

### TEOREMA (DINIJEVO PRAVILO)

NEKA JE  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$  PERIODIČNA FUNKCIJA, APSOLUTNO INTEGRABILNA NA  $[-\pi, \pi]$  I XELI

AKO 1) POSTOJE LEVI I DESNI LIMESI  $f_-(x)$  I  $f_+(x)$  FUNKCIJE  $f$  U TAČKI  $x$ ,  
2) ZA NEKO  $\varepsilon > 0$  APSOLUTNO KONVERGIRAJU INTEGRALI:

$$\int_0^\varepsilon \frac{f(x-u) - f_-(x)}{u} du \quad \text{I} \quad \int_0^\varepsilon \frac{f(x+u) - f_+(x)}{u} du,$$

TADA FURIJEOV RED FUNKCIJE  $f$  KONVERGIRA U TAČKI  $x$  I ZBIR MU JE

$$\frac{f_-(x) + f_+(x)}{2}.$$

SPECIJALNO, AKO JE FUNKCIJA  $f$  JOŠ I NEPREKIDNA U TAČKI  $x$ , TADA VAŽI:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

DOKAZ DOKAZALI SMO DA JE  $m$ -TA PARCIJALNA SUMA FURIJEOVOG REDA

$$\begin{aligned} S_m(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_m(x-t) dt = \left( \begin{matrix} x-t=u \\ dt=-du \end{matrix} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} \underbrace{f(x-u) D_m(u)}_{2\pi \text{ PERIODIČNA}} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_m(u) du = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^0 f(x-u) D_m(u) du + \int_0^{\pi} f(x-u) D_m(u) du \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{\pi} \underbrace{f(x+e)}_{D_m(e)} D_m(-e) de + \int_0^{\pi} f(x-u) D_m(u) du \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x+u) + f(x-u)) D_m(u) du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{A ODAVDE } S_m(x) - \frac{f_-(x) + f_+(x)}{2} &= S_m(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f_-(x) + f_+(x)}{2} D_m(u) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{f(x-u) - f_-(x)}{2} + \frac{f(x+u) - f_+(x)}{2} \right) D_m(u) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{f(x-u) - f_-(x)}{2 \sin \frac{u}{2}} + \frac{f(x+u) - f_+(x)}{2 \sin \frac{u}{2}} \right) \sin \left( m + \frac{1}{2} \right) u du \end{aligned}$$

Iz USLOVA 2) I  $\sin \frac{u}{2} \sim \frac{u}{2}$  SLEDI DA PRETHODNI INTEGRAL APSOLUTNO KONVERGIRA, PA SE MOŽE PRIMENITI RIMANOVA LEMA

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{f(x-u) - f_-(x)}{2 \sin \frac{u}{2}} + \frac{f(x+u) - f_+(x)}{2 \sin \frac{u}{2}} \right) \sin \left(m + \frac{1}{2}\right) u \, du = 0, \text{ ODAKLE JE}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( S_m(x) - \frac{f_-(x) + f_+(x)}{2} \right) = 0, \text{ T.J. } \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = \frac{f_-(x) + f_+(x)}{2}.$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{f_-(x) + f_+(x)}{2}.$$

**POSLEDICA** (LIPŠICOVO PRAVILO)

NEKA JE  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$  PERIODIČNA, APSOLUTNO INTEGRABILNA NA  $[-\pi, \pi]$  I NEPREKIDNA U TAČKI  $x \in \mathbb{R}$ . AKO POSTOJE KONSTANTE  $L \in \mathbb{R}$  I  $\alpha \in (0, 1]$ , TAKVE DA ZA NEKO  $\delta > 0$  I SVAKO  $u \in (-\delta, \delta)$  VAŽI

$$|f(x+u) - f(x)| \leq L |u|^\alpha,$$

ONDA FURIJEOV RED FUNKCIJE  $f$  U TAČKI  $x$  KONVERGIRA I ZBIR MU JE JEDNAK  $f(x)$ .

DOKAZ ZADOVOLJENI SU USLOVI PRETHODNE TEOREME JER VAŽI

$$\left| \frac{f(x+u) - f_-(x)}{u} \right| = \left| \frac{f(x+u) - f(x)}{u} \right| \leq \frac{L |u|^\alpha}{|u|} = \frac{L}{|u|^{1-\alpha}} \text{ ZA SVAKO } |u| < \delta,$$

A INTEGRAL  $\int_0^\delta \frac{L}{|u|^{1-\alpha}} \, du$  KONVERGIRA ( $1-\alpha < 1$ ).

FUNKCIJA JE DEO PO DEO GLATKA NA  $[a, b]$  AKO POSTOJI

KONAČAN SKUP TAČAKA  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$  TAKAV DA JE

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  PRI ČEMU JE FUNKCIJA  $f$  NEPREKIDNO DIFERENCIJABILNA

NA SVAKOM INTERVALU  $(x_{i-1}, x_i)$ , POSTOJE  $f_+(a)$ ,  $f_-(x_i)$ ,  $f_+(x_i)$ ,  $f_-(b)$

I POSTOJE  $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(a+t) - f_+(a)}{t}$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0-} \frac{f(x_i+t) - f_-(x_i)}{t}$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x_i+t) - f_+(x_i)}{t}$

i  $\lim_{t \rightarrow 0-} \frac{f(b+t) - f_-(b)}{t}$ .

Slično se dokaže i konvergenција drugog integrala.

**POSLEDICA** Ako je funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$  periodična i deo po deo glatka (ima deo po deo neprekidni izvod) na  $[-\pi, \pi]$ , tada njen Furijeov red konvergira u svakoj tački  $x \in \mathbb{R}$  i suma mu je  $\frac{1}{2}(f_-(x) + f_+(x))$ .

**DOKAZ** Ako je  $f'$  neprekidna u  $x \in \mathbb{R}$ , onda postoji okolina tačke  $x$  u kojoj  $f'$  postoji i ograničen je. Važi

$$|f(x+u) - f(x)| = |f'(\xi) \cdot u| \leq L \cdot |u|, \text{ pa na osnovu Lipschitovog}$$

$\xi \in (x, x+u)$

pravila sledi da Furijeov red konvergira u  $x$  i jednak je  $\frac{1}{2}(f_-(x) + f_+(x)) = f(x)$

Ako  $f'$  nije neprekidna u  $x \in \mathbb{R}$ , onda postoje  $f_-(x)$  i  $f_+(x)$

$$\text{i } \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{f(x+t) - f_-(x)}{t}, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x+t) - f_+(x)}{t}.$$

Onda su  $\left| \frac{f(x+t) - f_-(x)}{t} \right|$  i  $\left| \frac{f(x+t) - f_+(x)}{t} \right|$  ograničeni u nekoj okolini  $(-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ ,

pa je  $|f(x-t) - f_-(x)| \leq L|t|$  i  $|f(x+t) - f_+(x)| \leq L|t|$  za svako  $t \in (0, \delta)$ .

Onda su zadovoljeni uslovi Dirijeovog pravila.

Dakle, Furijeov red funkcije  $f$  konvergira u tački  $x$  i zbir mu je

$$\frac{f_-(x) + f_+(x)}{2}.$$

**PRIMER** Razviti funkciju  $f(x) = x$  u trigonometrijski Furijeov red  $T(x)$  na  $[-\pi, \pi]$ . Ispitati običnu konvergenciju reda  $T(x)$  na  $\mathbb{R}$  i na osnovu njega naći sumu  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$  i  $T(\frac{\pi}{6})$ .

Funkciju  $f(x) = x$  razvili smo u trigonometrijski Furijeov red

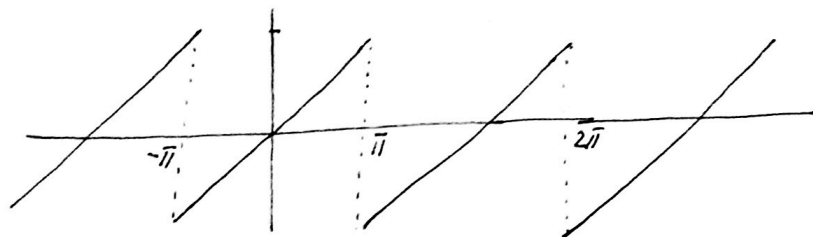
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n} \sin nx \quad \text{na } [-\pi, \pi], \text{ ali nismo mogli ništa da zaključimo}$$

o običnoj konvergenaciji (to jest kojoj graničnoj vrednosti

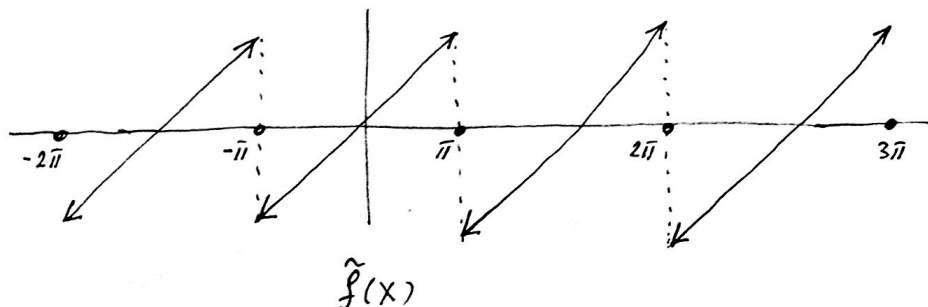
konvergira za fiksirano  $x \in [-\pi, \pi]$ ). Da bismo iskoristili

prethodnu posledicu potrebno je da imamo  $2\pi$  periodičnu funkciju.

Neaka je  $\tilde{f}$   $2\pi$  periodična funkcija takva da je  $\tilde{f}(x) = f(x)$  na  $(\pi, \pi)$ .



DODEFINISAC'EMO JE U  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  SA  $\tilde{f}(k\pi) = 0$



TRIGONOMETRIJSKI FURIJEV RED FUNKCIJE  $\tilde{f}$  JE

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

FUNKCIJA  $\tilde{f}$  JE  $2\pi$  PERIODIČNA I DEO PO DEO GLATKA.

NA OSNOVU PRETHODNE POSLEDICE FURIJEV RED KONVERGIRA U SVAKOJ TAČKI  $x \in \mathbb{R}$  I SUMA MU JE  $\frac{1}{2}(\tilde{f}_-(x) + \tilde{f}_+(x))$ .

OPADNE  $T(x) = \frac{1}{2}(\tilde{f}_-(x) + \tilde{f}_+(x)) = \tilde{f}(x)$  ZA SVAKO  $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$   
 $\tilde{f}$  JE NEPREKIDNA

$$i \quad T(k\pi) = \frac{1}{2}(\tilde{f}_-(k\pi) + \tilde{f}_+(k\pi)) = \frac{1}{2}(-\pi + \pi) = 0.$$

$$\text{DAKLE} \quad T\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n} \sin\left(n \cdot \frac{5\pi}{6}\right) = \hat{f}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \hat{f}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

$$\text{ZA } x = \frac{\pi}{2} \text{ VAŽI } T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \hat{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \text{ A } T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n} \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{VAŽI } \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^k, & n = 2k+1 \end{cases}, \text{ PA JE } T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{2k+1+1}}{2k+1} (-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2}{2k+1}$$

$$\text{PREMA TOME } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{2}, \text{ ODNOSNO } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

PRETHODNA TVRĐENJA VEŽANA ZA OBIČNU KONVERGENCIJU FURIJEVOG REKA  
 VAŽE I KADA JE FUNKCIJA  $2\ell$  PERIODIČNA ( $\ell > 0$ ).

PROIZVOLJAN RED  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$  NE MORA BITI

FURIJEOV RED NIJEDNE FUNKCIJE (ČAK I DA JE KONVERGENTAN NA  $\mathbb{R}$ ).

NA OSNOVU BESELOVE NEJEDNAKOSTI  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$  JE KONVERGENTAN ZA

FURIJEOVE KOEFICIJENTE, A KOD PROIZVOLJNOG REDA TO NE MORA DA VAŽI.

AKO IMAMO DODATNI USLOV DA PROIZVOLJAN RED  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$

RAVNOMERNO KONVERGIRA ONDA JE TAJ RED FURIJEOV RED SVOJE SUME.

POSTAVLJA SE PITANJE: KADA JE FURIJEOV TRIGONOMETRIJSKI RED FUNKCIJE

$f$  RAVNOMERNO KONVERGENTAN? S OBZIROM DA SU PARCIJALNE SUME

PERIODIČNE I NEPREKIDNE FUNKCIJA, ONDA U SLUČAJU RAVNOMERNE

KONVERGENCIJE I GRAFIČNA FUNKCIJA MORA BITI PERIODIČNA I

NEPREKIDNA. DAKLE, DA BI TRIGONOMETRIJSKI FURIJEOV RED BIO

RAVNOMERNO KONVERGENTAN NEOPHODNO JE DA FUNKCIJA  $f$  BUDE

NEPREKIDNA I PERIODIČNA.

**STAV** NEKA JE FUNKCIJA  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  NEPREKIDNA I  $2\pi$  PERIODIČNA I  
NEKA JE  $f'$  DEO PO DEO NEPREKIDAN NA  $[-\pi, \pi]$ . TADA FURIJEOV  
RED FUNKCIJE  $f$  APSOLUTNO I RAVNOMERNO KONVERGIRA NA  $\mathbb{R}$  KA  
TOJ FUNKCIJI.

DOKAZ NEKA SU  $a_0, a_n, b_n$  FURIJEVI KOEFICIJENTI FUNKCIJE  $f$ .

S OBZIROM DA JE  $f' \in C_0[-\pi, \pi]$  ( $f'$  JE DEO PO DEO NEPREKIDAN NA  $[-\pi, \pi]$ )

ZA FURIJEOVE KOEFICIJENTE  $a_0', a_n', b_n'$  FUNKCIJE  $f'$  VAŽI DA

RED  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'^2 + b_n'^2$  KONVERGIRA.

$$\text{VAŽI } a_n' = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx = \begin{pmatrix} u = \cos nx \Rightarrow du = -n \sin nx \\ dv = f'(x) dx \Rightarrow v = f(x) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( f(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \right) = n \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = n b_n'$$

$$\text{; } b_n' = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx = \begin{pmatrix} u = \sin nx \Rightarrow du = n \cos nx \, dx \\ dv = f'(x) dx \Rightarrow v = f(x) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( f(x) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \right) = -n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = -n a_n.$$

ODAVDE JE

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| = \left| \frac{b_n'}{n} \right| + \left| \frac{a_n'}{n} \right| = |b_n'| \cdot \frac{1}{n} + |a_n'| \cdot \frac{1}{n}$$

$$\leq \frac{1}{2} \left( b_n'^2 + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{2} \left( a_n'^2 + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2} (a_n'^2 + b_n'^2) + \frac{1}{n^2}$$

↓  
ISKORISTILI SMO

$|x \cdot y| \leq \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$  GEOMETRIJSKA  $\leq$  HARMONIJSKE

S OBZIROM DA  $\sum a_n'^2 + b_n'^2$  I  $\sum \frac{1}{n^2}$  KONVERGIRAJU, IMAMO DA NA OSNOVU  
VARERŠTRASOVOG KRITERIJUMA FURIJEV RED  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$   
ABSOLUTNO I RAVNOMERNO KONVERGIRA NA  $\mathbb{R}$ .

**STAV** NEKA JE  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$  PERIODIČNA, IMA NEPREKIDNE IZVODE DO REDA  $p$  I  
DEO PO DEO NEPREKIDAN IZVOD  $f^{(p+1)}$ . TADA RED  $\sum_{n=1}^{\infty} n^p (|a_n| + |b_n|)$   
KONVERGIRA I FURIJEV RED SE MOŽE  $p$ -PUTA DIFERENCIRATI ČLAN  
PO ČLAN NA  $[-\pi, \pi]$ .

**STAV** NEKA JE  $f \in C_0[-\pi, \pi]$  I NEKA JE  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$  NJEN  
FURIJEV RED. TADA JE

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt) dt \text{ ZA SVAKO } x \in [-\pi, \pi]$$

I POSLEDNJI RED RAVNOMERNO KONVERGIRA NA  $[-\pi, \pi]$ .

DAKLE, FURIJEV RED SE MOŽE INTEGRALITI ČLAN PO ČLAN.