

**TEOREMA (ABELOVA)** AKO STEPENI RED  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  SA  $R > 0$  KONVERGIRA U

$x=R$ , ONDA ON RAVNOMERNO KONVERGIRA NA  $[d, R]$  ZA SVAKO  $d \in (-R, R)$

I NJEGOVA SUMA JE NEPREKIDNA SLEVA U  $x=R$ , TO JEST

$$\lim_{x \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

$$(\text{ili } \lim_{x \rightarrow R-} f(x) = f(R), \text{ GDE JE } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n).$$

**LEMA** AKO JE REALNA FUNKCIJA  $f$  BESKONAČNO DIFERENCIJABILNA NA SEGMENTU  $[x_0-h, x_0+h]$  I POSTOJI KONSTANTA  $M$ , TAKVA DA ZA SVAKO  $n \in \mathbb{N}$  I SVAKO  $x \in [x_0-h, x_0+h]$  VAŽI  $|f^{(n)}(x)| \leq M$ , TADA JE  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  ZA SVE  $x \in [x_0-h, x_0+h]$ ,  $(R_n(x) = f(x) - T_n(x, x_0), \text{ T.J. } \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x, x_0) = f(x)).$

DOKAZ ZA SVAKO  $x \in [x_0-h, x_0+h]$  OSTATAK  $R_n(x)$  ZAPIŠAN U LAGRANŽOVOM OBLIKU

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \text{ GDE JE } \xi_x = x_0 + \theta(x-x_0), \theta \in (0, 1).$$

$$\text{ODAVDE JE } |R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |h|^{n+1},$$

$$\text{PA IZ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M}{(n+1)!} |h|^{n+1} = 0 \text{ SLEDI } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

SLEDEĆE FUNKCIJE RAZVIĆEMO U STEPENI RED U OKOLIKI TAČKE  $x_0 = 0$ , ODHOSHO JEDNAKE SU MAKLORENOVOM REDU.

1)  $f(x) = e^x$  JE BESKONAČNO DIFERENCIJABILNA

$$f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ MAILLORENOV RED}$$

ZA  $x \in [0-h, 0+h] = [-h, h]$  VAŽI  $|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^h = M$  ZA SVAKO  $n \in \mathbb{N}$ .

NA OSNOVU LEME  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  ZA SVAKO  $x \in [-h, h]$ ,

$$\text{ODHOSHO } f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ ZA SVAKO } x \in \mathbb{R}.$$

(JER AKO  $x$  FIKSIRAMO MOŽEMO NAĆI  $h$  TAKVO DA JE  $x \in [-h, h]$ )  
I PRIMEINITI PRETHODNO

IZRAČUNAJMO RADIJUS KONVERGENCIJE

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty$$

STEPENI RED APSOLUTNO KONVERGIRA NA  $(-\infty, +\infty)$

i RAVNOMERNO KONVERGIRA NA  $[a, b]$  ZA SVAKO  $-\infty < a < b < +\infty$ .

2)  $f(x) = \sin x$ ,  $|f^{(n)}(x)| \leq 1$  ZA SVAKO  $x \in \mathbb{R}$  I  $n \in \mathbb{N}$

MAKLORENOV RED JE  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

NA OSNOVU LEME  $f(x) = \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$  ZA SVAKO  $x \in \mathbb{R}$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}}{(-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+3)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+3)(2n+2) = +\infty$$

STEPENI RED APSOLUTNO KONVERGIRA NA  $(-\infty, +\infty)$

i RAVNOMERNO KONVERGIRA NA  $[a, b]$  ZA SVAKO  $-\infty < a < b < +\infty$ .

3)  $f(x) = \cos x$ ,  $|f^{(n)}(x)| \leq 1$  ZA SVAKO  $x \in \mathbb{R}$  I  $n \in \mathbb{N}$

SLIČNO KAO I U PRETHODNOM PRIMERU

$$f(x) = \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ ZA SVAKO } x \in \mathbb{R}$$

STEPENI RED APSOLUTNO KONVERGIRA NA  $(-\infty, +\infty)$

i RAVNOMERNO KONVERGIRA NA  $[a, b]$  ZA SVAKO  $-\infty < a < b < +\infty$

4)  $f(x) = \ln(1+x)$

MAKLORENOV RED  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right|}{\left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

MOŽE SE POKAZATI (AKO OSTATAK ZAPIŠEMO U KOŠIJEVOM OBLIKU)

$$\text{DA JE } f(x) = \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \text{ ZA } x \in (-1, 1)$$

STEPENI RED APSOLUTNO KONVERGIRA NA  $(-1, 1)$

STEPENI RED RAVNOMERNO KONVERGIRA NA  $[a, b]$  ZA SVAKO  $-1 < a < b < 1$

STEPENI RED KONVERGIRA U  $x=1$  (LAJBHICOV KRITERIJUM)

NA OSNOVU ABELOVE TEOREME RED RAVNOMERNO KONVERGIRA NA  $[0, 1]$ , ODNOSNO

NA  $[a, 1]$  ZA SVAKO  $a \in (-1, 0)$  I NJEGOVA SUMA JE NEPREKIDNA SLEVA U  $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$i \quad \lim_{x \rightarrow 1-} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \lim_{x \rightarrow 1-} \ln(1+x) = \ln 2$$

$$\text{ODAVDE} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2 \quad i \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{ZA } x \in (-1, 1]$$

$$5) f(x) = (1+x)^d, \quad d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$$

$$\text{MAKLORENOV RED} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d}{n} x^n, \quad \binom{d}{0} = 1, \quad \binom{d}{n} = \frac{d(d-1)\dots(d-n+1)}{n!} \quad \text{ZA } n \in \mathbb{N}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\binom{d}{n}}{\binom{d}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{d(d-1)\dots(d-n+1)}{n!}}{\frac{d(d-1)\dots(d-n)}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{d-n} \right| = 1$$

MOŽE SE POKAZATI (AKO OSTATAK ZAPIŠEMO U KOŠICEVOM OBLIKU)

$$\text{DA JE } f(x) = (1+x)^d = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d}{n} x^n \quad \text{ZA } x \in (-1, 1)$$

STEPENI RED APSOLUTNO KONVERGIRA NA  $(-1, 1)$  I RAVNOMERNO KONVERGIRA NA  $[d, 3]$  ZA SVAKO  $-1 < d < 3 < 1$ .

ISPITAJMO KONVERGENCIJU U  $x = 1$  I  $x = -1$ .

$$\text{VAŽI } \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{n+1}{n-d} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{d}{n}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{d}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + \frac{d+1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

NA OSNOVU GAUSOVOG KRITERIJUMA ZA  $d > 0$  RED  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{d}{n}$  APSOLUTNO KONVERGIRA ZA  $d \in (-1, 0)$  VAŽI  $|a_n| > |a_{n+1}|$  I  $\binom{d}{n} = (-1)^n \frac{(n-1-d)(n-2-d)\dots(1-d) \cdot d}{n!}$

$$\text{ZATIM } \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln C_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 - \frac{d+1}{n}) + \ln(1 - \frac{d+1}{n-1}) + \dots + \ln(1 - \frac{d+1}{2})} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \ln(1 - \frac{d+1}{k})} = 0$$

$$\text{JER } \sum_{k=2}^{\infty} \ln(1 - \frac{d+1}{k}) \text{ DIVERGIRA I } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \ln(1 - \frac{d+1}{k}) = -\infty, \quad C_n = \frac{(n-1-d)\dots(1-d)}{n \cdot (n-1) \dots 2}$$

DOKAZALI SMO  $\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{d}{n} = 0$  I  $|\binom{d}{n}| > |\binom{d}{n+1}|$ , PA RED  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{d}{n}$  KONVERGIRA (LAJBHICOV)

$$\text{RED } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{d}{n} \text{ JE POZITIVAN I VAŽI } \frac{d_n}{d_{n+1}} = 1 + \frac{1+d}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad d_n = (-1)^n \binom{d}{n},$$

PA NA OSNOVU GAUSOVOG KRITERIJUMA ( $1+d < 1$ ) RED DIVERGIRA.

ZA  $d = -1$ ,  $\binom{-1}{n} = (-1)^n$  I REDOVI  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n}$  I  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1}{n}$  DIVERGIRAJU

ZA  $d < -1$ , IZ  $|a_n| < |a_{n+1}|$  SLEDI DA  $\binom{d}{n} \not\rightarrow 0$ , PA REDOVI  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{d}{n}$  I  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{d}{n}$  DIVERGIRAJU

DOKAZALI SMO DA RED  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{d}{n} x^n$  U  $x=1$  APSOLUTNO KONV. ZA  $d > 0$   
 USLOVLO KONV. ZA  $d \in (-1, 0)$   
 DIVERGIRA ZA  $d \leq -1$   
 $x=-1$  APSOL. KONV. ZA  $d > 0$   
 DIVERGIRA ZA  $d < 0$

KORISTEĆI ABELOVU TEOREMU DOBIJAMO

$$\text{ZA } \alpha > 0 \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{ZA SVAKO } x \in [-1, 1]$$

$$\text{ZA } \alpha \in (-1, 0) \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{ZA SVAKO } x \in (-1, 1)$$

$$\text{ZA } \alpha \leq -1 \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{ZA SVAKO } x \in (-1, 1)$$

**PRIMER** RAZVITI FUNKCIJU  $f(x) = \arcsin x$  U STEPENI RED

DOMEN FUNKCIJE JE  $[-1, 1]$ . ZNAMO DA JE  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$  ZA SVAKO  $x \in (-1, 1)$

POZNAT JE RAZVOJ FUNKCIJE

$$(1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} t^n \quad \text{ZA } t \in (-1, 1)$$

AKO JE  $x \in (-1, 1)$ , Onda JE  $t = -x^2 \in (-1, 1)$  I VAŽI

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}$$

$$\text{ZA } n=0 \quad \binom{-\frac{1}{2}}{0} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{ZA } n \geq 1 \quad \binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1) \cdots (-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \cdots (-\frac{2n-1}{2})}{n!} \\ &= \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \end{aligned}$$

$$f'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n \cdot n!} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} x^{2n} \quad \text{ZA } x \in (-1, 1)$$

$\uparrow$   
ZA  $n=0$

MOŽEMO PRIMERITI NJOVU-LAJBNICOVU FORMULU ( $f'(x)$  JE NEPREKIDNA NA  $(-1, 1)$ )

$$\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0) \quad \text{ZA SVAKO } x \in (-1, 1),$$

$$\text{ONAKLE JE } f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt.$$

VAŽI  $f(0) = \arcsin 0 = 0$ , PA JE

$$f(x) = 0 + \int_0^x \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} t^{2n} \right) dt = x + \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} t^{2n} dt$$

RADIJUS KONVERGENCIJE STEPENOG REDA  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} u^n$  JE

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!}}{\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1} \cdot (n+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot (n+1)}{2n+1} = 1,$$

PA RED  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} t^{2n}$  ( $t^2 = u$ ) JE APSOLUTNO KONVERGENTAN NA  $(-1, 1)$

I RAVNOMERNO KONVERGIRA NA  $[0, x]$ .

ODAVDE SLEDI DA SE STEPEKI RED  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} t^{2n}$  MOŽE INTEGRALITI

ČLAN PO ČLAN I DA VAŽI

$$\begin{aligned} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} t^{2n} dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} t^{2n} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^x = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \end{aligned}$$

ODAKLE JE  $f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n! (2n+1)} x^{2n+1}$  ZA SVAKO  $x \in (-1, 1)$

ISPITAĆEMO KONVERGENCIJU REDA U  $x=1$  I  $x=-1$ .

ZA  $x=1$  IMAMO  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n! (2n+1)}$  I NA OSNOVU GAUSOVOG KRITERIJUMA

$$\frac{Q_n}{Q_{n+1}} = \frac{\frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n! (2n+1)}}{\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1} \cdot (n+1)! (2n+3)}} = \frac{2(n+1)(2n+3)}{(2n+1)(2n+1)} = \frac{4n^2 + 10n + 6}{4n^2 + 4n + 1}$$

$$= \left(1 + \frac{5}{2} \frac{1}{n} + \frac{3}{2} \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{5}{2} \frac{1}{n} + \frac{3}{2} \frac{1}{n^2}\right) \left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \lambda = 1, \quad \mu = \frac{3}{2} > 1$$

RED KONVERGIRA ZA  $x=1$ . I ZA  $x=-1$  RED KONVERGIRA (JER APSOLUTNO

KONVERGIRA). NA OSNOVU ABELOVE TEOREME STEPEKI RED

RAVNOMERNO KONVERGIRA NA  $[-1, 1]$  I RAZVOJ VAŽI ZA SVAKO  $x \in [-1, 1]$ ,

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n! (2n+1)} x^{2n+1}.$$

## PRED - HILBERTOV PROSTOR

NEKA JE  $X$  REALNI VEKTORSKI PROSTOR.

PODSETHNIK:  $X$  ZADOVOLJAVJA SLEDEĆE AKSIOME

- 1) ASOCIJATIVNOST  $u + (v + w) = (u + v) + w \quad \forall u, v, w \in X$
- 2) KOMUTATIVNOST  $u + v = v + u \quad \forall u, v \in X$
- 3) NEUTRALNI ELEMENT  $\exists 0 \in X \quad u + 0 = u \quad \forall u \in X$
- 4) INVERZ  $\forall u \in X \quad \exists u^{-1} \quad u + u^{-1} = 0 \quad (u^{-1} \text{ OZNAČIMO SA } -u)$
- 5) USILJIVOST SA  
MNOŽENJEM SKALARA  $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in X$
- 6) NEUTRAL ZA MNOŽENJE  
SKALAROM  $1 \cdot u = u \quad \forall u \in X \quad (1 \in \mathbb{R})$
- 7) DISTRIBUTIVNOST MNOŽENJA  
SKALARA U ODNOSU NA  
SABIRANJE VEKTORA  $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in X$
- 8) DISTRIBUTIVNOST MNOŽENJA  
SKALARA U ODNOSU NA  
SABIRANJE SKALARA  $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in X$

### DEFINICIJA

FUNKCIJA  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  (SVAKOM PARU  $(x, y)$

ELEMENTATA IZ  $X$  DODELJUJE REALAN BROJ KOJEG ĆEMO  
ZAPISATI KAO  $\langle x, y \rangle$  ILI  $x \cdot y$ ) NAZIIVA SE SKALARNI PROIZVOD  
NA  $X$  AKO ZA SVAKO  $x, y, z \in X$  I SVAKO  $\lambda \in \mathbb{R}$  VAŽI

- 1)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- 2)  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- 3)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- 4)  $\langle x, x \rangle \geq 0$
- 5)  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ZA SVAKO  $\lambda \in \mathbb{R}$  I ZA SVAKO  $x, y \in X$  VAŽI

$$0 \leq \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle,$$

PA DISKRIMINANTA NIJE POZITIVNA, TO JEST

$$(2\langle x, y \rangle)^2 - 4\lambda^2 \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0, \text{ ODNOSNO}$$

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \text{ ZA SVAKO } x, y \in X \text{ (KOŠI-SVARCOVA)}$$

ZA SVAKO  $x, y \in X$  VAŽI:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x+y, x+y \rangle &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle = (\sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle})^2 \\ \sqrt{\langle x+y, x+y \rangle} &\leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle} \quad \text{NEJEDNAKOST MINIKOVSKOG} \end{aligned}$$

U SVAKOM PROSTORU  $X$  SA SKALARNIM PROIZVODOM  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  MOŽEMO UVESTI FUNKCIJU  $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, +\infty)$  (NAZIVAMO JE NORMOM) POMOCU  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  KOJA ZADOVOLJAVLJA SLEDEĆE OSOBINE

1)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  ZA SVAKO  $\lambda \in \mathbb{R}$  I ZA SVAKO  $x \in X$

3)  $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

OSOBINE 1) I 2) SU POSLEDICE OSOBINA SKALARNOG PROIZVODA I OSOBINA 3) JE POSLEDICA NEJEDNAKOSTI MINIKOVSKOG.

**DEFINICIJA** PRED-HILBERTOV PROSTOR (REALAN) JE REALNI VEKTORSKI PROSTOR SA SKALARNIM PROIZVODOM.

**PRIMER** a) NEKA JE  $X = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  I  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  ZA  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  I  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

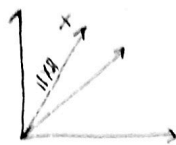
MOŽE SE DOKAZATI DA VAŽE OSOBINE 1)-6) I DA JE  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  PRED-HILBERTOV PROSTOR.

U NJEMU VAŽI:

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2, \text{ T.J. } \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \quad (\text{K-Š})$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \quad (\text{NEJEDNAKOST MINIKOVSKOG})$$

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (\text{NORMA U } \mathbb{R}^n)$$



6) NEKA JE  $X = \ell^2 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty\}$  i

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \quad \text{ZA } x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, \text{ i } y = (y_n)_{n=1}^{\infty}, \text{ iz } \ell^2$$

MOŽE SE DOKAZATI DA VAŽE OSOBINE 1)-6) i DA JE

$(\ell^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  PRED-HILBERTOV PROSTOR.

U NJEMU VAŽI:

$$|\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2} \quad (\text{KOŠI-ŠVARCOVA NEJEDNAKOST})$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2} \quad (\text{NEJEDNAKOST MINIKOVSKOG})$$

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$$

**DEFINICIJA:** ZA VEKTORE  $x, y \in X$  U PRED-HILBERTOVOM PROSTORU KAŽEMO DA SU ORTOGONALNI AKO JE  $\langle x, y \rangle = 0$ .

**STAV:** AKO SU VEKTORI  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  U PRED-HILBERTOVOM PROSTORU MEĐUSOBNO ORTOGONALNI Onda VAŽI PITAGORINA TEOREMA

$$\|\sum_{i=1}^n x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

DOKAZ ZA  $n=2$  VAŽI

$$\begin{aligned} \|x_1 + x_2\|^2 &= \langle x_1 + x_2, x_1 + x_2 \rangle = \langle x_1, x_1 \rangle + 2\langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_2, x_2 \rangle \\ &= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2, \end{aligned}$$

A ZA PROIZVOLJNO  $n$  SE DOKAŽE POMOCU MATEMATIČKE INDUKCIJE.

**DEFINICIJA:** ZA SISTEM VEKTORA  $\{e_i : i \in J\}$  U PRED-HILBERTOVOM SISTEMU  $X$  KAŽEMO DA JE ORTOHORMIRAN (ONS) AKO JE

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

**PRIMER** a) U PRED-HILBERTOVOM PROSTORU  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  IMAMO ORTOHORMIRAN

SISTEM  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$

b) U PRED-HILBERTOVOM PROSTORU  $(\ell^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  IMAMO ONS  $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$

$e_1 = (1, 0, 0, \dots), e_2 = (0, 1, 0, \dots), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots), \dots$

**DEFINICIJA** NEKA JE  $X$  BESKONAČNODIMENZIONI PRED-HILBERTOV PROSTOR i  $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$  ORTOHORMIRAN NIZ VEKTORA U NJEMU.

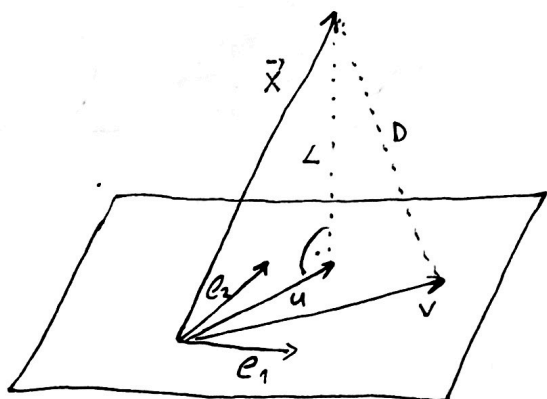
ZA BROJEVE  $d_n = \langle x, e_n \rangle, n \in \mathbb{N}$  KAŽEMO DA SU FURIJEVI KOEFICIJENTI VEKTORA  $x$  U ODNOSU NA NIZ.

ZA RED  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$  KAŽEMO DA JE FURIJEV RED VEKTORA

$x$  U ODNOSU NA NIZ.

**STAV** NEKA JE  $\{e_1, e_2, \dots\}$  ORTONORMIRAN NIZ VEKTORA U PRED-HILBERTOVOM PROSTORU  $X$  ;  $x \in X$ . OD SVIH LINEARNIH KOMBINACIJA  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ , ZA UNAPRED DAT  $n \in \mathbb{N}$ , VEKTOR  $x$  NAJBOLJE APROKSIMIRA  $n$ -TA PARCIJALNA SUMA FURIJEOVOG REDA  $\sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$ , TO JEST

$$\|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i\| \leq \|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\| \text{ ZA SVAKO } n \in \mathbb{N} \text{ I } \lambda_i \in \mathbb{R}.$$



$$u = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \quad L = \|x - u\|$$

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \quad D = \|x - v\|$$

$$L \leq D$$

DOKAZ VAŽI

$$\begin{aligned} \|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\|^2 &= \langle x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \rangle - \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, x \rangle \\ &\quad + \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \rangle = \|x\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \\ &= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2 \lambda_i \langle x, e_i \rangle = \|x\|^2 + \sum_{i=1}^n ((\lambda_i - \langle x, e_i \rangle)^2 - \langle x, e_i \rangle^2) \\ &= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \langle x, e_i \rangle)^2 - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i\|^2 &= \langle x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i, x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \rangle = \\ &= \|x\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 + \langle \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \rangle = \\ &= \|x\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 + \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 \end{aligned}$$

O DAVDE  $\|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2 + \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \langle x, e_i \rangle)^2 - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2$

$$= \|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\|^2,$$

A JEDNAKOST VAŽI AKIKO  $\lambda_i = \langle x, e_i \rangle$  ZA SVAKO  $i$ .

### STAV (BESELOVA NEJEDNAKOST)

NEKA JE  $\{e_1, e_2, \dots\}$  ORTONORMIRAN NIŽ VEKTORA U PRED-HILBERTOVOM PROSTORU  $X$  I  $x \in X$ . TADA VAŽI:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

DOKAZ U PRETHODNOM STAVU SMO DOKAZALI

$$\|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2,$$

$$\text{ODAKLE JE } \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 = \|x\|^2 - \|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i\|^2 \leq \|x\|^2$$

**POSLEDICA** RED  $\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle^2$  KONVERGIRA I  $\langle x, e_i \rangle$  (NIŽ FURIJEOVIH KOEFICIJENATA) TEŽI NULI.

**DEFINICIJA** NEKA JE  $X$  PRED-HILBERTOV PROSTOR. KAŽEMO DA NIŽ VEKTORA  $x_n \in X$  KONVERGIRA KA VEKTORU  $x \in X$  AKO VAŽI

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

$$\text{I PIŠEMO } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

**PRIMER** a) AKO JE  $X = \mathbb{R}$  KONVERGENCIJA VEKTORA JE POZNATA KONVERGENCIJA REALNIH BROJEVA

b) AKO JE  $X = \mathbb{R}^k$  SA SKALARNIM PROIZVODOM  $\langle (a_1, \dots, a_k), (b_1, \dots, b_k) \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_k b_k$  I NORMOM  $\|(a_1, a_2, \dots, a_k)\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2}$ ,

ONDA NIŽ VEKTORA  $x_n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_k^n)$  KONVERGIRA KA VEKTORU  $x = (x_1, \dots, x_k)$  AKO I SAMO AKO

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x_1^n - x_1)^2 + (x_2^n - x_2)^2 + \dots + (x_k^n - x_k)^2} = 0,$$

ODNOSNO  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^n = x_i$  ZA SVAKO  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$

**STAV** AKO NIŽ VEKTORA  $(x_n)$  U PRED-HILBERTOVOM PROSTORU  $X$  KONVERGIRA KA  $x \in X$ , ONDA JE TAJ NIŽ OGRANIČEN, TO JEST

POSTOJI  $M > 0$  TAKO DA JE  $\|x_n\| \leq M$  ZA SVAKO  $n \in \mathbb{N}$ .

DOKAZ NEKA JE  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . ODAVDE JE  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ , PA JE REALAN NIŽ  $\|x_n - x\|$  OGRANIČEN, POSTOJI  $M_1 > 0$  TAKO DA JE  $\|x_n - x\| \leq M_1$  ZA SVAKO  $n \in \mathbb{N}$ . VAŽI:

$$\|x_n\| = \|x_n - x + x\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| \leq M_1 + \|x\| = M_2 \text{ ZA SVAKO } n \in \mathbb{N}.$$

**STAV** NEKA JE  $X$  PRED-HILBERTOV PROSTOR I NEKA NIŽOVI  $(x_n)$  I  $(y_n)$  KONVERGIRAJU KA  $X \in X$  I  $Y \in Y$ . TADA JE

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle X, Y \rangle \quad (\text{NEPREKIDNOST SKALARNOG PROIZVODA}).$$

DOKAZ IMAMO  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - X\| = 0$  I  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - Y\| = 0$ .

DOKAZAĆEMO  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle X, Y \rangle| = 0$ , ODKUD MOŽE VAŽITI ZA NEKO  $C > 0$  VAŽI:

ZA SVAKO  $\varepsilon > 0$  POSTOJI  $N_0 \in \mathbb{N}$  TAKO DA ZA SVAKO  $n \geq N_0$

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle X, Y \rangle| < C \cdot \varepsilon$$

NEKA JE  $\varepsilon > 0$ .

$$\text{VAŽI } |\langle x_n, y_n \rangle - \langle X, Y \rangle| = |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, Y \rangle + \langle x_n, Y \rangle - \langle X, Y \rangle|$$

$$\leq |\langle x_n, y_n - Y \rangle| + |\langle x_n - X, Y \rangle| \stackrel{(*)}{\leq} \|x_n\| \cdot \|y_n - Y\| + \|x_n - X\| \cdot \|Y\|$$

S OBZIROM DA  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = X$ , NIŽ  $(x_n)$  JE OGRANIČEN I  $\|x_n\| \in M$  ZA SVAKO  $n$ .

IZ  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = X$  SLEDI: DA POSTOJI  $N_1 \in \mathbb{N}$  TAKO DA ZA SVAKO  $n \geq N_1$

$$\|x_n - X\| < \varepsilon$$

IZ  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = Y$  SLEDI: DA POSTOJI  $N_2 \in \mathbb{N}$  TAKO DA ZA SVAKO  $n \geq N_2$

$$\|y_n - Y\| < \varepsilon.$$

ZA SVAKO  $n \geq N_0 = \max\{N_1, N_2\}$  VAŽI:

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle X, Y \rangle| \leq \|x_n\| \cdot \|y_n - Y\| + \|x_n - X\| \cdot \|Y\|$$

$$\leq M \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \|Y\| = (M + \|Y\|) \cdot \varepsilon,$$

PA ĆEMO IZABRATI  $C = M + \|Y\|$ .

(\*) ISKORISTILI SMO KOŠI-ŠVARCOVU NEJEDNAKOST  $|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|$

**DEFINICIJA**

NEKA JE  $X$  PRED-HILBERTOV PROSTOR. ORTONORMIRAN SISTEM VEKTORA  $\{e_n\}$  U  $X$  JE POTPUN (ILI DA PREDSTAVLJA ORTONORMIRANU BAZU U  $X$ ) AKO ZA SVAKO  $x \in X$  VAŽI

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n,$$

ODNOSNO  $S_m = \sum_{n=1}^m \langle x, e_n \rangle e_n$  KONVERGIRA U NORMI KA  $X$   $\left( \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^m \langle x, e_n \rangle e_n - x \right\| = 0 \right)$

**STAV**

(PARSEVAZOVA JEDNAKOST)

AKO JE  $\{e_n\}$  POTPUN ORTONORMIRAN SISTEM VEKTORA U PRED-HILBERTOVOM PROSTORU, ONDA ZA SVAKO  $x \in X$  VAŽI

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle^2.$$

DOKAZ ZA SVAKO  $x \in X$  VAŽI

$$\|x\|^2 \langle x, x \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \right\rangle = \left\langle \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \langle x, e_n \rangle e_n, \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \langle x, e_n \rangle e_n \right\rangle$$

$$\stackrel{(*)}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{n=1}^m \langle x, e_n \rangle e_n, \sum_{n=1}^m \langle x, e_n \rangle e_n \right\rangle$$

$$\stackrel{(**)}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \langle x, e_i \rangle \langle x, e_j \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \langle x, e_n \rangle^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2.$$

(\*) ISKORISTILI SMO NEPREKIDNOST SKALARNOG PROIZVODA

$$S_m = \sum_{n=1}^m \langle x, e_n \rangle e_n \rightarrow x \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \langle S_m, S_m \rangle = \langle x, x \rangle$$

(\*\*) ISKORISTILI SMO BILINEARNOST SKALARNOG PROIZVODA

$$\langle a+b, c+d \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, d \rangle + \langle b, c \rangle + \langle b, d \rangle$$