Јован Самарџић

13/2019

Анализа 1, професор: Милош Арсеновић

- дефиниције
- ставови/теореме/тврђења
- докази

1. Увод: скупови, релације и функције

Скупови

деф. $A = B \iff \forall x (x \in A \iff x \in B)$
$A \subset B \iff \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Јасно: $A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A$

деф. Празан скуп је скуп $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$. Јасно, $\forall A \ \emptyset \subset A$

деф. Унија је скуп $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Пресек је скуп $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ ($A \cap B = \emptyset$ онда су они дисјунктни)
Разлика је скуп $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
Симетрична разлика је скуп $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
Комплемент је скуп $A^c = U \setminus A$ (где је U „универзални" скуп)

Особине:
1) $A \cup B = B \cup A$
2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3) $A \cup A = A$
4) $A \cap B = B \cap A$
5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
6) $A \cap A = A$
7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

деф. Уређени пар је скуп $(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}$

деф. Декартов производ је скуп $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

деф. Партитивни скуп је скуп $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}$

Релације

деф. Нека су X и Y скупови. Тада је сваки подскуп од $X \times Y$ релација из X у Y.
Уколико је $X = Y$, онда се каже да је то релација на X

деф. ρ на X је релација еквиваленције ако је:
рефлексивна $\forall x \in X \ x \rho x$
симетрична $\forall x, y \in X \ x \rho y \Rightarrow y \rho x$
транзитивна $\forall x, y, z \in X \ x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z$

деф. ρ на X је релација поретка ако је:
рефлексивна
антисиметрична $\forall x, y \in X \ x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y$
транзитивна

деф. ρ на X је релација линеарног поретка ако је: релација поретка
линеарна $\forall x, y \in X \ x \rho y \vee y \rho x$

деф. Нека је X скуп и $\le$ релација поретка на њему и $A \subset X$. Кажемо да је $x \in X$

1° **мајоранта** (горње ограничење) скупа A ако $\forall a \in A \quad a \le x$
Ако још и важи $x \in A$, онда је x **максимум** скупа A

2° **миноранта** (доње ограничење) скупа A ако $\forall a \in A \quad x \le a$
Ако још и важи $x \in A$, онда је x **минимум** скупа A

деф. Нека је $G(A)$ скуп горњих огр. A, а $D(A)$ скуп доњих огр. A. Тада је

1° **супремум скупа** A $\quad sup(A) = \min(G(A))$
2° **инфимум скупа** A $\quad inf(A) = \max(D(A))$

Функције

деф. Нека су X, Y скупови и f релација из X у Y. f је **функција** ако:

1) $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\ (x, y) \in f$
2) $(x, y_1) \in f \ \wedge\ (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

Дакле, две функције су једнаке ако $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ и $\forall x \ f_1(x) = f_2(x)$

деф. Нека су X, Y, Z скупови и $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. Функција $h: X \to Z$, $h(x) = g(f(x))$ назива се **композицијом функција** f и g, у ознаци $g \circ f$

Особине: **1)** $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
2) $f \circ id_X = f$
3) $id_Y \circ f = f$

деф. Нека је $f: X \to Y$ и $A \subset X$, $B \subset Y$. Тада дефинишемо скупове:

1° **Слика скупа** A је $f[A] = \{ f(a) \mid a \in A \}$
2° **Инверзна слика скупа** B је $f^{-1}[B] = \{ x \mid f(x) \in B \}$

Особине: **1)** $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$ $\quad$ **2)** $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$
3) $f^{-1}[A_1 \cup A_2] = f^{-1}[A_1] \cup f^{-1}[A_2]$ $\quad$ **4)** $f^{-1}[A_1 \cap A_2] = f^{-1}[A_1] \cap f^{-1}[A_2]$
5) $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ $\quad$ **6)** $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$

деф Нека је $f: X \to Y$. Тада је f: 1° **инјекција** **(1-1)** ако $\forall x_1, x_2 \in X \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
2° **сурјекција** **(НА)** ако $\forall y \in Y, \exists x \in X \quad f(x) = y$
3° **бијекција** ако је и инјекција и сурјекција

Особине: **1)** Ако су f и g инјекције, онда је и $g \circ f$ инјекција
2) Ако су f и g сурјекције, онда је и $g \circ f$ сурјекција
3) Ако је $g \circ f$ инјекција, онда је и f инјекција
4) Ако је $g \circ f$ сурјекција, онда је и g сурјекција

деф. За $f: X \to Y$, функција $f^{-1}: Y \to X$ је њена **инверзна функција**

Она постоји ако је f бијекција

2. Реални бројеви. Архимедово својство и теорема о супремуму. Лема Кантора.

деф. **Скуп реалних бројева** је скуп $\mathbb{R}$ у коме су дефинисане операције $+$ и $\cdot$ и бинарна релација $\leq$, тако да су испуњене сљедеће аксиоме:

1) **Аксиоме сабирања:**
   - **С1** $a+(b+c)=(a+b)+c$
   - **С2** $a+b=b+a$
   - **С3** $\exists 0 \quad a+0=0+a=a$
   - **С4** $\forall a \exists -a \quad a+(-a)=(-a)+a=0$

2) **Аксиоме множења:**
   - **М1** $a(bc)=(ab)c$
   - **М2** $ab=bc$
   - **М3** $\exists 1 \quad a\cdot 1=1\cdot a=a$
   - **М4** $\forall a\neq 0 \ \exists a^{-1} \quad aa^{-1}=a^{-1}a=1$
   - **М5** $1\neq 0$

3) **Аксиоме дистрибутивности:**
   - **Д1** $a(b+c)=ab+ac$
   - **Д2** $(a+b)c=ac+bc$ (може и без ове)

4) **Аксиоме поретка:**
   - **П1** $a\leq a$
   - **П2** $a\leq b \wedge b\leq a \Rightarrow a=b$
   - **П3** $a\leq b \wedge b\leq c \Rightarrow a\leq c$
   - **П4** $\forall a,b \quad a\leq b \vee b\leq a$
   - **П5** $a\leq b \Rightarrow a+c\leq b+c$
   - **П6** $0\leq a \wedge 0\leq b \Rightarrow 0\leq ab$

5) **Аксиома непрекидности:**
   - **Н1** Ако су $A,B\subset\mathbb{R}$ непразни и $\forall a\in A\ \forall b\in B\ a\leq b$ онда постоји $c\in\mathbb{R}$ ткд. $a\leq c\leq b$ за све $a\in A, b\in B$

   ↳ $\mathbb{Q}$ не задовољава

Последице аксиома поретка:

1) $a\leq b \iff b-a\geq 0$
2) $a\leq 0 \iff -a\geq 0$
3) $a\leq b \wedge c\geq 0 \iff ac\leq bc$
4) $a\leq 0 \wedge b\geq 0 \iff ab\leq 0$
5) $a\leq 0 \wedge b\leq 0 \iff ab\geq 0$
6) $1\geq 0$
7) $a\cdot a\geq 0$
8) $a>0 \Rightarrow a^{-1}>0$

Доказ:

1) $a\leq b \overset{П5}{\iff} a+(-a)\leq b+(-a) \iff 0\leq b-a$
2) Убацимо $b=0$ у 1)
3) $a\leq b \overset{1)}{\iff} b-a\geq 0 \overset{П6}{\iff} (b-a)c\geq 0 \overset{Д2}{\iff} bc-ac\geq 0 \overset{1)}{\iff} ac\leq bc$
4) $a\leq 0 \overset{2)}{\iff} -a\geq 0 \overset{П6}{\iff} (-a)b\geq 0 \iff -(ab)\geq 0 \overset{2)}{\iff} ab\leq 0$
5) слично
6) $1\leq 0 \overset{5)}{\Rightarrow} 1\cdot 1\geq 0$ ↯
7) $a>0$: П6, $a=0$: тривијално, $a<0$: 5)
8) $a^{-1}<0 \overset{4)}{\Rightarrow} a^{-1}a\leq 0 \Rightarrow 1\leq 0$ ↯ (6) и $1\neq 0$

деф. Број x је **позитиван** ако је $x \geq 0$
Број x је **строго позитиван** ако је $x \geq 0$ и $x \neq 0$ $(x > 0)$
Број x је **негативан** ако је $x \leq 0$
Број x је **строго негативан** ако је $x \leq 0$ и $x \neq 0$ $(x < 0)$

деф. **Апсолутна вредност броја** x је $|x| = \max\{-x, x\} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Својства:
1) $|x| \geq 0$ и $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$
2) $|xy| = |x| \cdot |y|$
3) $|x+y| \leq |x| + |y|$
4) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Доказ:
1) тривијално
2) $(+,+)$ $\quad |xy| = xy = |x| \cdot |y|$
$(+,-)$ $\quad |xy| = x(-y) = |x| \cdot |y|$
$(-,+)$ $\quad |xy| = (-x)(-y) = |x| \cdot |y|$

3) $(+,+)$ $\quad |x+y| = x+y = |x| + |y| \leq |x| + |y|$
$(-,-)$ $\quad |x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y) = |x| + |y| \leq |x| + |y|$
$(+,-)$ $\quad |x+y| = |x - z| = \max(x-z, z-x) \leq |x| + |y|$
$(z = -y \geq 0)$ $\quad x - z \leq x = |x|$
$z - x \leq z = |y|$

4) $\frac{x}{y} \cdot y = x \Rightarrow |x| = \left|\frac{x}{y} \cdot y\right| = \left|\frac{x}{y}\right| |y| \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

деф. Нека је $a < b$. Тада су **ограничени интервали**

$(a,b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$
$(a,b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$
$[a,b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$
$[a,b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$. Ово се зове и **сегмент**

деф. Нека $a \in R$. Тада су **неограничени интервали**

$(a,+\infty) = \{x \in R \mid x > a\}$
$[a,+\infty) = \{x \in R \mid x \geq a\}$
$(-\infty,a) = \{x \in R \mid x < a\}$
$(-\infty,a] = \{x \in R \mid x \leq a\}$

(овде је $+\infty$ и $-\infty$ и даље само ознака)

Јасно, $R = (-\infty, +\infty)$

деф. **ε-околина тачке a** је скуп $\{x \in R \mid |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon \in R)$

Теорема о супремуму: Сваки одозго ограничен непразан подскуп од R **има супремум**

Доказ: Нека је $E \subset R$ непразан и одозго ограничен, а нека је $F = G(E)$

$\forall x \in E \ \forall y \in F \Rightarrow x \leq y$, па по Н1 постоји $c \in R$ $x \leq c \leq y$

$\Rightarrow c = \min G(E) \Rightarrow c = \sup(E)$

Теорема о инфимуму: Сваки одоздо ограничен непразан подскуп од R има инфимум

Доказ: аналогно претходном доказу

Став: Скуп **N није ограничен одозго**

Доказ: **ппс:** $\exists \alpha \in R \ \forall n \in N \ n \leq \alpha$. Дакле, по претходном $\exists \sup(N) = c$

Дакле $\forall n \in N$ $n \leq c$, па и $n+1 \leq c \Rightarrow n \leq c-1$

па c није најмање горње ограничење $\lightning$

Архимедово својство: Нека су $a, b \in R$ и нека је $b > 0$ и $a \geq 0$. Тада постоји $n \in N$ ткд. $\mathbf{(n-1)b \leq a < nb}$ и n је јединствено

Доказ: (егзистенција) **ппс:** То значи да $\forall n$ $n \cdot b \leq a$, тј. $n \leq \frac{a}{b}$ $\lightning$

$P = \{ n \in N \mid a < nb \} \neq \emptyset$, и нека је n најмањи елемент из P

Тада важи $(n-1)b \leq a < nb$

(јединственост) Не може a да истовремено буде у два дисјунктна интервала

Последица: Нека је $\varepsilon > 0$. Тада постоји $n \in N$, такав да $\mathbf{\frac{1}{n} < \varepsilon}$

Доказ: $\frac{1}{n} < \varepsilon \iff \underset{a}{1} < n \underset{b}{\varepsilon}$, па постоји по Архимедовом својству

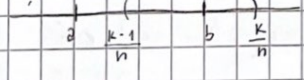
Последица: Нека је (a, b) отворен интервал на R. Тада $\mathbf{(a, b) \cap Q \neq \emptyset}$

Доказ: $\varepsilon = b - a$, па по претходној последици постоји $n \in N$ $\frac{1}{n} < \varepsilon$,

а по Архимедовом својству $\exists k$ $(a \leq)$ $(k-1) \cdot \frac{1}{n} \leq b < k \cdot \frac{1}{n}$

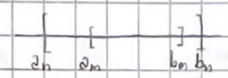
(правимо „кораке" који су мањи од $\varepsilon = b - a$, тако да негде морамо закорачити у (a, b))

$\frac{k-1}{n} \in Q$



Лема Кантора: Нека је $(I_n)_{n=1}^{+\infty}$ низ сегмената на R ткд. за свако n $I_{n+1} \subset I_n$.
Тада постоји $c \in R$ ткд. $c \in I_n$ за свако $n \in N$, тј. $\bigcap I_n \neq \emptyset$

Доказ: Нека је $m > n$, $a_i \le b_j$ за све $i, j \in N$
$A = \{a_i \mid i \in N\}$, $B = \{b_j \mid j \in N\}$

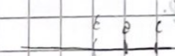


H1 $\Rightarrow \exists c$ $x \le c \le y$ за све $x \in A$, $y \in B$

Дакле, $c \in [a_n, b_n]$ за свако $n \in N \Rightarrow \forall n \in N$ $c \in I_n$

НАПОМЕНА: У случају **отворених** интервала, лема **не мора** да важи,
нпр. $I_n = (0, \frac{1}{n})$ по последици за ма колико мало ε, може се наћи n, $\frac{1}{n} < \varepsilon$
(тј. $\varepsilon \notin (0, \frac{1}{n})$)

(карактеризација)
Став: $c = \sup A \iff \begin{cases} a \le c \quad \forall a \in A & \text{(горње огр.)} \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \quad a > c - \varepsilon & \text{(најмање)} \end{cases}$



деф. $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$

Став: 1) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$
2) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$

Доказ: 1) Нека је $\alpha = \sup A$, $\beta = \sup B$. Тада је $\forall a \in A$ $a \le \alpha$, $\forall b \in B$ $b \le \beta$, па $a + b \le \alpha + \beta$

Пошто је $\alpha = \sup A$ $\exists a \in A$ $a > \alpha - \frac{\varepsilon}{2}$, аналогно $\exists b \in B$ $b > \beta - \frac{\varepsilon}{2}$, па $a + b > (\alpha + \beta) - \varepsilon$

2) аналогно

деф. **Проширени скуп реалних бројева** је скуп $\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$

Теорема: Сваки подскуп од $\overline{R}$ има супремум и инфимум

Доказ: $G(\emptyset) = \overline{R}$ (сви су му горња ограничења, па $\sup(\emptyset) = -\infty$, а $\inf(\emptyset) = +\infty$)
За непразне подскупове је већ доказано у оквиру теореме о супремуму
* Аналогно се доказује за инфимум

Став: 1) $\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$, где $A, B \subset [0, +\infty)$ и $\sup A > 0$, $\sup B > 0$
2) $\inf(AB) = \inf A \cdot \inf B$, где $A, B \subset [0, +\infty)$ и $\inf A > 0$, $\inf B > 0$

Доказ: 1) $\alpha = \sup A$, $\beta = \sup B$. Тада је $\forall a \in A$ $a \le \alpha$, $\forall b \in B$ $b \le \beta$, па $ab \le \alpha\beta$
$\exists a \in A$ $a > \alpha - \frac{\varepsilon}{\alpha + \beta}$, $\exists b \in B$ $b > \beta - \frac{\varepsilon}{\alpha + \beta}$, па $ab > \alpha\beta - (\alpha + \beta)\frac{\varepsilon}{\alpha + \beta} + \frac{\varepsilon^2}{(\alpha + \beta)^2} > \alpha\beta - \varepsilon$

2) аналогно

деф. Нека је $f: X \to \overline{R}$. За $A \subseteq X$ дефинишемо $\sup_A f = \sup(f[A])$ и $\inf_A f = \inf(f[A])$
Ако $f[A]$ има максимум означавамо га $\max_A f$, а ако има минимум, то је $\min_A f$

Став: $\sup_A (f+g) \le \sup_A f + \sup_A g$, $\inf_A (f+g) \ge \inf_A f + \inf_A g$

Доказ: $\sup_A (f+g) = \sup((f+g)[A]) \le \sup(f[A] + g[A]) = \sup(f[A]) + \sup(g[A]) = \sup_A f + \sup_A g$

(не мора највећа вредност у истој тачки)

3. Низови у R. Конвергентни низови. Аритметичке операције са конвергентним низовима.

деф. **Низ реалних бројева** је свака функција $x: N \to R$, у ознаци x_n, $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$

деф. Низ је **ограничен одозго** ако $\exists a \in R \quad x_n \le a$ за свако $n \in N$

Низ је **ограничен одоздо** ако $\exists a \in R \quad x_n \ge a$ за свако $n \in N$

Низ је **ограничен** ако је ограничен и одозго и одоздо, тј. $\exists R \ge 0 \quad |x_n| \le R$ за свако $n \in N$

Став: Збир и производ два ограничена низа је ограничен низ

Доказ: $|x_n| \le R_1$, $|y_n| \le R_2$

$|x_n + y_n| \le |x_n| + |y_n| \le R_1 + R_2$

$|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \le R_1 \cdot R_2$

деф. Низ $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ реалних бројева **конвергира** ка реалном броју a, који је **лимес**, ако:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \in N)(n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

Пишемо $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Ако је a коначан реалан број, a_n је **конвергентан низ**.
Ако је a бесконачан или непостоји, онда је **дивергентан низ**.

деф. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad (\forall M)(\exists n_0 \in N)(\forall n \in N)(n > n_0 \Rightarrow a_n > M)$

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad (\forall m)(\exists n_0 \in N)(\forall n \in N)(n > n_0 \Rightarrow a_n < m)$

Став: Сваки **конвергентан** низ је **ограничен**

Доказ: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall n > n_0 \ |a_n - a| < \varepsilon$, тј. $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$

И од чланова низа пре n_0 (којих има коначно), наћемо највећи M_{n_0} и најмањи m_{n_0} и ограничимо низ са $\min(-\varepsilon, m_{n_0})$ и $\max(\varepsilon, M_{n_0})$

Став: Лимес је **јединствен**, тј. $\lim_{n\to\infty} a_n = a_1$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = a_2 \Rightarrow a_1 = a_2$

Доказ: пс: $a_1 \neq a_2$, нека је $|a_1 - a_2| = d$. $\exists n_1 \ \forall n > n_1 \ |a_n - a_1| < d/2$

$\exists n_2 \ \forall n > n_2 \ |a_n - a_2| < d/2$

Па за $n_0 = \max(n_1, n_2)$, $\forall n > n_0$, a_n припада два дисјунктна интервала ↯

деф. **Нула низ** је низ који конвергира ка 0, тј. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Став: Нека су a_n, b_n нула низови и c_n ограничен низ. Тада:

1) a_n је ограничен низ
2) $a_n \cdot c_n$ је нула низ
3) $a_n + b_n$ је нула низ

Доказ: 1) a_n - нула низ $\Rightarrow$ конвергентан $\Rightarrow$ ограничен

2) $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$, $|c_n| < R$ $\Rightarrow$ $|a_n c_n| < \varepsilon \cdot R$

3) $|a_n| < \varepsilon$, $|b_n| < \varepsilon$ $\Rightarrow$ $|a_n + b_n| \leq |a_n + b_n| < 2\varepsilon$

Став: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$

Последица: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff a_n = a + \alpha_n$, где је α_n нула низ

Став: Нека је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тада важи:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = ab$

Доказ: 1) $a_n + b_n = (a + \alpha_n) + (b + \beta_n) = (a+b) + (\alpha_n + \beta_n)$, где је $\alpha_n + \beta_n$ нула низ

2) $a_n \cdot b_n = (ab) + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n)$, где је све ово друго нула низ

Последице:

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$

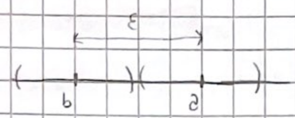
$$\lim_{n\to\infty} (-a_n) = -\lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

4. Конвергенција и поредак. Лема о три лимеса.

Став: Ако је $a_n \le b_n$ и ти низови конвергирају, онда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Доказ: ппс. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$



$\exists n_1 \ \forall n > n_1 \ |a_n - a| < \varepsilon/2$

$\exists n_2 \ \forall n > n_2 \ |b_n - b| < \varepsilon/2$

Дакле од $n_0 = \max(n_1, n_2)$ $\ a_n \geq b_n$ ↯

НАПОМЕНА: Чак и ако је $a_n < b_n$ може се десити да су лимеси једнаки: нпр. $\frac{1}{n}$ и $-\frac{1}{n}$

Став: Нека је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$. Тада $\exists n_0 \in N$ и $\delta \in R$ ткд. $\begin{cases} a_n \geq \delta > 0 \\ a_n \leq \delta < 0 \end{cases}$ за свако $n > n_0$

Лема о три лимеса: Нека су a_n, b_n и c_n низови и за њих важи:

1° $a_n \le b_n \le c_n$ за свако n

2° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$

Тада је и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$

Доказ: $a_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ за $n \geq n_{0_1}$

$c_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ за $n \geq n_{0_2}$, па зато и $b_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ за $n \geq n_0 = \max\{n_{0_1}, n_{0_2}\}$

Став: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} 1/a_n = 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim 1/a_n = +\infty \ (a_n > 0)$, тј. $\lim 1/a_n = -\infty \ (a_n < 0)$

Доказ: 1) $\forall n > n_0 \ a_n > M \Rightarrow 1/a_n < 1/M = \varepsilon$

2) $\forall n > n_0 \ a_n < \varepsilon \Rightarrow 1/a_n > 1/\varepsilon = M_1$

$\forall n > n_0 \ -a_n < \varepsilon \Rightarrow 1/a_n < -1/\varepsilon = M_2$

Став: Нека је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$. Тада је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Доказ: 1° $a_n = 1$

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \underbrace{\frac{1}{b \cdot b_n}}_{\text{огр.}} \cdot \underbrace{(b - b_n)}_{\text{нула низ}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

2° $a_n \neq 1$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{b_n} \cdot a_n$$

5. Монотони низови и број e

деф. Низ a_n у $\mathbb{R}$ (или $\overline{\mathbb{R}}$) је **растући** ако $a_n \le a_{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$

Низ a_n у $\mathbb{R}$ (или $\overline{\mathbb{R}}$) је **опадајући** ако $a_n \ge a_{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$

Теорема о монотоном и ограниченом низу:
1) Сваки растући одозго огр. низ је конвергентан
2) Сваки опадајући одоздо огр. низ је конвергентан

Доказ: **1)** Нека је x_n растући и ограничени низ

Посматрајмо скуп $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$.. Он је непразан и одозго ограничен, па по теореми о супремуму $\exists c = \sup X$

Задајмо $\varepsilon > 0$, јасно $c - \varepsilon < c$, па $c - \varepsilon$ није горње огр.

$c - \varepsilon < x_{n_0} \le x_{n_0+1} \le x_{n_0+2} \le \dots \le c < c + \varepsilon$, па зато $\forall n \ge n_0 \; |x_n - c| < \varepsilon$

$\Rightarrow c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

2) Посматрамо низ $-x_n$ који је растући, па се доказ своди на 1)

Последица: За растуће: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\ge1} x_n$

За опадајуће: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\ge1} x_n$

Став: Низ $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ је **конвергентан**

Доказ: • Докажимо да је растући

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Како повећавамо n, тако се сваки $\left(1-\frac{k}{\underset{(n+1)}{n}}\right)$ повећа, па је x_n растући

• Докажимо да је ограничен одозго

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot2} + \frac{1}{2\cdot2\cdot2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

Пошто је $x_n < 3$ за свако n, онда је x_n ограничен одозго

По теореми о монотоном и ограниченом низу, x_n је конвергентан

деф. $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

6. Теореме Болцано-Вајерштраса за скупове и низове

деф. Тачка $x \in R$ је **тачка нагомилавања подскупа** A од R ако $\forall \varepsilon > 0$ интервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ има бесконачно много елем. из A

деф. $A' = \{x \in R \mid x$ је тачка нагомилавања скупа $A\}$

Став: x је т.н. скупа A $\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A)(x \neq a$ и $|x-a| < \varepsilon)$

Доказ: $(\Rightarrow)$ По деф. за свако ε постоји бесконачно тачака у интервалу $\Rightarrow$ постоји једна

$(\Leftarrow)$ **пс:** $x \notin A'$. По деф. значи да $\exists \varepsilon > 0$ ткд. је $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A$ коначно

па то значи да може да се изабере довољно мало ε_1, $(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \cap A = \emptyset$
што је немогуће, јер за свако ε постоји барем једна тачка

Последица: Довољно је да за $\forall \varepsilon > 0$ $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ има један елемент из A

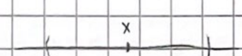
Став: Нека је $A \subset R$ и $x \in R$. Тада важи:

"$\Rightarrow$" **1)** Ако постоји низ a_n тачака из $A \setminus \{x\}$ ткд. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$, онда $x \in A'$

"$\Leftarrow$" **2)** Ако $x \in A'$ тада постоји низ a_n међусобно различитих елем. из $A \setminus \{x\}$ ткд. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$

Доказ: **1)** $\forall \varepsilon\ \exists n_0\ \forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - x| < \varepsilon \Rightarrow x \in A'$

2)



$\varepsilon_1 = 1$ $\quad \exists a_1 \neq x \quad a_1 \in (x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1)$

$\varepsilon_2 = \min(1/2, |x-a_1|)$ $\quad \exists a_2 \neq x \quad a_2 \in (x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2)$

$\varepsilon_3 = \min(1/3, |x-a_2|)$ $\quad \exists a_3 \neq x \quad a_3 \in (x-\varepsilon_3, x+\varepsilon_3)$

$\vdots$

$\varepsilon_n = \min(1/n, |x-a_{n-1}|)$, $\quad \exists a_n \neq x \quad a_n \in (x-\varepsilon_n, x+\varepsilon_n)$

$|a_n - x| < 1/n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$

(за $\forall \varepsilon\ \exists n\ 1/n < \varepsilon$ - Архимед)

Теорема Болцано-Вајерштраса за скупове: Сваки бесконачан и ограничен **подскуп** од R има **бар једну тачку нагомилавања**

Доказ: $A \subseteq R$ који је бесконачан и ограничен, $A \subset [a,b] = I_0$

I_{n+1} је она половина I_n која има бесконачно много елем. из A, дужина $I_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$, па по леми Кантора $\bigcap I_n \neq \emptyset$, нека је $c \in \bigcap I_n$

Задајмо $\varepsilon > 0$. По Архимедовом својству $\exists n_0\ \dfrac{b-a}{2^{n_0}} < \varepsilon$, па је $I_{n_0} \subset (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$

Тиме смо бесконачно много елемената из A ставили у ε-околину тачке c

$\Rightarrow c$ је тачка нагомилавања скупа A

деф. **Подниз** је композиција функција $a \circ n : N \to A$, где је $a : N \to A$ низ, а $n : N \to N$

$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}$, где $n_1 < n_2 < n_k$) $\in N$

Став: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a \implies \lim\limits_{n_k \to \infty} a_{n_k} = a$ (сваки подниз)

Доказ: Задајмо $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \ |a_n - a| < \varepsilon$, за свако $n \geq n_0$. Такође $\exists k_0 \ n_{k_0} \geq n_0$

Дакле $k \geq k_0 \implies n_k \geq n_{k_0} \geq n_0 \implies |a_{n_k} - a| < \varepsilon \implies \lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = a$

Теорема Болцано-Вајерштрас за низове: Сваки ограничен низ реалних бројева садржи **конвергентан подниз**

Доказ: $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

1° A - коначан $\implies$ нека од тих вредности се понавља бесконачно много пута, па можемо да направимо константан подниз од те вредности

2° A - бесконачан. Пошто је a_n ограничен $\implies$ A је ограничен скуп

По Б-В за скупове $\exists x \in A'$, па по ставу под 2) са претходне стране
Постоји низ међусобно различитих елем. из $A \setminus \{x\}$ који конвергира (ка x)
а тај низ је подниз од a_n

деф. Тачка $x \in R$ је **тачка нагомилавања низа** a_n ако постоји његов подниз који конвергира ка x.

деф. $T(a_n) = \{x \in R \mid x$ је тачка нагомилавања низа $a_n\}$

Последица Б-В за низове: Сваки ограничен **низ** реалних бројева има **бар једну тачку нагомилавања** у R

НАПОМЕНЕ: Сваки низ има бар једну Т.Н у $\overline{R}$

Ако је низ конвергентан, онда он има само једну Т.Н (пошто је лимес јединствен)

7. Кошијев критеријум конвергенције низова.

деф. Низ a_n је **Кошијев низ** ако важи

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall m,n\in N)\ (m,n\geq n_0 \Rightarrow |a_m-a_n|<\varepsilon)$$

Став: Сваки конвергентан низ је Кошијев

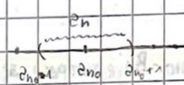
Доказ: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \exists n_0\ \forall m,n\geq n_0\quad |a_m-a|<\varepsilon/2$ и $|a_n-a|<\varepsilon/2$

Дакле $|a_m-a_n| = |a_m-a-(a_n-a)| \leq |a_m-a|+|a_n-a| = \varepsilon$

Лема 1: Сваки Кошијев низ је ограничен

Доказ: $\varepsilon=1$ $\quad \exists n_0\ \ |a_m-a_n|<1\quad m,n\geq n_0$

$m=n_0\quad |a_{n_0}-a_n|<1\quad n\geq n_0$



Проширимо околину док не обухватимо све (има их још n_0-1)

Лема 2: Нека је низ a_n Кошијев и његов подниз a_{n_k} конвергира ка a. Онда $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Доказ: $a_{n_k}\to a$ кад $n_k\to\infty$

Задајмо $\varepsilon>0$. $\quad \exists k_0\ \forall k\geq k_0\ \ |a_{n_k}-a|<\varepsilon/2$ (конв. подниз)

$\exists n_0\ \forall m,n\geq n_0\ \ |a_m-a_n|<\varepsilon/2$ (низ је Кошијев)

$|a_n-a| \leq |a_n-a_{n_k}|+|a_{n_k}-a| < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon \quad (k\geq k_0,\ n_k\geq n_0)$

Теорема: Низ реалних бр. a_n је **конвергентан** $\Leftrightarrow$ низ реалних бр. a_n је Кошијев

Доказ: $(\Rightarrow)$ Доказано у ставу

$(\Leftarrow)$ a_n - Кошијев $\xRightarrow{Л1}$ ограничен $\xRightarrow{Б-В}$ има конверг. подниз $\xRightarrow{Л2}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

8. Горњи и доњи лимес низа реалних бројеве

деф. Нека је a_n низ реалних бројева и $T(a_n)$ скуп тачаке нагомилавања тог низа

1) Максимум скупа $T(a_n)$ назива се **горњи лимес** или **лимес супериор**
2) Минимум скупа $T(a_n)$ назива се **доњи лимес** или **лимес инфериор**

Ознаке су: $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n \,/\, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, тј. $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n \quad \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$

Став: За сваки низ a_n, скуп $T(a_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ има највећи елемент и најмањи елемент

Доказ: Пошто је $T(a_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$, он је непразан (постоји бар једна) по Б-В, дакле он има супремум и инфимум.

1° $T(a_n)$ је коначан скуп – тривијално је да има max и min

2° $T(a_n)$ је бесконачан скуп, онда ппс. $\underbrace{\sup T(a_n)}_{M}$ и $\underbrace{\inf T(a_n)}_{m}$ нису елементи $T(a_n)$

($|t_1 - M| < \varepsilon$)

По карактеризацији супремума: $\forall \varepsilon > 0\ \exists t_1 \in T(a_n)\quad t_1 > M - \varepsilon \Rightarrow M \in T(a_n)$ ↯

По карактеризацији инфимума: $\forall \varepsilon > 0\ \exists t_2 \in T(a_n)\quad t_2 < m + \varepsilon \Rightarrow m \in T(a_n)$ ↯

Дакле, M и m су елементи $T(a_n)$, дакле $M = \max T(a_n)$, $m = \min T(a_n)$

Став: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n = \overbrace{\inf\limits_{n\geq 1} (\sup_{k\geq n} a_k)}^{\text{скуп}} \overset{\Leftrightarrow}{=} \overbrace{\lim\limits_{n\to\infty} (\sup_{k\geq n} a_k)}^{\text{низ}}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n = \sup\limits_{n\geq 1} (\inf_{k\geq n} a_k) = \lim\limits_{n\to\infty} (\inf_{k\geq n} a_k)$

Доказ: 1) 1° a_n – није ограничен одозго, онда постоји подниз $a_{n_k} \to \infty$ па је $+\infty \in T(a_n)$, што је и његов највећи елемент

2° a_n – ограничен одозго, онда $\exists M\ \forall n\quad a_n \leq M$

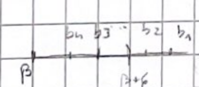
$b_1 = \sup\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$; $b_2 = \sup\{a_2, a_3, \dots\}$; $b_3 = \sup\{a_3, \dots\}$; ...

$b_n = \sup_{k\geq n} a_k$ – опадајући низ

Дакле постоји $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf\limits_{n\geq 1} b_n = \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ (може и $-\infty$, ту је тривијалан доказ)

* Докажимо $\beta \in T(a_n)$. Тражимо подниз $a_{n_k} \to \beta$

Задајмо $\varepsilon > 0$. $\exists N\quad \beta \leq b_N < \beta + \varepsilon$ (пошто је β инфимум)



$\beta - \varepsilon < b_N - \varepsilon < a_{n_k} \leq b_N < \beta + \varepsilon \Rightarrow |a_{n_k} - \beta| < \varepsilon$

карakт. sup / пошто $b_N = \sup\{a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots\}$

n_k је неки број већи од N, па можемо формирати подниз

* Докажимо да је β највећа Т.Н.

ппс: $\exists \alpha \in T(a_n)\quad \alpha > \beta$. Задајмо γ ткд. $\beta < \gamma < \alpha$

↳ постоји подниз $a_{n_k} \to \alpha$

$b_n = \sup\{\underline{a_n, a_{n+1}, \dots}\}$

↳ овде има оних $a_{n_i} \geq \gamma$ (због овога)

Дакле $b_n \geq \gamma$ за свако n, па је и $\lim b_n = \beta \geq \gamma$ ↯

2) аналогно

Став: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \overline{\mathbb{R}} \iff \lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n$

Доказ: $(\Rightarrow)$ $T(a_n) = \{a\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n = a$

$(\Leftarrow)$ Задајмо $\varepsilon > 0$. Тражимо N ткд. $\forall n \geq N$ $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

ппс: Постоји неки подниз a_{n_k} ткд. $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon$ (не конвергира ка a)

По Б-В, за подниз a_{n_k}, постоји подниз $a_{n_{k_l}}$ који конвергира ка $\alpha \neq$
што је немогуће, јер $\alpha \in T(a_n)$, а за тај скуп a је и највећи и најмањи елем.

Особине:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup(-a_n) = -\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf(-a_n) = -\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup(a_n + b_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n + \lim\limits_{n\to\infty} \sup b_n$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf(a_n + b_n) \geq \lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n + \lim\limits_{n\to\infty} \inf b_n$

Доказ:

1) $\lim \sup(-a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (\sup_{k\geq n}(-a_k)) = \lim\limits_{n\to\infty} (-\inf_{k\geq n} a_k) = -\lim\limits_{n\to\infty} (\inf_{k\geq n} a_k) = -\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n$

2) аналогно

3) $\lim \sup(a_n + b_n) = \inf\limits_{n\geq 1} (\sup_{k\geq n}(a_n + b_n)) \leq \inf\limits_{n\geq 1} (\sup_{k\geq n} a_n + \sup_{k\geq n} b_n) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} (\sup_{k\geq n} a_n + \sup_{k\geq n} b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (\sup_{k\geq n} a_n) + \lim\limits_{n\to\infty} (\sup_{k\geq n} b_n)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n + \lim\limits_{n\to\infty} \inf b_n$

4) аналогно

пр.

								$\overline{\lim}$	$\underline{\lim}$
a_n	1	0	1	0	1	0	...	1	0
b_n	0	1	0	1	0	1	...	1	0
$a_n + b_n$	1	1	1	1	1	1	...	1	1

9. Теореме Кошије и Штолца

Кошијева теорема: Нека низ реалних бројева a_n конвергира ка a. Тада је:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Доказ:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \underset{(3)}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \underset{(2)}{\leq} \limsup_{n\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \underset{(1)}{\leq} \limsup_{n\to\infty} a_n$$

(1) 1° $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty \to$ тривијално

2° $\limsup_{n\to\infty} a_n = L < +\infty$. Задајмо $\varepsilon > 0$ и очигледно $L < L+\varepsilon$

$L = \inf_{n\geq 1}(\sup_{k\geq n} a_k) < L+\varepsilon \Rightarrow \exists N\in\mathbb{N}$ $\sup_{k\geq N} a_k < L+\varepsilon$, па зато $a_N, a_{N+1}, \ldots < L+\varepsilon$

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} = \frac{a_1+\ldots+a_N+a_{N+1}+\ldots+a_n}{n} < \frac{a_1+\ldots+a_N}{n} + \frac{(n-N)(L+\varepsilon)}{n} \quad / \limsup_{n\to\infty}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty}\left[\frac{a_1+\ldots+a_N}{n} + \left(1-\frac{N}{n}\right)(L+\varepsilon)\right]$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\overbrace{a_1+\ldots+a_N}^{\text{const}}}{n} + \limsup_{n\to\infty}\left(1-\frac{N}{n}\right)(L+\varepsilon) = 0 + (L+\varepsilon) = L+\varepsilon \quad (\forall\varepsilon>0)$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \quad (\varepsilon\to 0)$$

(2) очигледно

(3) аналогно са 1

Штолцова теорема: Нека су a_n и b_n низови реалних бројева ткд

1) b_n је растући
2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Тада важи:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \overset{(3)}{\le} \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \overset{(2)}{\le} \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \overset{(1)}{\le} \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

Специјално, ако $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ конвергира ка L, онда и $\frac{a_n}{b_n}$ конвергира ка L

Доказ: (1) $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L < +\infty$ (ако је $L=+\infty$, онда је тривијално)

тео у почетку $\rightarrow$ Задајемо $\varepsilon > 0$, за њега постоји N ткд. $\frac{a_{N+1}-a_N}{b_{N+1}-b_N}, \frac{a_{N+2}-a_{N+1}}{b_{N+2}-b_{N+1}}, \dots < L+\varepsilon$

$$\left.\begin{aligned} a_{N+1}-a_N &< (L+\varepsilon)(b_{N+1}-b_N) \\ &\vdots \\ a_{n+1}-a_n &< (L+\varepsilon)(b_{n+1}-b_n) \end{aligned}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} a_{n+1}-a_N < (L+\varepsilon)(b_{n+1}-b_N)$$

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_{n+1}-a_N+a_N}{b_{n+1}-b_N+b_N} = \frac{\frac{a_{n+1}-a_N}{b_{n+1}-b_N} + \overbrace{\frac{a_N}{b_{n+1}-b_N}}^{\to 0\ (b_n\to\infty)}}{1+\underbrace{\frac{b_N}{b_{n+1}-b_N}}_{\to 0}} < \frac{L+\varepsilon+\frac{a_N}{b_{n+1}-b_N}}{1+\frac{b_N}{b_{n+1}-b_N}} \Big/ \limsup_{n\to\infty}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{L+\varepsilon+o(1)}{1+o(1)} = L+\varepsilon \quad (\forall \varepsilon>0)$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \le L$$

(2) очигледно
(3) аналогно са 1

(Коши се може доказати преко Штолца)

(10.) Теорема Бореля-Лебега

деф. Нека је X скуп, $A \subseteq X$ и B_λ - фамилија подскупова од X $(\lambda \in \Delta)$

Ако $A \subseteq \bigcup B_\lambda$ онда фамилија B_λ **покрива** A, тј. B_λ је **покривач** скупа A

деф. Ако је $\Lambda_0 \subset \Lambda$ и $A \subseteq \bigcup B_{\lambda_0}$, онда је фамилија B_{λ_0} **потпокривач** скупа A

деф. Ако је Λ_0 коначан скуп, онда је фамилија B_{λ_0} **коначни потпокривач** скупа A.

Борел-Лебегова теорема: Свако покривање сегмента $[a,b]$ **отвореним** интервалима садржи **коначно потпокривање**

Доказ: Нека је $[a,b] \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ покривање тог сегмента отвореним инт. $I_\lambda = (\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$

ппс: Ако је $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ коначан $\Rightarrow$ није $[a,b] \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} I_\lambda$

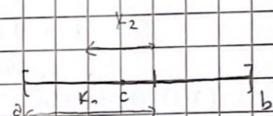
ни један се не може покрити (коначно)

$K_0 = [a,b]$ - не може се покрити (коначно)

$K_1 \subset K_0$ - бар једна половина се не може покрити

$K_2 \subset K_1$ - ״ -

$\vdots$



По леми Кантора: $\exists c \ \bigcap K_n = \{c\}$. А такође, $c \in [a,b] \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$

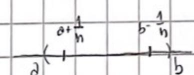
Значи $\exists \lambda \in \Lambda \quad c \in (\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$ (постоји интервал који га садржи)

Дужина интервала $K_n = \frac{b-a}{2^n}$ па за довољно велико n, $K_n \subset (\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$

Дакле постоји n т.к.д. K_n може да се покрије $\lightning$

НАПОМЕНА. За отворени инт. (a,b) теорема не мора да важи

Нпр.



За $I_n = (a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n})$ важи $\bigcup I_n = (a,b)$ али нема коначно потпокривање

11. Поље $\mathbb{C}$ комплексних бројева

деф. Скуп комплексних бројева је скуп $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

где број $(1,0) = 1$, а број $(0,1) = i$

деф. На скупу $\mathbb{C}$ уводимо две операције

1° Сабирање $(a_1,b_1) + (a_2,b_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2)$

2° множење скаларом $(a_1,b_1) \cdot (a_2,b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$

НАПОМЕНА: $(a,b) = (a,0) + (0,b) = a\cdot(1,0) + b\cdot(0,1) = a + i\cdot b$

Став: $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$ је поље

Доказ:

$+$: 1) комутативно
2) асоцијативно
3) неутрал : $(0,0)$
4) инверз : $(-a,-b)$

$\cdot$: 5) комутативно
6) асоцијативно
7) неутрал : $(1,0)$
8) инверз (за $(x,y)\neq(0,0)$) : $(x+iy)^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$

9) дистрибутивно

деф.

$Re : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ $\quad Re(x+iy) = x$

$Im : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ $\quad Im(x+iy) = y$

$\overline{} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad \overline{x+iy} = x - iy$ – коњуговање

Став:

1) $Re\, z = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $Im\, z = \frac{z-\bar{z}}{2}$

2) $z \in \mathbb{R} \iff Im\, z = 0 \iff z = \bar{z}$

3) $Re(\alpha z) = \alpha \cdot Re\, z$, $Im(\alpha z) = \alpha \cdot Im\, z$

Особине коњуговања:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, специјално $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

3) $\bar{\bar{z}} = z$

4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

деф. $|\ | : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ $\quad |z| = \sqrt{z\cdot\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$ – модул

Особине модула:

1) $|z| = 0 \iff z = 0$

2) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

3) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

4) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

5) $|z| = |\bar{z}|$

6) $|Re\, z| \leq |z|$, $|Im\, z| \leq |z|$

деф. **Растојање** од z_1 - z_2 је $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$

Особине растојања:

1) $d(z_1, z_2) \geq 0$
2) $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$
3) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$
4) $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$

деф. За фиксирано $a \in \mathbb{C}$ и $r > 0$, скуп $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ се зове **диск** (отворени круг)

(12.) Низови комплексних бројева

деф. Низ z_n компл. бројева је **ограничен** ако постоји $R>0$ т.д. $|z_n|<R$ $(\forall n \in N)$

деф. **ε-околина** тачке $a \in C$ је $D(a,\varepsilon)$, где је $\varepsilon>0$

деф. Низ z_n компл. бројева **конвергира** ка $a \in C$ ако:

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \in N)\ (n>n_0 \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon)$$, у ознаци **$\lim_{n\to\infty} z_n = a$**

Став: Сваки конвергентан низ у C је ограничен

Доказ: За $\varepsilon=1$ $\exists n_0$ $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$
Захватили смо неке, а нисмо коначно много њих $\Rightarrow \exists R$ $|a_n| \leq R$

Став: Ако је a_n низ у C и $\lim_{n\to\infty} a_n = a'$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = a''$ $\Rightarrow$ $a' = a''$

Доказ: ппс: $a' \neq a''$. Нека је $d = |a' - a''| > 0$, а изаберимо $\varepsilon = \frac{d}{2} > 0$

Тада $\exists n_1, n_2 \in N$ т.д. $\forall n \geq n_1$ $|a_n - a'| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_2$ $|a_n - a''| < \varepsilon$, па за $n_0 = \max(n_1, n_2)$ $\lightning$

Лема: Ако је $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in C$ и $a \neq 0$, онда постоје $\delta>0$ и $n_0 \in N$ т.д. $\forall n \geq n_0$ $|a_n| \geq \delta$

Доказ: ппс: $\forall \delta > 0$ $|a_n| < \delta$ за $n \geq n_0$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $\lightning$

Став: Нека је $z_n = x_n + i \cdot y_n$ низ комплексних бројева и $x_n = Re\, z_n$, $y_n = Im\, z_n$. Тада:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z = x + i \cdot y \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

Доказ: $(\Rightarrow)$ $|x_n - x| = |Re(z_n - z)| \leq |z_n - z| < \varepsilon$
$|y_n - y| = |Im(z_n - z)| \leq |z_n - z| < \varepsilon$

$(\Leftarrow)$ $|z_n - z| \leq |Re(z_n - z)| + |Im(z_n - z)| = |x_n - x| + |y_n - y| < 2\varepsilon$

Став: Нека је $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ и $\lim_{n\to\infty} w_n = w$. Тада је:
1) $\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = z + w$
2) $\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = z \cdot w$

Доказ: 1) $z_n = x_n + i y_n$ $(z = x + iy,\ x_n \to x,\ y_n \to y)$; $w_n = u_n + i v_n$ $(w = u + iv,\ u_n \to u,\ v_n \to v)$

$x_n + u_n \to x + u = Re(z_n + w_n)$; $y_n + v_n \to y + v = Im(z_n + w_n)$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = z + w$

2) $\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = \lim_{n\to\infty}\left[(x_n u_n - y_n v_n) + i(x_n v_n + y_n u_n)\right] = (xu - yv) + i(xv + yu) = z \cdot w$

Последица: $\lim_{n\to\infty}(\lambda \cdot z_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} z_n$

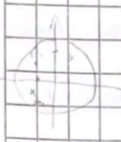
Став: $\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z}{w}$ $(w_n \neq 0)$

деф. Тачка $a \in C$ је **тачка нагомилавања низа** a_n ако постоји подниз a_{n_k} који конвергира ка a

Болцано-Вајерштрасова теорема за низове: Сваки ограничен низ из C има барем једну тачку нагомилавања, тј. има бар један конвергентан подниз

Доказ: a_n - низ у C за који постоји $R>0$ ткд. $|a_n| < R$ за свако n

$a_n = b_n + i c_n$, а $|b_n| \le |a_n| < R$, $|c_n| \le |a_n| < R$, па су b_n, c_n реални огр. низови



$\overset{\text{Б-В } b_n}{\Longrightarrow}$ Постоји конв. подниз b_{n_k} и изаберемо одговарајуће c_{n_k} - тај је ограничен, али не мора бити конвергентан (њих)

$\overset{\text{Б-В } c_n}{\Longrightarrow}$ $b_{n_{k_l}} \to b$, $c_{n_{k_l}} \to c$ $\Rightarrow$ $a_{n_{k_l}} \longrightarrow b + i \cdot c$

деф. Тачка $a \in C$ је **тачка нагомилавања скупа** $A \subset C$ ако у свакој ε-околини тачке a постоји бесконачно много елемената скупа A

Лема Кантора: Нека је $P_n = [a_n, b_n] \times [c_n, d_n]$ низ уметнутих сегмената у R^2. Тада $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n \neq \emptyset$

Доказ:

$$\left.\begin{array}{l} [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \Rightarrow \exists x \in \bigcap [a_n, b_n] \\ [c_{n+1}, d_{n+1}] \subset [c_n, d_n] \Rightarrow \exists y \in \bigcap [c_n, d_n] \end{array}\right\} \Rightarrow (x, y) \in \bigcap P_n$$

Болцано-Вајерштрасова теорема за скупове: Сваки бесконачан и ограничен подскуп A од C има бар једну т. н.

Доказ: A - скуп. Формирамо низ $a_1 \in A$, $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$, $a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$, ...
То је низ међусобно различитих елемената из $A \subset C$ и он је ограничен (јер је A огр.)

$\overset{\text{Б-В}}{\underset{\text{низ}}{\Longrightarrow}}$ $\exists a_{n_k} \to a$, тј. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in N \ k \ge k_0 \Rightarrow |a_{n_k} - a| < \varepsilon$ $\Rightarrow$ a је т.н. скупа A
(има их бесконачно много јер су у (a_n) сви различити)

деф. Низ $z_n \in C$ је **Кошијев низ** ако $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N \ \forall m, n \ge n_0 \ |z_n - z_m| < \varepsilon$

Лема: Низ $z_n = x_n + i y_n$ је **Кошијев** $\Leftrightarrow$ x_n и y_n **Кошијеви**

Доказ: $(\Rightarrow)$ $|x_n - x_m| \le |z_n - z_m| < \varepsilon$, $|y_n - y_m| \le |z_n - z_m| < \varepsilon$

$(\Leftarrow)$ $|z_n - z_m| \le |x_n - x_m| + |y_n - y_m| < 2\varepsilon$

Став: Низ $z_n \in C$ је **конвергентан** $\Leftrightarrow$ z_n је **Кошијев**

Доказ: $(\Rightarrow)$ $z_n = x_n + i y_n$ конв. $\Rightarrow$ x_n, y_n конв. $\Rightarrow$ x_n, y_n Кошијеви $\overset{\text{Л}}{\Rightarrow}$ z_n Кошијев

$(\Leftarrow)$ $z_n = x_n + i y_n$ Кошијев $\overset{\text{Л}}{\Rightarrow}$ x_n, y_n Кошијеви $\Rightarrow$ x_n, y_n конв. $\Rightarrow$ z_n конв.

13. Непрекидне и Липшиц непрекидне функције. Локалне својства

деф. Нека је $f: A \to \mathbb{C}$, где $A \subset \mathbb{C}$. Кажемо да је f **непрекидна у тачки** $a \in A$ ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in A)\ (|z-a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon)$$

$$\Updownarrow$$

$$f[D(a,\delta) \cap A] \subset D(f(a), \varepsilon)$$

$$\Updownarrow$$

$$f^{-1}[D(f(a),\varepsilon)] \supset D(a,\delta) \cap A$$

деф. Функција f је **непрекидна функција** ако је непрекидна у свакој тачки свог домена

деф. Нека је $f: A \to \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$. Кажемо да је f **Липшиц непрекидна** ако постоји константа L ткд.

$$(\forall z_1, z_2 \in A)\quad |f(z_1) - f(z_2)| \leq L\,|z_1 - z_2|$$ (контролисана промена растојања)

пр $\sin x$ (доказ преко Лагранжове теореме, питање 29)

Став: f је Липшиц непрекидна $\Rightarrow$ f је непрекидна

Доказ: Задајемо $\varepsilon > 0$ и бирамо $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Посматрамо произвољну тачку $a \in A$

$$\forall z \in A \quad |z-a| < \delta \Rightarrow |z-a| < \frac{\varepsilon}{L} \Rightarrow L \cdot |z-a| < \varepsilon \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon$$

Локална својства

Став (локална ограниченост): Ако је $f: A \to \mathbb{C}$ **непрекидна** у тачки $a \in A$, онда постоји **δ-околина** тачке a, ткд. је f **ограничена** у $D(a,\delta) \cap A$

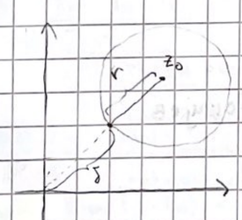
Доказ: За $\varepsilon = 1$ постоји $\delta > 0$, ткд. $\forall z \in A$ $|z-a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| < 1$

Дакле, $-1 + f(a) < f(z) < 1 + f(a)$, па је f ограничена у $D(a,\delta) \cap A$

Став: Ако је $f: A \to \mathbb{C}$ непрекидна у $z_0 \in A$ и $f(z_0) \neq 0$, онда постоје $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ ткд.

$$z \in D(z_0, \varepsilon) \cap A \Rightarrow |f(z)| \geq \delta$$

Доказ:



Због лок. огр. постоји ε околина тачке z_0 у којој је f ограничена (*)

То значи да вредности ф-ја тачака из $D(z_0, \varepsilon)$ могу да се „сместе у круг" полупречника R

Тај круг је одвојен од 0 (коорд. поч.) па из тога следи тврђење

(*) ε (по потреби) можемо да смањимо, како у $D(z_0, \varepsilon)$ не би било тачака које се сликају у 0 (ту искоришћавамо непрекидност)

(14.) Непрекидност и аритметичке операције. Непрекидност сложене функције.

Непрекидност сложене ф-је: $g: A \to B$ непрекидна у $a \in A$, $f: B \to C$ непрекидна у $g(a) \in B$

Тада је $f \circ g : A \to C$ **непрекидна у** a

Доказ: Задајемо $\varepsilon > 0$.

$(f - \text{непр.}) \Rightarrow \exists \eta > 0 \quad |w - b| < \eta \Rightarrow |f(w) - f(b)| < \varepsilon$, $(w \in B)$

$(g - \text{непр.}) \Rightarrow \exists \delta > 0 \quad |z - a| < \delta \Rightarrow |g(z) - g(a)| < \eta$ (изабрали смо $\varepsilon = \eta$)

$$\Rightarrow |f(g(z)) - f(g(a))| < \varepsilon$$

Последица: f, g - непрекидне $\Rightarrow$ $f \circ g$ **непрекидна**

Став: Нека су $f, g : A \to C$ непрекидне у $a \in A$. Онда су **непрекидне** у тачки a:

1) $f + g$
2) $f \cdot g$
3) $\lambda \cdot f \quad (\lambda \in C)$

Доказ: 1) Задајемо $\varepsilon > 0$: $\exists \delta_1 \quad |z - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon/2$

$\exists \delta_2 \quad |z - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(z) - g(a)| < \varepsilon/2$, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

$$|z - a| < \delta \Rightarrow |(f+g)(z) - (f+g)(a)| = |(f(z) - f(a)) + (g(z) - g(a))| \le |f(z) - f(a)| + |g(z) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2) $$|fg(z) - fg(a)| = |f(z)g(z) - f(z)g(a) + f(z)g(a) - f(a)g(a)|$$

$$\le |f(z) \cdot (g(z) - g(a))| + |g(a)(f(z) - f(a))|$$

$$= |f(z)| \cdot |g(z) - g(a)| + |g(a)| \cdot |f(z) - f(a)|$$

За $|z - a| < \delta \Rightarrow |fg(z) - fg(a)| < \underbrace{|f(z)|}_{\text{по лок. својству ограничено у неком } D(a,\delta) \cap A} \cdot \varepsilon_2 + \underbrace{|g(a)|}_{\text{const}} \cdot \varepsilon_1 < \varepsilon$

тако изаберемо δ

Став: Функција $\rho(z) = \frac{1}{z}$ је непрекидна на $C \setminus \{0\}$

Доказ: $$\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - z}{az}\right| = \frac{|z - a|}{|z| \cdot |a|}$$

обрнута неједнакост троугла

Ако $|z - a| < \frac{|a|}{2}$, онда $|z| = |z + a - a| \ge |a| - |z - a| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$

Дакле, ако $|z - a| < \frac{|a|}{2}$ онда $|z| > \frac{|a|}{2}$, па $\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{a}\right| < \frac{2}{|a|^2} \cdot |z - a| \quad \left(\overset{?}{<} \varepsilon\right)$

Зато бирамо $\delta = \min\left(\frac{|a|}{2}, \frac{|a|^2 \varepsilon}{2}\right)$, да би $|z - a|$ увек било мање од $\frac{|a|}{2}$

Последице: 1) f непрекидна у a, $f(a) \ne 0 \Rightarrow \frac{1}{f(z)}$ је непрекидна у a

$(1/f = \rho \circ f)$

2) g непрекидна у $a \Rightarrow \frac{g}{f}$ непрекидна у a

$g/f = 1/f \cdot g$

1° $\delta = \frac{|z_0|}{2}$, дакле $\frac{|z_0|}{2} < \frac{|z_0|^2 \varepsilon}{2}$

$|z - z_0| < \frac{|z_0|}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{|z||z_0|} < \frac{\frac{|z_0|^2\varepsilon}{2}}{\frac{|z_0|}{2}|z_0|} = \varepsilon$

2° $\delta = \frac{|z_0|^2 \varepsilon}{2}$, дакле $\frac{|z_0|^2 \varepsilon}{2} < \frac{|z_0|}{2}$

$|z - z_0| < \frac{|z_0|^2\varepsilon}{2} < \frac{|z_0|}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{|z||z_0|} < \frac{\frac{|z_0|^2\varepsilon}{2}}{\frac{|z_0|}{2}|z_0|} = \varepsilon$

15. Непрекидност исказана „низовски": Теорема Хајнеа

Хајнеова теорема: **1)** Нека је $f: A \to \mathbb{C}$ непрекидна у $a \in A$.

„⇒" Тада за сваки низ a_n из A који конвергира ка a важи

лимес пролази кроз непр. функције

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(a)$$

2) Нека је $f: A \to \mathbb{C}$ и $a \in A$. Ако за сваки низ a_n из A који конвергира ка a важи $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)$, онда је f **непрекидна** у a

други начин дефинисање непрекидности „⇐"

Доказ: **1)** Задајмо $\varepsilon > 0$.

Пошто је f непр. $\exists \delta > 0 \; |z-a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon$

Пошто $a_n \to a$: $\exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; |a_n - a| < \delta$, па зато $|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon \; (\forall n \geq n_0)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ (из деф. конвергенције)

2) **пс:** f је прекидна $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists z \in A \; |z-a| < \delta \wedge |f(z) - f(a)| > \varepsilon$

Фиксирајмо то $\varepsilon > 0$. Изаберимо $\delta_n = \frac{1}{n}$ које даје $z_n \in A$

за z_n важи $|z_n - a| < \frac{1}{n} \wedge |f(z_n) - f(a)| > \varepsilon$

То значи да $z_n \to a$, али $f(z_n) \not\to f(a)$ ↯

16. Лимеси функција. Кошијев критеријум

деф. Нека је a тачка нагомилавања скупа $A \subset \mathbb{C}$ и нека је $f: A \to \mathbb{C}$. Кажемо да је $b \in \mathbb{C}$ **гранична вредност у тачки** a за f, у ознаци $\lim\limits_{z \to a} f(z) = b$, ако:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(z \in \overset{\circ}{D}_A(a,\delta) \Rightarrow |f(z) - b| < \varepsilon)$$

$\overset{\circ}{D}_A(a,\delta) = (D(a,\delta) \cap A) \setminus \{a\}$

$$\Updownarrow$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|z-a| < \delta \wedge z \in A \setminus \{a\} \Rightarrow |f(z) - b| < \varepsilon)$$

Став: $a \in A \subset \mathbb{C}$, $f: A \to \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$, $\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in A \setminus \{a\} \\ b, & z = a \end{cases}$

Тада $\lim\limits_{z \to a} f(z) = b \iff \tilde{f}$ **непрекидна** у тачки a

Доказ: $(\Rightarrow)$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ |z-a| < \delta \Rightarrow |f(z) - b| < \varepsilon$ $(*)$

1° $z = a$, тада је $\tilde{f}(z) = b$, па је $|\tilde{f}(z) - b| = 0 < \varepsilon$

2° $z \neq a$, тада је $\tilde{f}(z) = f(z)$, па је $|\tilde{f}(z) - b| = |f(z) - b| < \varepsilon$ (због $(*)$)

$(\Leftarrow)$ слично

Став: $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \beta$, $\lim\limits_{z \to a} g(z) = \gamma$. Тада је:
1) $\lim\limits_{z \to a} (f(z) + g(z)) = \beta + \gamma$
2) $\lim\limits_{z \to a} (f(z) \cdot g(z)) = \beta \cdot \gamma$

Доказ: 1) $\tilde{f}, \tilde{g}$ су непрекидне у $a \Rightarrow \tilde{f}(a) = \beta$ и $\tilde{g}(a) = \gamma$

Збир непрекидних функција је непрекидна ф-ја $\Rightarrow (\widetilde{f+g})$ је непрекидна (у a) а $(\widetilde{f+g})(a) = \tilde{f}(a) + \tilde{g}(a)$

Дакле, по претходном, $\lim\limits_{z \to a} (f+g)(z) = \beta + \gamma$

2) слично

Став: $\lim\limits_{z \to a} f(z) \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall z \in \overset{\circ}{D}_A(a, \varepsilon) \ |f(z)| \geq \delta$

$\overset{\circ}{D}_A(a,\varepsilon) = D_A(a,\varepsilon) \setminus \{a\}$

Доказ: Пошто је $\tilde{f}$ непрекидна, став следи због другог локалног својства ($\tilde{f}(a) \neq 0$)

Став: Нека је a т.н. скупа $A \subset \mathbb{C}$ и $a \in A$ и $f: A \to \mathbb{C}$. Тада важи:

f је **непрекидна у** $a \iff \lim\limits_{z \to a} f(z) = f(a)$, тј. $\tilde{f} = f$

Доказ: f је непр. у $a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(z \in D_A(a,\delta) \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon) \iff \lim\limits_{z \to a} f(z) = f(a)$

Став: $\lim\limits_{z \to a} f(z) = b \iff \forall a_n \to a$ ($a_n \in A \setminus \{a\}$) важи $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = b$

Доказ: $\lim\limits_{z \to a} f(z) = b \iff \tilde{f}$ је непрекидна у $a \overset{\text{Хајне}}{\iff} \forall a_n \overset{A}{\to} a \ \tilde{f}(a_n) \to \tilde{f}(a)$

Пошто је $\tilde{f}(a) = b$, тада (пошто $a_n \neq a$) важи $\tilde{f}(a_n) = f(a_n)$, па $f(a_n) \to b$

деф. $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ $\quad (\forall M)(\exists \delta>0)(|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>M)$

деф. $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ $\quad (\forall \varepsilon>0)(\exists M)(x>M \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon)$

деф. $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ $\quad (\forall M)(\exists R)(x>R \Rightarrow f(x)>M)$

$\Updownarrow$

$\forall x_n \to +\infty \Rightarrow f(x_n) \to +\infty$

Аналогно се дефинише и за $-\infty$

Последица: $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

деф. **Лимес са леве стране:** $(\forall \varepsilon>0)(\exists\delta>0)(a-\delta<x<a \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon) \to \lim_{x\to a-0} f(x)=b$

Лимес са десне стране: $(\forall \varepsilon>0)(\exists\delta>0)(a<x<a+\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon) \to \lim_{x\to a+0} f(x)=b$

Став: $\lim_{x\to x_0} f(x) = c \iff \lim_{x\to x_0-0} f(x) = c \wedge \lim_{x\to x_0+0} f(x) = c$

Доказ: $(\Rightarrow)$ 1° $x_0<x \Rightarrow (x_0-\delta<x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow |f(x)-c|<\varepsilon)$, дакле $\lim_{x\to x_0+0} f(x)=c$

2° $x<x_0 \Rightarrow (x_0-\delta<x<x_0<x_0+\delta \Rightarrow |f(x)-c|<\varepsilon)$, дакле $\lim_{x\to x_0-0} f(x)=c$

$(\Leftarrow)$ слично

Кошијев критеријум за лимес функције: Нека је $f: A\to\mathbb{C}$ и a т.н. скупа $A\subset\mathbb{C}$. Тада:

$$\lim_{z\to a} f(z) = b \in \mathbb{C} \iff (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(z', z'' \in \mathring{D}_A(a,\delta) \Rightarrow |f(z')-f(z'')|<\varepsilon)$$

Доказ: $(\Rightarrow)$ Зададмо $\varepsilon>0$. $\exists\delta>0$ $z\in\mathring{D}_A(a,\delta) \Rightarrow |f(z)-b|<\varepsilon/2$

$|f(z')-f(z'')| = |f(z')-b+b-f(z'')| \le |f(z')-b|+|f(z'')-b| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$

$(\Leftarrow)$ Изаберимо низ $z_n \to a$ ($\in A\setminus\{a\}$) и докажимо $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = b$, (за неко b)

* $\exists n_0\in\mathbb{N}$ $\forall n\ge n_0$ $|z_n-a|<\delta$. Изаберемо $m,n\ge n_0$, па $z_n, z_m \in \mathring{D}_A(a,\delta)$

Зададмо $\varepsilon>0$. $\exists\delta>0$ $z', z''\in\mathring{D}_A(a,\delta) \Rightarrow |f(z')-f(z'')|<\varepsilon$

$\Rightarrow |f(z_n)-f(z_m)|<\varepsilon \Rightarrow$ **$f(z_n)$ - Кошијев** $\Rightarrow f(z_n)$ конвергира (нпр. ка b)

* Треба још доказати да за $\forall z_n\to a$, $f(z_n)$ тежи ка истој вредности

Нека $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = b$ ($z_n\to a$) и $\lim_{n\to\infty} f(w_n) = \beta$ ($w_n\to a$). Посматрајмо низ $z_1, w_1, z_2, w_2, \ldots$ он конвергира ка a, то значи да низ $f(z_1), f(w_1), f(z_2), f(w_2)\ldots$ је конв. а пошто његов подниз $f(z_1), f(z_2)\ldots$ конв. ка b, онда и тај низ, као и сваки његов подниз конвергирају ка b, па зато $b=\beta$

Последица: $\lim_{x\to\infty} f(x) = b \iff (\forall\varepsilon>0)(\exists M)(x', x''>M \Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\varepsilon)$

(17.) Горњи и доњи лимес функције

Деф. Горњи лимес функције са десне стране (у тачки $a \in A$) је $\limsup\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{\delta\to 0+}\left(\sup\limits_{a<x<a+\delta} f(x)\right) = \inf\limits_{\delta>0}\left(\sup\limits_{a<x<a+\delta} f(x)\right)$

Доњи лимес функције са десне стране је $\liminf\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{\delta\to 0+}\left(\inf\limits_{a<x<a+\delta} f(x)\right) = \sup\limits_{\delta>0}\left(\inf\limits_{a<x<a+\delta} f(x)\right)$

НАПОМЕНА: $f:(a,b)\to \mathbb{R}$

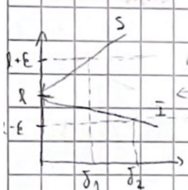
Аналогно се дефинише за $x\to a-0$, као и кад $x\to\pm\infty$

Став: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ постоји $\iff$ $\limsup\limits_{x\to a+} f(x) = \liminf\limits_{x\to a+} f(x)$

Доказ: $(\Rightarrow)$ тривијално $\left(\lim\limits_{\delta\to 0+}(\sup f(x)) = \lim\limits_{\delta\to 0+}(\inf f(x))\right)$

$(\Leftarrow)$ Означимо $\limsup\limits_{x\to a+} f(x) = \liminf\limits_{x\to a+} f(x) = l$ и $\underbrace{S(\delta) = \sup\limits_{a<x<a+\delta} f(x)}_{}$ опадајуће, $I(\delta) = \inf\limits_{a<x<a+\delta} f(x)$ растуће

(Дакле $l = \inf\limits_{\delta>0} S(\delta) = \sup\limits_{\delta>0} I(\delta)$)



$(\forall\varepsilon\ \exists\delta_1,\delta_2)$

За $0<\delta<\delta_1$ $\quad l \le S(\delta) < l+\varepsilon$

За $0<\delta<\delta_2$ $\quad l-\varepsilon < I(\delta) \le l$ $\quad$ и нека је $\delta_0 = \min(\delta_1,\delta_2)$

Дакле, за $0<\delta<\delta_0$ $\quad l-\varepsilon < I(\delta) \le S(\delta) < l+\varepsilon \quad (\forall\varepsilon)$

На крају, за $a < \underbrace{x}_{a+\delta} < a+\delta_0$ $\quad l-\varepsilon < \underbrace{f(x)}_{I\le f\le S} < l+\varepsilon$

Став: $\limsup\limits_{x\to\infty}[f(x)+g(x)] \le \limsup\limits_{x\to\infty} f(x) + \limsup\limits_{x\to\infty} g(x)$

Доказ: $\limsup\limits_{x\to\infty}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{M\to\infty}\left(\sup\limits_{x>M}(f(x)+g(x))\right) \le \lim\limits_{M\to\infty}\left(\sup\limits_{x>M} f(x) + \sup\limits_{x>M} g(x)\right)$

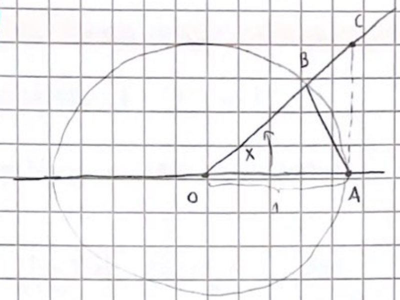
$= \lim\limits_{M\to\infty}\left(\sup\limits_{x>M} f(x)\right) + \lim\limits_{M\to\infty}\left(\sup\limits_{x>M} g(x)\right) = \limsup\limits_{x\to\infty} f(x) + \limsup\limits_{x\to\infty} g(x)$

НАПОМЕНА: Важи и за све остале $(x\to a+0,\ x\to a-0,\ x\to -\infty)$

(18.) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$. Лимес монотоне функције

Лема: $\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad , \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Доказ:



$\Delta OAB \subset \sphericalangle OAB \subset \Delta OAC$

$P(\Delta OAB) < P(\sphericalangle OAB) < P(\Delta OAC)$

$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x$

$\Rightarrow \quad \sin x < x < \operatorname{tg} x$

Став: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Доказ: Пошто је $\frac{\sin x}{x}$ парна функција, довољно је доказати $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\sin x < x < \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad / : x$

$\frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$

$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \Rightarrow \cos x - 1 < \frac{\sin x}{x} - 1 < 0 \quad / \cdot (-1)$

$\Rightarrow \quad 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$

$\rightarrow 0 \leftarrow$

Став: $\sin x$ је непрекидна функција

Доказ: Због парности: $|\sin x| \le |x|, \quad x \in \mathbb{R}$

$|\sin x_1 - \sin x_2| = \left|2 \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2}\right| \le 2 \left|\sin \frac{x_1 - x_2}{2}\right| \cdot \left|\cos \frac{x_1 + x_2}{2}\right|$

$\le 2 \left|\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \cdot 1$

Дакле $|\sin x_1 - \sin x_2| \le |x_1 - x_2| \Rightarrow$ Липшиц непрекидна $(L=1) \Rightarrow$ непрекидна

Последице: Следеће функције су такође **непрекидне**

- $\rightarrow \cos x \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
- $\rightarrow \operatorname{ctg} x \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}) \qquad \operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$
- $\rightarrow \operatorname{tg} x \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2}\}) \qquad \operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$

деф. $A \subset R$. Кажемо да је $f: A \to R$

1° **растућа**
2° **строго растућа**
3° **опадајућа**
4° **строго опадајућа**

$$x_1 < x_2 \; (x_1, x_2 \in A) \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) \le f(x_2) \\ f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_1) \ge f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{cases}$$

Став: Нека је $f: A \to R$ **растућа (опадајућа)** и нека је a **т.н. скупа** $A \cap (-\infty, a)$

Тада **постоји** $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) \in \overline{R}$ и важи $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \sup\limits_{\substack{x<a \\ x \in A}} f(x)$ $\left(\inf\limits_{\substack{x<a \\ x\in A}} f(x) \right)$

Доказ: $S = \sup\limits_{\substack{x<a \\ x \in A}} f(x)$ (постоји због теореме о супремуму) $\Rightarrow$ за $x<a, x \in A$ $f(x) \le S$

1° S - коначно

Задајемо $\varepsilon > 0$. $S - \varepsilon < S \Rightarrow \exists x_0 < a$ $S - \varepsilon < f(x_0)$ (иначе би $S-\varepsilon$ било г.о.)

растуће $\qquad S \ge f(x)$

$\Rightarrow$ за $x \in (x_0, a)$ $f(x) \ge f(x_0) > S - \varepsilon \Rightarrow \varepsilon > S - f(x) = |f(x) - S|$

$\delta = a - x_0$

(за свако ε постоји x_0 које даје δ и важи $a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - S| < \varepsilon$)

2° $S = +\infty$

Задајемо M. $\exists x_0 < a$, $x_0 \in A$ $f(x_0) > M$

Због монотоности за $x_0 < x < a$, $x \in A \Rightarrow f(x) > M$ (опет $\delta = a - x_0$)

Став: Нека је $f: A \to R$ **растућа (опадајућа)** и нека је a **т.н. скупа** $A \cap (a, +\infty)$

Тада **постоји** $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) \in \overline{R}$ и важи $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \inf\limits_{\substack{x>a \\ x\in A}} f(x)$ $\left(\sup\limits_{\substack{x>a \\ x \in A}} f(x) \right)$

Доказ: аналогно

19. Прекиди прве и друге врсте. Непрекидност и монотоност

деф. За тачку $a \in R$ кажемо да је **тачка прекида** функције $f: A \to R$ ако f није непрекидна у тој тачки

деф. Нека је $f: A \to R$ и $a \in A$ тачка прекида за f. Кажемо да је у тачки a

$\sin\frac{1}{x}$ није I врсте

1° **прекид прве врсте**, ако постоје коначни $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$

Специјално, ако $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, прекид прве врсте је **отклоњив**

2° **прекид друге врсте**: сви остали прекиди

деф. Функција је **непрекидна слева у тачки** $a \in A$ ако $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$
Функција је **непрекидна здесна у тачки** $a \in A$ ако $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$

Став: Функција која је **монотона** може имати само **прекиде прве врсте**

Доказ: последица ставове из претходног питања

(постоје и леви и десни лимес)

деф. Скуп је **пребројив** ако је коначан или ако може да се смести у низ

Став: Ако се фамилија $\mathcal{J}$ састоји од **отворених** и **дисјунктних интервала** на R, онда је та фамилија **пребројива**

Доказ: Скуп Q је пребројив, тако да можемо сваком интервалу доделити неки рац. бр. који му припада. Сваки интервал сигурно садржи бар један рац. бр. (због Архимедовог својства)

Став: Свака **монотона** $f: I \to R$ има највише **пребројиво много тачака прекида**

Доказ: последица претходног става

(свакој прекидној тачки придружимо интервал)

20. Глобална својства I (Теорема о међувредности, слика интервала...)

Коши-Болцано

Коши-Болцанова теорема: (Теорема о међувредности) Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна, $A=f(a)$, $B=f(b)$ и $B<C<A$ (или $A<C<B$)

Тада $\exists c\in(a,b)$ ткд $f(c)=C$

Доказ: б.у.о. $B<C<A$

$g(x)=f(x)-C$ (↳ непрекидна). Тада је $g(a)\cdot g(b)=(A-C)(B-C)<0$ ⇒ различити знаци

$I=[a,b]\supset I_1\supset I_2\supset\dots\supset I_n$, ткд $g(a_n)>0$, $g(b_n)<0$ (бирамо ону половину са различитим знацима)

$d(I_n)=\frac{b-a}{2^n}\xrightarrow{n\to\infty}0$

$\bigcap I_n=\{c\}$ (Кантор) ⇒ a_n расту ка c ⇒ $g(c)=g(\lim_{n\to\infty}a_n)\overset{\text{непр.}}{=}\lim_{n\to\infty}g(a_n)\ge 0$

b_n опадају ка c ⇒ $g(c)=g(\lim_{n\to\infty}b_n)=\lim_{n\to\infty}g(b_n)\le 0$

⇒ $g(c)=0$ ⇒ $f(c)=C$

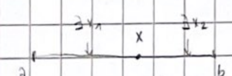
Лема о карактеризацији интервала: Нека је $I\subset\mathbb{R}$ непразан и уколико важи

(*) $\forall x_1,x_2\in I \wedge x_1\le x_2 \Rightarrow [x_1,x_2]\subset I$, тада је I интервал

Доказ: Нека је $a=\inf I$, $b=\sup I$, дакле $-\infty\le a\le b\le+\infty$

Довољно је доказати $(a,b)\underset{(1)}{\subset} I \underset{(2)}{\subset}[a,b]$

(1) Нека $x\in(a,b)$. $\exists x_1\in I$ $a<x_1<x$, $\exists x_2\in I$ $x<x_2<b$ $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $[x_1,x_2]\in I$ ⇒ $x\in I$ (за $\forall x\in(a,b)$)



Дакле $(a,b)\subset I$

(2) $\inf I=a\le x\le b=\sup I$, за све $x\in I$ ⇒ $I\subset[a,b]$

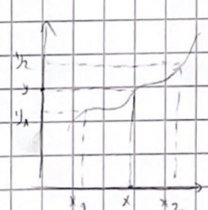
Теорема: Ако је $I\subset\mathbb{R}$ интервал, $f:I\to\mathbb{R}$ непрекидна, онда је $f[I]$ интервал

Доказ: Означимо са $J=f[I]$, изаберимо $y_1,y_2\in J$ ткд $y_1\le y_2$

$f(x_1)=y_1\le y_2=f(x_2)$ и изаберимо $y_1<y<y_2$ $\overset{К-Б}{\Rightarrow}$ $\exists x$ $f(x)=y$ и $x_1<x<x_2$

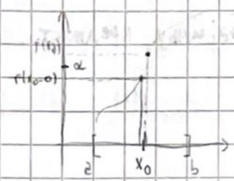
Пошто постоји x за свако $y\in(y_1,y_2)$ $\underset{(\forall y\in f[I])}{\overset{\text{лема}}{\Rightarrow}}$ $J=f[I]$ је интервал

$(J=\{f(x)\mid x\in I\})$



Теорема: Нека је $f: I \to R$ **монотона**. Ако је $f[I]$ **интервал**, онда је f **непрекидна**

Доказ: ппс. f има прекид у $x_0 \in I$ и б.у.о. f - растућа (аналогно за опадајуће)



$\underset{\text{прекид}}{f(x_0-0) < f(x_0)}$, изаберимо неко $\alpha \in (f(x_0-0), f(x_0))$

$\alpha \in f[I]$, али не постоји ништа што може да се слика у α ↯

Теорема: Нека је $f: I \to R$ која је **строго монотона** и **непрекидна**. Тада је:

1) $f[I] = J$ интервал

2) $f: I \to J$ **бијекција**

3) $f^{-1}: J \to I$ **строго монотона и непрекидна**

Доказ: **1)** Већ доказано (претходна страна)

2) 1-1 : последица строге монотоности

НА : последица дефиниције слике $f[I]$

3) f^{-1} - постоји јер је f бијекција (пп. да је растућа)

$f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2)$ за $x_1 < x_2$, тј. $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ ⇒ строго монотона

По претходној теореми ⇒ непрекидна

(21.) Глобална својства II (Теорема Вајерштраса)

Вајерштрасова теорема: Нека је $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна. Тада важи:

1) f је ограничена

2) f достиже највећу и најмању вредност на $[a,b]$

$\left(\exists x_{max}, x_{min} \in [a,b], \quad f(x_{max}) = \sup_{a \le x \le b} f(x), \quad f(x_{min}) = \inf_{a \le x \le b} f(x) \right)$

Доказ: **1)** I начин: **ппс:** $\sup_{[a,b]} f = +\infty$ или $\inf_{[a,b]} f = -\infty$

б.у.о. нека важи $\sup_{[a,b]} f = +\infty$ (за $\inf f = -\infty$ посматрамо $-f$)

Нека је $n \in \mathbb{N}$. Тада $\exists x_n \in [a,b]$ $f(x_n) > n$

(за сваки природан број изаберемо неки број из $[a,b]$ тд. је f од тог броја веће од n, то мора постојати јер $\sup f = +\infty$. Од тих изабраних бројева формирамо низ (не од $f(x)$)

Такав низ је **ограничен** $(a \le x_n \le b)$ $\overset{Б-В}{\Rightarrow}$ постоји његов **конвергентни подниз**

$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = c \in [a,b]$ и знамо да је f непрекидна

Дакле, $f(c) = f(\lim_{k \to \infty} x_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) \Rightarrow f(c) = +\infty$ $\lightning$

II начин: **ппс:** f - неограничена $\Rightarrow I_0 = [a,b]$

I_1 = она половина I_0 на којој је f неограничена

I_2 = она половина I_1 на којој је f неограничена

$\vdots$

По **Кантору** $\bigcap I_n = \{c\}$. Знамо да је f непрекидна на целом домену, па и у c.
Због **локалне ограничености**, постоји отворен интервал (α, β) који садржи c и ту је f огр.
За довољно велико n $I_n \subset (\alpha, \beta)$, што је немогуће

III начин: Изаберимо $x \in [a,b]$, опет постоји отв. инт. I_x који садржи x и ту је f огр.

Формирамо фамилију I_x $(x \in [a,b])$, па је $[a,b] \subset \bigcup I_x$
Дакле I_x је покривање за $[a,b]$, па по **Борел-Лебегу** постоји
коначно потпокривање I_{x_j} и на сваком интервалу из I_{x_j} функција је огр.
Дакле, f је ограничена

2) Нека је $M = \sup_{a \le x \le b} f(x)$

ппс: $\forall x \in [a,b]$ важи да је $f(x) < M$

Посматрајмо $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$. Та функција је непрекидна, па је по (1) φ ограничена.

Дакле $\exists C$ $\forall x \in [a,b]$ $0 < \varphi(x) \le C$, тј $\dfrac{1}{M - f(x)} \le C \Rightarrow f(x) \le M - \dfrac{1}{C}$

што је немогуће јер је M најмање горње огр.

$\Rightarrow \exists x$ $f(x) \ge M$, а пошто не може $f(x) > M \Rightarrow f(x) = M \Rightarrow \exists x_{max}$ (то је x)

слично се доказује и за најмању вредност

(22.) Глобална својства III (Равномерна непрекидност)

деф. Нека је $A \subset \mathbb{C}$ и нека $f: A \to \mathbb{C}$. Кажемо да је f **равномерно непрекидна** ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z_1, z_2 \in A)\ (|z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon)$$

Став: Свака **равномерно непрекидна** функција је **непрекидна**

Доказ: Очигледно из дефиниције, непрекидна је у свакој тачки z_2

Став: Свака **непрекидна** $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ је **равномерно непрекидна**

Доказ: ппс: f није рав. непр. $\Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists z_1, z_2 \in [a,b])$ т.д. није испуњен услов

Фиксирамо то ε и изаберемо $\delta = \frac{1}{n}$, за њега $\exists x_n', x_n'' \in [a,b]$ $|x_n' - x_n''| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon$

Формирамо низове x_n' и x_n''. Ти низови су ограничени са a и b

$\overset{Б-В}{\Longrightarrow} \exists x_{n_k}' \to c$, па и $\exists x_{n_k}'' \to c$ („заједнички низ" x_n је Кошијев)

Дакле, пошто је f непрекидна $f(x_{n_k}') \to f(c)$ и $f(x_{n_k}'') \to f(c)$, па $|f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'')| \to 0$

што је немогуће јер треба да буде $\geq \varepsilon$

Дакле непрекидне $\geq$ равномерно $\geq$ Липшиц

23. Експоненцијална функција: дефиниција и својства.

* Нека је $n\in N$ **непаран** и $S(x)=x^n$, $x\in R$, функција (степена)

Та функција је непрекидна ($x\cdot x\cdot x\cdots x$ – индуктивно)
строго растућа
$\lim_{x\to\pm\infty} S(x)=\pm\infty$

По глоб. својству $\exists S^{-1}: R\to R$ – **непрекидна и строго растућа**

деф. Нека је $n\in N$ **непаран**, инверзна функција за x^n је $\sqrt[n]{y}$, $y\in R$

Дакле, $\sqrt[n]{y}=x \iff x^n=y$ (n-непарно)

Став: $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, где је $n\in N$ непарно

Доказ: $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} \iff (\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=ab$, дакле довољно је доказати десну стр.

$(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n=a\cdot b$

* Нека сада $n\in N$ (може и парни и непарни). Тада су $x^n:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ бијекције
$\sqrt[n]{x}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$

Дакле $S(x)=x^n$ за $\forall n\in N$ слика $[0,+\infty)$ бијективно и строго монотоно на $[0,+\infty)$

па и $S^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$ за $\forall n\in N$ слика $[0,+\infty)$ у $[0,+\infty)$ **непрекидно и строго монотоно**

Став: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ за $\forall n\in N$, $a,b\ge 0$

Доказ: аналогно претходном

* **Лема:** $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$ за $\forall m,n\in N$, $a>0$

Доказ: $\sqrt[n]{a^m}\overset{?}{=}\sqrt[nk]{a^{mk}} \overset{/^{nk}}{\iff} (\sqrt[n]{a^m})^{nk}\overset{?}{=}a^{mk}$

$(\sqrt[n]{a^m})^{nk}=((\sqrt[n]{a^m})^n)^k=(a^m)^k=a^{mk}$

деф. Нека је $a>0$ и $r\in Q$. Тада је $a^r=\sqrt[n]{a^m}$, где је $r=\frac{m}{n}$ $(m,n\in N)$

НАПОМЕНА: $\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$ (где су m' и n' узајамно прости, тј. $\frac{m'}{n'}$ је скраћени разломак)

Дакле $m=m'k$, $n=n'k$, па је $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n'k]{a^{m'k}}=\sqrt[n']{a^{m'}}$

па је дефиниција добра

Својства: Нека је $r \to a^r$ $(r \in \mathbb{Q})$, $a > 0$ функција. Тада важи:

1) $a^{r_1+r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2}$
2) $(ab)^r = a^r \cdot b^r$
3) $a>1$ - строго растућа, $0<a<1$ - строго опадајућа
4) непрекидна је $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$

Доказ: 1) $r_1 = m_1/n_1$, $r_2 = m_2/n_2$ $\Rightarrow$ $r_1 + r_2 = \dfrac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$

Доказујемо: $\underbrace{\sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 n_2 + m_2 n_1}}}_{L} \stackrel{?}{=} \underbrace{\sqrt[n_1]{a^{m_1}} \cdot \sqrt[n_2]{a^{m_2}}}_{D}$

$L^{n_1 n_2} = a^{m_1 n_2 + m_2 n_1}$

$D^{n_1 n_2} = \left(\sqrt[n_1]{a^{m_1}}\right)^{n_1 n_2} \cdot \left(\sqrt[n_2]{a^{m_2}}\right)^{n_1 n_2} = \left(a^{m_1}\right)^{n_2} \left(a^{m_2}\right)^{n_1} = a^{m_1 n_2 + m_2 n_1}$

2) слично

3) $a>1$ и $r>0$ $\Rightarrow$ $a^r > 1$ (такође и за $0<a<1$ и $r>0 \Rightarrow a^r < 1$)

$r_1 < r_2 \Rightarrow a^{r_2} = a^{r_1 + (r_2 - r_1)} = a^{r_1} \cdot \underbrace{a^{r_2 - r_1}}_{>1} > a^{r_1}$

4) композиција непрекидних

Лема: $\lim\limits_{r \to 0} a^r = 1$

Доказ: * За $a>1$ докажимо $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Нека је $a = 1+h$ $(h>0)$

Тада знамо и $\sqrt[n]{a} = 1 + \varepsilon_n$ $(\varepsilon_n > 0)$ $\Rightarrow$ $a = 1+h = (1+\varepsilon_n)^n \geq 1 + n\varepsilon_n$ Бернули

Дакле $0 < \varepsilon_n \leq \frac{h}{n}$, па $\varepsilon_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ (лема о три лимеса).

→ Задајмо $\varepsilon > 0$. $\exists n_0\ \forall n \geq n_0$ $\sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$

За $0 < r < \frac{1}{n_0}$ $\Rightarrow$ $1 < a^r < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \varepsilon$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{r \to 0+} a^r = 1$

$\lim\limits_{r \to 0-} a^r = \lim\limits_{s \to 0+} a^{-s} = \lim\limits_{s \to 0+} \frac{1}{a^s} = \dfrac{\lim 1}{\lim\limits_{s \to 0+} a^s} = \frac{1}{1} = 1$

Дакле, за $a>1$, леви и десни лимес су једнаки па следи тврђење

* За $0<a<1$: $a^r = \dfrac{1}{\underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^r}_{\to 1}} \longrightarrow 1$

Последица: $\lim\limits_{r \to r_0} a^r = a^{r_0}$

Доказ: $|a^r - a^{r_0}| = |a^{r_0}(a^{r-r_0} - 1)| = a^{r_0} |\overset{\to 0}{a^{r-r_0}} - 1| \xrightarrow{r \to r_0} 0$

деф. За $a \geq 1$ уводимо $a^x = \sup_{r \leq x} a^r$, $r \in \mathbb{Q}$

За $0 < a \leq 1$ уводимо $a^x = \inf_{r \leq x} a^r$, $r \in \mathbb{Q}$

Теорема: Функција $x \to a^x$ је **непрекидна**

Доказ: * За $a > 1$. Фиксирамо тачку $x_0 \in \mathbb{R}$ и задајмо $\varepsilon > 0$

$a^{x_0} = \sup_{r < x_0} a^r$, дакле $\exists r_0 \quad a^{r_0} > a^{x_0} - \varepsilon$ (по карак. супр.)

За $r_0 < r < x_0 \Rightarrow a^{r_0} < a^r < a^{x_0} \Rightarrow a^{x_0} - \varepsilon < a^{r_0} < a^r < a^{x_0}$

$r_0 < x < x_0 \Rightarrow a^{x_0} - \varepsilon < a^x = \sup_{r \leq x} a^r \leq a^{x_0}$

Дакле $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} a^x = a^{x_0}$, аналогно и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} a^x = a^{x_0}$

* За $0 < a < 1$, опет као у претходном ставу

Својства: Нека је $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Тада за функцију a^x важи:

1) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
2) $(ab)^x = a^x b^x$
3) $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & 0 < a < 1 \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ +\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$
4) a^x је строго растућа за $a > 1$
5) a^x је строго опадајућа за $a < 1$

Доказ: 1) * Посматрајмо a^{x+s} $(x \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{Q})$

Одаберемо низ $r_n \in \mathbb{Q}$, $r_n \to x$.

Тада: $\underbrace{a^{r_n + s}}_{L} = \underbrace{a^{r_n} a^s}_{D} \overset{\lim}{\Longrightarrow} \lim L = \lim\limits_{n \to \infty} \left(a^{r_n + s}\right) \overset{\text{непрекидн.}}{=} a^{\lim\limits_{n \to \infty}(r_n + s)} = a^{x+s}$

$\lim D = \lim\limits_{n \to \infty} \left(a^{r_n} \cdot a^s\right) = a^s \lim\limits_{n \to \infty} a^{r_n} = a^s \cdot a^{\lim\limits_{n \to \infty} r_n} = a^s \cdot a^x$

Дакле, $a^{x+s} = a^x a^s$

* Посматрајмо a^{x+y} $(x, y \in \mathbb{R})$ и одаберимо низ $t_n \in \mathbb{Q}$, $t_n \to y$

Тада $a^{x+t_n} = a^x \cdot a^{t_n} \overset{\lim}{\Longrightarrow}$ (аналогно) $a^{x+y} = a^x a^y$

2) Изаберемо низ $r_n \in \mathbb{Q}$, $r_n \to x$

$(ab)^{r_n} = a^{r_n} b^{r_n} \quad / \lim\limits_{n \to \infty} \quad \Rightarrow \quad (ab)^x = a^x b^x$

3) последица од 4 и 5

4) $a>1$. Очигледно важи да ако је $r>0$ $(r\in\mathbb{Q})$ $\Rightarrow a^r>1$ $(a^r=\sqrt[n]{a^m})$

па је самим тим и $a^x=\sup_{r\le x} a^r > 1$ (ако је $x>0$)

• Претпоставимо да важи $x_1<x_2$.

Тада је $a^{x_2}=a^{x_1+(x_2-x_1)}=a^{x_1}\cdot \underbrace{a^{\overbrace{x_2-x_1}^{>0}}}_{>1} > a^{x_1}$, па је функција растућа

5) аналогно

• Дакле, за $a>0$ и $a\neq1$, ф-ја $a^x: \mathbb{R}\to(0,+\infty)$ која је непрекидна и бијекција па можемо увести њену инверзну функцију

деф. За $a>0$, $a\neq 1$ уводимо $\log_a x : (0,+\infty)\to\mathbb{R}$

Став: $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$

Доказ: $xy=a^{\log_a(xy)}$

Такође $x=a^{\log_a x}$, $y=a^{\log_a y}$ $\Rightarrow xy=a^{\log_a x}\cdot a^{\log_a y}=a^{\log_a x+\log_a y}$

Пошто је a^x на задатом домену бијекција, следи тврђење

деф. $\ln x=\log_e x$

(24.) Основни лимеси (таблични)

Таблични лимеси:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

3) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

8) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Доказ:

1) $n = [x] \Rightarrow n \le x < n+1$

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x}_{\to e} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1} \le \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{e \leftarrow}$$

2) Смена $x = -y$

$$\lim_{y \to \infty} \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \to \infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \to \infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y \to \infty} \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y = \lim_{y \to \infty} \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e$$

3) Смена $x = \frac{1}{t}$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0+} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{t \to \infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e \\ \lim_{x \to 0-} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{t \to -\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e \end{aligned}\right\} \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

4) $* \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$

$$* \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\log_a(1+x)}{\log_a e} \log_a e}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}$$

5) * Смена: $x = \ln(1+t)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}} = 1$$

$$* \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln a} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln a} - 1}{x\ln a} \ln a = 1\cdot\ln a = \ln a$$

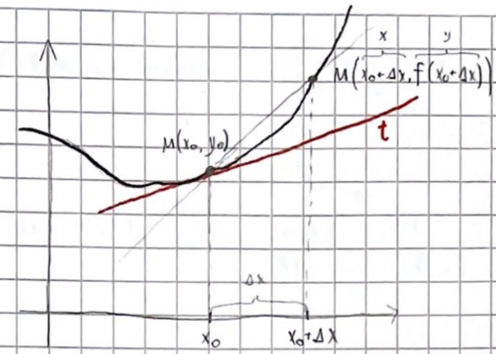
6) Смена $x = e^t - 1$

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{at} - 1}{e^t - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{e^{at}-1}{at}\cdot at}{\frac{e^t-1}{t}\cdot t} = a$$

7) доказано у питању 18

8) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}$$

(25.) Извод, диференцијабилност, o и O симболика



$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad , \quad y_0 = f(x_0)$$

$$k_{M_0M} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0}$$

$$k_{M_0M} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

деф. Нека је $f: I \to R$, где је $I \subseteq R$ интервал и нека је $x_0 \in I$.

Ако постоји коначан лимес $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, онда је f **диференцијабилна у тачки** x_0

и тај лимес називамо **први извод** функције f у тачки x_0.

Ознаке су $f'(x)$; $Df(x)$; $\dfrac{d}{dx} f(x)\big|_{x=x_0}$

деф. $f'_l(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

$f'_d(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

(НАПОМЕНА: $f'(a) = f'_d(a)$, $f'(b) = f'_l(b)$; a, b)

деф. $f: I \to R$ је **диференцијабилна** ако је диф. у свакој тачки на I. Тада постоји $f': I \to R$

$f: I \to R$ је **непрекидно-диференцијабилна (глатка)**, ако је f' непрекидна на I.
Тада пишемо $f \in C^1(I)$

НАПОМЕНА: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (смена $x = x_0 + \Delta x$)

деф. f је **бесконачно мала** у односу на g, у ознаци $f = o(g)$ $(x \to a)$ $\iff$ $f(x) = \alpha(x) g(x)$, где је $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$

Став: 1) $f_1 = o(g)$, $f_2 = o(g)$ $\Rightarrow$ $f_1 + f_2 = o(g)$

2) $f = o(g) \iff fh = o(gh)$

Доказ: 1) $f_1 = \alpha_1 g$, $f_2 = \alpha_2 g$ $\Rightarrow$ $f_1 = (\alpha_1 + \alpha_2) g$

2) $f = \alpha g \iff fh = \alpha gh$

НАПОМЕНА: $f = o(1) \iff \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

НАПОМЕНА: $f = o(g)$ означавамо и са $f \ll g$

деф. $f=O(g)$, $x\to a$ $\iff$ $f(x)=\alpha(x)g(x)$, где је α огр. у некој околини тачке a $(x\in U_a \Rightarrow |\alpha(x)|\le C)$

Став:
1) $f_1=O(g)$, $f_2=O(g)$ $\Rightarrow$ $f_1+f_2=O(g)$
2) $f=o(g) \Rightarrow f=O(g)$
3) $f_1=o(g_1)$, $f_2=O(g_2)$ $\Rightarrow$ $f_1f_2=o(g_1g_2)$

Доказ:
1) $f_1=\alpha_1 g$, $f_2=\alpha_2 g \Rightarrow f_1+f_2=\underbrace{(\alpha_1+\alpha_2)}_{\text{огр}}g$

2) $f=\alpha g$, $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0 \Rightarrow \forall\varepsilon\ \exists\delta\ \underbrace{|x-a|<\delta}_{U_a}\ \underbrace{|\alpha(x)|\le\varepsilon}_{\le C}$

3) $f_2=\beta g_2$ $\quad |x-a|\le\delta_0 \Rightarrow |\beta(x)|\le\varepsilon_0$

$f_1=\alpha g_1$ $\quad$ За $\forall\varepsilon$, па и ε_0 постоји $\exists\delta_1$ $\quad |x-a|\le\delta_1 \Rightarrow |\alpha(x)|\le\varepsilon_0$

Изаберемо $\delta=\min(\delta_0,\delta_1) \Rightarrow |x-a|<\delta \Rightarrow |\alpha(x)|\le\varepsilon_0$, $|\beta(x)|\le\varepsilon_0 \Rightarrow |\alpha\beta(x)|\le\varepsilon_0^2$

Уколико посматрамо $f_1f_2=\alpha\beta g_1g_2$, а због овог изнад следи и тврђење

НАПОМЕНА: $f=O(g)$ означавамо са $f \prec g$

деф. $f\sim g$, $x\to a$ $\iff$ $f(x)=\alpha(x)g(x)$, где је $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=1$

НАПОМЕНА: $\sim$ је релација еквиваленције

Став: $f\sim g \iff f=g+o(g)$

Доказ: $f\sim g \iff f=[1+o(1)]g(x)=g(x)+g(x)o(1)=g(x)+o(g)$

Став: f је диференцијабилна у x_0 $\iff$ $f(x)=f(x_0)+A\cdot(x-x_0)+o(x-x_0)$, $x\to x_0$

Доказ: По дефиницији: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

$\iff \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+o(1) \iff f(x)-f(x_0)=\underbrace{f'(x_0)}_{A}(x-x_0)+o(x-x_0)$

Дакле, $A=f'(x_0)$

ГЕОМЕТРИЈСКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА: ДИФЕРЕНЦИЈАЛ

Став: f је диференцијабилна у x_0 $\Rightarrow$ f је непрекидна у x_0

Доказ: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\Big(f(x_0)+f'(x_0)\underbrace{(x-x_0)}_{\downarrow 0}+\underbrace{o(x-x_0)}_{\downarrow 0}\Big)=f(x_0)$ $\Rightarrow$ непрекидна

Последица: f је диференцијабилна на I $\Rightarrow$ f је непрекидна на I

(26) Правила израчунавања извода.

Линеарност извода: Ако постоје коначни изводи $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$, онда важи:

1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2) $(cf)'(x_0) = c\,(f'(x_0))$

Доказ: 1) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2) слично

Последице: $(f+g)' = f'+g'$ и $(cf)' = cf'$ у свакој тачки $x \in D_f \cap D_g$

Такође, $(f_1 + \dots + f_n)' = f_1' + \dots + f_n'$ и $(c_1 \dots c_n f)' = c_1 \dots c_n \cdot f'$

Извод производа: Ако постоје $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$, тада: $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

Доказ: $\dfrac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

$= \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,g(x) + f(x_0)\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow{x\to x_0} f'(x_0)\underbrace{g(x_0)}_{\text{непр}} + f(x_0)g'(x_0)$

Последице: 1) $(uv)' = u'v + uv'$

2) $(f_1 f_2 \dots f_n)' = \sum\limits_{k=1}^{n} f_1 f_2 \dots f_k' \dots f_n$

$\hookrightarrow f_1 = \dots = f_n = f \Rightarrow (f^n)' = n f^{n-1} f'$

$\hookrightarrow f(x) = x \Rightarrow (x^n)' = n x^{n-1}$

3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{1}{\Delta x}\,\dfrac{x_0-(x_0+\Delta x)}{(x_0+\Delta x)x_0} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)} = -\dfrac{1}{x_0^2}$

Дакле, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$, $(x \neq 0)$

Извод сложене функције: Нека су I, J интервали $f: J \to \mathbb{R}$, $g: I \to J$ и $h = f \circ g$ и нека је g диф. у $x_0 \in I$ и f диф. у $y_0 = g(x_0) \in J$.

Тада је и h диф. у x_0 и важи: $h'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0)$

Доказ: $g(x_0 + l) = g(x_0) + g'(x_0)\, l + o(l)$, $l = x - x_0$, $l \to 0$

$f(y_0 + k) = f(y_0) + f'(y_0)\, k + o(k)$

$$f(g(x_0 + l)) = f(g(x_0) + g'(x_0)l + o(l)) = f(y_0 + \overbrace{(g'(x_0)l + o(l))}^{k})$$

$$= f(y_0) + f'(y_0)(g'(x_0)l + o(l)) + o(g'(x_0)l + o(l))$$

$$= h(x_0) + f'(y_0)g'(x_0)\, l + f'(y_0)\, o(l) + o(g'(x_0)l + o(l))$$

$$= h(x_0) + f'(g(x_0))\, g'(x_0)\, l + o(l)$$

Извод количника: Ако су f и g диф. у x_0 и ако важи $g(x_0) \neq 0$, тада важи:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Доказ: * Докажимо прво $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

$f(t) = \frac{1}{t}$ $\quad f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = h(x)$

$h'(x_0) = -\frac{1}{g^2(x_0)}\, g'(x_0)$

* Сада: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}\right) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Извод инверзне функције: Нека је $f: I \to J$ строго монотона бијекција и f је диф. у x_0, при чему $f'(x_0) \neq 0$. Тада важи:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad (f^{-1}: J \to I)$$

Доказ: $\lim\limits_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$

Последица: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)}$, $\forall x \in I$

(27.) Таблични изводи (изводи елементарних функција)

Тригонометријске функције:

1) $(\sin x)' = \cos x$

2) $(\cos x)' = -\sin x$

3) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

4) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Доказ:

1) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\Delta x} \, 2\sin\dfrac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$

2) $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow (\cos x)' = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x$

3) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \operatorname{tg}' x = \dfrac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

4) слично

Експоненцијална, логаритамске, степене:

1) $(e^x)' = e^x$

2) $(a^x)' = a^x \ln a$

3) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

4) $(x^a)' = a x^{a-1}, \quad x > 0$

Доказ:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = a^{x_0} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{a^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = a^{x_0} \ln a$

3) $(e^x)^{-1} = \ln x$, где $I = \mathbb{R}$, $J = (0, +\infty)$

$(\ln(e^x))' = \dfrac{1}{e^x} \Rightarrow \ln t = \dfrac{1}{t}$

4) већ доказано код извода производа

II начин: $(x^a) = \left(e^{a \ln x}\right)' = x^a \cdot \left(0 + \dfrac{a}{x}\right) = a x^{a-1}$

* Пошто је $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ строго растућа, непрекидна $\Rightarrow$ бијекција

деф. **arcsin** $: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ је инверзна функција за $\sin x$

Слично, уводимо и следеће функције

деф. **arccos** $: [-1,1] \to [0, \pi]$ је инверзна функција за $\cos x$

деф. **arctg** $: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ је инверзна функција за $\operatorname{tg} x$

деф. **arcctg** $: \mathbb{R} \to (0, \pi)$ је инверзна функција за $\operatorname{ctg} x$

Инверзне тригонометријске:

1) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

4) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Доказ: 1) Нека је $y = \sin x$

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

2) $$\arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(x)} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

3) $$\operatorname{arctg}'(y) = \frac{1}{\operatorname{tg}'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{1+y^2}$$

4) $$\operatorname{arcctg}'(y) = \frac{1}{\operatorname{ctg}'(x)} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{-1}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{-1}{1+\operatorname{ctg}^2 x} = \frac{-1}{1+y^2}$$

28. Хиперболичке функције.

деф. **Синус хиперболички** је функција $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Косинус хиперболички је функција $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Тангенс хиперболички је функција $th(x) = \frac{sh\,x}{ch\,x}$

Став: $ch^2x - sh^2x = 1$

Доказ: $\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{4} = \frac{(e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x})}{4} = \frac{2e^x \cdot 2e^{-x}}{4} = 1$

Изводи:
1) $sh'(x) = ch\,x$
2) $ch'(x) = sh\,x$
3) $th'(x) = \frac{1}{ch^2x}$

Доказ:
1) $sh'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch\,x$

2) $ch'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh\,x$

3) $th'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{(e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4e^xe^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{1}{(ch\,x)^2}$

* Може се доказати да је $sh(x)$ строго растућа, а такође и непарна и $\lim_{x\to\pm\infty} sh\,x = \pm\infty \Rightarrow$ непр. па је зато sh) бијекција ($sh: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$). Слично важи и за ch

деф. **$Arsh(x): \mathbb{R}\to\mathbb{R}$** је инверзна функција за $sh\,x$ и важи $Arsh(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

деф. **$Arch(x): \mathbb{R}\to\mathbb{R}$** је инверзна функција за $ch\,x$ и важи $Arch(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$

$$y = sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{t - \frac{1}{t}}{2} \quad (t>0)$$

$$t_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2+1} \Rightarrow t = y + \sqrt{y^2+1} \Rightarrow x = \ln(y+\sqrt{y^2+1})$$

Изводи:
1) $Arsh'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
2) $Arch'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Доказ:
1) $Arsh'(x) = \left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

2) $Arch'(x) = \left(\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

29. Теореме Ферма, Рола, Лагранжа.

деф. Тачка x_0 је **локални максимум** за f ако $\exists \delta > 0\ \forall x \in I\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$

Тачка x_0 је **локални минимум** за f ако $\exists \delta > 0\ \forall x \in I\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$

Фермаова теорема: Нека је x_0 унутрашња тачка I и $f: I \to \mathbb{R}$ има лок. екстр. у x_0.
Ако је f диференцијабилна у x_0 $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$

Доказ: 1° x_0 је локални максимум

$$f_l' = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad , \quad f_d' = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Пошто је f диф. у x_0 $0 \leq f_l'(x_0) = f_d'(x_0) \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

2° x_0 је локални минимум $\to$ сличан доказ

Ролова теорема: Нека је $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна, диф. на (a,b) и нека је $f(a) = f(b)$

Тада: $\exists \xi \in (a,b)\ f'(\xi) = 0$

Доказ: 1° $f = const \Rightarrow \forall \xi \in (a,b)\ f'(\xi) = 0$

2° $f \neq const$, по Вајерштрасу f достиже макс. (M) и мин. (m) на домену
и то не у a и b (иначе би $f = const$)
Па по Фермаовој теореми $\Rightarrow f'(\xi) = 0$

НАПОМЕНА: Геометријски, постоји тачка у којој је тангента на f паралелна са x осом

Лагранжова теорема: Нека је $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна, диф. на (a,b)

Тада $\exists \xi \in (a,b)$ $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Доказ: $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b)$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(a) &= f(b) \\ \varphi(b) &= f(b) \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{Рол}} \exists \xi \in (a,b)\ \varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$\Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

НАПОМЕНА: Геометријски, постоји тачка у којој је тангента на f паралелна са AB

(30.) Теорема Кошија. Лопиталова правила

Кошијева теорема: Нека су $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидне, диф. на (a,b)

Тада $\exists\, \xi \in (a,b)$ $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ $(g' \neq 0)$

Доказ: $F(x) = (f(x)-f(a))(g(b)-g(a)) - (f(b)-f(a))(g(x)-g(a))$

$$\left.\begin{aligned} F(a) &= 0 \\ F(b) &= 0 \end{aligned}\right\} \overset{\text{Рол}}{\Longrightarrow} \exists\, \xi \in (a,b) \quad F'(\xi) = f'(\xi)(g(b)-g(a)) - g'(\xi)(f(b)-f(a)) = 0$$

Дакле $(f(b)-f(a))\, g'(\xi) = (g(b)-g(a))\, f'(\xi)$

* Лопиталова правила

Теорема: Нека су $f, g: (a,b) \to \mathbb{R}$ диференцијаб. и $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a+} g(x) = 0$ и $g'(x) \neq 0$

Ако постоји $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$, онда постоји и $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и једнаки су

Доказ: Додефинишемо $f(a)=0$, $g(a)=0$, сада су обе непрекидне у a

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \overset{\text{Коши}}{\Longrightarrow} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

$\big(x \in (a,b) \Rightarrow f, g$ непр. на $[a,x]$ и диф. на (a,x) па $\forall x\ \exists\, \xi_x$, такође $x \to a+ \Rightarrow \xi_x \to a+\big)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Теорема: Нека су $f, g: (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ диф. и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ и $g'(x) \neq 0$

Ако постоји $\underbrace{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}}_{=\,l} \in \overline{\mathbb{R}}$, онда постоји $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и једнаки су

Доказ: Изаберемо $x_0 \in (a, x)$, где $x \in (a, +\infty)$ — важи за свако $x_0 \in (a,x)$

По Кошију $\exists\, \xi_x$ $\dfrac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)\left(1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right)}\left(1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right) + \frac{f(x_0)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\overbrace{\left(1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right)}^{1+o(1)} + \overbrace{\frac{f(x_0)}{g(x)}}^{o(1)}$$

Дакле, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}(1+o(1)) + o(1)$

(као l из деф. $\lim\limits_{x\to\infty}$) конв.

* Задајмо $\varepsilon > 0$. Бирамо $x_0 > 0$, т.д. $\forall x \geq x_0$ $\ l - \varepsilon < \dfrac{f'(x)}{g'(x)} < l + \varepsilon$

Идеја је да се покаже да су $\overline{\lim} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $\underline{\lim} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ „ограничени са обе стране" са l, па би то значило да су једнаки l чиме је тврђење доказано

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{f(x)}{g(x)} = \overline{\lim_{x\to\infty}}\left(\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}\left(1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_0)}{g(x)}\right) = \overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \le l+\varepsilon \Rightarrow \overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{f}{g} \le l$$

Аналогно се доказује и $\underline{\lim_{x\to\infty}}\frac{f}{g} \ge l$, па $l \le \underline{\lim} \le \overline{\lim} \le l$

Дакле $\lim_{x\to\infty}\frac{f}{g} = l$

* НАПОМЕНА: Постоји још правила (добијају се „комбиновањем" услова претходна два)

31. Прекиди f'. Дарбуова теорема.

Став: Нека је $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ диференцијабилна и нека постоји $\lim_{x \to b-0} f'(x) = \ell$ (коначно, $\ell \neq \infty$)

1) Постоји и $\lim_{x \to b-0} f(x) = B$

2) Ако додефинишемо $f(b) = B$, онда је $f'(b) = \ell = \lim_{x \to b-0} f'(x)$

$\max\{|\ell+\varepsilon|, |\ell-\varepsilon|\}$ "

Доказ: 1) $|f'(x)| \le L$ за $b-\delta < x < b$ (по деф. конвергенције слева)

За $b-\delta < x_1 < x_2 < b$: $|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi)(x_2 - x_1)| \le L(x_2 - x_1)$ (Лагранж)

Задајмо $\varepsilon > 0$ и изаберимо $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$: $|f(x_2) - f(x_1)| \le L(x_2 - x_1) < L \cdot \delta = \varepsilon$

Дакле, по Кошијевом критеријуму постоји $\lim_{x \to b-0} f(x) = B$

2) Задајмо $\varepsilon > 0$. За њега $\exists \delta > 0$ т.д. $b - \delta < x < b \Rightarrow |f'(x) - \ell| \le \varepsilon$ (*)
и фиксирајмо $x_0 \in (b-\delta, b)$

Дефинишемо помоћну функцију: $\varphi(t) = f(t) - f(x_0) - \ell \cdot (t - x_0)$ (јасно $\varphi(x_0) = 0$)

Важи $\varphi'(t) = f'(t) - \ell$, дакле због (*) $|\varphi'(t)| \le \varepsilon$

По Лагранжу, за неко ξ важи $|\varphi'(\xi)| = \left|\frac{\varphi(t) - \varphi(x_0)}{t - x_0}\right| = \frac{|\varphi(t)|}{t - x_0} \le \varepsilon$

Дакле $|\varphi(t)| < \varepsilon(t - x_0)$

$$|f(t) - f(x_0) - \ell(t - x_0)| \le \varepsilon(t - x_0) \quad / : (t - x_0)$$

$$\left|\frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} - \ell\right| \le \varepsilon \quad / \lim_{t \to b-0}$$

$$\left|\frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} - \ell\right| \le \varepsilon \quad (\text{за } x_0 \in (b-\delta, b))$$

Дакле: $\lim_{x \to b-0} \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = \ell \overset{\text{деф. }'}{\Longrightarrow} f'(b) = \ell$

НАПОМЕНА: Слично важи и за $\lim_{x \to a+0} f'(x)$

Последица: Ако је f диф на (a,b), онда **f' не може имати прекид I врсте**

Доказ: Ппс. f' има прекид прве врсте у некој тачки $c \in (a,b)$

То значи да постоје коначни $\lim_{x \to c+0} f'$ и $\lim_{x \to c-0} f'$

Међутим по ставу $\Rightarrow \lim_{x \to c+0} f'(x) = f'(c)$ и $\lim_{x \to c-0} f'(x) = f'(c)$

Дакле $\exists \lim_{x \to c} f'(x) = f'(c)$, па је f' непрекидна у c ↯

POWER COLLECTION

Дарбуова теорема: Нека је $f: I \to \mathbb{R}$ **диф.** и $a, b \in I$ $(a<b)$ и $f'(a)<\mu<f'(b)$ (или обрнуто)

Тада **постоји** $\xi \in (a,b)$ т.к.д. $f'(\xi)=\mu$

Доказ: БУО $f'(a) < \mu < f'(b)$

Уведимо функцију $g(x) = f(x) - \mu x$, дакле $g'(x) = f'(x) - \mu$,

као и функцију $h(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}, & x \neq a \\ g'(a), & x = a \end{cases}$.

Јасно је да пошто је g диф., онда је h **непрекидна**

* $g'(a) = f'(a) - \mu < 0 \overset{\text{II лок. св.}}{\Longrightarrow} \exists \delta_1 > 0 \quad a<x<a+\delta_1 \Rightarrow h(x) < 0$

$\Rightarrow$ за $a<x<a+\delta_1$ $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} < 0 \Rightarrow g(x) < g(a) \Rightarrow$ **a није лок. мин. g**

* $g'(b) = f'(b) - \mu > 0 \Rightarrow \exists \delta_2 > 0 \quad b-\delta_2<x<b \Rightarrow h(x) > 0$

$\Rightarrow g(x) < g(b) \Rightarrow$ **b није лок. мин. g**

Пошто лок. мин. није ни a, ни b, то значи да мора постојати у некој међутачки $\xi \in (a,b)$, по **Вајерштрасу**

$\overset{\text{Ферма}}{\Longrightarrow} \quad g'(\xi) = f'(\xi) - \mu = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \mu$

32. Извод и монотоност

"⇒"

Став: Нека је $f:(a,b)\to R$ **диференцијабилна**. Ако је $\forall x\in(a,b)$ $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)>0)$,

онда је f **растућа** (строго) на (a,b)

Доказ: $a<x_1<x_2<x$ $\quad f(x_2)-f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0}\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0} \geq 0$

(лагранж)

НАПОМЕНА: $\forall x\in(a,b)$ $f'(x)\leq 0$ $(f'(x)<0)$ $\Rightarrow f$ **опадајућа** (строго) на (a,b)

"⇐"

Став: Ако је f **диференцијабилна** у $x_0\in(a,b)$ и **растућа** на (a,b) $\Rightarrow$ $f'(x_0)\geq 0$

Доказ: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\overbrace{f(x+\Delta x)-f(x)}^{\geq 0}}{\underbrace{\Delta x}_{>0}} \geq 0$

НАПОМЕНА: Аналогно важи и за **опадајуће**, али не и за строгу монотоност $(x^3$, $x=0)$

33. Изводи вишег реда

деф. Нека је $f: I \to R$ функција и $x_0 \in I$. Претпоставимо да:

1) $f'(x)$ постоји за свако $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap I$ (нема смисла деф. извод $f: \{x_0\} \to R$)
2) $f': I \cap (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \to R$ има извод у x_0

Тада $\frac{d}{dx} f'(x)\big|_{x=x_0}$ означавамо $f''(x_0)$ и зовемо **други извод f у x_0**

деф. Ако $f''(x)$ постоји у свакој тачки I, онда је f **два пута диференцијабилна на I**

деф. Индуктивно се дефинише $f^{(n+1)}(x_0) = \frac{d}{dx} f^{(n)}(x)\big|_{x=x_0}$

Својства:

1) **линеарност:** $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$$

2) **Лајбницово правило:** $(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$

3) **сложена функција:** $(f \circ g)'' = f''(g(x))\, g'(x) + f'(g(x))\, g''(x)$

Доказ:

1) индукција

2) Такође индукција

$n=1$: $(uv)' = u'v + uv'$ ✓

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

$n \Rightarrow n+1$:
$$(uv)^{(n+1)} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}\right)'$$
$$= u^{(n+1)} v + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] u^{(n)} v^{(1)} + \ldots + u v^{(n+1)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{(n+1-k)} v^{(k)}$$

3) $(f(g(x)))'' = (f'(g(x))\, g'(x))' = f''(g(x))\, g'(x) + f'(g(x))\, g''(x)$

$y = e^x \qquad y^{(n)} = e^x$

$y = \sin x \qquad y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$

$y = \cos x \qquad y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$

$y = x^a \qquad y^{(n)} = a(a-1)\ldots(a-n+1)\, x^{a-n}$

$y = (1+x)^a \qquad y^{(n)} = a(a-1)\ldots(a-n+1)\,(1+x)^{a-n}$

$y = \ln x \qquad y^{(n)} = (-1)^{n-1}\,(n-1)!\; x^{-n}$

$y = \ln(1+x) \qquad y^{(n)} = (-1)^{n-1}\,(n-1)!\;(1+x)^{-n}$

34. Формула Тејлора

Већ нам је позната идеја апроксимације функције: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$
Сада хоћемо да урадимо нешто слично, само општије

* Посматрамо функцију f која је дефинисана у некој околини тачке a, и која је **n пута диф.**
Ту функцију ћемо да апроксимирамо са полиномом n-тог степена за који важи:

$$f(a) = T_{n,a}(a) \quad \text{и} \quad f^{(k)}(a) = T_{n,a}^{(k)}(a), \ 1 \le k \le n$$ (вр фје и n извода у a су једнаки)

Тај полином можемо записати: $T_{a,n}(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n$
У овом запису, он је одређен коефицијентима c_i, па ћемо их израчунати:

$$f(a) = T_{n,a}(a) = c_0, \quad f'(a) = T'_{n,a}(a) = c_1, \quad f''(a) = T''_{n,a}(a) = 2c_2, \ \ldots \ f^{(n)}(a) = T^{(n)}_{n,a}(a) = n!\,c_n$$

Одавде имамо све коефицијенте, па можемо увести следећу дефиницију

деф. **Тејлоров полином** за f (која је n пута диф.), у тачки a, реда n је:

$$T_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

У случају $a = 0$, полином називамо **Маклоренов полином**

* Јасно, уколико апроксимирамо, најчешће постоји грешка.
Наш циљ је да одредимо (у одређеном смислу) ту грешку $R_{n,a}(x) = f(x) - T_{n,a}(x)$

Пеанов остатак: Нека је f n-пута диф. Тада је $R_{n,a}(x) = o((x-a)^n)$

Лема: Нека је $\varphi(a) = \varphi'(a) = \ldots = \varphi^{(n)}(a) = 0$. Тада је $\varphi(x) = o((x-a)^n)$

Доказ: $n=1$: $\varphi(x) = \underbrace{\varphi(a)}_{0} + \underbrace{\varphi'(a)}_{0}(x-a) + o(x-a) \Rightarrow \varphi(x) = o(x-a)$

$n \Rightarrow n+1$: $\varphi(a) = \varphi'(a) = \ldots = \varphi^{(n)}(a) = \varphi^{(n+1)}(a) = 0$

Означимо са $\psi = \varphi'$, дакле $\psi(a) = \ldots = \psi^{(n)}(a) = 0$
па по (их) $\varphi' = o((x-a)^n)$

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \underbrace{\varphi(a)}_{0} \underset{\text{(лагранж)}}{=} \varphi'(\xi)(x-a) = o((x-a)^n)(x-a) = o((x-a)^{n+1})$$

Доказ: Пошто $f(a) = T_{n,a}(a)$, $f^{(k)} = T^{(k)}_{n,a}(a) \Rightarrow R_{n,a}(a) = \ldots = R^{(n)}_{n,a}(a) = 0$

Дакле $R_{n,a}(x)$ задовољава услов леме, па отуд следи и тврђење

Последица: $$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Тејлорови полиноми елементарних ф-ја (тачније Маклоренови)

1) e^x : $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$

2) $\sin x$: $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\quad (T_{2n+1} = T_{2n+2})$

3) $\cos x$: $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $\quad (T_{2n} = T_{2n+1})$

4) $\ln(1+x)$: $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

5) $(1+x)^a$: $1 + ax + \binom{a}{2}x^2 + \ldots + \binom{a}{n}x^n$

6) $\operatorname{arctg} x$: $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

(Лагранжов остатак)

* Нека је $f(x)$ n пута диф. у свакој тачки неке околине тачке a, и фиксирајмо X

Посматрајмо $\varphi(t) = f(x) - T_{n,t}(x) - \left(\frac{x-t}{x-a}\right)^p R_{n,a}(x)$.

Изабрали смо баш ову функцију, јер $\varphi(a) = 0$, $\varphi(x) = 0$, она је и непр. $[a,x]$ и диф. па можемо да применимо Ролову теорему на $[a,x]$: $\exists c \in (a,x)$ $\varphi'(c) = 0$

$$\varphi'(t) = -\frac{d}{dt} T_{n,t}(x) + p\left(\frac{x-t}{x-a}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{x-a} \cdot R_{n,a}(x)$$

$$\frac{d}{dt} T_{n,t}(x) = \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)' = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

скраћују се

$$\varphi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p\frac{(x-t)^{p-1}}{(x-a)^p} \cdot R_{n,a}(x)$$

* Одавде можемо израчунати колико је $R_{n,a}(x_0)$ у зависности од c: $(t = c)$

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{p \cdot n!}(x-a)^p (x-c)^{n+1-p}$$ → **Шлемилх Рошов остатак**

$p = n+1$: $R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ → **Лагранжов остатак**

$p = 1$: $R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-a)(x-c)^n$ → **Кошијев остатак**

35. Конвексност функције

Лема: $x_1 \le x \le x_2 \iff x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, где $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ и $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$

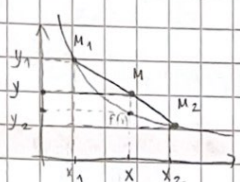
Доказ: $(\Rightarrow)$ $x_1 = (\lambda_1+\lambda_2)x_1 \le \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = x \le \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_2 = x_2$

$(\Leftarrow)$ Решавамо систем по λ_1, λ_2: $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = x$

Добија се: $\lambda_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$, $\lambda_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Пошто $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0 \Rightarrow x_1 \le x \le x_2$

* Слично се може доказати за $\mathbb{R}^2$.
Тачка $M(x,y)$ припада дужи $M_1M_2 \iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \ge 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$

*



Интуитивно, конвексност значи да кад нацртамо неку „тетиву" функције, она је цела „изнад" ф-је

Помоћу леме, можемо аналитички увести конвексност.

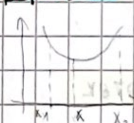
деф. Функција $f: I \to \mathbb{R}$ је **конвексна** ако за $\forall x_1, x_2 \in I$ и $t \in (0,1)$ важи:

$$\underbrace{f((1-t)x_1 + tx_2)}_{\text{ово је тачка на графику}} \le \underbrace{(1-t)f(x_1) + tf(x_2)}_{\text{ово је } M}$$

деф. Уколико уместо $\le$ стоји знак $\ge$, $<$, $>$, f је **конкавна**, **строго конвексна**, **строго конкавна**.

Теорема: Нека је $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ диференцијабилна. Тада важи:
f је **конвексна** на (a,b) $\iff$ f' је **растућа** на (a,b)

Доказ: $(\Rightarrow)$ Нека су $x_1 < x < x_2$ тачке из (a,b). $x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2$



Услов конвексности: $f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$

Добија се: $$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad (*)$$ (ово је еквивалентно услову конвексности)

Пошто је f диф. у x_1, x_2, стављамо у неједнакости $x \to x_1$, па $x \to x_2$

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1) \underset{(*)}{\le} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \underset{(*)}{\le} f'(x_2) = \lim_{x \to x_2} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

$(\Leftarrow)$ Применимо **Лагранжову** теорему на $[x_1, x]$ и на $[x, x_2]$

$\exists \xi_1 \in (x_1, x)$ $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1)$

$\exists \xi_2 \in (x, x_2)$ $\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2)$

Пошто је f' растућа и $\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$

Услов конвексности добијамо по $(*)$

Последица: Нека је $f:(a,b)$ два пута диференцијабилна на (a,b). Тада важи:

$$f \text{ је } \textbf{конвексна} \text{ на } (a,b) \iff \forall x\in(a,b)\ f''(x) \geq 0$$

НАПОМЕНА: Аналогно важи и за конкавност, као и строгу конв. и конк.

Неједнакост Јанга: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, $p,q>1$, $a,b \geq 0$

Доказ: e^x је конвексна, јер $(e^x)'' = e^x > 0$

$$e^{(1-t)x_1+tx_2} \leq (1-t)e^{x_1} + t\cdot e^{x_2}.$$

$1-t\in(0,1) \Rightarrow 1-t = 1/p \quad (p>1)$

$t\in(0,1) \Rightarrow t = 1/q \quad (q>1)$

$$e^{\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{q}} \leq \frac{e^{x_1}}{p} + \frac{e^{x_2}}{q}$$

Уведимо смене $a = e^{\frac{x_1}{p}}$, $b = e^{\frac{x_2}{q}}$. Јасно $a,b>0$

$$a\cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

36. Локални минимум и максимум

деф. Тачка x_0 је **локални максимум** за f ако $\exists \delta>0\ \forall x\in I\ \ |x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x_0)\geq f(x)$

Тачка x_0 је **локални минимум** за f ако $\exists \delta>0\ \forall x\in I\ \ |x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x_0)\leq f(x)$

* Погледати Фермаову теорему

Став: Нека је x_0 унутрашња тачка интервала I, $f: I\to \mathbb{R}$ је непрекидна и нека f' постоји на $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\setminus\{x_0\}$.

Ако је $\mathbf{f'\leq 0}$ на $(x_0-\varepsilon, x_0)$ и $\mathbf{f'\geq 0}$ на $(x_0, x_0+\varepsilon)$, онда је **x_0 лок. мин.**

Доказ: Пошто је f непрекидна $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \iff \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$

$f'\geq 0$ на $(x_0, x_0+\varepsilon) \Rightarrow f'$ расте на $(x_0, x_0+\varepsilon) \Rightarrow \forall t_1\in(x_0, x_0+\varepsilon)\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\leq f(t_1)$

$f'\leq 0$ на $(x_0-\varepsilon, x_0) \Rightarrow f'$ опада на $(x_0-\varepsilon, x_0) \Rightarrow \forall t_2\in(x_0-\varepsilon, x_0)\ \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\leq f(t_2)$

Пошто $\lim\limits_{x\to x_0-0} = \lim\limits_{x\to x_0+0} = \lim\limits_{x\to x_0} \Rightarrow \forall t\in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\setminus\{x\}\ \ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) < f(t)$

II начин: Применимо Лагранжову теорему на $\overbrace{[x_0-\varepsilon, x_0]}^{1^\circ}$, па на $\overbrace{[x_0, x_0+\varepsilon]}^{2^\circ}$

$$\begin{array}{ccccc} & \underbrace{f'(\xi)} & \underbrace{(x_0-x)} & = & \underbrace{f(x_0)-f(x)} \\ 1^\circ & <0 & >0 & \rbrace & \leq 0 \\ 2^\circ & >0 & <0 & & \end{array} \Rightarrow \forall x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\setminus\{x\}\quad f(x_0)\leq f(x)$$

Став: Нека $f \in C^k(a,b)$, $k>1$ и нека за $a<x_0<b$ важи:

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(k-1)}(x_0)=0,\qquad f^{(k)}(x_0)\neq 0$$

1) Ако је k **парно**: 1° $f^{(k)}(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ је **лок. мин.**

2° $f^{(k)}(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ је **лок. макс.**

2) Ако је k **непарно**, x_0 **није** локални екстремум (него преводне тачке)

пр. $(x^3)'$ за $x=0$ је 0, али није лок. екстремум

Доказ: Напишимо Тејлоров полином са Пеановим остатком за f у x_0

$$f(x)=f(x_0)+\overbrace{\frac{f'(x_0)}{1!}}^{0}(x-x_0)+\dots+\overbrace{\frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}}^{0}(x-x_0)^{k-1}+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^k\right)$$
$$(x\to x_0)$$

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^k\right),\quad x\to x_0$$

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^k\underbrace{\left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}+o(1)\right)}_{const}$$

$$\lim_{x\to x_0}=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\neq 0$$

1) k - парно $\left((x-x_0)^k>0\right)$

1° $\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}>0 \Rightarrow f(x)-f(x_0)>0$ (за $|x-x_0|<\varepsilon$)

$f(x)>f(x_0)$

2° $\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}<0 \Rightarrow f(x)-f(x_0)<0$

$f(x)<f(x_0)$

2) k - непарно: $(x-x_0)^k$ мења знак, па самим тим све мења знак

(37.) Примитивна функција и неодређени интеграл (основна својства и примери)

деф. Нека је $I \subset R$ интервал и нека је дата функција $f : I \to R$.

Тада је $F : I \to R$ **примитивна функција** за f ако важи:

1° F је диференцијабилна на I

2° $F'(x) = f(x)$, за свако $x \in I$

Став: Нека је $F : I \to R$ примитивна функција за $f : I \to R$.

1) Тада је $F(x) + C$ такође примитивна ф-ја за f ($C = const$)

2) Нека је $G : I \to R$ прим. ф-ја за f. Тада постоји $C \in R$, $G(x) = F(x) + C$

Доказ: **1)** тривијално ($(F(x)+C)' = F'(x) + (C)' = f + 0 = f$)

2) Нека је $\varphi(x) = G(x) - F(x)$. Тада $\varphi'(x) = 0$ (за свако $x \in I$)

По Лагранжовој теореми: $\varphi(x) = const$, па је $G(x) = F(x) + C$

($\forall a,b \in I \;\; f(a) = f(b)$)

деф. Претпоставимо да $f : I \to R$ има примитивну функцију $F : I \to R$.
Тада је **неодређени интеграл** за f скуп $\{F(x) + C \mid C \in R, C = const\}$, то јест скуп свих прим. ф-ја за f, у ознаци $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

деф. Функција $f : I \to R$ је **К-примитивна** за f ако важи

1° F је непрекидна на I

2° Постоји коначан $D \subset I$ ткд. $F'(x)$ постоји за $\forall x \in I \setminus D$ и $F'(x) = f(x)$

Својства:

1) $\frac{d}{dx} \int f(x)\,dx = f(x)$

2) $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$ (=> таблични интеграли)

линеарност:

3) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

4) $\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$

5) парцијална интеграција

6) смена променљиве

\+ јединственост, али доказ касније

Доказ:

1) тривијално

2) тривијално

3) $(F + G)' = F' + G' = f + g$

4) $k \int f(x)\,dx = kF(x) + \underbrace{kC}_{C_2} = \int \frac{d}{dx}(kF(x) + C_2)\,dx = \int kF'(x)\,dx = \int k f(x)\,dx$

5) у следећем питању

6) у следећем питању

Таблични интеграли:

* $\int 0 \, dx = C$
* $\int \lambda \, dx = \lambda x + C$
* $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ $(a \neq -1,\ x > 0)$ (ако је $a \geq 0$, онда $x \geq 0$)
* $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ (посебно за $x > 0$ и посебно $x < 0$)

* $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
* $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
* $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\, x + C$ $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$
* $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctg\, x + C$ $x \neq k\pi$

* $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg\, x + C$
* $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsin\, x + C$ $x \in (-1, 1)$

* $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $a > 0,\ a \neq 1$

(38.) Смена променљиве и парцијална интеграција; примери

Парцијална интеграција: Ако су $f, g : I \to R$ диференцијабилне на I и ако постоји $\int f'g\,dx$

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

$$\left(\int u\,dv = uv - \int v\,du\right)$$

Доказ: $(fg)' = f'g + fg'$

$$\int (fg)'\,dx = \int (f'g + fg')\,dx$$

$$fg + c = \int f'g\,dx + \int fg'\,dx \Rightarrow \int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dx$$

пр. $\int \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = x \end{bmatrix} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$

Смена променљиве: Нека је $\varphi : I \to R$ примитивна за $f : I \to R$ $(\varphi' = f)$ и нека је $g : J \to I$ диференцијабилна. Тада важи

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \varphi(g(x)) + C$$

Доказ: Показаћемо да су изводи леве и десне стране једнаки

$$\frac{d}{dx}\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = f(g(x))\,g'(x)\,dx$$

$$(\varphi(g(x)))' = \varphi'(g(x))\,g'(x) = f(g(x))\,g'(x)$$

39. Интеграција рационалних функција I (део интеграције)

деф. **Рационална функција** је $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где су P и Q полиноми и $Q(x)$ није константно једнако нули. Ако је $Q(x)=1$, $R(x)$ је полином.

* Идеја је наћи општи начин решавања $\int R(x)\,dx$

Нека је $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $\quad Q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$

Претпоставимо $\deg(P) > \deg(Q)$, тј. $n > m$. Тада делимо ова два полинома

$$P(x) = \underbrace{P_1(x)}_{\text{кол.}} Q(x) + \underbrace{P_2(x)}_{\text{ост}}, \quad \text{јасно } \deg P_1 = n-m \text{ и } \deg P_2 < m$$

Дакле, $$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$$

тзв. „прави разломак" $(\deg P_2 < \deg Q)$

- P_1 је полином и њега знамо да интегралимо: $\int c_k x^k + \dots + c_0\,dx = c_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \dots + c_0 x + C$

* У наредном питању доказано је да се $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ може раставити јединствено на две групе елементарних сабирака:

1° Сабирци типа $\frac{A}{(x-\lambda)^k}$

1_1° $k=1$: $\int \frac{A}{x-\lambda}\,dx = A \ln|x-\lambda| + C$

1_2° $k \neq 1$: $\int \frac{A}{(x-\lambda)^k}\,dx = A \cdot \frac{1}{-(k-1)\,t^{k-1}} + C$

2° Сабирци типа $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ $\quad \left(\underset{(x\in\mathbb{R})}{x^2+px+q>0}, \text{ тј. } p^2-4q<0\right)$

2_1° $I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx$

Тражимо прво I_1, па правимо рекурентну формулу за I_n

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a^2}\, a \int \frac{d\frac{x}{a}}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} \quad \left[t = \frac{x}{a} \quad dt = \frac{dx}{a} = d\,\frac{x}{a}\right]$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x\, d\frac{1}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + n\int x \frac{2x}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\left(\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\right)$$

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n I_n - 2na^2 I_{n+1}$$

Дакле: $$2na^2 I_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1) I_n$$

2_2° Општи случај. Идеја је да се сведе на 2_1°

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\underbrace{q-\frac{p^2}{4}}_{>0}$$. Означимо $q-\frac{p^2}{4}=a^2$

Смена: $x+\frac{p}{2}=t$, $dx=dt$

Тада је $x=t-\frac{p}{2}$, па $Mx+N=M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N=Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)=Mt+N_1$

$$I=\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx=\int\frac{Mt+N_1}{(t^2+a^2)^k}\,dt=\int\frac{Mt}{(t^2+a^2)^k}\,dt+N_1\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$$

$$I=\underbrace{\frac{M}{2}\int\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^k}}+N_1 I_k(t)$$

$$\left[\begin{matrix}t^2+a^2=u\\2t\,dt=du\end{matrix}\right]=\frac{M}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{M}{2}\ln|t^2+a^2|$$

40. Интеграција рационалних функција II (део алгебарски)

Теорема: Свака „права" рационална ф-ја се може јединствено представити као збир елементарних сабирака $\frac{A}{(x-\lambda)^k}$ и $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ $(p^2-4q<0)$

Основна теорема алгебре: Нека је $P(z)=a_n z^n+\dots+a_1 z+a_0$ полином где $a_i\in C$, $n\geq 1$ и $a_n\neq 0$

(без доказа)

Тада једначина $P(z)=0$ има бар једно решење у C

Последица: Постоје $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in C$ ткд. $P(z)=a_n(z-\lambda_1)\dots(z-\lambda_n)$

Доказ: По **Безуовом ставу** $(z-\lambda)\mid P(z) \iff P(\lambda)=0$

О.Т.А даје $\lambda_1\in C$: $P(\lambda_1)=0 \Rightarrow (z-\lambda_1)\mid P(z)$

$\Rightarrow P(z)=(z-\lambda_1)P_{n-1}(z)=(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)P_{n-2}(z)=\dots=(z-\lambda_1)\dots(z-\lambda_n)a_n$

Став: $P(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$ $(a_i\in R)$ и $P(\lambda)=0$ ($\lambda\in C$, постоји по о.т.а.). Тада је и $P(\bar{\lambda})=0$

Доказ: $a_n\lambda^n+\dots+a_1\lambda+a_0=0 \Rightarrow \overline{a_n\lambda^n}+\dots+\overline{a_1\lambda}+\overline{a_0}=0$

Пошто $a_i\in R \Rightarrow a_n\bar{\lambda}^n+\dots+a_1\bar{\lambda}+a_0=0 \Rightarrow P(\bar{\lambda})=0$

Факторизација реалних полинома: $P(x)=a_n K_1(x)\dots K_r(x)L_1(x)\dots L_s(x)$ $(n=2r+s)$

где је $K_j(x)=x^2+p_jx+q_j$, $L_i(x)=x+r_i$

Доказ: Нека је свако $\lambda=\alpha+i\beta\in C$ $(\beta\neq 0)$

- $P(x)=a_n(x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n)$, $\lambda_i\in C$

За свако λ_j, његов конјуговани $\lambda_k=\bar{\lambda}_j$ $(k\neq j)$ је такође нула полинома P

Дакле за сваки чинилац у производу постоји њему „одговарајући"

$(x-\lambda)(x-\bar{\lambda})=x^2-(\lambda+\bar{\lambda})x+|\lambda|^2=x^2\underbrace{-2\alpha}_{\in R}x+\underbrace{(\alpha^2+\beta^2)}_{\in R}=K_1$

- $P(x)=a_nK_1(x)\underbrace{(x-\lambda_3)\dots(x-\lambda_n)}_{n-2 \text{ линеарних фактора}:\ P_{n-2}(x)}$

Поступак можемо поновити за $P_{n-2}(x)=K_2(x)P_{n-4}(x)$, јер $P_{n-2}=\frac{P(x)}{a_nK_1(x)}$ има реалне коеф. зато што је он количник два таква полинома

Они чиниоци које „не упаримо" су нам L_i

* Познато је да ако су m, n уз. прости, постоје $u, v \in \mathbb{Z}$, такви да $um + vn = 1$
Слично својство може се доказати и за полиноме.

Став: Нека су P_1, P_2 уз. прости полиноми. Тада постоје полиноми U, V т.к.д. $UP_1 + VP_2 = 1$

То другачије можемо записати као $\frac{1}{P_1 P_2} = \frac{U}{P_2} + \frac{V}{P_1}$

Својство важи и када имамо **више** узајамно простих (у паровима) полиноме

Став: Нека су P_1, P_2, P_3 уз. прости пол. у паровима. Тада постоје W_1, W_2, W_3 т.к.д. $W_1 P_1 + W_2 P_2 + W_3 P_3 = 1$

Доказ: Пошто је и $(P_1 P_2)$ уз. прост са P_3, применимо претходни став

$$\frac{1}{(P_1 P_2) P_3} = \frac{U_1}{P_3} + \frac{U_2}{P_1 P_2} = \frac{U_1}{P_3} + U_2 \left(\frac{V_2}{P_1} + \frac{V_1}{P_2} \right) = \frac{U_1}{P_3} + \frac{V_2 U_2}{P_1} + \frac{V_1 U_2}{P_2} =$$

Последица: Нека су $P_1, \ldots, P_m$ уз. прости у паровима. Тада постоје $U_1, \ldots, U_m$ т.к.д. $\frac{1}{P_1 \ldots P_m} = \frac{U_1}{P_1} + \ldots + \frac{U_m}{P_m}$

(Закључак целог питања)

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{Q_1(x) \ldots Q_m(x)}$$, где су сви $Q_i = K_i^{m_i}$ или $Q_i = L_i^{m_i}$ (по фак. реал. пол.)

$$= P(x) \frac{1}{Q_1(x) \ldots Q_m(x)} = P\left(\frac{U_1}{Q_1} + \ldots + \frac{U_m}{Q_m} \right) = \underbrace{\frac{V_1}{Q_1} + \ldots + \frac{V_m}{Q_m}}_{\text{интеграљење ових описано у претходном питању}} \quad (V_i = PU_i)$$

(41.) Интеграција ирационалних функција и тригонометријских израза

* **Тригонометријски изрази** - често се лакше решавају сменама

- Најчешће се користи смена $t = tg\frac{x}{2}$. Изразимо $\sin x$, $\cos x$ и dx преко t

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} \overset{:\cos^2\frac{x}{2}}{=} \frac{2\frac{\sin x/2}{\cos x/2}\frac{\cos x/2}{\cos x/2}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{\sin^2 x/2}{\cos^2 x/2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

(Слично и за $\cos x$)

$$t = tg\,^{x}/_{2} \Rightarrow x = 2\,arctg\,t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Дакле: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

- Некада су повољније смене: $t = \cos x$, $t = \sin x$, $t = tg\,x$

* **ирационални изрази**

- Нека је $R(u, v_1, \dots, v_k)$ рац. ф-ја. Тражимо интеграл од $R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$
(где је $ad-bc \neq 0$, тако се не скраћује и нема дељење са 0)

Означимо са N = НЗС$(n_1, \dots, n_k)$. Смена коју користимо је $t^N = \frac{ax+b}{cx+d}$

Тада: $\sqrt[n_i]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t^{\frac{N}{n_i}} = t^{N_i}$. Јасно $x = \underbrace{\frac{t^N d-b}{a-ct^N}}_{R_0}$, $dx = \underbrace{\left(\frac{t^N d-b}{a-ct^N}\right)'}_{R_1} dt$

Тиме смо ирационалну ф-ју претворили у рационалну: $R(R_0(t), t^{N_1}, \dots, t^{N_k})\, R_1(t)\, dt$

- Често се примењују и Ојлерове смене, које су описане у наредном питању

(42.) Ојлерове смене

- Нека је $R(x,y)$ рац. ф-ја. Тражимо интеграл од $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

I Ојлерова смена: када је $\underline{a>0}$, смена је $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\cdot x$

$$ax^2+bx+c = t^2 - 2t\sqrt{a}x + ax^2 \Rightarrow (2t\sqrt{a}+b)x = t^2 - c$$

* Дакле: $x = \dfrac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}$, $dx = \left(\dfrac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}\right)' dt$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\,\dfrac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}$

Приметимо да је сада све изражено преко t и то рационално)

II Ојлерова смена: када ax^2+bx+c има **две различите нуле** λ, μ, смена је $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda)$

$$ax^2+bx+c = t^2(x-\lambda)^2 \Rightarrow a(x-\lambda)(x-\mu) = t^2(x-\lambda)^2$$

$$a(x-\mu) = t^2(x-\lambda) \Rightarrow (a-t^2)x = a\mu - \lambda t^2$$

* Дакле: $x = \dfrac{a\mu - \lambda t^2}{a-t^2}$, $dx = \left(\dfrac{a\mu-\lambda t^2}{a-t^2}\right)' dt$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = t\left(\dfrac{a\mu - \lambda t^2}{a-t^2} - \lambda\right)$

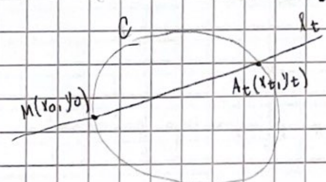
III Ојлерова смена: када је $\underline{c>0}$, смена је $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$

$$ax^2+bx+c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c \overset{:x}{\Rightarrow} ax + b = xt^2 + 2t\sqrt{c}$$

* Дакле: $x = \dfrac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}$, $dx = \left(\dfrac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}\right)' dt$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \dfrac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}\,t + \sqrt{c}$

* **Геометријска интерпретација** (даје нам „општу" Ојлерову смену)

- Имамо $R(x,y)$, $y = \sqrt{ax^2+bx+c} \Rightarrow y^2 = ax^2+bx+c$ - то је једначина криве II реда, означимо је са C



произв. $M \in C$: $y_0^2 = ax_0^2 + bx_0 + c$

$l_t : y - y_0 = t(x-x_0)$. Тражимо $C \cap l_t$ (по x)

$$(y_0 + t(x-x_0))^2 = ax^2+bx+c$$

$$y_0^2 + 2y_0t(x-x_0) + t^2(x-x_0)^2 = ax^2+bx+c$$

$$\Rightarrow 2y_0t(x-x_0) + t^2(x-x_0)^2 = ax^2+bx+c - (ax_0^2+bx_0+c) = a(x+x_0)(x-x_0) + b(x-x_0)$$

$$2y_0t + t^2(x-x_0) = a(x+x_0) + b \Rightarrow x_t = \frac{ax_0 + b - 2y_0t + t^2x_0}{t^2-a}$$

Одатле добијамо и: $y_t = y_0 + t(x_t - x_0)$

* Ако посматрамо спец. случај $y_0 = 0$: $y_t = t(x_t - x_0) = t(x_t - \lambda)$
што је еквивалентно другој Ојлеровој смени

* Ако је $x_0 = 0$, $y_0 = \sqrt{c}$: $y = \sqrt{c} + tx_t$, што је трећа Ојлерова смена

43. Риманов интеграл: основне дефиниције и својства

деф. **Подела** сегмента $[a,b]$ је скуп тачака $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, у ознаци P

деф. **Подеони сегмента** су сегменти $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$, $1 \le i \le n$,

а **дужине** подеона су $|\Delta_i| = \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

деф. **Параметар поделе** P је дужина највећег подеона: $\lambda(P) = \max_{1 \le i \le n} |\Delta_i|$

деф. **Потподела** P' поделе P је подела која се добија од P додавањем коначно много нових подеоних тачака, у ознаци $P \prec P'$

деф. Скуп свих подела сегмента $[a,b]$ означавамо $\mathcal{P}_{[a,b]}$ или само $\mathcal{P}$

деф. Нека је $f : [a,b] \to R$. За поделу $P: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ и **избор** тачака $\xi_i \in \Delta_i$ (из сваког по једну)

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot |\Delta_i|$ је **Риманова сума** која одговара функцији f, подели P и избору $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$

у ознаци $\sigma(f, P, \xi)$

деф. Нека је $f : [a,b] \to R$, P подела сегмента $[a,b]$ и ξ произвољан избор. Ако за $I \in R$ важи:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ (\lambda(P) < \delta \Rightarrow |\sigma(f, P, \xi) - I| < \varepsilon)$ онда у тој ситуацији лимес

$I = \lim_{\lambda(P) \to 0} \sigma(f, P, \xi) = \int_a^b f(x)dx$ називамо **Римановим интегралом**, а за

функцију f кажемо да је **Риман интеграбилна**.

деф. $\mathcal{R}[a,b]$ је скуп свих Риман интеграбилних ф-ја на сегменту $[a,b]$

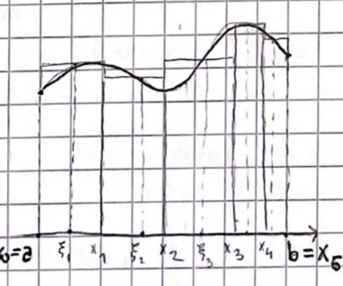
пр. 1° $f(x) = c$ $(f : [a,b] \to R)$. Тада $f \in \mathcal{R}[a,b]$

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot |\Delta_i| = \sum_{i=1}^{n} c \cdot |\Delta_i| = c \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i| = c \cdot (b-a)$$

2° $f(x) = \chi : R \to R$ – Дирихлеова функција, тј. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases}$

Она није Риман интеграбилна

$$\sigma(f, P, \xi^1) = \sum f(\xi_i^1) \cdot |\Delta_i| = 1 \cdot (b-a) = b-a$$
$$\sigma(f, P, \xi^2) = \sum f(\xi_i^2) \cdot |\Delta_i| = 0 \cdot (b-a) = 0$$



Став: Свака **Риман интеграбилна** функција је **ограничена** (контрапозиција: није огр. ⟹ није инт.)

Доказ: ппс. $f \in \mathcal{R}[a,b]$ и није огр. на $[a,b]$

Задајмо $\varepsilon > 0$. Постоји $\delta > 0$ ткд. $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi) = I$

Одаберимо поделу $P_0 \in \mathcal{P}[a,b]$ ткд. $\lambda(P) < \delta$.
Тада постоји $1 \le j \le n$ ткд. f није ограничено на Δ_j
Узмимо избор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{j-1}, \eta, \xi_{j+1}, \dots \xi_n)$, где f није огр. у η

$$\Big| \sum_{i \ne j}^{n} f(\xi_i) \cdot |\Delta_i| + \underbrace{f(\eta) \cdot |\Delta_j|}_{\text{неограничено}} - I \Big| < \varepsilon \implies \lightning$$

деф. Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ограничена. За поделу P $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ уводимо величине:

$m_i = \inf_{\Delta_i} f$, $M_i = \sup_{\Delta_i} f$; $m = \inf_{[a,b]} f$, $M = \sup_{[a,b]} f$, као и

$s(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i |\Delta_i|$ → **доња Дарбуова сума** „уписана површина"

$S(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i |\Delta_i|$ → **горња Дарбуова сума** „описана површина"

Став: За дату поделу P сегмента $[a,b]$ и дату ограничену функцију f важи

1) $\sup\limits_{\xi} \sigma(f, P, \xi) = S(f,P)$ **2)** $\inf\limits_{\xi} \sigma(f, P, \xi) = s(f,P)$

Доказ: **1)** Јасно је да мора да важи $\sup \sigma(f, P, \xi) \le S(f,P)$
Задајмо $\varepsilon > 0$. За свако i, бирамо ξ_i из Δ_i ткд. $f(\xi_i) > M_i - \varepsilon \;\; / \cdot |\Delta_i|, \sum$
$\sigma(f, P, \xi) > S(f,P) - \underbrace{(b-a)}_{const} \cdot \varepsilon \;\; (2) \xRightarrow{(1),(2)} S(f,P) = \sup \sigma(f,P,\xi)$

2) аналогно

Линеарност: Нека $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Тада и $f+g \in \mathcal{R}[a,b]$ и $\lambda f \in \mathcal{R}[a,b]$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ и

1) $\int\limits_a^b (f+g)\,dx = \int\limits_a^b f\,dx + \int\limits_a^b g\,dx$ **2)** $\int\limits_a^b \lambda f\,dx = \lambda \int\limits_a^b f\,dx$

Доказ: **1)** Нека је $I_f = \int\limits_a^b f\,dx = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi)$, $I_g = \int\limits_a^b g\,dx = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma(g, P, \xi)$

$\sigma(f+g, P, \xi) = \sum\limits_{j=1}^{n} (f+g)(\xi_j)\,|\Delta_j| = \sigma(f, P, \xi) + \sigma(g, P, \xi) \;\; (*) \; / \lim$

$\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f+g, P, \xi) = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi) + \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi) = I_f + I_g$

2) аналогно

44. Риманов интеграл: општи критеријум интеграбилности

(ово питање се надовезује на претходно)

$$* \quad S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i |\Delta_i| - \sum_{i=1}^{n} m_i |\Delta_i| = \sum_{i=1}^{n} (\underbrace{M_i - m_i}_{\sup_{\Delta_i} f - \inf_{\Delta_i} f}) |\Delta_i|$$

деф. Нека $f: S \to \mathbb{C}$ и нека су $s', s'' \in S$.
Осцилација функције на скупу S је $\mathbf{osc_S f = \sup_{s', s''} |f(s') - f(s'')|}$

Јасно $0 \leq osc_S f \leq +\infty$ ($osc_S f = 0$ ако је $f = const$, $osc_S f < \infty$ ако је f огр. на S)

→ За осцилације може се доказати нешто што личи на линеарност:

1° $osc_S (f+g) \leq osc_S f + osc_S g$
2° $osc_S (\lambda f) = |\lambda| \cdot osc_S f$

→ Такође, ако је $f: S \to \mathbb{R}$, важи $\mathbf{osc_S f = \sup_S f - \inf_S f}$

$$osc_S f = \sup_{s', s''} (f(s') - f(s'')) = \sup_{s', s''} (f(s') + (-f(s''))) = \sup_{s'} f(s') + \underbrace{\sup_{s''} (-f(s''))}_{-\inf_{s''} f(s'')}$$

→ На врху смо доказали $S(f,P) - s(f,P) = \sum (M_i - m_i) |\Delta_i| = \sum osc_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i|$

деф. **Осцилаторна сума** је једнака $\mathbf{osc(f,P)} = \sum_{i=1}^{n} osc_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i|$
↳ (горња Дарбуова - доња Дарбуова)

деф. Нека је $f: [a,b] \to \mathbb{C}$; $x_0 \in [a,b]$ и $O_\varepsilon = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap [a,b]$
$\mathbf{\omega(\varepsilon) = osc_{O_\varepsilon} f}$

Став: Функција f је непрекидна у x_0 $\iff$ $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$

Доказ: ($\Leftarrow$) Знамо $\lim\limits_{\delta \to 0} osc_{O_\delta} f = 0$

Задајемо $\varepsilon > 0$. $\exists \delta_0$ $\delta < \delta_0 \Rightarrow osc_{(x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f < \varepsilon$

$\Rightarrow \sup |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall x \in O_\delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

($\Rightarrow$) Задајмо $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$
Изаберимо $x', x'' \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x'')| < 2\varepsilon$$

Пошто то важи $\forall x', x'' \in O_\delta \Rightarrow \sup |f(x') - f(x'')| = \omega \leq 2\varepsilon$

(мало враћање уназад)

* **Став:** Нека је $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ **ограничена** и нека су P' и P'' поделе т.к.д. $P' \prec P''$. Тада:

1) $s(f,P') \le s(f,P'')$
2) $S(f,P') \geq S(f,P'')$

Доказ: **1)**

Довољно је доказати када се поделе разликују у 1 тачки

$m_{i_1}|\Delta_{i_1}| + m_{i_2}|\Delta_{i_2}| \geq m_i|\Delta_{i_1}| + m_i|\Delta_{i_2}| = m_i|\Delta_i|$

(сви остали у суми су непромењени)

2) аналогно

Став: За произвољне $P', P'' \in \mathcal{P}[a,b]$ важи $s(f,P') \le S(f,P'')$

Доказ: Формирајмо $P = P' \cup P''$, тада $P' \prec P$, $P'' \prec P$

$$s(f,P') \underset{(1)}{\le} s(f,P) \underset{\text{деф}}{\le} S(f,P) \underset{(2)}{\le} S(f,P'')$$

* **деф.** Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ограничена.

Горњи Дарбуов интеграл је $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_P S(f,P)$

Доњи Дарбуов интеграл је $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_P s(f,P)$

Теорема Дарбуа: **1)** $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} s(f,P)$

2) $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} S(f,P)$ } где је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ограничена

Доказ: Означимо са $\underline{I} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Дакле доказујемо $\underline{I} = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} s(f,P)$

Пошто је ограничена $\exists M$ $x\in[a,b] \Rightarrow -M \le f(x) \le M$

(постоји једна подела) Задајмо $\varepsilon > 0$. $\underline{I} - \varepsilon < \underline{I} = \sup_P s(f,P)$. То значи $\exists P_0$ $s(f,P_0) > \underline{I} - \varepsilon$

P_0: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$

(~~поента доказа је~~ наћи δ т.к.д. постоји бесконачно подела)

Нека је P подела т.к.д. $\lambda(P) < \delta$, где δ желимо да буде такво да важи:

$\lambda(P) < \delta \Rightarrow |\underline{I} - s(f,P)| < \varepsilon \iff \underline{I} - s(f,P) < \varepsilon \iff s(f,P) > \underline{I} - \varepsilon$

Нека је $\tilde{P} = P_0 \cup P$, дакле добија се од P додавањем највише $k-2$ тачке.

Јасно, $P \prec \tilde{P}$ па је $s(f,P_0) \le s(f,\tilde{P}) \Rightarrow s(f,\tilde{P}) - s(f,P) = |s(f,\tilde{P}) - s(f,P)| \geq 0$

$$0 \le |s(f,\tilde{P}) - s(f,P)| = \Big|\sum_{(\max\ k-2)} (m_{i_1}|\Delta_{i_1}| + m_{i_2}|\Delta_{i_2}| - m_i|\Delta_i|)\Big| \le \sum |m_{i_1}|\Delta_{i_1}| + m_{i_2}|\Delta_{i_2}| - m_i|\Delta_i||$$

(остали непромењени)

$$\le \sum M|\Delta_{i_1}| + M|\Delta_{i_2}| + M|\Delta_i| = M\sum 2|\Delta_i| < 2M\delta(k-2)$$

ограничење

Дакле $s(f,P) > s(f,\tilde{P}) - 2M\delta(k-2) \geq s(f,P_0) - 2M\delta(k-2) > \underline{I} - \varepsilon - 2M\delta(k-2)$

Ако изаберемо за $\delta < \dfrac{\varepsilon}{2M(k-2)}$, јасно $s(f,P) > \underline{I} - 2\varepsilon$

деф. **Дијаметар скупа** $A \subset \mathbb{C}$ је $\operatorname{diam} A = \sup_{z',z''} |z' - z''|$

Очигледно: $\operatorname{osc}_S f = \operatorname{diam} f[S]$ (дијаметар → домен, осцилација → кодомен)

Лема: Нека је $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ низ непразних скупова реалних бројева за које важи:

(1) $A_{n+1} \subset A_n$, $n \geq 1$ **(2)** $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} A_n = 0$

Тада $\exists x_0\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$

Доказ: Идеја: из сваког A_n бирамо елем. a_n и доказујемо да је такав низ Кошијев

Задајемо $\varepsilon > 0$. Због (2): $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$ $\operatorname{diam} A_n < \varepsilon$

За $m \geq n \geq n_0$ (дакле и $m, n \in A_n$): $|a_m - a_n| \leq \operatorname{diam} A_n < \varepsilon$, па (a_n) јесте **Кошијев**.

$\Rightarrow$ постоји $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$

То значи $\left.\begin{array}{l} \exists n_1\ \forall n \geq n_1\ |a_n - x_0| < \varepsilon/2 \\ \exists n_2\ \forall n \geq n_2\ \operatorname{diam} A_n < \varepsilon/2 \end{array}\right\}$ Нека је $N = \max(n_1, n_2)$ $\Rightarrow$ $\operatorname{diam} A_N < \varepsilon/2$

Пошто $a_N \in A_N$ $\Rightarrow$ $A_N \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

(све ово пре је била припрема за теорему)

Теорема: Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ограничена. Тада су сл. тврђења еквивалентна

1) f је Риман интеграбилна

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ $\lambda(P) < \delta \Rightarrow S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$ $\left(\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \operatorname{osc}(f,P) = 0\right)$

3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists P_0$ $S(f,P_0) - s(f,P_0) < \varepsilon$ $\left(\operatorname{osc}(f,P_0) < \varepsilon\right)$

4) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ $\lambda(P') < \delta \wedge \lambda(P'') < \delta \Rightarrow |\sigma(f,P',\xi') - \sigma(f,P'',\xi'')| < \varepsilon$

5) $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

Доказ: **(1⇒2)** Задајмо $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\lambda(P) < \delta \Rightarrow |\sigma(f,P,\xi) - I| < \varepsilon$

Дакле $I - \varepsilon < \sigma(f,P,\xi) < I + \varepsilon$

Изаберимо поделу P такву да $\lambda(P) < \delta$.

Пошто $\sigma(f,P,\xi) \leq I + \varepsilon \overset{/\sup}{\Rightarrow} S(f,P) < I + \varepsilon$

Пошто $I - \varepsilon < \sigma(f,P,\xi) \overset{/\inf}{\Rightarrow} I - \varepsilon < s(f,P)$ $(-s(f,P) < \varepsilon - I)$

$\Rightarrow$ за $\lambda(P) < \delta$ $\Rightarrow$ $S(f,P) - s(f,P) < 2\varepsilon$

(2 ⇒ 4) Зададјмо $\varepsilon > 0$. Бирамо $\delta > 0$. Имамо Дарбуове суме s', S' (P') и s'', S'' (P'')

Нека $\lambda(P') < \delta$, то значи $S(f, P') - s(f, P'') < \varepsilon$
$\lambda(P'') < \delta$, то значи $S(f, P'') - s(f, P'') < \varepsilon$

$$\underbrace{\overbrace{s' \quad s''}^{\le \varepsilon} \quad \overbrace{S' \quad S''}^{\le \varepsilon}}_{\le 2\varepsilon}$$

Такође знамо $s' \le S''$ и $s'' \le S'$, па зато важи ово на слици.

Јасно: $\left.\begin{aligned} \sigma(f, P'', \xi'') &\le S'' \\ -\sigma(f, P', \xi') &\le -s' \end{aligned}\right\} \Rightarrow |\sigma(f, P', \xi') - \sigma(f, P'', \xi'')| \le 2\varepsilon$

(4 ⇒ 1) $A_n = \{ \sigma(f, P, \xi) \mid \lambda(P) < \frac{1}{n} \}$, јасно $A_{n+1} \subset A_n$

Да бисмо применили лему са претх. стране, докажимо $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} A_n = 0$

Зададјмо $\varepsilon > 0$, бирамо $\delta > 0$ и нека је $N \in \mathbb{N}$ т.к.д. $\frac{1}{N} < \delta$

$\sigma(f, P', \xi'), \sigma(f, P'', \xi'') \in A_N \overset{(4)}{\Rightarrow} |\sigma(f, P', \xi') - \sigma(f, P'', \xi'')| < \varepsilon \Rightarrow \operatorname{diam} A_N < \varepsilon$

Дакле, по леми добијамо $I \in \mathbb{R}$ $(x_0 = I)$, $\forall \varepsilon\, \exists n_0\, \forall n \ge n_0 \quad A_n \subset (I - \varepsilon, I + \varepsilon)$

То значи да за $\lambda(P) < \frac{1}{n_0} \Rightarrow |\sigma(f, P, \xi) - I| < \varepsilon \Rightarrow f$ је Рим. инт.

(5 ⇒ 3) Знамо $\sup_P s(f, P) = \inf_P S(f, P) = I$

Зададјмо $\varepsilon > 0$. Пошто $\sup_P s(f, P) > I - \varepsilon \Rightarrow \exists P_1 \quad s(f, P_1) > I - \varepsilon$
$\inf_P S(f, P) < I + \varepsilon \Rightarrow \exists P_2 \quad S(f, P_2) < I + \varepsilon$

Изаберемо $P = P_1 \cup P_2$: $\left.\begin{aligned} I - \varepsilon &< s(f, P_1) \le s(f, P) \\ S(f, P) &\le S(f, P_2) < I + \varepsilon \end{aligned}\right\} \Rightarrow S(f, P) - s(f, P) < 2\varepsilon$

(3 ⇒ 5) Зададјмо $\varepsilon > 0$. Постоји P_0 т.к.д. $\overline{I} \le S(f, P_0) < s(f, P_0) + \varepsilon \le \underline{I} + \varepsilon$

Како $\varepsilon \to 0$, тада $\overline{I} \le \underline{I}$
Јасно, увек важи $\overline{I} \ge \underline{I}$ $\Bigg\} \Rightarrow \overline{I} = \underline{I}$

(2 ⇒ 3) Тривијално: Ако важи за сваку поделу $\lambda(P) < \delta$, значи важи и за једну поделу)

(5 ⇒ 2) $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} s(f, P) = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} S(f, P) \Rightarrow \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} (S(f, P) - s(f, P)) = 0$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \Rightarrow & 2 & \Rightarrow & 3 \\ \Uparrow & \Downarrow & & \Uparrow & \Updownarrow \\ & 4 & & 5 & \end{array}$$

(15.) Интеграбилност неких класа функција

Став: Свака **непрекидна** $f: [a,b] \to R$ је **Риман интеграбилна** на $[a,b]$

Доказ: Проверићемо услов (2) из велике теореме

Пошто је f непрекидна на $[a,b] \Rightarrow f$ је **равномерно** непрекидна.

То значи да постоји $\delta > 0$ $|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Одаберимо поделу $P \in \mathcal{P}[a,b]$, $\lambda(P) < \delta \Rightarrow |\Delta_i| < \lambda(P) < \delta$

$osc_{\Delta_i} f = \sup_{x',x''} |f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon$ (због услова равномерне непрекидности)

Дакле $osc(f,P) = \sum_i osc_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| \leq (b-a) \cdot \varepsilon \Rightarrow f$ је Рим. инт.

Став: Свака **монотона** $f: [a,b] \to R$ је **Риман интеграбилна** на $[a,b]$

Доказ: Б.У.О. Нека је f **растућа**. Опет ћемо доказати услов (2)

Нека је $\lambda(P) < \delta \Rightarrow \mathbf{osc(f,P)} = \sum osc_{\Delta_i} f |\Delta_i| = \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) |\Delta_i|$ (f расте)

$< \delta \cdot \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \mathbf{(f(b) - f(a)) \cdot \delta}$

Јасно, ако $\delta \to 0 \Rightarrow osc(f,P) \to 0$ (такође кад $\delta \to 0 \Rightarrow \lambda(P) \to 0$)

Став: Нека је $f: [a,b] \to R$ и нека је $a < c < b$. Тада важи:

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Leftrightarrow f \in \mathcal{R}[a,c] \wedge f \in \mathcal{R}[c,b]$$

У том случају такође важи: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (*)

Доказ: ($\Rightarrow$) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \lambda(P) < \delta \Rightarrow osc(f,P) < \varepsilon$

Задајемо ε. Бирамо δ и нека је P' подела $[a,c]$ т.к.д. $\lambda(P') < \delta$

и P'' подела $[c,b]$ т.к.д. $\lambda(P'') < \delta$

$$osc(f,P) = \sum^{(P)} osc_{\Delta_i} f\,|\Delta_i| = \sum^{(P')} osc_{\Delta_j} f \cdot |\Delta_j| + \sum^{(P'')} osc_{\Delta_k} f\,|\Delta_k| = osc(f,P') + osc(f,P'') < \varepsilon$$

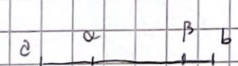
$osc(f,P') < \varepsilon$, $osc(f,P'') < \varepsilon$

($\Leftarrow$) аналогно

(*) Изаберемо поделу P т.к.д. $c \in P \wedge \lambda(P) < \delta$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,P,\xi) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \left(\sigma(f,P_l,\xi_l) + \sigma(f,P_d,\xi_d)\right) = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Напомена: Ако је $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, тада $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}[b,c]$



46. Основна интегрална неједнакост и прва теорема о средњој вредности

Лема:

1) $m \le f(x) \le M$ и $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$

2) $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \le g(x)$ и $f, g \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

3) $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \ge 0$ и $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

(Докази за сва три су тривијални)

Основна интегрална неједнакост: Ако $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}[a,b]$, $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

Доказ: Очигледно $\left|\sum f(\xi_i)\,|\Delta_i|\right| \le \sum |f(\xi_i)| \cdot |\Delta_i|$

тј. $|\sigma(f, P, \xi)| \le \sigma(|f|, P, \xi)$ $\quad / \lim_{\lambda(P) \to 0}$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Доказали смо неједнакост, али морамо да докажемо и да $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$

Очигледно је да за сваки скуп S важи $\operatorname{osc}_S |f| \le \operatorname{osc}_S f$ (трив. доказ)

То значи $\operatorname{osc}_{\Delta_i} |f| \le \operatorname{osc}_{\Delta_i} f \quad / \cdot |\Delta_i|, \sum$

$$0 \le \operatorname{osc}(|f|, P) \le \operatorname{osc}(f, P) \Rightarrow \lim_{\lambda(P) \to 0} \operatorname{osc}(|f|, P) = 0$$

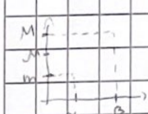
(лл, лз) $\to 0 \leftarrow$ $(\lambda(P) \to 0)$

<u>Деф.</u> **Средња вредност** интеграбилне функције $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ је $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$

Прва теорема о средњој вредности: Ако је f непрекидна на $[a,b]$, онда $\exists c \in (a,b)$ т.д.

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{тј.} \quad (b-a) f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Доказ: f - непрекидна $\xRightarrow{\text{Вајерштрас}}$ $\exists M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$, $\exists m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \Rightarrow m \le f(x) \le M$



f - непрекидна $\Rightarrow f$ - Рим. инт. $\xRightarrow{\text{л1}}$ $m \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \le M$ ознака

По **теореми о међувредности**, $\exists c \in (\alpha, \beta) \subset [a,b]$ $\quad f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = \mu$

* Додатно, хоћемо да покажемо да $\mu \ne m$ и $\mu \ne M$, али прво докажимо лему:

Лема: $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $f(x) \ge 0$ и $x_0 \in [a,b]$, $f(x_0) > 0$, f непр. у $x_0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx > 0$

Доказ: $f(x_0) > \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$. По лок. сво. $\exists \delta$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0-\delta} + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} + \int_{x_0+\delta}^b \overset{\text{л3}}{\ge} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx \ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varepsilon\,dx = \varepsilon \cdot 2\delta > 0$$

ппс. $m = \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \xRightarrow{\cdot(b-a)} \int_a^b m\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b \underbrace{(f(x) - m)}_{\ge 0} = 0 \Rightarrow f(x) = m$

(иначе би важила Л, не би било >0)

Аналогно за M

Последица: Ако f непр. на $[a,b]$, $f \ge 0$ и $\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

(леме)

непр(инт) = инт

* **Теорема:** Ако $f \in \mathcal{R}[a,b]$ и $m \le f(x) \le M$ и $\varphi \in C[m,M]$. Тада $\varphi \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$

Доказ: Доказаћемо за случај Липшиц непрекидне ф-је на $[m,M]$, општи доказ касније

$$osc_{\Delta_i} \varphi\circ f = \sup |\varphi(f(x')) - \varphi(f(x''))| \le \sup (L \cdot |f(x') - f(x'')|) = L \cdot osc_{\Delta_i} f$$

Дакле: $\quad osc_{\Delta_i} \varphi\circ f \le L \cdot osc_{\Delta_i} f \quad / \cdot |\Delta_i|, \Sigma$

$$0 \le osc(\varphi\circ f, P) \le L \cdot osc(f, P) \to 0 \quad (\lambda(P) \to 0)$$

НАПОМЕНА: Обрнуто не мора да важи

Последица: $f \in \mathcal{R}[a,b]$ и $1 \le p < +\infty \implies |f|^p \in \mathcal{R}[a,b]$ $\quad (\varphi = x^p)$

Последица: $f, g \in \mathcal{R}[a,b] \implies f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$ $\quad \left(f \cdot g = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)\right)$

* (наредни став је уопштење I т. о. ср. вр.)

Став: Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна, а $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ интеграбилна и $\forall x \; p(x) \ge 0$, $\int_a^b p(x)dx > 0$

Тада $\exists c \in (a,b)$ ткд. $\int_a^b f(x)p(x)dx = f(c) \cdot \int_a^b p(x)dx$

Доказ: f непрекидна $\implies \exists M = \max_{[a,b]} f$, $\exists m = \min_{[a,b]} f \implies m \le f(x) \le M \quad / \cdot p$

$$m \cdot p(x) \le f(x) \cdot p(x) \le M \cdot p(x) \quad / \int$$

$$m \int_a^b p(x)dx \le \int_a^b f(x)p(x)dx \le M \int_a^b p(x)dx \quad / : \int_a^b p(x)dx$$

$$m \le \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)p(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}}_{\mu} \le M$$

По теореми о међувредности, $\exists c \quad f(c) = \mu$

НАПОМЕНА: У случају $p(x) = 1$, став је еквивалентан првој теореми о ср. вредности

(47.) Њутн - Лајбницова формула. Друга теорема о средњој вредности.

Лема: Ако је $f \in \mathcal{R}[a,b]$, тада је $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ Липшиц непрекидна на $[a,b]$

Доказ: $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f$ - ограничена: $\exists M\ \forall x \in [a,b]\ \ |f(x)| \le M$

Изаберимо $x_1, x_2 \in [a,b]$ $(x_1 \le x_2)$

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_a^{x_2} f(t)\,dt - \int_a^{x_1} f(t)\,dt = \int_a^{x_1} f + \int_{x_1}^{x_2} f - \int_a^{x_1} = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$$

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right| \overset{\text{с.и.н.}}{\le} \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt \le \int_{x_1}^{x_2} M\,dt = M(x_2 - x_1) = M \cdot |x_2 - x_1|$$

деф. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

деф. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(једна тачка)

Став: Ако је $f \in \mathcal{R}[a,b]$ непрекидна у x_0, тада је $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ диференцијаб. у x_0

Уз то, важи и $F'(x_0) = f(x_0)$

Доказ: Нека је $h > 0$, тада важи $F(x_0+h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$ (као у леми)

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt$$

$$= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t) - f(x_0)\big)\,dt$$

$$\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t) - f(x_0)\big)\,dt\right| \overset{\text{с.и.н.}}{\le} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\,dt$$

Задајмо $\varepsilon > 0$. Пошто је x_0 непр. у $x_0 \Rightarrow \exists \delta > 0\ \ |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$

За $h < \delta$ $\quad \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\,dt \le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\,dt = \varepsilon$

НАПОМЕНА: Ако је f непр. слева (здесна) $\Rightarrow F$ је диф. слева (здесна)

(све тачке)

Теорема: Ако је $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна, тада је $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ диференцијаб. на $[a,b]$

Уз то, важи и $F'(x) = f(x)$, за $\forall x \in [a,b]$

Доказ: Последица претходног става (применимо на све тачке из $[a,b]$)

НАПОМЕНА: Функција F је непрекидно-диференцијабилна (C^1)

Њутн - Лајбницова теорема: Нека је $f : [a,b]$ **непрекидна** и $\varphi' = f$ (примитивна ф-ја)

Тада важи: $\int_a^b f(t)\,dt = \varphi(b) - \varphi(a)$

Доказ: Из теореме знамо да је $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ примитивна ф-ја за f.

Пошто су и φ и F прим. за f $\Rightarrow$ разликују се за константу

$$\left.\begin{aligned} F(a) &= \int_a^a f(t)\,dt = 0 = \varphi(a) + C \\ F(b) &= \int_a^b f(t)\,dt = \varphi(b) + C \end{aligned}\right\} \overset{(2)-(1)}{\Longrightarrow} \int_a^b f(t)\,dt = \varphi(b) - \varphi(a)$$

НАПОМЕНА: Теорема се може формулисати и овако: $\varphi \in C^1[a,b] \Rightarrow \int_a^b \varphi'(t)\,dt = \varphi(b) - \varphi(a)$

Теорема (уопштење): Нека је $\varphi : [a,b]$ **диференцијаб.** и φ' **Риман интеграбилна** на $[a,b]$

Тада важи: $\int_a^b \varphi'(t)\,dt = \varphi(b) - \varphi(a)$

Доказ: $\varphi' \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma(\varphi', P, \xi) = \int_a^b \varphi'(t)\,dt$ $\quad (P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \underbrace{\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})} + \varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_{n-2}) + \dots - \varphi(x_1) + \varphi(x_1) - \varphi(x_0)$$

(применимо Лагранжа) $= \varphi'(\xi_n)|\Delta_n| + \dots + \varphi'(\xi_1)|\Delta_1| = \sigma(\varphi', P, \xi)$

Пошто је $\varphi(b) - \varphi(a) = \sigma(\varphi', P, \xi) \overset{\lim}{\Longrightarrow} \int_a^b \varphi'(t)\,dt = \varphi(b) - \varphi(a)$

* Сада гледамо интеграле функција које нису непрекидне

(1 тач.) **Лема:** $f(x) = \begin{cases} \alpha, & x = c \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. Тада је $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

Доказ: $0 \le \sigma(f, P, \xi) \le |\alpha| \cdot \lambda(P) \cdot 2$ (уколико $c \in P$, припада и оном лево и десно)

$\to 0 \leftarrow$

(к тач.) **Лема:** $f(x) = \begin{cases} \alpha_k, & x = c_k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ $(a \le c_1 < \dots < c_k \le b)$. И тада је $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

Доказ: Сведемо га на претходну лему (применимо је на више сегмената)

$a \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad b$

Став: Нека $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ и нека се оне **разликују у коначно много тачака** $c_1, \dots, c_k$

Тада је: $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Доказ: $\int g = \int f + \underbrace{\int (g - f)}_{\text{функција као у леми}} = \int f + 0 = \int f$

Деф. Функција $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ је **део по део глатка** ако важи

1° f је непрекидна на $[a,b]$

2° постоји подела $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ ткд. $f|_{\Delta_j} \in C^1[x_{j-1}, x_j]$ $(1 \le j \le n)$

деф. **$PC^1[a,b]$** је скуп свих део по део функција на $[a,b]$

Став: $\varphi \in PC^1[a,b] \implies \int\limits_a^b \varphi'(t)\,dt = \varphi(b) - \varphi(a)$ (врло слично Њутн-Лајбницу)

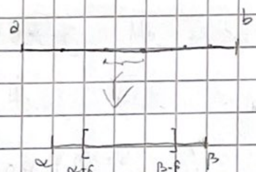
Доказ: $\int\limits_a^b \varphi'(t)\,dt = \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t)\,dt = \sum\limits_{j=1}^{n} (\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})) = \varphi(b) - \varphi(a)$

примениши Њ-Л на мање делове

Теорема: Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **ограничена** и нека има **коначно много тачака прекида**.

Тада је f **Риман интеграбилна** на $[a,b]$

Доказ:



Унутрашње тачке су прекиди.

Пошто знамо да важи $f \in \mathcal{R}[a,b] \iff f \in \mathcal{R}[a,c] \wedge f \in \mathcal{R}[c,b]$

довољно је да докажемо за један подсегмент (подела = прекиди)

- Знамо да је f непрекидна на (α,β), тј. не мора у α и β

Задајмо $\varepsilon > 0$. $f \in C[\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon]$, па је на том сегменту и равномерно непрекидна

тј. $\exists \delta > 0 \ \forall x', x'' \in [\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon] \quad |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Нека је P подела $[\alpha,\beta]$ ткд. $\lambda(P) < \delta$ (може и 2ε; пп. $\delta < \varepsilon$, иначе $\min(\delta,\varepsilon)$)

$osc(f,P) = \sum (M_i - m_i)|\Delta_i| = \sum\limits_{\text{унутр.}} + \sum\limits_{\text{ван+око}} \le \sum \varepsilon |\Delta_i| + \sum 2M|\Delta_i| \le \varepsilon(b-a) + 2M(2\varepsilon + 2\delta) < \varepsilon(b-a+8M)$

Смена променљиве: Нека је $f \in C[a,b]$ и $\varphi \in C^1[\alpha,\beta]$, где је $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$

Тада: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$

Доказ: Нека је $F' = f$, а нека је $\Phi(t) = F(\varphi(t))$ $(t \in [a,b])$

$\Phi'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, дакле Φ је примитивна за подинтегралну.

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$, па су једнаки

НАПОМЕНА: Важи и општије, за $\mathcal{R}[a,b]$, као и за $PC^1[a,b]$

Парцијална интеграција: Нека су $u, v \in C^1[a,b]$. Тада важи:

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(b)v(b) - u(a)v(a)] - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx$$

Доказ: Приметимо да је $(uv)' = u'v + uv'$ непрекидна као збир непрекидних

$$\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b (u'v + uv')\,dx = \int_a^b u'v\,dx + \int_a^b uv'\,dx$$

(Њ-Л) $\int_a^b (uv)'\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a)$

Друга теорема о средњој вредности: Нека је $f \in C[a,b]$ и нека је $g \in C^1[a,b]$ **монотона**

Тада $\exists\, \xi \in (a,b)$, т.к.д. $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$

Доказ: БУО, нека је f растућа. Напоменимо да је $(fg)(x)$ интегр. као производ инт. Прво ћемо доказати специјалан случај теореме, па ћемо први доказ свести на лему

Лема: Нека $f \in C[a,b]$, $g \in C^1[a,b]$ је растућа и $g(a) = 0$ (одакле $g(x) \geq 0$)

Тада $\exists\, \xi \in (a,b)$ ткд. $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$

Доказ: 1° $g(b) = 0 \Rightarrow g(x) = 0$ јер је g растућа, па ξ бирамо произвољно

2° $g(b) > 0$. Посматрамо функцију $\varphi(x) = \int_x^b f(t)\,dt$

На почетку питања доказано је $\varphi \in C^1[a,b]$ и $\varphi'(x) = -f(x)$ $(x \in [a,b])$

Такође, јасно је да је $\varphi(b) = 0$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\,\varphi'(x)\,dx \overset{\text{п.и.}}{=} -[g(b)\underbrace{\varphi(b)}_{0} - \underbrace{g(a)}_{0}\varphi(a)] + \int_a^b \varphi(x)\,g'(x)\,dx$$

$$\int_a^b fg\,dx = \int_a^b \varphi g'\,dx \quad (*)$$

Пошто $\varphi \in C^1[a,b]$ $\exists m = \min_{[a,b]} \varphi$, $\exists M = \max_{[a,b]} \varphi \Rightarrow m \leq \varphi(x) \leq M$

g - растућа $\Rightarrow g' \geq 0 \Rightarrow mg'(x) \leq \varphi(x)g'(x) \leq Mg'(x)$

Ово можемо да интегралимо, такође по Њ-Л: $\int_a^b g'(x)\,dx = g(b) - \overset{0}{g(a)} = g(b)$

$$mg(b) \leq \int_a^b \varphi(x)g'(x)\,dx \leq Mg(b) \overset{g(b)>0}{\Longrightarrow} m \leq \underbrace{\frac{1}{g(b)}\int_a^b f(x)g(x)\,dx}_{\mu} \leq M$$

По теор. о међувр. $\exists\, \xi \in (a,b)$ $\varphi(\xi) = \mu$, чиме је лема доказана

Да бисмо доказали теорему, применимо лему на: $g_1(x) = g(x) - g(a)$

Из леме $\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$ $\int_a^b f(x)g_1(x)\,dx = g_1(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)\,dy - g(a)\int_a^b f(x)\,dx = (g(b) - g(a))\int_\xi^b f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\left(\int_a^\xi f(x)\,dx + \int_\xi^b f(x)\,dx\right) + (g(b) - g(a))\int_\xi^b f(x)\,dx$$ одакле следи теорема

48. Валисова формула

* Израчунајмо интеграл $I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \, dx$ $(m \in \mathbb{N}_0)$

$$I_{m+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{m+1} x \sin x \, dx = -\int_0^{\pi/2} \sin^{m+1} x \, d\cos x = -\Big(\underbrace{\sin^{m+1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2}}_{0} - \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot d\sin^{m+1} x \Big)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot (m+1) \sin^m x \cos x \, dx = (m+1) \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x) \sin^m dx = (m+1)\cdot(I_m - I_{m+2})$$

Дакле, добили смо рекурентну формулу: $I_{m+2} = \frac{m+1}{m+2} I_m$

Лако се израчунавају: $I_0 = \pi/2$ и $I_1 = 1$, па се онда изводи:

$$I_{2n} = \frac{1\cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} \frac{\pi}{2}, \quad \text{тј.} \quad I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (*)$$

$$I_{2n+1} = \frac{2\cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}, \quad \text{тј.} \quad I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \quad (**)$$

Формула Валиса: $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$

Доказ: Пошто ако $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow 0 < \sin x < 1$, онда важи

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$$

Како је sin непрекидна функција на $[0, \frac{\pi}{2}]$, онда је и Риман интеграбилна, па коришћењем формула $(*)$ и $(**)$ и интеграљењем овог горе важи:

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \quad \Big/ \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}$$

$$\underbrace{\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1}}_{\alpha_n} < \frac{\pi}{2} < \underbrace{\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n}}_{\beta_n}, \quad \alpha_n < \frac{\pi}{2} < \beta_n$$

Имамо: $\beta_n - \alpha_n = \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{(2n)(2n+1)} = \frac{\alpha_n}{2n} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2n}$

Дакле: $\lim_{n\to\infty} (\beta_n - \alpha_n) = 0$, па $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = \frac{\pi}{2}$

(пошто $0 \le \frac{\pi}{2} - \alpha_n \le \beta_n - \alpha_n$) $\to 0$

Дакле: $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n} = \frac{\pi}{2}$

Када помножимо са два и коренујемо, добијамо формулу

смемо јер је непрекидно на $[0, \frac{\pi}{2}]$

49. Несвојствени интеграли. Кошијев критеријум. Случај позитивних функција.

НАПОМЕНА: Све наредне дефиниције, ставови **важе** и за $(a,b]$, $-\infty \leq a < b < +\infty$

деф. **Локално (Риман) интеграбилна функција** је ф-ја $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ за коју важи да је Риман интеграбилна на сваком $[\alpha,\beta]$ који је садржан у $[a,b)$

Јасно, свака непрекидна ф-ја $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ је лок. инт.

деф. Нека је $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ **лок. интеграбилна.** Ако постоји лимес $\lim\limits_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)\,dx$ називамо га **несвојствени интеграл** и означавамо $\int_a^b f(x)\,dx$.

Ако је тај лимес **коначан**, кажемо да несвојствени интеграл **конвергира**. У **супротном**, кажемо да интеграл **дивергира**, у ознаци $\int_a^b f(x)dx = +\infty$

пр. $f(x) = 1/\sqrt{x}$ на $(0,1)$ - дивергира ; $f(x) = 1/e^x$ на $(0,+\infty)$ - конвергира

Став: Нека је $f: [a,b)$ лок. инт. и нека $c \in (a,b)$. Тада важи:

$\int_a^b f(x)\,dx$ конвергира $\iff$ $\int_c^b f(x)\,dx$ конвергира (они су **еквиконвергентни**)

У том случају, важи једнакост: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Доказ: За $\forall \beta \in (c,b)$ важи $\int_a^\beta = \int_a^c + \int_c^\beta$ (Рим. интеграли)

Дакле $\lim\limits_{\beta \to b-0} \int_a^\beta$ постоји акко постоји $\int_c^\beta$, и још важи једнакост (/ $\lim\limits_{\beta \to b-0}$)

деф. Нека $c \in (a,b)$, $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ и $\int_a^c f(x)\,dx$ и $\int_c^b f(x)\,dx$ су конвергентни

Тада дефинишемо несвојствени интеграл: $\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{(a,b)} = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{(a,c]} + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{[c,b)}$

НАПОМЕНА: Дефиниција не зависи од избора тачке c (доказ помоћу става и ппс. $\exists c_1, c_2$)

Линеарност: Нека су $f, g: [a,b) \to \mathbb{R}$ и нека $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ конвергирају. Тада

1) $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

2) $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$

Доказ: 1) $\int_a^\beta [f+g]\,dx = \int_a^\beta f\,dx + \int_a^\beta g\,dx$

Пошто лимес ($\lim\limits_{\beta \to b-0}$) за десну страну постоји, онда постоји и за леву

2) аналогно

Смена променљиве: Нека $f \in C[a,b)$, $\varphi \in C^1[A,B]$ $(\varphi(A)=a,\ \varphi(B)=b)$, где је φ растућа и бијекција

Тада су $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_A^B f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ еквиконвергентни.

У случају да конв., $\int_a^b f(x)\,dx = \int_A^B f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$

Доказ: Користимо формулу за смену код Римановог инт: $\int_a^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_A^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Пошто је φ растућа бијекција $[A,B) \to [a,b)$ $\Rightarrow \lim_{\beta \to b-0} \varphi(\beta) = b$ $\Rightarrow$ можемо урадити $/ \lim_{\beta \to b-0}$

Парцијална интеграција: Нека $u, v \in C^1[a,b)$ и нека постоји коначан $\lim_{x \to b} u(x)v(x)$

Тада су $\int_a^b u'(x)v(x)dx$ и $\int_a^b u(x)v'(x)$ еквиконвергентни.

У случају да конв., $\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left(\lim_{x\to b} u(x)v(x) - u(a)v(a)\right) - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

Доказ: Користимо формулу за парц. инт. код Римановог интеграла и $\lim_{\beta \to b}$

* Надаље се бавимо **критеријумима конвергенције**

Кошијев критеријум: Нека је $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ лок. инт. Тада важи

Коши + Њ-Л

несвојст. инт. $\int_a^b f(x)dx$ **конвергира** $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \beta_0 \in (a,b)\quad \beta', \beta'' \in (\beta_0, b) \Rightarrow \left|\int_{\beta'}^{\beta''} f(x)dx\right| < \varepsilon$

Доказ: Нека је $F(\beta) = \int_a^\beta f(x)dx$, $\beta \in [a,b)$. Ако $\int$ конв. $\iff$ постоји коначан $\lim_{\beta\to b} F(\beta)$

По Кошијевом крит. за ф-је: лимес постоји $\iff \forall \varepsilon>0\ \exists \beta_0 \in (a,b)\ (\beta', \beta'' \in (\beta_0, b) \Rightarrow |F(\beta') - F(\beta'')| < \varepsilon$

По Њ-Л $F(\beta'') - F(\beta') = \int_{\beta'}^{\beta''} f(x)\,dx$, чиме је теорема доказана.

Теорема: Нека је $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ лок. инт. и $f(x) \geq 0$ за свако $x \in [a,b)$. Тада:

несвојст. инт. $\int_a^b f(x)dx$ **конвергира** $\iff \exists M\ \forall \beta \in [a,b) \Rightarrow \int_a^\beta f(x)dx \leq M$

Доказ: Нека је $F(\beta) = \int_a^\beta f(x)dx$. Докажимо да је она растућа.

$\beta_1, \beta_2 \in [a,b)$ и $\beta_1 \leq \beta_2$: $F(\beta_2) = \int_a^{\beta_2} f(x)dx = \int_a^{\beta_1} f(x)dx + \underbrace{\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)dx}_{\geq 0 \text{ (пошто је } f \text{ поз.)}} \geq \int_a^{\beta_1} f(x)dx = F(\beta_1)$

Пошто је F растућа на $[a,b)$ $\Rightarrow \lim_{\beta\to b} F(\beta) = \sup_{\beta\in[a,b)} F(\beta)$

Дакле, тај лимес је коначан акко је F ограничена одозго одакле следи и тврђење

НАПОМЕНА: $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \sup_{\beta \in [a,b)} \int_a^\beta f(x)dx$

(закључак)

(50.) Поредбени критеријум. Апсолутно конвергентни несвојствени интеграли.

(прво погледати апсолутну конв.)

Поредбени критеријум за конвергенцију: Нека су $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ лок. инт., $g(x) \geq 0$, $\int_a^b g(x)dx < +\infty$

Тада је сваки од наредних услова довољан за **конвергенцију**:

1) $\exists C \geq 0 \ \exists \beta_0 \in [a, b) \quad x \in (\beta_0, b) \Rightarrow |f(x)| \leq C \cdot g(x)$

2) $\limsup_{x \to b} \frac{|f(x)|}{g(x)} < +\infty \qquad (g(x) \neq 0)$

3) $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} < +\infty$

Доказ:

1) $\int_{\beta_0}^{\beta} |f(x)|dx \leq \int_{\beta_0}^{\beta} C \cdot g(x)dx = C \int_{\beta_0}^{\beta} g(x)dx \underset{g \geq 0}{\leq} C \int_{\beta_0}^{b} g(x)dx = M < +\infty \qquad (\beta_0 < x < b)$

По последњој теореми из претх. питања $\Rightarrow \int_{\beta_0}^{\beta} |f(x)|dx$ конвергира

По првој теореми из претх. питања $\Rightarrow \int_a^{\beta} |f(x)|dx$, па и $\int_a^b |f(x)|dx$ конв.

Пошто је $\int_a^b f(x)dx$ апсолутно конв. онда је и конвергентан

2) $L = \limsup_{x \to b} \frac{|f(x)|}{g(x)} < +\infty \Rightarrow \exists \beta_0 \in [a, b) \quad x \in (\beta_0, \beta) \Rightarrow \frac{|f(x)|}{g(x)} < L + 1 = C$

$\Rightarrow |f(x)| < C \cdot g(x)$

Тиме смо случај (2) свели на (1).

3) $|L| = \left| \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} \right| \underset{g \geq 0}{=} \lim_{x \to b} \frac{|f(x)|}{g(x)} = \limsup_{x \to b} \frac{|f(x)|}{g(x)}$

Знамо да је $|L| < +\infty$, па смо случај (3) свели на (2)

НАПОМЕНА: Ови критеријуми су довољни и за **апсолутну конвергенцију**

Поредбени критеријум за дивергенцију: Нека су $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ лок. инт., $g(x) \geq 0$, $\int_a^b g(x)dx = +\infty$

Тада је сваки од наредних услова довољан за **дивергенцију**:

1) $\exists C > 0 \ \exists \beta_0 \in [a, b) \quad x \in (\beta_0, b) \Rightarrow f(x) \geq C \cdot g(x)$

2) $\liminf_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} > 0$

3) $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} > 0$

Доказ:

1) $\int_{\beta_0}^{\beta} f(x)dx \geq \underbrace{C}_{>0} \underbrace{\int_{\beta_0}^{\beta} g(x)dx}_{\to +\infty} \Rightarrow \lim_{\beta \to b} \int_a^{\beta} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \to +\infty$

2) сведемо на (1)

3) сведемо на (2)

деф. Нека је $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ локално интеграбилна

Кажемо да $\int_a^b f(x)\,dx$ **апсолутно конвергира** ако је $\int_a^b |f(x)|\,dx$ конвергентан

НАПОМЕНЕ: 1° Ако је f лок. инт. $\Rightarrow$ $|f|$ је лок. инт. (због о.и.н)

2° Ако је $f\geq 0$, онда је апсолутна конв $\Leftrightarrow$ обична конв.

Теорема: Сваки **апсолутно конвергентни** несв. инт $\int_a f(x)\,dx$ **је конвергентан**

Доказ: Задајмо $\varepsilon>0$. Применимо Кошијев крит конв. на $\int_a^b |f(x)|\,dx$

Коши + о.и.н.

$\exists \beta_0\in[a,b)\ \forall \beta_1,\beta_2\in(\beta_0,b) \Rightarrow \int_{\beta_1}^{\beta_2}|f(x)|\,dx = \left|\int_{\beta_1}^{\beta_2}|f(x)|\,dx\right| < \varepsilon$

По о.и.н $\left|\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)\,dx\right| \leq \int_{\beta_1}^{\beta_2}|f(x)|\,dx < \varepsilon$

па по Кошијевом критеријуму тада $\int_a^b f(x)$ конвергира.

деф. Несвојствени интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ **условно конвергира** ако јесте конвергентан али није апсолутно конвергентан

(51.) Критеријуми Абела и Дирихлеа

* Ова два критеријума су корисна када интеграл није апсолутно конв., а хоћемо да покажемо да јесте конвергентан

Теорема: Нека су $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ функције за које важи:

1° f је непрекидна на $[a,b)$

2° g је монотона на $[a,b)$

3° g је непрекидно-диф. на $[a,b)$

(исти услови као за 2. теорему о ср. вр.)

Тада $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ конвергира ако важи један од ова два критеријума:

Абела: (a1) $\int_a^b f(x)\,dx$ конвергира

$\Downarrow$ конв

(a2) $g(x)$ је ограничена на $[a,b)$

Дирихле: (d1) $F(\xi) = \int_a^{\xi} f(x)\,dx$ $(\xi \in [a,b))$ је ограничена на $[a,b)$

$\Downarrow$ конв

(d2) $\lim\limits_{x\to b} g(x) = 0$

Доказ:
- (a2) $\Rightarrow$ $|g(x)| \le C$ $(a \le x < b)$
- (d1) $\Rightarrow$ $\left|\int_a^{\xi} f(x)\,dx\right| \le M$ $(a \le \xi < b)$

Због тога, за $\xi_1, \xi_2 \in [a,b)$ важи: $\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^{\xi_2} f(x)\,dx - \int_a^{\xi_1} f(x)\,dx\right| \le 2M$

- По другој т.о.с.в.: $\forall \beta_1, \beta_2 \in [a,b)\ \exists \xi \in (\beta_1, \beta_2)$ $\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)g(x)\,dx = g(\beta_1)\int_{\beta_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(\beta_2)\int_{\xi}^{\beta_2} f(x)\,dx$

тј. $\left|\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)g(x)\,dx\right| \le |g(\beta_1)| \cdot \left|\int_{\beta_1}^{\xi} f(x)\,dx\right| + |g(\beta_2)| \cdot \left|\int_{\xi}^{\beta_2} f(x)\,dx\right|$ $(*)$

Абела: Задајемо $\varepsilon > 0$

По (a1) $\overset{\text{Коши}}{\iff}$ $\exists \beta_0 \in [a,b)$ $u, v \in (\beta_0, b)$ $\Rightarrow$ $\left|\int_u^v f(x)\,dx\right| < \varepsilon$ $(**)$

(a2), $(*)$, $(**)$ $\Rightarrow$ $\forall \beta_1, \beta_2 \in (\beta_0, b)$ $\Rightarrow$ $\left|\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)g(x)\,dx\right| \le 2C \cdot \varepsilon$

што је по Кошију довољно за конв.

Дирихле: Задајемо $\varepsilon > 0$.

По (d2), $\exists \beta_0 \in [a,b)\ \forall x \in (\beta_0, b)$ $\Rightarrow$ $|g(x)| < \varepsilon$

(d1), $(*)$, $(**)$ $\Rightarrow$ $\forall \beta_1, \beta_2 \in (\beta_0, b)$ $\Rightarrow$ $\left|\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)g(x)\,dx\right| \le 4M \cdot \varepsilon$

што је по Кошију довољно за конв.

52. Редови. Кошијев критеријум. Редови са позитивним сабирцима.

* **деф.** **Ред** је израз $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где је a_n његов **општи члан**

(збир првих n из a_n) низ

деф. Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са комплексним члановима. **n-та парцијална сума** реда је $\sum_{k=1}^{n} a_k = s_n$

(лимес)

деф. Ако постоји коначан $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, онда је то **сума реда** и тај ред је **конвергентан**

Ако је $\underbrace{\text{лимес бесконачан}}$ или уопште не постоји, тада кажемо да је ред **дивергентан**

↳ (кажемо да је сума реда $\pm\infty$

НАПОМЕНА: Аналогно се дефинише и за $\sum_{n=N}^{\infty} a_n = a_N + a_{N+1} + \dots$ $(N \in \mathbb{N})$

Став: Редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ су **еквиконвергентни**.

У случају конвергенције, важи $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$

Доказ: Нека је $t_k = a_{N+1} + \dots + a_{N+k}$ парцијална сума реда $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$

$s_{N+k} = a_1 + a_2 + \dots + a_N + a_{N+1} + \dots + a_{N+k} = s_N + t_k$

Дакле, $\lim_{k\to\infty} s_{N+k}$ постоји $\Leftrightarrow$ $\lim_{k\to\infty} t_k$ постоји, па следи еквиконвергенција

У случ. конв: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} s_{N+k} = s_N + \lim_{n\to\infty} t_k = s_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$

деф. Када је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв, сума реда $a_{N+1} + a_{N+2} + \dots$ $(\lim_{n\to\infty} t_k)$ је **N-ти остатак реда** (r_N)

Дакле, по ставу: $s = s_N + r_N$

Последица: Ако је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **конвергентан** $\Rightarrow$ $\lim_{N\to\infty} r_N = 0$

* **Линеарност суме:** Нека су $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергентни редови и $\lambda \in \mathbb{C}$. Тада и $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n)$ конв и важи:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Доказ: **1)** $A_n = a_1 + \dots + a_n$, $B_n = b_1 + \dots + b_n$, $C_n = (a_1+b_1) + \dots + (a_n+b_n)$

Очигледно $C_n = A_n + B_n$, а знамо да A_n, B_n конв. $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty}(A_n + B_n)$

2) аналогно

Став: Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **конвергира**, онда је $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Доказ: $a_n = (a_1 + \dots + a_n) - (a_1 + \dots + a_{n-1}) = s_n - s_{n-1}$

Пошто је ред конв. $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Дакле: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = 0$

НАПОМЕНА: Обрнуто не важи (нпр. хармонијски ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$)

Асоцијативност: Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв. ред и $n_1<n_2<\dots$ растући низ природних бројева.

Тада **конвергира** и ред $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, где је $b_k = \sum_{n_{k-1}<j\le n_k} a_j$ $(n_0=0)$, и једнак је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

($\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ је исто што и $\underbrace{[a_1+\dots+a_{n_1}]}_{b_1} + \underbrace{[a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+\dots+a_{n_2}]}_{b_2} + \underbrace{[a_{n_2+1}+\dots+a_{n_3}]}_{b_3}+\dots$)

Доказ: s_n - парц. сума $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, t_k - парц. сума $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Знамо $\lim_{n\to\infty} s_n = s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а јасно $t_k = s_{n_k}$ (t_k је подниз од s_n) па следи тврђење

* **Пример:** $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \to$ **геометријски ред**, конвергира акко $|z|<1$ и једнак је $\frac{1}{1-z}$

* **Кошијев критеријум:** Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ако и само ако испуњава следећи критеријум:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in N\ \forall p\in N,\ n\ge n_0 \Rightarrow |a_{n+1}+\dots+a_{n+p}|<\varepsilon$$

Доказ: Ред конвергира $\Leftrightarrow$ низ парцијалних сума $s_n = a_1+\dots+a_n$ конвергира

$\Leftrightarrow$ s_n је Кошијев низ: $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N\ \forall m,n\ge n_0\ |s_m-s_n|<\varepsilon$

Када узмемо $m=n+p$, добијамо управо $|a_{n+1}+\dots+a_{n+p}|<\varepsilon$

НАПОМЕНА: Ово је еквивалентно услову $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N\ (p\ge 1 \Rightarrow |a_{n_0+1}+\dots+a_{n_0+p}|<\varepsilon)$

Теорема (т.о.м.и.о.н.): Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **ред са позитивним члановима**. Тада ред конвергира ако и само ако:

$$\exists M\ \forall n\in N \quad s_n\le M \quad (s_n = a_1+a_2+\dots+a_n)$$

Доказ: Низ s_n је растући ($s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\ge 0} \ge s_n$)

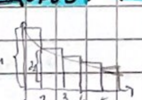
Дакле тај низ конвергира акко је ограничен одозго (по теор. о мон. и огр.)

Последица: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n\ge 0$, важи: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup_{n\ge 1} s_n$ (важи и за дивергентне)

Дакле ред са позитивним члановима или дивергира ка $+\infty$ или је конв.

Интегрални критеријум: Нека је $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **опадајући** низ **позитивних** бр., а $f:[1,+\infty)\to[0,+\infty)$ опадајућа ф-ја т.д. $\forall n\in N\ f(n)=a_n$. Тада $\sum a_n$ **конв.** $\Leftrightarrow$ $\int_1^{\infty} f(x)dx$ **конв.**

Доказ: ($\Rightarrow$) Нека је $s=\sum_{n=1}^{\infty} a_n<+\infty$. Тада $\forall n$



$$\int_1^{n+1} f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} \int_j^{j+1} f(x)dx \le \sum_{j=1}^{n}\int_j^{j+1} a_j\, dx = \sum_{j=1}^{n} a_j = s_n \le s$$

Дакле $\forall \beta>1\ \int_1^{\beta} f(x)dx\le s$, па следи конверг. интеграла (случај позитив.)

($\Leftarrow$) Нека је $I=\int_1^{+\infty} f(x)dx<+\infty$

$$s_{n+1} = a_1+(a_2+\dots+a_{n+1}) \le a_1+\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\dots+\int_n^{n+1} f(x)dx = a_1+\int_1^{n+1}f(x)dx \le a_1+I$$

па конв. следи из претх. теореме

53. Апсолутно конвергентни редови. Критеријуми поређења.

деф. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ је **апсолутно конвергентан** ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ конвергира

Теорема: Сваки апсолутно конвергентан ред је **конвергентан**

Доказ: Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ апсолутно конв. ред, дакле $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

Задајмо $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon$

Знамо $|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon$, па је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Кошијев ред

деф. Ред који јесте конвергентан, а није апсолутно конв. називамо **условно конвергентан**

Став: Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са комплексним члановима, а $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ред са позитивним члановима

1) Ако постоји $0 \leq C < +\infty$ и $n_0 \in \mathbb{N}$ ткд. $\forall n \geq n_0$ $|a_n| \leq C \cdot b_n$ и ако $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **конвергира** онда и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **конвергира**, и то апсолутно

2) Ако постоји $0 < C < +\infty$ и $n_0 \in \mathbb{N}$ ткд. $\forall n \geq n_0$ $a_n \geq C \cdot b_n$ и ако $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **дивергира** онда и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **дивергира**

Доказ:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} C \cdot b_n = C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$, дакле $\exists M$ $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|}_{\geq 0} < M$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} C \cdot b_n = C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$

Став: Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са комплексним члановима и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ред такав да $b_n > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

(К) Нека $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **конвергира**. Ако је $L = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} < +\infty$, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **апс. конв.**

Специјално, ако постоји $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n}$, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира

(D) Нека $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **дивергира** и $a_n \geq 0$. Ако $l = \liminf \frac{a_n}{b_n} > 0$, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **див.**

Специјално, ако постоји $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира

Доказ: (К) Нека је $L < +\infty$. Тада $\exists n_0\ \forall n \geq n_0$ $\frac{|a_n|}{b_n} < L+1 = C \iff |a_n| < C \cdot b_n$
па се своди на претходни став

(D) Нека је $C = \frac{l}{2}$, тада $0 < C < l$

Знамо да $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$ $\frac{a_n}{b_n} > C$ $\Rightarrow a_n > C \cdot b_n$, па опет претх. став
(лок. своj.)

Теорема: Нека су $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ апсолутно конвергентни редови у $\mathbb{C}$.

Тада је и њихов производ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ апс. конв. и важи: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$

Доказ: Означимо $\sum_{k=0}^{n} a_k = \alpha_n$, $\sum_{k=0}^{n} b_k = \beta_n$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$; $A = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, $B = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$

- Фиксирајмо $\ell \in \mathbb{N}$. За довољно велике m, n важи да се сви елементи

$c_0, c_1, c_2, \dots, c_\ell$ налазе у „правоугаонику" елемената $a_j b_k$ ($j \in [0,m]$, $k \in [0,n]$) (одговарајући), па

$$\sum_{i=0}^{\ell} |c_i| \leq \sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq n}} |a_j b_k| = \left(\sum_{j=0}^{j} |a_j|\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{k} |b_k|\right) \leq A \cdot B$$

, па следи апс. конв.

- Нека је $\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$

54. Критеријуми Абела, Дирихлеа. Критеријуми Даламбера и Кошија

Кошијев „n-ти корен критеријум": Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са компл. чл. и $q = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

1) $q \in [0,1)$, тада ред апсолутно конвергира

2) $q \in (1,+\infty]$, тада ред дивергира

Доказ: 1) Нека $q \in [0,1)$ и изаберимо $q_0 \in (q,1)$, дакле $0 \le q < q_0 < 1$

Тада $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0\ \sqrt[n]{|a_n|} < q_0 \Rightarrow |a_n| < q_0^n$

Пошто знамо да ред $\sum_{n=0}^{\infty} q_0^n$ конв. (за $q<1$) $\overset{\text{поред}}{\Rightarrow} |a_n|$ конв. $\Rightarrow a_n$ апс. конв.

2) Нека је $q > 1$ и изаберимо $q_0 \in (1,q)$, дакле $1 < q_0 < q \le +\infty$

Тада постоји бесконачно $n \in \mathbb{N}$ т.д. $\sqrt[n]{|a_n|} \ge q_0$, па је $|a_n| \ge 1$ за беск. n-ова

Дакле $a_n \not\to 0$, па пошто општи члан не конв. ка 0 $\Rightarrow$ ред дивергира

НАПОМЕНА: Када је $q=1$, овај критеријум није од користи

Даламберов критеријум: Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са строго позитивним члановима

1) Ако $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \exists q \in [0,1)\ \forall n \ge n_0\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$, онда ред конвергира

2) Ако $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \exists q \in (1,+\infty)\ \forall n \ge n_0\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge q$, онда ред дивергира

Специјално, ако је $q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, важи 1) или 2) у зависности од q

Доказ: 1) Знамо $a_{n+1} \le q \cdot a_n$ (за свако $n \ge n_0$ и $q \in [0,1)$)

Следи $a_{n_0+p} \le q \cdot a_{n_0+p-1} \le q \cdot (q \cdot a_{n_0+p-2}) \le \dots \le q^p \cdot \underbrace{a_{n_0}}_{const}$

Знамо да за $q<1$ ред $\sum_{p=1}^{\infty} q^p$ конв. $\overset{\text{поред.}}{\Longrightarrow} \sum_{p=1}^{\infty} a_{n_0+p}$ конв. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв.

2) Знамо $a_{n+1} \ge q \cdot a_n$ (за свако $n \ge n_0$ и $q \ge 1$)

Следи $a_{n_0+p} \underset{\text{аналогно}}{\ge} q^p \cdot a_{n_0} \underset{q\ge 1}{\ge} a_{n_0} \underset{\text{поз. чл.}}{>} 0 \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира

Специјално $q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ и нека је $q > 1$ (аналогно за $q<1$)

Изаберимо $q_0 \in (1,q)$. Тада $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge q_0 > 1$ за свако $n \ge n_0$ (n_0 зависи од q_0)

па се своди на 2)

НАПОМЕНА: $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Абелова сумациона формула: Нека су $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{C}$, $A_k=a_1+\dots+a_k$ $(1\le k\le n)$ и $A_0=0$

Тада: $$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=(A_nb_n-\underbrace{A_0b_1}_{0})+\sum_{k=1}^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1})$$

Доказ: $a_k=A_k-A_{k-1}$

$$a_1b_1+\dots+a_nb_n=(A_1-A_0)b_1+\dots+(A_n-A_{n-1})b_n=A_1(b_1-b_2)+\dots+A_{n-1}(b_{n-1}-b_n)-A_0b_1+A_nb_n$$

Последица: $$\sum_{k=p}^{q}a_kb_k=(A_q-A_{p-1})b_q+\sum_{k=p}^{q-1}(A_k-A_{p-1})(b_k-b_{k+1})$$
(аналоган доказ)

Теорема: Нека је дат ред $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$, где $a_n\in\mathbb{C}$ и $b_n\ge 0$. Ред конвергира ако важи бар један:

Абел:
(A1) b_n је опадајући
(A2) Ред $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ конвергира

Дирихле:
(D1) b_n је опадајући тако да $b_n\to 0$
(D2) Низ $A_n=a_1+\dots+a_n$ је ограничен

Доказ: Идеја је да се покаже да је ред $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ Кошијев (испуњава Кошијев услов)

(A1) $\Rightarrow$ $|b_n|=b_n\le b_1=M$
(D2) $\Rightarrow$ $|A_n|<C$

Из претх. формуле: $$\left|\sum_{k=p}^{q}a_kb_k\right|\le|A_q-A_{p-1}|b_q+\sum_{k=p}^{q-1}|A_k-A_{p-1}|(b_k-b_{k+1})$$
Задајмо $\varepsilon>0$

Абел: (A2) $\Rightarrow$ $\exists n_0\ \forall m,n\ge n_0\ |A_m-A_n|<\varepsilon$

Дакле: $$\left|\sum_{k=p}^{q}a_kb_k\right|\le\varepsilon\cdot b_q+\varepsilon\sum_{k=p}^{q-1}(b_k-b_{k+1})=\varepsilon\cdot b_p\le\varepsilon\cdot M$$

Дирихле: (D1) $\Rightarrow$ $\exists n_0\ \forall n\ge n_0\ 0\le b_n<\varepsilon$. (D2) $\Rightarrow$ $|A_m-A_n|<2C$

Дакле: $$\left|\sum_{k=p}^{q}a_kb_k\right|\le 2C\varepsilon+2C\sum_{k=p}^{q-1}(b_k-b_{k+1})=2C(\varepsilon+b_p-b_q)\le 4C\varepsilon$$

Лајбницов критеријум: Нека је c_n опадајући низ, $c_n\to 0$. Тада $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ конвергира
(знакопроменљиви редови)

Доказ: Применимо Дирихлеов принцип на $a_n=(-1)^{n-1}$ и $b_n=c_n$

55. Комутативна конвергенција. Двојни редови.

деф. За ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и коначан скуп $J \subset N$ уводимо $s_J = \sum_{j \in J} a_j$ ($J \in \mathcal{F}(N)$ - кон. подскупови)

Став: Ако је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са **поз. члан.**, тада $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup_{J \in \mathcal{F}(N)} s_J$

Доказ: $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$; $S = \sup s_J$. Доказујемо $s \overset{?}{=} S$

Јасно је да је $s \leq S$.

Са друге стране, нека је $\max J = N$. Дакле $J \subset \{1, 2, \dots, N\}$

пошто $a_n \geq 0 \Rightarrow s_J \leq a_1 + \dots + a_N = s_N \leq s$ за $\forall J \Rightarrow S \leq s$

деф. Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са комплексним члановима и нека је $\pi: N \to N$ бијекција.

Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ је **π-пермутација реда**

Ако за ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **све** његове пермутације конв. ка истој вредности, он је **комутативно конв.**

Став: Сваки **конв. ред** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ са **поз. чл** је и **комутативно конв.** (тј $\forall \pi \; \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$)

Доказ: По претх. ставу $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \sup_{J \in \mathcal{F}(N)} t_J$ ($t_J = \sum_{j \in J} a_{\pi(j)}$)

Јасно $\sum_{j \in J} a_{\pi(j)} = \sum_{k \in \pi(J)} a_k \Rightarrow t_J = s_{\pi(J)}$. Пошто је π - бij. $\Rightarrow J = \pi(J)$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \sup_J t_J = \sup_J s_{\pi(J)} = \sup_J s_J = \sum_n a_n$

НАПОМЕНА: Важи и за дивергентне редове

Теорема: Нека је $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **апсолутно конв.** Тада $\forall \varphi: N_0 \xrightarrow[\text{на}]{1-1} N_0$ ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ **конв.** и $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Доказ: Нека је $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Зададимо $\varepsilon > 0$. $\exists m \; \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$

Нека је $F_\varepsilon = \varphi^{-1}[\{0, 1, 2, \dots, m\}]$ и нека је $n_0 = \max F_\varepsilon$

Тада $\forall n \geq n_0 \; F_\varepsilon \subset \{0, 1, \dots, n\} \Rightarrow \varphi[\{0, 1, \dots, n\}] \supset \varphi[F_\varepsilon] = \{0, 1, \dots, m\}$

Дакле за $n \geq n_0$:
$$\left|\sum_{j=0}^{n} a_{\varphi(j)} - s\right| = \left|\sum_{j \in F_\varepsilon} a_{\varphi(j)} - s + \sum_{j \in \{0, \dots, n\} \setminus F_\varepsilon} a_{\varphi(j)}\right|$$
$$= \left|\sum_{k \in \varphi(F_\varepsilon)} a_k - s + \sum_{j \in \{0, \dots, n\} \setminus F_\varepsilon} a_{\varphi(j)}\right|$$
$$\leq \left|\sum_{k=0}^{m} a_k - s\right| + \sum_{j \in \{0, \dots, n\} \setminus F_\varepsilon} |a_{\varphi(j)}|$$
$$= \left|\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k\right| + \sum_{k \in \varphi[\{0, \dots, n\}] \setminus \{0, \dots, m\}} |a_k|$$
$$\leq 2 \cdot \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| < 2\varepsilon$$

НАПОМЕНА: Нови ред је такође апс. конв.

деф. **Двојни ред** су редови који зависе од два индекса: $\sum\limits_{\substack{m=1\\n=1}}^{\infty} a_{m,n}$.

Аналогно се дефинише и **конвергенција двојног реда**

* Ако дефинишемо да је за $\forall m$ „ред по врстама" израз $\sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m < +\infty$, где је $A_m = \sum\limits_{n=1} a_{m,n}$

$\forall n$ „ред по колонама" израз $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A^n < +\infty$, где је $A^n = \sum\limits_{m=1} a_{m,n}$

не мора да значи да су ти изрази еквиконвергентни. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix}$

Међутим, овако нешто се не може десити код апсолутно конв. двојних редова

Јасно, тада он и комутативно конвергира

Теорема: Нека је $\sum a_{m,n}$ **апс. конв.** Тада: $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m,n}\right) \overset{(1)}{=} \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n} \overset{(2)}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{m,n}\right)$

Доказ: Знамо $\sum\limits_{m,n} |a_{m,n}| < +\infty$

Јасно, за свако m $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| \leq \sum\limits_{m,n} |a_{m,n}| < +\infty$
за свако n $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |a_{m,n}| \leq \sum\limits_{m,n} |a_{m,n}| < +\infty$ $\Bigg\} \Rightarrow$ постоје A_m, A^n $(\forall m,n)$

Доказаћемо (1), аналогно се доказује и (2)

Напомена: сабирке „ређамо" ткд. n^2-парц. сума буде баш $n \times n$ матрица у горњем левом ћошку

(компликован начин да „наместимо" на Кошија)

Задајемо $\varepsilon > 0$. $\exists N$ ткд. сума свих ван $N \times N$ мања од ε, тј.

$$\left|\sum_{m,n}^{\infty} a_{m,n} - \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} a_{m,n}\right| < \varepsilon$$

56. Бесконачни производи

(све скоро исто као код редова)

деф. Нека је p_n низ из $\mathbb{C}$. **Бесконачни производ** је израз $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 p_2 p_3 \dots$

p_n је његов **општи члан**

деф. Број $P_n = p_1 p_2 \dots p_n$ је **n-ти парцијални производ**

деф. Беск. производ **конвергира** ако постоји $\lim_{n\to\infty} P_n = P$ и $P \neq 0$

Ако тај лимес не постоји или је једнак 0, тада беск. произ. **дивергира**

НАПОМЕНА: Аналогно се дефинише и за $\prod_{n=m}^{\infty} p_n$

Став: Нека је p_n низ из $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Тада су $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\prod_{n=N+1}^{\infty} p_n$ **еквиконвергентни** за $\forall N \in \mathbb{N}$

У случају конв. важи: $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P_N \prod_{n=N+1}^{\infty} p_n$

Доказ: Означимо са Q_j j-ти парц. произ. од $\prod_{n=N+1}^{\infty} p_n$, тј. $Q_j = p_{N+1} p_{N+2} \dots p_{N+j}$

Пошто је $P_{N+j} = P_N Q_j$ и $P_N \neq 0$ $\Rightarrow$ P_n, Q_n еквиконв. а једнакост добијемо преласком на лимесе

деф. Ако $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ конв., онда је $R_N = \prod_{n=N+1}^{\infty} p_n$ **N-ти остатак беск. пр.**

Дакле, по ставу $P = P_N \cdot R_N$

Последица: Ако је $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ **конвергентан** $\Rightarrow \lim_{N\to\infty} R_N = 1$

НАПОМЕНА: Због последице, има смисла писати $p_n = 1 + a_n$. Услов конв. $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ је $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Став: Нека су $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P$, $\prod_{n=1}^{\infty} q_n = Q$ **конв.** беск. пр. Тада су и $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n$ и $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ конв. и

Такође, важи: $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n = P \cdot Q$ и $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \frac{1}{P}$

Доказ: Нека су U_n, V_n редом парцијални производи $\prod p_n q_n$ и $\prod \frac{1}{p_n}$

Јасно $U_n = P_n Q_n$ и $V_n = \frac{1}{P_n}$, па следи еквиконв., а једнакост добијамо преласком на лимесе

* **Теорема:** Беск. пр. $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$ су **еквиконв.** када је $a_n > -1$ $\forall n \geq 1$

У случају конвергенције важи: $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)\right)$

Такође, $\prod(1+a_n)$ **див. ка нули** $\Leftrightarrow$ $\sum \log(1+a_n)$ **див. ка** $-\infty$

Доказ: P_n - парц. произ. $\prod(1+a_n)$ и S_n - парц. сума $\sum \log(1+a_n)$

Јасно $P_n = \exp S_n$, тј. $S_n = \log P_n$

Пошто су exp и log непрекидне $\Rightarrow$ еквиконв., једнакост: прелазак на lim

Став: Нека је $a_n \in (-1,0]$ за свако n или пак $a_n \geq 0$ за свако n.

Тада $\prod(1+a_n)$ **конв.** $\Leftrightarrow$ $\sum a_n$ **конв.**

Доказ: Ако $a_n \not\to 0$ тада ни ред ни беск. пр. нису конверг. Зато нека $a_n \to 0$.

Без обзира „у коју групу a_n спада", јасно је да је $\sum \log(1+a_n)$ конст. знака

Пошто $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log(1+a_n)}{a_n} = 1 \underset{\text{поред. крит.}}{\Rightarrow} \sum \log(1+a_n)$ и $\sum a_n$ су еквиконв.

За крај остаје само да применимо претходну теорему

Став: Нека је $\sum a_n$ **ред са строго поз. сабирцима** и s_n низ његових парц. сума

Тада су редови $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ **еквиконвергентни**

Доказ: Приметимо да за $n \geq 2$ важи $\frac{a_n}{s_n} < 1$, тј. $-\frac{a_n}{s_n} > -1$

По претх. ставу $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ је еквиконв. $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{s_n}\right)$

чији је $(n-1)$-ви парц. произ. $\left(1-\frac{a_2}{a_1+a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{a_n}{a_1+a_2+\dots+a_n}\right) = \frac{a_1}{s_n}$

Дакле, тај произв. је конв. акко $\lim s_n < +\infty$ $\Leftrightarrow$ $\sum a_n$ конв.

* **деф.** Беск. пр. $\prod(1+a_n)$, где $a_n \neq 1$, **апсолутно конв.** ако ред $\sum |a_n|$ конвергира

Лема: Нека $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ и $P_n = \prod\limits_{j=1}^{n}(1+a_j)$, $P_n^* = \prod\limits_{j=1}^{n}(1+|a_j|)$. Тада важи:

1) $1 \leq P_n^* \leq \exp(|a_1| + \dots + |a_n|)$
2) $|P_n - 1| \leq P_n^* - 1$

Доказ: 1) Познато је да је $1+x \leq e^x$, па $1 \leq 1+|a_j| \leq e^{|a_j|}$. Множењем за све $j \leq n$, добијамо 1)

2) $n=1$: $1+a_j \leq 1+|a_j|$

$n \Rightarrow n+1$: $P_{n+1} - 1 = P_n(1+a_{n+1}) - 1 = P_n - 1 + a_{n+1}P_n$

Дакле $|P_{n+1} - 1| \leq |P_n - 1| + |a_{n+1}| \cdot |P_n| \leq P_n^* - 1 + |a_{n+1}| P_n^* = P_{n+1}^* - 1$

Теорема: Сваки **апс. конв. беск. пр.** $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ је **конвергентан** (и то комутативно)

Доказ:

?