

FUNKCIONALNI REDOVI

NEKA JE $Q_1(x), Q_2(x), Q_3(x), \dots$ NIŽ FUNKCIJA KOJE SU DEFINISANE NA A .
POSMATRAJMO SLEDEĆI NIŽ FUNKCIJA $S_m(x)$

$$S_1(x) = Q_1(x)$$

$$S_2(x) = Q_1(x) + Q_2(x)$$

$$S_3(x) = Q_1(x) + Q_2(x) + Q_3(x)$$

$\vdots$

$$S_m(x) = Q_1(x) + Q_2(x) + \dots + Q_m(x)$$

$\vdots$

TO JEST
$$S_m(x) = \sum_{n=1}^m Q_n(x), m \in \mathbb{N}.$$

DEFINICIJA: FUNKCIONALNI NIŽ $S_m(x)$ ZOVEMO NIŽ PARCIJALNIH SUMA FUNKCIONALNOG NIŽA $Q_n(x)$, A IZRAZ $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ ZOVEMO BESKONAČNI FUNKCIONALNI RED SA OPŠTIM ČLANOM $Q_n(x)$.

DEFINICIJA FUNKCIONALNI RED $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ KONVERGIRA TAČKA PO TAČKA (ILI OBIČNO) NA SKUPU A AKO NJEGOV NIŽ PARCIJALNIH SUMA $S_m(x) = \sum_{n=1}^m Q_n(x)$ KONVERGIRA TAČKA PO TAČKA NA SKUPU A .

DAKLE, KONVERGENCIJA TAČKA PO TAČKA NA SKUPU A JESTE KONVERGENCIJA REDA (NUMERIČKOG) U SVAKOJ TAČKI SKUPA A .

STAY AKO FUNKCIONALNI RED $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ KONVERGIRA TAČKA PO TAČKA NA SKUPU A , Onda FUNKCIONALNI NIŽ $Q_n(x)$ KONVERGIRA TAČKA PO TAČKA KA NULI NA SKUPU A .

DOKAZ DOKAZ SLEDI IZ TVRĐENJA DA OPŠTI ČLAN KONVERGENTNOG REDA TEŽI NULI.

PRIMER ISPITATI KONVERGENCIJU TAČKA PO TAČKA REDA $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

ZA $x_0 \geq 1$ I ZA $x_0 \leq -1$ NIŽ x_0^n NE TEŽI NULI, PA RED $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ NE KONVERGIRA TAČKA PO TAČKA NI NA JEDNOM SKUPU KOTI IMA NEPRAZAN PRESEK SA $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

ZA $x_0 \in (-1, 1)$ NIŽ PARCIJALNIH SUMA JE $S_m(x) = \sum_{n=1}^m x^n = x + x^2 + \dots + x^m =$
 $= \frac{x - x^{m+1}}{1 - x}$ KOJI KONVERGIRA KA $S(x) = \frac{x}{1 - x}$. DAKLE, FUNKCIONALNI RED
 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ KONVERGIRA TAČKA PO TAČKA KA FUNKCIJI $S(x) = \frac{x}{1 - x}$ NA $(-1, 1)$.

DEFINICIJA FUNKCIONALNI RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ RAVNOMERNO KONVERGIRA NA A
 AKO NIŽ PARCIJALNIH SUMA $S_m(x)$ RAVNOMERNO KONVERGIRA NA A .

STAV AKO FUNKCIONALNI RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ RAVNOMERNO KONVERGIRA NA A ,
 Onda FUNKCIONALNI NIŽ $a_n(x)$ RAVNOMERNO KONVERGIRA KA NULA
 FUNKCIJI NA A .

DOKAZ NEKA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ RAVNOMERNO KONVERGIRA NA A . TAD FUNKCIONALNI
 NIŽOVI (PARCIJALNE SUME) $S_m(x)$ I $S_{m-1}(x)$ RAVNOMERNO KONVER-
 GIRAJU KA $S(x)$ NA A , TO JEST $S_m \Rightarrow S$ I $S_{m-1} \Rightarrow S$ NA A .

NA OSHOVU STAVA

$$S_m - S_{m-1} \Rightarrow S - S = 0, \text{ A ODAVDE}$$

$a_m(x) = S_m(x) - S_{m-1}(x)$ RAVNOMERNO KONVERGIRA KA NULI NA A .

PRIMER FUNKCIONALNI RED $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ NE KONVERGIRA RAVNOMERNO NA $[0, 1)$.
 S OBZIROM DA OPŠTI ČLAN $a_n(x) = x^n$ NE KONVERGIRA RAVNOMERNO
 KA NULA FUNKCIJI (DOKAZALI SMO $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1)} |x^n - 0| = 1 \neq 0$),
 NA OSHOVU PRETHODNOG STAVA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ NE KONVERGIRA RAVNOMERNO
 NA $[0, 1)$.

OVO JE PRIMER REDA KOJI KONVERGIRA TAČKA PO TAČKA NA NEKOM
 SKUPU A NE KONVERGIRA RAVNOMERNO NA ISTOM SKUPU.

STAV AKO FUNKCIONALNI RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ RAVNOMERNO KONVERGIRA NA
 SKUPU A , Onda ON I KONVERGIRA OBIČNO (TAČKA I DO TAČKA)
 NA ISTOM SKUPU

DOKAZ DOKAZ SLEDI IZ ČINJENICE DA IZ RAVNOMERNE KONVERGENCIJE
 NIŽA PARCIJALNIH SUMA SLEDI OBIČNA KONVERGENCIJA NIŽA
 PARCIJALNIH SUMA.

PODSETIMO SE KOŠIJEVOG KRITERIJUMA ZA RAVNOMERNU KONVERGENCIJU FUNKCIONALNOG NIZA $S_n(x)$

$$S_n \Rightarrow S \text{ NA } A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists N_0 \in \mathbb{N}) (\forall n, p \in \mathbb{N}) (\forall x \in A) \\ (n \geq N_0 \Rightarrow |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon)$$

ODAVDE SLEDI SLEDEĆA TEOREMA. (KOŠIJEV KRITERIJUM RAVNOMERNE KONVERGENCIJE FUNKCIONALNOG REDA)

TEOREMA FUNKCIONALNI RED $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ RAVNOMERNO KONVERGIRA NA A

$$\text{AKKO } (\forall \varepsilon > 0) (\exists N_0 \in \mathbb{N}) (\forall n, p \in \mathbb{N}) (\forall x \in A)$$

$$(n \geq N_0 \Rightarrow |Q_{n+1}(x) + Q_{n+2}(x) + \dots + Q_{n+p}(x)| < \varepsilon) \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{S_{n+p}(x) - S_n(x)}$$

TEOREMA (VAJERŠTRASOV KRITERIJUM)

NEKA JE $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ FUNKCIONALNI RED. AKO POSTOJI NIZ C_n TAKAV

DA JE 1) $|Q_n(x)| \leq C_n$ ZA SVAKO $x \in A$ I ZA SVAKO $n \geq n_0$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ KONVERGIRA,

ONDA RED $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ RAVNOMERNO KONVERGIRA NA A.

DOKAZ NEKA SU ZADOVOLJENI USLOVI TEOREME. DOKAZAĆEMO DA RED $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ ZADOVOLJAVA KOŠIJEV KRITERIJUM. NEKA JE $\varepsilon > 0$.

NA OSHOVU KONVERGENCIJE REDA $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ POSTOJI $N_0 \in \mathbb{N}$ TAKO DA ZA SVAKO $n \geq N_0$ I $p \in \mathbb{N}$ VAŽI

$$C_{n+1} + C_{n+2} + \dots + C_{n+p} < \varepsilon.$$

IZ OSOBINE 1) SLEDI NEJEDNAKOST TROUGLA ZA SVAKO $x \in A$

$$|Q_{n+1}(x) + Q_{n+2}(x) + \dots + Q_{n+p}(x)| \leq C_{n+1} + C_{n+2} + \dots + C_{n+p}.$$

ODAVDE POSTOJI $N_0 \in \mathbb{N}$ TAKO DA ZA SVAKO $n, p \in \mathbb{N}$ I ZA SVAKO $x \in A$

$$n \geq N_0 \Rightarrow |Q_{n+1}(x) + Q_{n+2}(x) + \dots + Q_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

DAKLE, $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ RAVNOMERNO KONVERGIRA NA A.

FUNKCIONALNA SVOJSTVA GRANIČNE FUNKCIJE

NEKA JE $Q_n(x)$ FUNKCIONALNI NIZ SA NEPREKIDNIM FUNKCIJAMA $Q_n(x)$.
AKO FUNKCIONALNI NIZ RAVNOMERNO KONVERGIRA KA FUNKCIJI $Q(x)$,
POSTAVLJA SE PITANJE DA LI JE I GRANIČNA FUNKCIJA $Q(x)$ NEPREKIDNA.
ODGOVOR NAM DAJE SLEDEĆA TEOREMA.

TEOREMA NEKA FUNKCIONALNI NIZ $Q_n(x)$ RAVNOMERNO KONVERGIRA KA $Q(x)$ NA A . NEKA POSTOJE GRANIČNE VREDNOSTI $\lim_{x \rightarrow x_0} Q_n(x)$ ZA SVAKO $n \in \mathbb{N}$, GDE JE x_0 TAČKA NAGOMILAVANJA SKUPA A . TADA POSTOJI

$$\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x) \text{ i VAŽI } \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x)}_{Q(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} Q_n(x)}_{b_n}$$

DOKAZ NEKA SU ZADOVOLJENI USLOVI TEOREME PRI ČEMU JE $\lim_{x \rightarrow x_0} Q_n(x) = b_n \in \mathbb{R}$.

POTREBNO JE DOKAZATI $\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. PRVO ĆEMO DOKAZATI DA JE NIZ b_n KONVERGENTAN, ODNOSNO KOŠIJEV. NEKA JE $\varepsilon > 0$ PROIZVOLJNO. NA OSNOVU KOŠIJEVOG KRITERIJUMA RAVNOMERNE KONVERGENCIJE FUNKCIONALNOG NIZA $Q_n(x)$ IMAMO DA POSTOJI $N_0 \in \mathbb{N}$ TAKO DA ZA SVAKO $n, p \in \mathbb{N}$ ($n \geq N_0 \Rightarrow |Q_{n+p}(x) - Q_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ZA SVAKO $x \in A$).

S OBZIROM DA POSLEDNJA NEJEDNAKOST VAŽI ZA SVAKO $x \in A$, PUSTIĆEMO LIMES IKADA $x \rightarrow x_0$ I DOBIJAMO $|b_{n+p} - b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. ODAVDE NIZ b_n JE KOŠIJEV. NEKA JE $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

DOKAZAĆEMO $\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x) = b$. NEKA JE $\varepsilon > 0$ PROIZVOLJNO. IZ RAVNOMERNE KONVERGENCIJE NIZA $Q_n(x)$ KA FUNKCIJI $Q(x)$ NA A SLEDI DA POSTOJI $N_0 \in \mathbb{N}$ TAKO DA ZA SVAKO $n \geq N_0$ $|Q_n(x) - Q(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ZA SVAKO $x \in A$.

IZ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, ZA $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ POSTOJI $N_1 \in \mathbb{N}$ TAKO DA ZA SVAKO $n \geq N_1$ $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{3}$.

ZA $n = \max\{N_0, N_1\}$ IZ $\lim_{x \rightarrow x_0} Q_n(x) = b_n$ ZA $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ POSTOJI $\delta > 0$

TAKO DA ZA SVAKO $x \in A$

$$(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |Q_n(x) - b_n| < \frac{\varepsilon}{3})$$

$$|Q(x) - b| = |Q(x) - Q_n(x) + Q_n(x) - b_n + b_n - b|$$

$$\leq |Q(x) - Q_n(x)| + |Q_n(x) - b_n| + |b_n - b|$$

$\wedge$ iz RAVNOM.

$\frac{\varepsilon}{3}$ KONV.
 $n \geq N_0$

$\wedge$ iz GRANIČNE
VR.

$\frac{\varepsilon}{3}$ F-JE Q_n
 $\exists \delta < |x - x_0| < \delta$

$\wedge$ iz KONVERGENCIJE

$\frac{\varepsilon}{3}$ NIŽA
 $n \geq N_1$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

DOKAZALI SMO DA ZA PROIZVOLJNO $\varepsilon > 0$ POSTOJI $\delta > 0$ TAKO DA ZA SVAKO $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ VAŽI $|Q(x) - b| < \varepsilon$. PREMA TOME,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x) = b, \text{ TO JEST } \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} Q_n(x).$$

POSLEDICA AKO NIŽ FUNKCIJA $Q_n(x)$ NEPREKIDNIH U $x_0 \in A$, GDE JE x_0 TAČKA NAGOMILAVANJA SKUPA A , RAVNOMERNO KONVERGIRA KA FUNKCIJI $Q(x)$ NA A , ONDA I GRANIČNA FUNKCIJA $Q(x)$ JE NEPREKIDNA U x_0 .

DOKAZ DOKAZ SLEDI NA OSHOVU PRETHODNE TEOREME JER JE $\lim_{x \rightarrow x_0} Q_n(x) = Q_n(x_0) = b_n$ NA OSHOVU NEPREKIDNOSTI $Q_n(x)$.

PRIMER DOKAZALI SMO DA $Q_n(x) = x^n$ NE KONVERGIRA RAVNOMERNO NA $[0, 1]$. MOGLI SMO I PRIMENITI PRETHODNU POSLEDICU. NIŽ $Q_n(x)$ OBIČNO (TAČKA PO TAČKA) KONVERGIRA KA $Q(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$. NIŽ FUNKCIJA $Q_n(x)$ SU NEPREKIDNE NA $[0, 1]$, A $Q(x)$ IMA PREKID U $x = 1$, ODAKLE NA OSHOVU POSLEDICE $Q_n(x)$ NE KONVERGIRA RAVNOMERNO NA $[0, 1]$.

POSLEDICA NEKA RED $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ RAVNOMERNO KONVERGIRA NA A I NEKA U NEKOJ TAČKI $x_0 \in A$ KOJA JE TAČKA NAGOMILAVANJA SKUPA A POSTOJI $\lim_{x \rightarrow x_0} Q_n(x)$, ZA SVAKO $n \in \mathbb{N}$. TADA RED $\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} Q_n(x)$ KONVERGIRA I VAŽI

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} Q_n(x).$$

KAZEMO DA LIMES I SUMA MOGU ZAMENITI MESTA.

U PRETHODNOJ POSLEDICI HAVELI SMO DOVOLJNE USLOVE DA LIMES I SUMA MOGU ZAMENITI MESTA. SLEDECI PRIMER NAM POKAZUJE DA TI USLOVI NISU NEOPHODNI.

PRIMER NEKA JE $\sum_{n=1}^{\infty} 2x [n^2 e^{-n^2 x^2} - (n-1)^2 e^{-(n-1)^2 x^2}]$

FUNKCIONALNI RED. NIŽ PARCIJALNIH SUMA JE

$$S_m(x) = 2x m^2 e^{-m^2 x^2} \text{ i VAŽI: } \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} 2x \frac{m^2}{e^{m^2 x^2}} = 0$$

ZA SVAKO $x \in \mathbb{R}$. DAKLE, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0$ i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2x_0 [n^2 e^{-n^2 x_0^2} - (n-1)^2 e^{-(n-1)^2 x_0^2}] = 0, \text{ ODHOSIHO}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} a_n(x).$$

RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ NE KONVERGIRA RAVNOMERNO NA $\mathbb{R}$, JER JE

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |S_m(x) - S''(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |2x m^2 e^{-m^2 x^2}|$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} m \sqrt{\frac{2}{e}} = +\infty,$$

PA RED NE KONVERGIRA RAVNOMERNO NA $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{I SIKORISTILI SMO } S'_m(x) &= 2m^2 e^{-m^2 x^2} + 2x m^2 e^{-m^2 x^2} \cdot (-2m^2 x) \\ &= 2m^2 e^{-m^2 x^2} (1 - 2m^2 x^2), \end{aligned}$$

$$\text{ODAKLE JE } \sup_{x \in \mathbb{R}} |S'_m(x)| = S'_m\left(\frac{1}{m\sqrt{2}}\right) = m \sqrt{\frac{2}{e}}.$$

TEOREMA NEKA JE $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ NIŽ RIMAN INTEGRABILNIH. AKO $f_n \rightrightarrows f$ NA $[a, b]$, OMDA JE $f \in R[a, b]$ I VAŽI

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

HAVELI SMO DOVOLJAN USLOV DA LIMES I INTEGRAL ZAMENE MESTA.

DOKAZ Iz RAVNOMERNE KONVERGENCIJE NIŽA $f_n(x)$ SLEDI DA ZA $\varepsilon > 0$

POSTOJI $N_0 \in \mathbb{N}$ TAKO DA ZA SVAKO $n \geq N_0$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ZA SVAKO $x \in [a, b]$,

ODNOSNO $f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon$ ZA SVAKO $x \in [a, b]$. (1)

DOKAZAĆEMO DA ZA SVAKO $\varepsilon > 0$ POSTOJI $\delta > 0$ TAKO DA ZA SVAKU PODELU $P \in \mathcal{P}$ ($\lambda(P) < \delta \Rightarrow |S(f, P) - \lambda(f, P)| < C\varepsilon$), ODAKLE BIŠMO DOBILI $f \in R[a, b]$,

GDE JE C NEKA POZITIVNA KONSTANTA. NEKA JE $\varepsilon > 0$ PROIZVOLJNO.

ZA NEKO $n \geq N_0$ $f_n \in R[a, b]$, PA POSTOJI $\delta > 0$ TAKO DA ZA SVAKU PODELU $P \in \mathcal{P}$ VAŽI ($\lambda(P) < \delta \Rightarrow |S(f_n, P) - \lambda(f_n, P)| < \varepsilon$). Iz NEDEDNOSTI (1)

$$\text{SLEDI: } \lambda(f, P) \geq \lambda(f_n - \varepsilon, P) = \sum_{i=1}^m \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f(x) - \varepsilon) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^m \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot \Delta x_i - \varepsilon \sum_{i=1}^m \Delta x_i = \lambda(f, P) - \varepsilon(b-a),$$

$$\begin{aligned} i \quad S(f, P) &\leq S(f_n + \varepsilon, P) = \sum_{i=1}^m \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f_n(x) + \varepsilon) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^m \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f_n(x) \cdot \Delta x_i + \varepsilon \sum_{i=1}^m \Delta x_i \\ &= S(f_n, P) + \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ODAVDE } S(f, P) - \lambda(f, P) &\leq S(f_n, P) + \varepsilon(b-a) - (\lambda(f_n, P) - \varepsilon(b-a)) \\ &= S(f_n, P) - \lambda(f_n, P) + 2\varepsilon(b-a) \\ &< \varepsilon + 2\varepsilon(b-a) = \underbrace{(1+2(b-a))}_{\text{konstanta}} \varepsilon, \end{aligned}$$

ZA SVAKU PODELU P KOD KOJE JE $\lambda(P) < \delta$. DAKLE, $f \in R[a, b]$.

ZA SVAKO $n \geq N_0$ VAŽI

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx$$

$$\leq (b-a) \cdot \varepsilon.$$

PREMA TOME, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$

PRIMER

NEKA JE DAT FUNKCIONALNI NIŽ $a_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}$ NA $[0, 1]$.

VAŽI $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2x \frac{n^2}{e^{-n^2 x^2}} = 0$ ZA SVAKO $x \in [0, 1]$ i

$$\begin{aligned} \int_0^1 a_n(x) dx &= \int_0^1 2n^2 x e^{-n^2 x^2} dx = \left(\begin{matrix} t = -n^2 x^2 \\ dt = -2n^2 x dx \end{matrix} \right) = \int_0^{-n^2} e^t (-dt) = e^t \Big|_{-n^2}^0 = \\ &= 1 - e^{-n^2}. \end{aligned}$$

ODPADE $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 a_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-n^2}) = 1$ i $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0$

NA OSNOVU TEOREME $a_n(x)$ NE KONVERGIRA RAVNOMERNO NA $[0, 1]$.

POSLEDICA NEKA JE $f_n \in R[a, b]$ ZA SVAKO $n \in \mathbb{N}$. AKO $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ RAVNOMERNO KONVERGIRA NA $[a, b]$ TADA I SUMA JE RIMAN INTEGRABILNA I VAŽI

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

HAVELI SMO DOVOLJNE USLOVE DA INTEGRAL I SUMA ZAMENE MESTA, ODNOSNO DA MOŽEMO INTEGRALITI ČLAN PO ČLAN.

DOKAZ. DOKAZ SLEDI NA OSNOVU TEOREME KADA SE PRIMENI NA NIZ PARCIJALNIH SUMA.

HAVELI SMO DOVOLJNE USLOVE DA SE MOŽE INTEGRALITI ČLAN PO ČLAN.

SLEDEĆI PRIMER NAM POKAZUJE DA SE NEKADA MOŽE INTEGRALITI ČLAN PO ČLAN IAKO FUNKCIONALNI RED NE KONVERGIRA RAVNOMERNO.

PRIMER NEKA JE $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ FUNKCIONALNI RED. RED NE KONVERGIRA

ORIČNO U $x=1$, PA NE KONVERGIRA RAVNOMERNO NA $[0, 1]$.

FUNKCIJE $f_n(x) = (-1)^n x^n$ SU RIMAN INTEGRABILNE NA $[0, 1]$ I

VAŽI $\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 (-1)^n x^n dx = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{(-1)^n}{n+1}.$

SUMA JE FUNKCIJA $f(x) = \frac{1}{1+x}$ DEFINISANA NA $[0, 1]$. OVA

FUNKCIJA JE I RIMAN INTEGRABILNA NA $[0, 1]$ I VAŽI

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x| \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

IMAMO $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \stackrel{*)}{=} \ln 2.$

PREMA TOME $\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$

*) U ANALIZI I DOKAZALI SMO $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ ZA $x \in (-1, 1)$,

A KASNIJE, KADA BUDEMO RADIĆI STEPENE REDOVE, DOKAZAĆEMO DA JEDNAKOST VAŽI I ZA $x=1$.