[A+2] 1.10.2026.

Примитивна ф-ја и неодредени интеграли

Деф Нека је $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Ф-ја $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ се назива примитивна ф-ја ф-је $f(x)$ ако задоволува

$$F'(x)=f(x) \quad \text{за сѐко } x\in(a,b)$$

Пример а) Нека је $f(x)=\cos x$, $f:(-\infty,+\infty)\to\mathbb{R}$

ф-ја $F(x)=\sin x$, $F:(-\infty,+\infty)\to\mathbb{R}$ је примитивна ф-ја ф-је $f(x)$ бидејќи $(\sin x)'=\cos x$ (т.ј. $F'(x)=f(x)\ (\forall x\in\mathbb{R})$)

б) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$

ф-ја $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $F(x)=\frac{x^2}{2}$ је примитивна ф-ја ф-је f бидејќи

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)'=x$$

Став а) Ако је $F(x)$ примитивна ф-ја ф-је $f(x)$ на (a,b), онда је и ф-ја $F(x)+C$ примитивна ф-ја ф-је f на (a,b)

б) Ако су ф-је $F_1(x)$ и $F_2(x)$ примитивне ф-је ф-је $f(x)$ на (a,b), онда је $F_1(x)-F_2(x)$ константна ф-ја (тј. $F_1(x)-F_2(x)=C \ (\forall x\in(a,b))$)

Доказ а) Важи $F'(x)=f(x) \ (\forall x\in(a,b))$

Одавде $(F(x)+C)'=F'(x)+\underbrace{C'}_{=0}=F'(x)=f(x)$

Према томе $F(x)+C$ је прим. ф-ја ф-је f на (a,b)

б) Важи $F_1'(x)=f(x)$ и $F_2'(x)=f(x)$ $\forall x\in(a,b)$

Одавде $(F_1(x)-F_2(x))'=F_1'(x)-F_2'(x)$

$=f(x)-f(x)=0 \quad \forall x\in(a,b)$

Доказали смо да је $F_1(x) - F_2(x) = C$

$\forall x \in (a,b)$

(последица Л-а $g'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

$\exists C \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $g(x) = C \quad \forall x \in (a,b)$)

Напомена

Нека је $F_1(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

$F_1 : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

Важи $F_1'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{1+x^2}$

ф-ја $F_1(x)$ је прим. ф-ја ф-је

$f_1(x) = \frac{-1}{1+x^2}$

Посматрајмо ф-ју $F_2(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

$F_2 : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$

$\left[f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sin x \right.$

$\left. g : \mathbb{R} \to [-1,1] \quad g(x) = \sin x \right]$ $\neq$

Важи $F_2'(x) = \frac{-1}{1+x^2} \quad \forall x \in (-\infty, 0)$

па је $F_2(x)$ примитивна ф-ја

ф-је $f(x)$ на $(-\infty, 0)$

$\Rightarrow F_1(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ прим. ф-ја

ф-је $f(x) = \frac{-1}{1+x^2}$ на $(0, +\infty)$

$F_2(x) =$ ——— " ———

— " ——— на $(-\infty, 0)$

<u>Деф.</u> Скуп свих примитивних ф-ја ф-је $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ називамо неодређеним интегралом ф-је f и означавамо са $\int f(x)\, dx$

У овом изразу ф-ју f називамо подинтегралном функцијом а $f(x)\, dx$ подинтегралним изразом.

На основу претходног става можемо закључити да је

$$\int f(x)\, dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

где је $F(x)$ једна примитивна

ф-ја ф-је f на (a, b)

$$f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

или краће записе

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

где је $F(x)$ —"—

—"—

Пример: Знамо да је

$$F(x) = \sin x$$

примитивна ф-ја ф-је

$f(x) = \cos x$ на $\mathbb{R}$

одакле важи

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

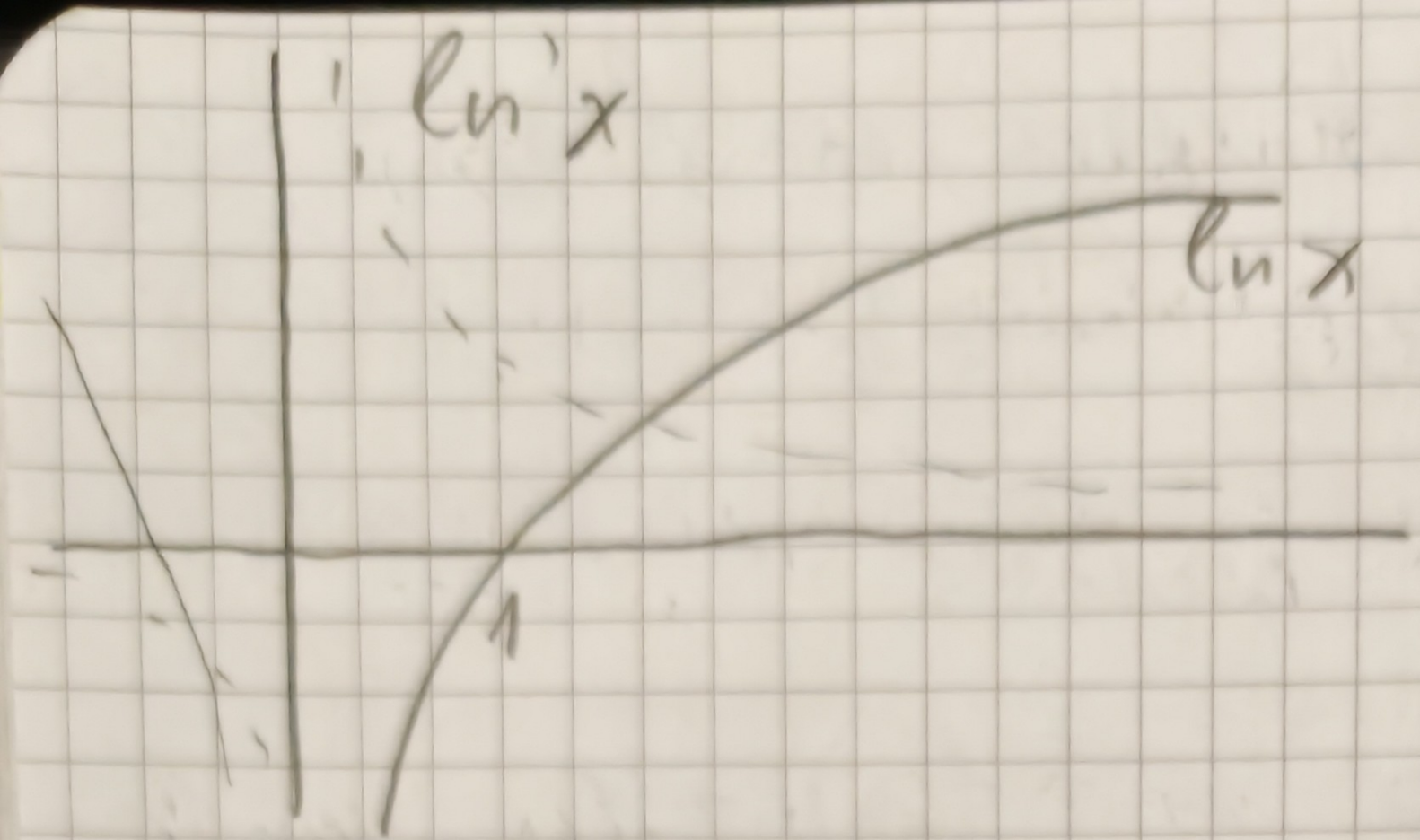
Напомена • За ф-ју $F_1(x) = \ln x$

$F_1 : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ важи $F_1'(x) = \frac{1}{x}$,

па кажемо да је $F_1(x) = \ln x$

примитивна ф-ја ф-је $f_1(x) = \frac{1}{x}$

на $(0, +\infty)$



Дакле $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$

на $(0, +\infty)$

(приметимо да важи само кад је $x > 0$)

- За ф-ју $F_2(x) = \ln(-x)$, $F_2 : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ важи $f_2'(x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$ $\forall x \in (-\infty, 0)$

па кажемо да је

$F_2(x) = \ln(-x)$ прим. ф-ја ф-је $f_2(x) = \frac{1}{x}$ на $(-\infty, 0)$

Дакле $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + C$ на $(-\infty, 0)$

Оба интеграла се могу краће записати:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

(Не пише се овако јер је то
унија интервала а то не
потпада у дефиницију)

Став Нека је $F(x)$ примитивна
ф-ја ф-је $f(x)$ на (a,b).
Тада важи:

а) $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$

б) $\int dF = F(x) + C$

в) $\int \lambda f(x)\,dx = \lambda F(x) + C$

г) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Доказ а) Из $\int f(x)\,dx = F(x) + C$
следи $d\left(\int f(x)\,dx\right) = d(F(x) + C)$
$= d\,F(x) + 0 = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$

б) $\int dF = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C$

в) Важи $(\lambda F(x) + C)' = \lambda F'(x) + 0 = \lambda f(x)$
па је $\lambda F(x) + C$ примитивна
ф-ја ф-је $\lambda f(x)$ и важи

$$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda F(x) + C$$

а) Ако је $F(x)$ прим. ф-ја ф-је $f(x)$ и $G(x)$ прим. ф-ја ф-је $g(x)$ онда је за свако $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$$(F(x) + C_1 + G(x) + C_2)'$$

$$= F'(x) + 0 + G'(x) + 0 = f(x) + g(x)$$

одакле сами $\int (f(x) + g(x))\,dx$

$$= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

слично доказ и за $f(x) - g(x)$

Табличка неодређених интеграла

1) $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$

2) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

3) $\int e^x\,dx = e^x + C$

4) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

5) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

6) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

7) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$

* $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

8) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$

9) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$

12) $\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

Пример $\int \frac{(6-\sqrt{x})(3+x)}{x^2}\,dx$

$= \int \frac{18 - 6x - 3\sqrt{x} - x^{\frac{3}{2}}}{x^2}\,dx$

$= \int \frac{18}{x^2}\,dx + \int \frac{6}{x}\,dx - \int 3\,\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$= 18\int x^{-2}\,dx + 6\int \frac{dx}{x} - 3\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx - \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$= 18\,\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 6\ln|x| - 3\,\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} - \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$

$= -\frac{18}{x} + 6\ln|x| + \frac{6}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + C$

Смена променливе и парцијална интеграција

Теорема Нека је $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ и $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ је нека прим. ф-ја

Ако је $\varphi:(\alpha,\beta)\to(a,b)$ диференцијабилна ф-ја, онда важи

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))+C$$

Доказ $(x=\varphi(t))$

Доказаћемо да је $F(\varphi(t))$ прим.

ф-ја ф-је $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$

Важи $(F(\varphi(t))'=F'(\varphi(t))\varphi'(t)$

$$=f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

Па је $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))+C$

Пример Одредити

$\int t \sin t^2 \, dt$

Нека је $f(x) = \sin x$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

а $\varphi(t) = t^2$, $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ф-ја φ је диффф. на $\mathbb{R}$ и

$F(x) = -\cos(x)$ је прим. ф-ја

ф-је $f(x)$.

На основу теореме имамо

$$\int \sin t^2 \cdot 2t \, dt = -\cos t^2 + C$$

Одавде $2\int t \sin t^2 \, dt = -\cos t^2 + C$

$$\int t \sin t^2 \, dt = -\frac{1}{2}\cos t^2 + C_1$$

~~$C_1 = \frac{C}{2}$~~

Краћи запис

$$\int t \sin t^2 \, dt = \begin{pmatrix} x = t^2 & / d \\ 1 \cdot dx = 2t \, dt & \\ t \, dt = \frac{dx}{2} & \end{pmatrix}$$

$$= \int \sin x \frac{dx}{2} = \frac{1}{2} \sin x \, dx = -\frac{1}{2}\cos x + C$$

$$= -\frac{1}{2}\cos t^2 + C$$

Теорема Нека су $u, v : (a,b) \to \mathbb{R}$ диф. ф-је и ф-ја $u(x)v'(x)$ има примитивну ф-ју.
Тада и ф-ја $u'(x)v(x)$ има примитивну и важи

$$\int u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx$$

(или краће $\int v\,du = uv - \int u\,dv$)

ПЕРМУТУЈ СЛОВА

Доказ Имамо

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \qquad \forall x \in (a,b)$$

па је

$$\int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\,dx = u(x)v(x) + C$$

и важи

$$(u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx)'$$

$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u(x)v'(x)$$

$$= u'(x)v(x)$$

Zakne

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int v'(x)u(x)dx$$

Primjer a) Odredimo $\int x \ln x \, dx$

Neka je $u(x) = \ln x$ a $v(x) = \frac{x^2}{2}$

BAHH

$$\int x \ln x \, dx = \int x \ln x \, dx = \int u(x)v'(x)dx$$

$$= u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx$$

$$\int x \ln x \, dx = \begin{pmatrix} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{x}x^2\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$$

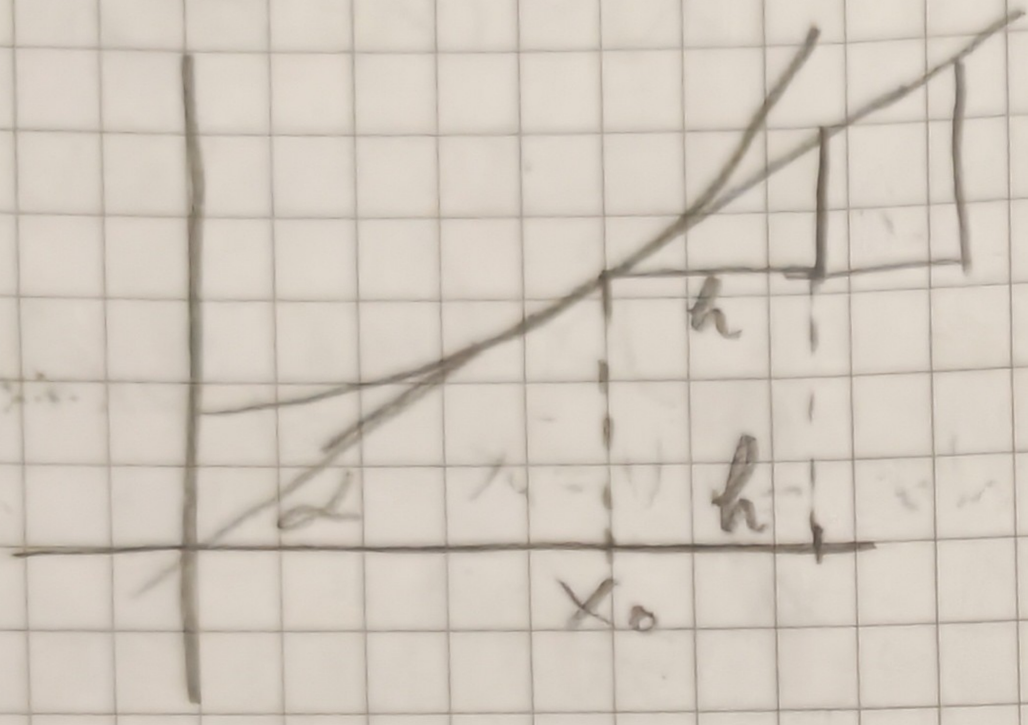
$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C$$

f диффер. на (a,b)

$$df = f'(x)\,dx$$

дифференциал (линейная часть)



$$f'(x_0) = tg\alpha$$

$$df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h$$

$$df(x_0) = f'(x_0)dx$$

б) Определим $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \left(\begin{matrix} u = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow du = -\frac{1}{(x^2+1)^2} 2x\,dx \\ dv = dx \end{matrix} \right)$$

$$\overset{\text{п.ч.}}{=} \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2\left(\underbrace{\int \frac{dx}{x^2+1}}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}}_{I_2} \right)$$

$$I_1 = \frac{x}{x^2+1} + 2I_1 - 2I_1$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}I_1$$

$$= \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \begin{pmatrix} u = \frac{1}{(x^2+1)^n} \Rightarrow du = (-n)(x^2+1)^{-n-1}\,2x\,dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{pmatrix}$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} - \int (-n)\frac{2x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\left(\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}\right)$$

$$I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left[\frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)I_n\right], \quad n \in \mathbb{N}$$

Интеграција рационалних функција

Нека су $P(x)$ и $Q(x)$ полиноми са реалним коефицијентима.

Посматрајмо рационалну ф-ју $\frac{P(x)}{Q(x)}$

Постоје јединствени полиноми $T(x)$ и $P_1(x)$ тако да је степен полинома $P_1(x)$ мањи од степена полинома $Q(x)$ и важи

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

што значи степен $P_1 <$ степен Q

Нека је $Q(x) = A(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_p)^{k_p} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{l_1}(x^2+b_2x+c_2)^{l_2}\cdots(x^2+b_qx+c_q)^{l_q}$

где квадратни $x^2+b_1x+c_1, x^2+b_2x+c_2, \ldots$ немају реалних нула тј. $b_1^2-4c_1<0, b_2^2-4c_2<0, \ldots$

Теорема Рационална ф-ја $\frac{P_n(x)}{Q(x)}$ (где је $st P_n < st Q$) може се на једнаствен начин (постоје једнаствене конси.) записати

$A_{1,1}, A_{1,2}, \dots, A_{1,k_1}$
$A_{2,1}, A_{2,2}, \dots, A_{2,k_2}$
$\dots$
$A_{p,1}, A_{p,2}, \dots A_{p,k_p}$

$$\frac{P_1(x)}{q(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x-a_1)} + \frac{A_{1,2}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1,k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}$$

$$+ \frac{A_{2,1}}{(x-a_2)} + \frac{A_{2,2}}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{A_{2,k_2}}{(x-a_2)^{k_2}}$$

$$+ \dots$$

$$+ \frac{A_{p,1}}{(x-a_p)} + \frac{A_{p,2}}{(x-a_p)^2} + \dots + \frac{A_{p,k_p}}{(x-a_p)^{k_p}}$$

$$+ \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(x^2+b_1x+c_1)^2} + \dots + \frac{B_{1,\ell_1}x + C_{1,\ell_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{\ell_1}}$$

$$+ \frac{B_{2,1}x + C_{2,1}}{x^2+b_2x+c_2} + \frac{B_{2,2}x + C_{2,2}}{(x^2+b_2x+c_2)^2} + \dots + \frac{B_{2,\ell_2}x + C_{2,\ell_2}}{(x^2+b_2x+c_2)^{\ell_2}}$$

$$+ \dots$$

$$+ \frac{B_{q,1}x + C_{q,1}}{x^2+b_qx+c_q} + \frac{B_{q,2}x + C_{q,2}}{(x^2+b_qx+c_q)^2} + \dots + \frac{B_{q,\ell_q}x + C_{q,\ell_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{\ell_q}}$$

На вежбама се раде задаци облика

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} \quad \text{и} \quad \int \frac{Ax+B}{(x^2+cx+d)^n}\,dx$$

ПРИМЕР