^{-n}, \quad |q_n| \leq M \cdot r^{-n}, \quad \text{за} \quad \forall n \in N_0$$

Из (*): $\left|(n+1)(n+2)\, c_{n+2}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} \left((k+1) c_{k+1} p_{n-k} + c_k q_{n-k}\right)\right|$

$$\Rightarrow \quad (n+1)(n+2)|c_{n+2}| \overset{\text{неј. } \Delta}{\leq} \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)|c_{k+1}| \cdot |p_{n-k}| + |c_k| \cdot |q_{n-k}|\right)$$

$$\overset{\text{Л2}}{\leq} \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)|c_{k+1}| \cdot M \cdot r^{-n+k} + |c_k| \cdot M \cdot r^{-n+k}\right)$$

поз. бр. који смо додали (намештамо за касније)

$$\leq M \cdot r^{-n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)|c_{k+1}| + |c_k|\right) \cdot r^k \quad + \quad Mr|c_{n+1}|$$

Сада дефинишемо низ бројева l_n и то рекурентно:

$$l_0 = |c_0|, \quad l_1 = |c_1| \quad \text{и} \quad (n+1)(n+2)\, l_{n+2} = Mr^{-n} \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)\, l_{k+1} + l_k\right) r^k + Mr\, l_{n+1} \qquad (**)$$

Приметимо да важи: $0 \leq |c_n| \leq l_n$ (због ланца неједнакости)

Дакле, по Л1, довољно је доказати да $\sum_{n=0}^{\infty} l_n x^n$ конвергира у области $|x| < R_0$.

Смањивањем индекса у (**) редом за 2, па за 1, добијамо:

за 2: $(n-1)n\, l_n = Mr^{-n+2} \sum_{k=0}^{n-2} \left((k+1)\, l_{k+1} + l_k\right) r^k + Mr\, l_{n-1}$

за 1: $n(n+1)\, l_{n+1} = Mr^{-n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left((k+1)\, l_{k+1} + l_k\right) r^k + Mr\, l_n \qquad / \cdot r$

$$n(n+1)\, l_{n+1} r = Mr^{-n+2} \sum_{k=0}^{n-1} \left((k+1)\, l_{k+1} + l_k\right) r^k + Mr^2 l_n$$

издвојили $k=n-1$

$$= \underbrace{Mr^{-n+2} \sum_{k=0}^{n-2} \left((k+1)\, l_{k+1} + l_k\right) r^k}_{= 🟥} + Mr^{-n+2}\left((n-1+1)\, l_n + l_{n-1}\right) r^{n-1} + Mr^2 l_n$$

$$\overset{\text{за 2}}{=} (n-1)n\, l_n - \cancel{Mr\, l_{n-1}} + Mrn\, l_n + \cancel{Mr\, l_{n-1}} + Mr^2 l_n$$

$$= l_n \cdot \left(n^2 - n + Mrn + Mr^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{l_n}{l_{n+1}} = \frac{(n^2+n) \cdot r}{n^2 - n + Mnr + Mr^2} \xrightarrow{n \to \infty} r \Rightarrow \text{ред } \sum_{n=0}^{\infty} l_n x^n \text{ конвергира за } |x| < r, \quad \forall r < R_0$$

$$\Rightarrow \text{ред } \sum_{n=0}^{\infty} l_n x^n \text{ конвергира за } |x| < R_0$$

$$\overset{\text{Л1}}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ конвергира за } |x| < R_0.$$

17. Елементи аналитичке теорије лин. дј

(регуларно – сингуларне тачке)

Испоставља се да се метод решавања дј помоћу степених редова може применити и у неким случајевима када коеф. лин. дј нису аналитичке функције.

Посматрамо: $y^{(n)}(x) + a_1(x)\cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y'(x) + a_n(x)y = 0$ (1)

деф. Тачка x_0 је **сингуларна** тачка дј (1) ако бар једна од $a_i(x)$ није аналитичка у тој тачки.

деф. Сингуларна тачка x_0 је **регуларно - сингуларна** тачка дј (1) ако су аналитичке све ф-је

$$b_i(x) := (x-x_0)^i \cdot a_i(x_0) \quad , \qquad i = \overline{1,n}$$

Покажимо и како:

Нека је x_0 рег- синг. тачка дј (1).
Множењем обе стране са $(x-x_0)^n$, дј (1) можемо записати у облику:

$$(x-x_0)^n y^{(n)} + b_1(x)(x-x_0)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}(x)(x-x_0)y' + b_n(x)\, y = 0 \qquad (b_i(x) \text{ - аналитичке})$$

(специјално, ако су b_i конст. ф-је, ово је Ојлерова дј са вежби)

Посматрајмо случај $n=2$, $x_0=0$: $\quad x^2 y'' + x b_1(x)\, y' + b_2(x)\, y = 0$ (2)

b_1 - аналитичка $\Rightarrow$ $b_1(x) = \sum^{\infty} p_k x^k$, у некој околини тачке $x_0=0$: $x \in (-r, r)$
b_2 - аналитичка $\Rightarrow$ $b_2(x) = \sum^{\infty} q_k x^k$, у некој околини тачке $x_0=0$: $x \in (-r, r)$

Решење дј (2) тражимо у облику $y(x) = x^{\lambda} \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $c_0 \neq 0$, за $x>0$ (аналогно $x<0$)
и за непознати параметар $\lambda \in R$
($\lambda \in C$ у напомени)

Претпоставимо да овај ред конвергира (у околини $x_0=0$) $\Rightarrow$ можемо да диференцирамо

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\lambda)\, x^{k+\lambda-1} \quad , \qquad y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\lambda)(k+\lambda-1)\, x^{k+\lambda-2}$$

Убацујемо у (2): $x^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\lambda)(k+\lambda-1)\, x^{k+\lambda-2} + x \cdot b_1(x) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\lambda)\, x^{k+\lambda-1} + b_2(x) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\lambda} = 0$

$$\overset{b_1, b_2}{\Rightarrow} \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\lambda)(k+\lambda-1\ x^{k+\lambda}) + \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\lambda)\, x^{k+\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\lambda} = 0$$

$$\overset{\text{Кош. пр.}}{\Rightarrow} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \Big[c_k (k+\lambda)(k+\lambda-1) + \sum_{i=0}^{k} c_i (i+\lambda)\, x^{i+\lambda} \cdot p_{k-i} x^{k-i} + \sum_{i=0}^{k} c_i x^{i+\lambda} \cdot q_{k-i} x^{k-i} \Big] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \Big[(k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k + \sum_{i=0}^{k} \big(c_i (i+\lambda) p_{k-i} + c_i q_{k-i} \big) \Big] \cdot x^{k+\lambda} = 0$$

$$\overset{\forall x}{\Rightarrow} \quad (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k + \sum_{i=0}^{k} \big((i+\lambda) p_{k-i} + q_{k-i} \big) c_i = 0, \qquad \text{за } \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Посматрајмо за $k=0$: $\lambda(\lambda-1) c_0 + (\lambda p_0 + q_0) c_0 = 0$

$$\Rightarrow \quad (\lambda^2 - \lambda + \lambda p_0 + q_0) \cdot c_0 = 0$$

$$\overset{c_0 \neq 0}{\Rightarrow} \quad \underbrace{\lambda^2 + \lambda(p_0 - 1) + q_0}_{P(\lambda) \ -\ \text{иницијални полином}} = 0 \quad - \ \text{иницијална једначина за дј (2)}$$

Приметимо да је $p_0 = b_1(0)$, $q_0 = b_2(0)$. А $b_1(0)$, $b_2(0)$ су нам познати.
То значи да из (2) можемо директно да добијемо $P(\lambda)$.

Посматрајмо за $k \in \mathbb{N}$: $(k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k + \big((k+\lambda) p_0 + q_0\big) c_k = - \sum_{i=0}^{k-1} \big((i+\lambda) p_{k-i} + q_{k-i} \big) c_i$

$$\big((k+\lambda)(k+\lambda-1) + (k+\lambda) p_0 + q_0 \big)\, c_k = - \sum_{i=0}^{k-1} \big((i+\lambda) p_{k-i} + q_{k-i} \big) c_i$$

Дакле, добили смо рекурентну везу за све c_k.

Тиме смо у потпуности одредили све што се појављује у решењу $y(x) = x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.

Дакле, добили смо два решења $y_1(x)$, $y_2(x)$. (због $\lambda_{1,2}$)

То ипак није крај: шта ако $\lambda_1 = \lambda_2$? Тада имамо само једно решење.
Или шта ако је део уз c_k у рек. вези једнак 0? Тада не можемо да делимо.
$(k+\lambda=0)$

Због тога, наводимо следећу теорему, где разликујемо случајеве у зависности од λ_1 и λ_2.

Узмимо и БУО $\lambda_1 \geq \lambda_2$.

Теорема 1: Нека је $x>0$ ($x<0$ аналогно)

а) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $y_1(x) = x^{\lambda_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $y_2(x) = x^{\lambda_2}\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k x^k$;

б) $\lambda_1 = \lambda_2$ $\Rightarrow$ $y_1(x) = x^{\lambda_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $y_2(x) = x^{\lambda_1+1}\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k x^k + y_1(x)\ln x$;

в) $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $y_1(x) = x^{\lambda_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $y_2(x) = x^{\lambda_2}\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k x^k + c\cdot y_1(x)\ln x$;

и важи да су $y_1(x)$, $y_2(x)$ два лин. нез. решења дј (2). (базна реш.)

При томе $c_0 \neq 0$, $\tilde{c}_0 \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$ и редови конвергирају за $\forall x \in (0, r)$.

Напомена: Шта ако $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\cdot\beta$ $(\beta \neq 0)$?

$$x^{\alpha+i\beta} = e^{\ln x^{\alpha+i\beta}} = e^{(\alpha+i\beta)\ln x} = e^{\alpha\ln x} e^{i\cdot(\beta\ln x)}$$

$$x^{\alpha+i\beta} = x^{\alpha}(\cos(\beta\ln x) + i\sin(\beta\ln x))$$

Због тога ћемо решење дј (2) тражити у облику:

$$y(x) = x^{\alpha+i\beta}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = x^{\alpha}(\cos(\beta\ln x) + i\sin(\beta\ln x))\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad c_0 \neq 0.$$

Након одређивања $c_k \in \mathbb{C}$, лин. независна решења се добијају
као реални и имагинарни део комплексног решења.