[AH2] Предаване 9.10.2026.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)} \qquad \text{st } P_1 < \text{st } Q$$

$$Q(x) = A(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_p)^{k_p}$$

$$\cdot (x^2+b_1x+c_1)^{l_1}\cdots(x^2+b_q+c_q)^{l_q}$$

$$\uparrow: \frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_{1,1}}{x-a_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1,k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}$$

$$+ \ldots + \frac{A_{p,1}}{x-a_p} + \ldots + \frac{A_{p,k_p}}{(x-a_p)^{k_p}}$$

$$+ \frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{x^2+b_1x+c_1} + \ldots + \frac{B_{1,l_1}+C_{1,l_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}} + \ldots$$

$$+ \frac{B_{q,1}x+C_{q,1}}{} + \ldots + B_{q,l_q}+C_{q,l_q}$$

Лема 1: Нека је a нула реда k полинома $Q(x)$.
Тада постоје константе $A \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N}$ и полиноми $S(x)$ и $Q_1(x)$ т.д.

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{S(x)}{(x-a)^{k-s}Q_1(x)}$$

Доказ: $\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-a)^k}$

$= \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x) - A\,Q_1(x)}{\underbrace{(x-a)^k Q_1(x)}_{Q(x)}}$

Ако изаберемо $A = \frac{P_1(a)}{Q(a)}$, онда

је a нула реда 1 полинома

$P_1(x) - A\,Q_1(x)$

(јер $P_1(a) - A\,Q_1(a) = 0$)

па је $\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{\frac{P_1(x) - A\,Q_1(x)}{(x-a)^1}}{(x-a)^{k-1} Q_1(x)}$

$= \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{S(x)}{(x-a)^{k-1} Q_1(x)}$

Лема 2: Нека $(x^2+bx+c)^l$ дели полином $Q(x)$, $b^2-4c<0$, $\operatorname{st} P_1 < \operatorname{st} Q$

Тада постоје константе

$A, B \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N}$ и полиноми

$S(x)$ и $Q_1(x)$ т.д.

$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^l} + \frac{S(x)}{(x^2+bx+c)^{l-1} Q_1(x)}$

Доказ следи

Доказ теореме Нека је $Q(x)=A(x-a_1)^{k_1}$

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a_1)^{k_1}} + \underbrace{\frac{S(x)}{(x-a_1)^{k-1}Q_1(x)}}_{\text{прим. }\sqrt{1}}$$

$\sqrt{1}$

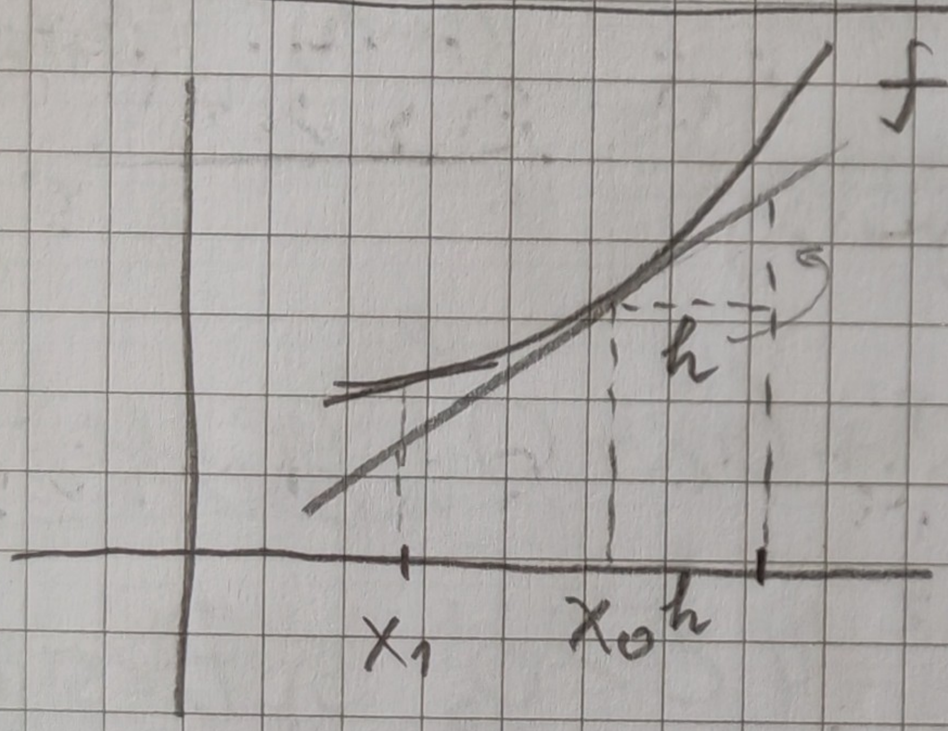
a_1 је нула реда k_1 a_1 је нула реда k_1-1

$$= \frac{A}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_1}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \frac{S_1}{(x-a_1)^{k_1-1-A_1}Q_2(x)}$$

$\sqrt{1}$

$$= \cdot\ \cdot\ \cdot\ =$$

док не добијемо 0



$df(x_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ линеарно

$df(x_0)(h) = f'(x_0)\cdot h$

$f_1(x) = x$

$df_1(x_0)(h) = h,$

$df_1(x_0)$ идентичко пресл.

$$\underbrace{df(x_0)}\underbrace{(h)} = \underbrace{f'(x_0)}\ \underbrace{df_1(x_0)}(h) \quad \forall h$$

$$df(x_0) = f'(x_0)\, df_1(x_0)$$

$$df(x_0) = f'(x_0)\, dx(x_0) \quad \forall x_0$$

$\Downarrow$

$$df = f'\, dx$$

$$df_1(x_0) = dx(x_0)$$

Интеграли типа

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \qquad (c,d)\neq(0,0)$$

$$ad-bc\neq 0$$

↑

рационална функција

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad / ^n \qquad t^n=\frac{ax+b}{cx+d}$$

$$cxt^n+dt^n=ax+b$$

$$x(ct^n-a)=b-dt^n$$

$$x=\frac{b-dt^n}{ct^n-a},$$

$$dx=\frac{-dnt^{n-1}(ct^n-a)-(b-dt^n)cnt^{n-1}}{(ct^n-a)^2}dt$$

Интеграл типа $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$

1) Прва Ојлерова смена $a>0$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,x\pm t$$

2) Друга Ојлерова смена $c>0$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$$

3) Трећа Ојлерова смена $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

$\Rightarrow \cos x = t$

$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow \sin x = t$

$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \Rightarrow tg\,x = t$

$$dx = \frac{dt}{1-t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow$$

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1-t^2}$$

Универсальная замена: $tg\frac{x}{2} = t$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1+\sin^2(x)}{\sin^3(x)+\sin^2(x)}$$

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{1+\sin^2 x}{-\sin^3(x)+\sin^2 x}$$

или

$R(\sin x, \ldots$

$\sin^5 x$

$R(-\sin x, \ldots$

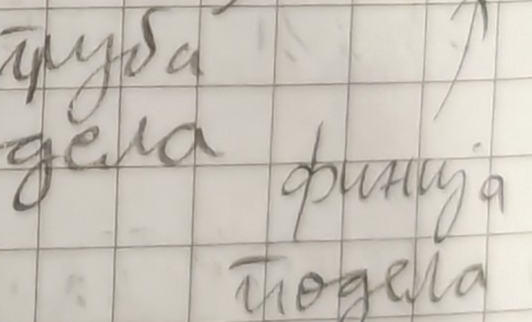
$-\sin^3(x)-\sin^5(x)$

Одређени интеграли

Нека је $[a, b]$ сегмент.
Коначан скуп тачака
$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ такав да је
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$



називамо поделом сегмента $[a, b]$ и означавамо са P.
На скупу свих подела P уводимо поларитарно уређење $<$ $P_1 < P_2$



За сваку поделу P можемо дефинисати

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$
и дужине (параметар) поделе

$$\chi(P) = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$$

Нека имамо неку поделу P сегмента $[a,b]$.

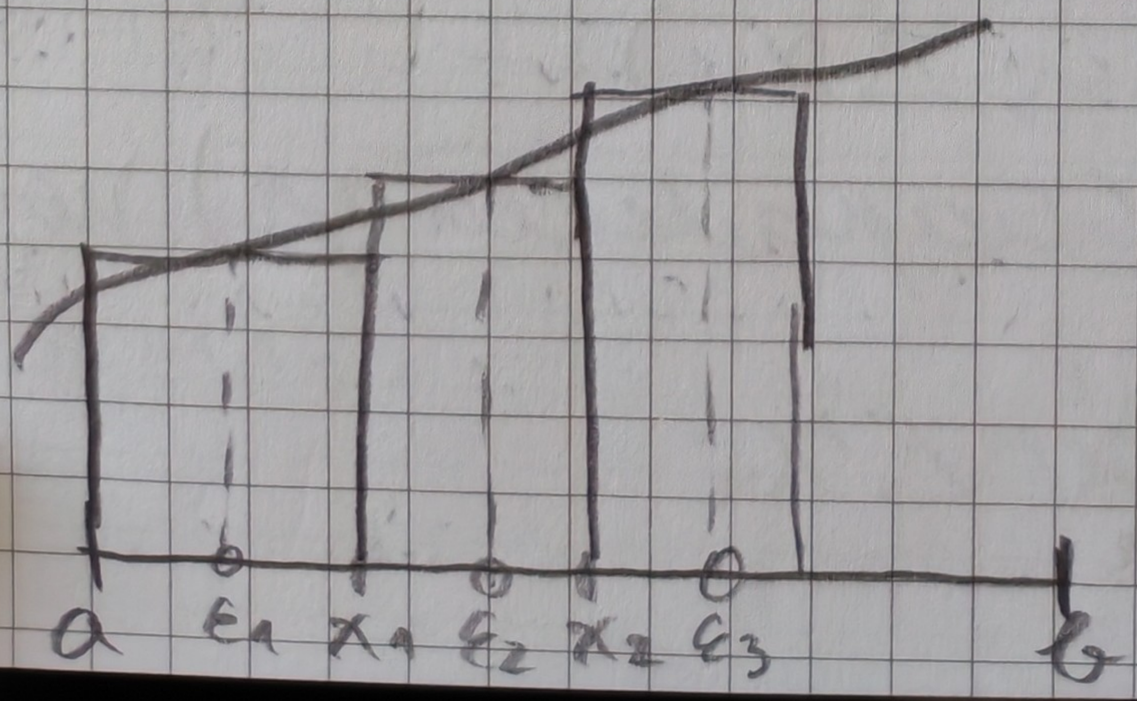
Изаберимо тачке $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ тако да свака тачка припада сегменту $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

На тај начин добијамо поделу P са изабраним тачкама ξ у ознаци (P, ξ)

Дефиниција Нека је $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ и (P, ξ) је нека подела сегмента $[a,b]$ са изабраним тачкама ξ.

Збир $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$ (Риманов) називамо интегралном сумом ф-је f која одговара подели (P, ξ)

(у ознаци $\delta(f, P, \xi)$)



Лева интегрална сума

$\xi_i = x_{i-1}$, ш.ј. $S_2(f,P,\xi) = \sum_{i=0}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$

Десна

$\xi_i = x_i$ $\quad f(x_i)\Delta x_i$

Дефиниција Определен интеграл

За ф-ја $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ кажеме да је интеграбилна (у Риманов смисл) ако постоји коначна гранична вр.

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \delta(f,P,\xi) = I$$

У том случају записатељмо

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Подсетник А1: $\lim_{x\to a} f(x) = b$

$$\overset{\text{деф.}}{\iff} (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in D_f)\ (0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon)$$

Задаће $I = \lim_{\lambda(P)\to 0} \delta(f,P,\xi) \overset{(=)}{\iff} (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)$

$(\forall (P,\xi))$ сегмента $[a,b]$ $(\lambda(P)<\delta \Rightarrow |\delta(f,P,\xi)-I|<\varepsilon)$

Пример $f(x) = c$ на $[a, b]$



Нека је (P, ξ) произвољна подела са изабраним тачкама.

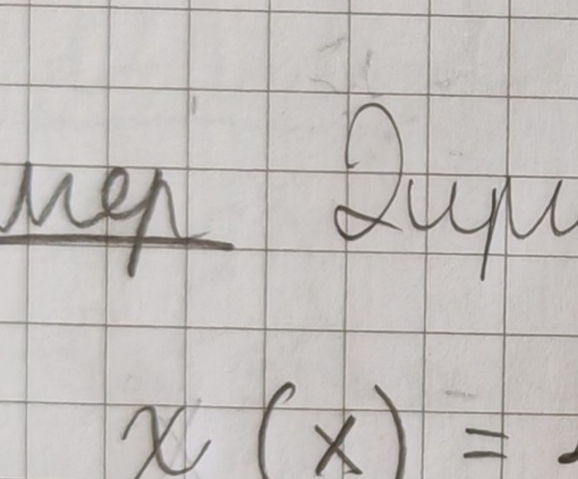
$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \overset{c}{=} c\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = c(b-a)$$

Дакле: $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

Пример Дирихлеова ф-ја на $[0, 1]$

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \in \mathbb{I} \cap [0,1] \end{cases};$$

$$\chi : [0,1] \longrightarrow \{0, 1\}$$



Нека је P произвољна подела сегмента $[0, 1]$

Можемо изабрати тачке $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ т.д. је $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и $\xi_i \in \mathbb{R}$

одакле је $S(x, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \chi(\xi_i) \Delta x_i = 1$

Можемо изабрати тачке $\xi_1', \xi_2', \dots, \xi_n'$
т.д. $\xi_i' \in [x_{i-1}, x_i]$ и $\xi_i' \in I$
одакле је $S(x, P, \xi') = \sum_{i=1}^{n} \chi(\xi_i) \Delta x_i = 0$

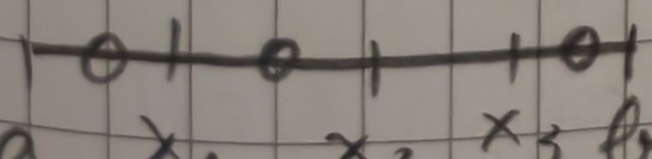
Одавде не постоји $\lim_{\lambda(P) \to 0} S(x, P, \xi)$

Скуп свих интегрибилних ф-ја на $[a, b]$ означићемо са $R[a, b]$.

Став Ако је $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрибилна онда је f ограничена на $[a, b]$.

Доказ $p \Rightarrow q \quad (\equiv) \quad \neg q \Rightarrow \neg p$

Претпоставимо да f није ограничена на $[a, b]$. Нека је $M > 0$ произв. број. Нека је P произв. подела сегмента $[a, b]$



Постоји неки сегмент $[x_{j-1}, x_j]$ на којем f није ограничена.

Изберимо произволните точке

$\xi_1 \in [x_0, x_1], \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n$

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + f(\xi_j)\Delta x_j$$

Можемо изабрати ξ_j т.д.

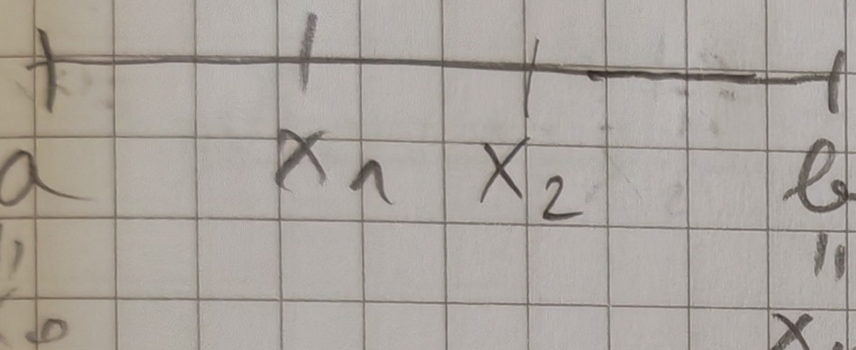
$$|f(\xi_j)\Delta x_j| > M + \left|\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \quad (*)$$

$|\Sigma + f| + |\Sigma|$

За произвољно M можемо наћи поделу са произв. тачком тако да је ајс. вр. инт. суме већа од M.

Дарбуові суми

Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ обмежена.
Нека је P произвольна подела сегмента $[a,b]$



Позначимо $\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ и $\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ $\forall i=1,\dots,n$

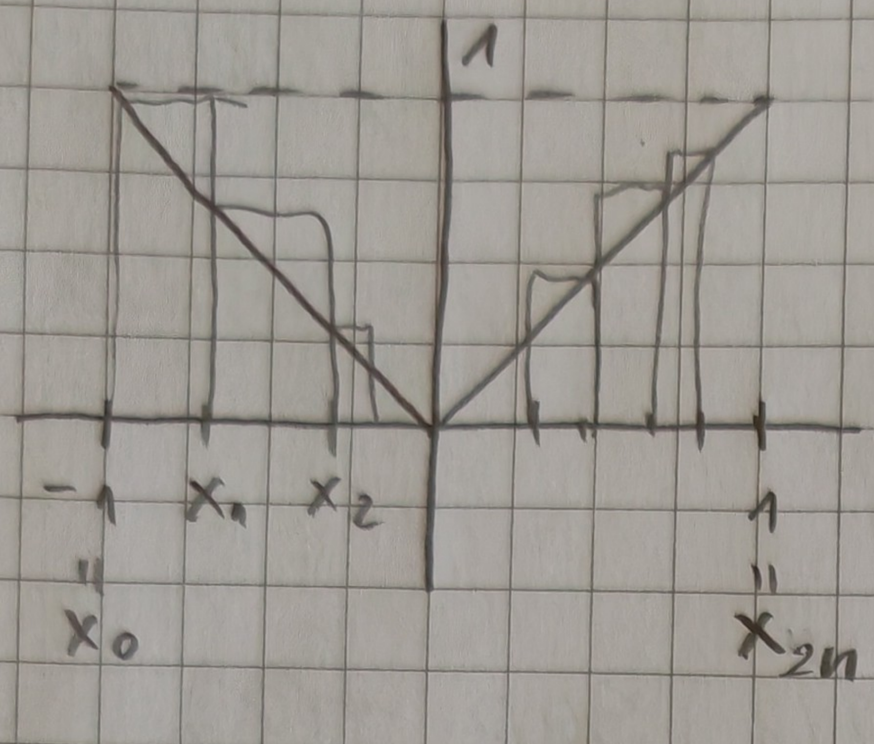
Горња Дарбуова сума ф-је f за поделу P је $S(f,P)=\sum\limits_{i=1}^{n} \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\,\Delta x_i$

а доња Дарбуова сума је

$$s(f,P)=\sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\,\Delta x_i$$

Важи $s(f,P)\le S(f,P)$

Пример $f(x) = |x|$ на $[-1, 1]$



Поделим сегмент $[-1, 1]$ на $2n$ одинаковых отрезка.

$x_0 = -1, x_1 = -1 + \frac{1}{n}, x_2 = -1 + \frac{2}{n}, \ldots$

$, x_i = -1 + \frac{i}{n}, \ldots, x_{2n} = 1$

$\Delta x_i = \frac{1}{n}$

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{2n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot \Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=n}^{2n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot \Delta x_i$$

$\Delta x_i = \frac{1}{n}$; $\Delta x_i = \frac{1}{n}$

$\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(x_{i-1})$; $\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(x_i)$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \frac{1}{n} + \sum_{i=n}^{2n} f(x_i) \cdot \frac{1}{n}$$

$x_{i-1} = -1 + \frac{i-1}{n}$; $x_i = -1 + \frac{i}{n}$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} -x_{i-1} + \frac{1}{n} \sum_{i=n}^{2n} x_i$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} -\left(-1 + \frac{i-1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{2n} \left(-1 + \frac{i}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) + \sum_{i=n+1}^{2n} \left(-1 + \frac{i}{n}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(n - \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} - n + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{i}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(-1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{(n-1)n}{2} + \frac{1}{n}(n+1+n+2+\ldots+2n)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(-1 - \frac{n-1}{2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2}(3n+1)\right)$$

$$(n+1)+\ldots+2n = \frac{n}{2}[n+1+2n] = \frac{(3n+1)n}{2}$$

$$a_1+\ldots+a_n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$$
$$= \frac{n}{2}[a_1+a_n]$$

$$= \frac{1}{n}\left(-1 + \frac{-n+1+3n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{n}(-1+n) = 1 - \frac{1}{n}$$

Остава да се докаже $1+\frac{1}{n}$

$$s(f, P) = 1 - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n} \cdot \frac{(n-1)n}{2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2}(3n+1)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[-\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}(3n+1)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}\right] = 1 + \frac{1}{n}$$