

## TEOREMA (GAUSOV KRITERIJUM)

NEKA JE  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  RED SA POZITIVNIM ČLANOVIMA I NEKA VAŽI

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{O_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

GDE  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$  I  $O_n$  OGRANIČEN NIJE.

RED  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  KONVERGIRA AKO I SAMO AKO

$$(\lambda < 1 \text{ ILI } \lambda = 1, \mu < -1)$$

PRIMER | ISPITATI KONVERGENCIJU REDA  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p$  U ZAVISNOSTI OD REALNOG PARAMETRA  $p$ .

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left( \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \right)^p}{\left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p} = \left( \frac{2n+1}{2n+2} \right)^p = \frac{\left( 1 + \frac{1}{2n} \right)^p}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^p} = \left( 1 + \frac{1}{2n} \right)^p \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-p} =$$

$$= \left( 1 + \frac{p}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \left( 1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = 1 + \frac{1}{n} \left( \frac{p}{2} - p \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\lambda = 1, \mu = -\frac{p}{2}$$

NA OSNOVU GAUSOVOG KRITERIJUMA  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  KONVERGIRA AKIKO  $\mu = -\frac{p}{2} < -1$ ,  
T.J.  $p > 2$ .

## TEOREMA (INTEGRALNI KRITERIJUM)

NEKA JE FUNKCIJA  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  NEPREKIDNA, NENEGATIVNA I OPADAJUĆA.

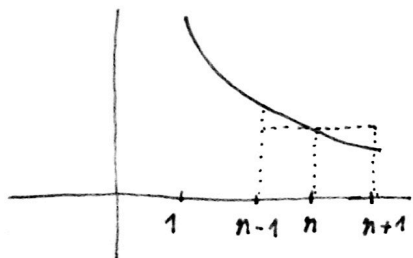
RED  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  KONVERGIRA AKO I SAMO AKO  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  KONVERGIRA

DOKAZ NEKA FUNKCIJA  $f$  ZADOVOLJAVA USLOVE TEOREME.

NEKA JE  $\varphi(x) = \int_1^x f(t) dt, x \geq 1$ . TADA JE  $\varphi'(x) = f(x) \geq 0$  ZA  $x \geq 1$

(NA OSNOVU TEOREME), PA JE  $\varphi$  RASTUĆA.

INTEGRAL  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  KONVERGIRA AKO I SAMO AKO POSTOJI  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ .



$$\int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n) \quad \forall n \geq 1$$

$$\int_{n-1}^n f(x) dx \leq f(n) \quad \forall n \geq 2$$

$$\int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n) \quad \forall n \geq 1$$

$$\forall x \in [n, n+1] \quad f(x) \leq f(n) \Rightarrow \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx = f(n) \cdot 1 = f(n)$$

$$\int_{n-1}^n f(x) dx \geq f(n) \quad \forall n \geq 2$$

$$\forall x \in [n-1, n] \quad f(x) \geq f(n) \Rightarrow \int_{n-1}^n f(x) dx \geq \int_{n-1}^n f(n) dx = f(n) \cdot 1 = f(n)$$

ODAVDE 
$$\sum_{n=1}^M f(n) = f(1) + \sum_{n=2}^M f(n) \leq f(1) + \sum_{n=2}^M \int_{n-1}^n f(x) dx$$

$$= f(1) + \int_1^M f(x) dx,$$

i 
$$\sum_{n=1}^M f(n) \geq \sum_{n=1}^M \int_n^{n+1} f(x) dx = \int_1^{M+1} f(x) dx.$$

DAKLE, ZA SVAKO  $M \geq 1$  
$$\int_1^M f(x) dx \leq \sum_{n=1}^M f(n) \leq f(1) + \int_1^M f(x) dx$$

AKO  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  KONVERGIRA, ONDA JE  $(S_M)$  KONVERGAN, ODAKLE JE I OGRANIČEN

( $\forall M \geq 1 \quad S_M \leq S$  ZA NEKO  $S$ ). NIZ  $\int_1^M f(x) dx$  JE RASTUĆI I OGRANIČEN

ODOZGO, PA JE KONVERGAN. FUNKCIJA  $\int_1^x f(t) dt$  JE RASTUĆA I

OGRANIČENA ODOZGO, PA POSTOJI  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt$ , ODHOSHO  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  KONVERGIRA.

AKO  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  DIVERGIRA, ONDA JE  $\lim_{M \rightarrow \infty} S_M = +\infty$ , PA JE I

$\lim_{M \rightarrow \infty} f(1) + \int_1^M f(x) dx = +\infty$ . ODAVDE SLEDI DA  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  DIVERGIRA.

# PRIMER Ispitati konvergenciju reda

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}, \beta \in \mathbb{R} \quad b) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^{\gamma}}, \gamma \in \mathbb{R}$$

a) Neka je  $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{\beta}}$

ZA  $\beta > 0$  FUNKCIJA  $f$  JE NEPREKIDNA, NENEGATIVNA I OPADAJUĆA, PA NA OSNOVU INTEGRALNOG KRITERIJUMA VAŽI:

RED  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$  KONVERGIRA AKIKO  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\beta}}$  KONVERGIRA

VAŽI:  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\beta}} = \left( \begin{matrix} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{matrix} \right) = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\beta}}$  KONVERGIRA AKIKO  $\beta > 1$ .

ZA  $\beta \leq 0$  IMAMO  $\frac{1}{x(\ln x)^{\beta}} \geq \frac{1}{x}$  ZA  $x \geq 2$ . IZ DIVERGENCIJE

INTEGRALA  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  SLEDI DIVERGENCIJA INTEGRALA  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{\beta}} dx$

PREMA TOME,  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$  KONVERGIRA AKIKO  $\beta > 1$ .

b) Neka je  $f: [3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x \ln x (\ln \ln x)^{\gamma}}$

ZA  $\gamma > 0$  FUNKCIJA  $f$  JE NEPREKIDNA, NENEGATIVNA I OPADAJUĆA, PA NA OSNOVU INTEGRALNOG KRITERIJUMA VAŽI:

RED  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^{\gamma}}$  KONVERGIRA AKIKO  $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x (\ln \ln x)^{\gamma}}$  KONVERGIRA

VAŽI:  $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x (\ln \ln x)^{\gamma}} = \left( \begin{matrix} \ln(\ln x) = t \\ \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = dt \end{matrix} \right) = \int_{\ln(\ln 3)}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\gamma}}$  KONVERGIRA AKIKO  $\gamma > 1$

ZA  $\gamma \leq 0$  IMAMO  $\frac{1}{x \ln x (\ln \ln x)^{\gamma}} \geq \frac{1}{x \ln x}$  ZA  $x \geq 3$ . IZ DIVERGENCIJE

INTEGRALA  $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$  SLEDI DIVERGENCIJA INTEGRALA  $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x (\ln \ln x)^{\gamma}}$

PREMA TOME,  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^{\delta}}$  KONVERGIRA AKIKO  $\delta > 1$ .

NA OSHOVU PRETHODNOG PRIMERA VAŽI:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} (\ln n)^{\beta} (\ln \ln n)^{\delta}} \text{ KONVERGIRA AKIKO } (d, \beta, \delta) \stackrel{\text{ex}}{>} (1, 1, 1)$$

TO JEST  $\alpha > 1 \vee (\alpha = 1 \wedge \beta > 1)$   
 $\vee (\alpha = 1 \wedge \beta = 1 \wedge \delta > 1)$

## REDOVI SA PROIZVOLJNIM ČLANOVIMA

SADA ĆEMO POSMATRATI REDOVE KOD KOJIH OPŠTI ČLAN MOŽE BITI PROMENLJIVOG ZNAKA.

**DEFINICIJA** ZA RED  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  KAŽEMO DA APSOLUTNO KONVERGIRA AKO KONVERGIRA RED  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .

**STAV** AKO RED  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  APSOLUTNO KONVERGIRA, ONDA ON I KONVERGIRA.

DOKAZ DOKAZ STAVA SLEDI NA OSHOVU NEJEDNAKOSTI

$$|S_m| = \left| \sum_{n=1}^m a_n \right| \leq \sum_{n=1}^m |a_n| = S'_m,$$

GDE JE  $S_m$  PARCIJALNA SUMA REDA  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,

A  $S'_m$  PARCIJALNA SUMA REDA  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

**DEFINICIJA** RED  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$ ,  $c_n \geq 0$  NAZVAĆEMO ZNAKOPROMENLJIVI (ALTERNATIVNI, ALTERNIRAJUĆI).

**STAV** (LAJBNIČOV KRITERIJUM)

AKO NIZ  $c_n$  MONOTONO TEŽI NULI, ONDA RED  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$  KONVERGIRA.

DOKAZ NEKA JE  $S_m$  NIZ PARCIJALNIH SUMA REDA  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$ ,  $S_m = \sum_{n=1}^m (-1)^n c_n$

$$\begin{aligned} \text{TADA JE } S_{2m} &= \sum_{n=1}^{2m} (-1)^n c_n = -c_1 + c_2 - c_3 + \dots + c_{2m} \\ &= \underbrace{(-c_1 + c_2)}_{\leq 0} + \underbrace{(-c_3 + c_4)}_{\leq 0} + \dots + \underbrace{(-c_{2m-1} + c_{2m})}_{\leq 0} \\ &\leq S_{2m-2} \end{aligned}$$

$$S_{2m} = -C_1 + \underbrace{(C_2 - C_3)}_{\cancel{0}} + \underbrace{(C_4 - C_5)}_{\cancel{0}} + \dots + \underbrace{(C_{2m-2} - C_{2m-1})}_{\cancel{0}} + \underbrace{C_{2m}}_{\cancel{0}} \geq -C_1$$

PODNIŽ  $S_{2m}$  JE OPADAJUĆI I OGRANIČEN ODOLJDO, PA

$$\text{POSTOJI } \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S.$$

$$\text{ZA PODNIŽ } S_{2m+1} \text{ VAŽI } S_{2m+1} = S_{2m} + (-1)^{2m+1} C_{2m+1} = S_{2m} - C_{2m+1}.$$

S OBZIROM DA JE  $\lim_{m \rightarrow \infty} C_{2m+1} = 0$ , IMAMO

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} (S_{2m} - C_{2m+1}) = S - 0 = S,$$

PA IZ  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S$  I  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = S$  SLEDI DA JE  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S$ .

**PRIMER** ISPITATI KONVERGENCIJU REDA  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

OPŠTI ČLAN JE OBLIKA  $(-1)^n \cdot C_n$ , GDE JE  $C_n = \frac{1}{n}$ .

NIŽ  $C_n$  MONOTONO TEŽI NULI, PA NA OSNOVU LAJBNIČOVOG KRITERIJUMA RED  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$  KONVERGIRA.

**PRIMER** RED  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$  NE KONVERGIRA APSOLUTNO.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ DIVERGIRA}$$

**DEFINICIJA** ZA RED  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  KAŽEMO DA USLOVNO KONVERGIRA

AKO KONVERGIRA A NE KONVERGIRA APSOLUTNO, ODNOSNO

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ KONVERGIRA A } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ DIVERGIRA.}$$

**PRIMER** RED  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  USLOVNO KONVERGIRA.

## FUNKCIONALNI NIZOVI

RADILI SMO BROJNE (NUMERIČKE) NIZOVI GDE SU ČLANOVI NIZA BROJEVI

$$\begin{array}{ccccccc} a_1, a_2, a_3, & \dots & , & a_n \in \mathbb{R}. \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & & \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} & \mathbb{R} & & & & \end{array}$$

FUNKCIONALNI NIZOVI SU NIZOVI KOD KOJIH SU ČLANOVI FUNKCIJE

$$a_1(x), a_2(x), a_3(x), \dots$$

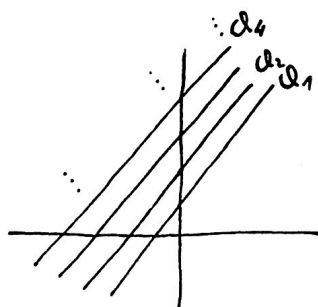
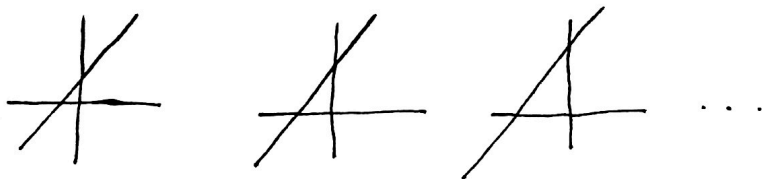
$$a_n: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}.$$

**PRIMER** (KONSTANTAN FUNKCIONALAN NIZ) NEKA JE  $a_n(x) = a(x)$ ,  $a: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$a(x), a(x), a(x), \dots$$

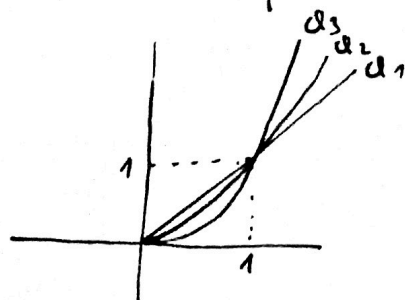
**PRIMER** NEKA JE  $a_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a_n(x) = 2x + n$

$$a_1(x) = 2x + 1, a_2(x) = 2x + 2, a_3(x) = 2x + 3, \dots, a_n(x) = 2x + n,$$



**PRIMER** NEKA JE  $a_n: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a_n(x) = x^n$

$$a_1(x) = x, a_2(x) = x^2, a_3(x) = x^3, \dots$$



ZA SVAKO  $x_0 \in A$  MOŽEMO POSMATRATI NUMERIČKI NIZ

$$Q_1(x_0), Q_2(x_0), Q_3(x_0), \dots, \text{ODNOSNO } (Q_n(x_0))_{n=1}^{\infty}.$$

**DEFINICIJA** KAŽEMO DA FUNKCIONALNI NIZ  $Q_n: A \rightarrow \mathbb{R}, Q_n(x)$  KONVERGIRA U TAČKI  $x_0 \in A$  AKO NIZ  $Q_n(x_0)$  KONVERGIRA, TO JEST POSTOJI

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x_0), y \in \mathbb{R}.$$

SADA MOŽEMO KOD FUNKCIONALNOG NIZA  $Q_n: A \rightarrow \mathbb{R}, Q_n(x)$  IZDVOJITI SKUP  $B \subset A$  NA KOJEM FUNKCIONALNI NIZ KONVERGIRA U SVAKOJ TAČKI SKUPA  $B$ .

**PRIMER** NEKA JE  $Q_n: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, Q_n(x) = x^n$  FUNKCIONALNI NIZ.

$$\text{ZA } x_0 \in [0, 1) \text{ VAŽI } \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_0^n = 0.$$

$$\text{ZA } x_0 = 1 \text{ VAŽI } \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

$$\text{ZA } x_0 > 1 \text{ VAŽI } \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_0^n = +\infty.$$

FUNKCIONALNI NIZ KONVERGIRA U SVAKOJ TAČKI SKUPA  $B = [0, 1] \subset [0, +\infty)$ .

U OVOM SLUČAJU MOŽEMO DEFINISATI FUNKCIJU  $Q: B \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$Q(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad \text{KOJA JE JEDNAKA GRAFIČNIM VREDNOSTIMA}$$

**DEFINICIJA** FUNKCIONALNI NIZ  $Q_n(x), Q_n: A \rightarrow \mathbb{R}$  KONVERGIRA TAČKA PO TAČKA (ILI OBICHNO KONVERGIRA) KA FUNKCIJI  $Q: B \rightarrow \mathbb{R}$  NA  $B$ , AKO ZA SVAKU TAČKU  $x_0 \in B$  VAŽI  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x_0) = Q(x_0)$ .

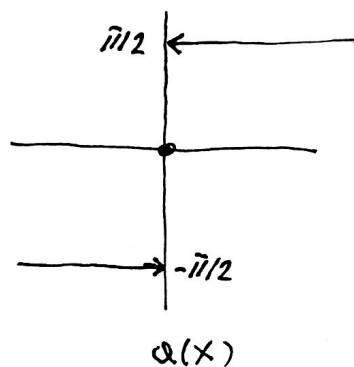
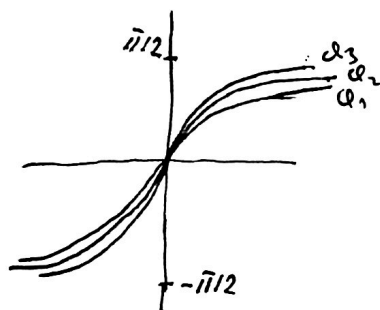
OZNAČIĆEMO SA  $Q_n \rightarrow Q$  NA  $B$ .

DAKLE,  $Q_n \rightarrow Q$  NA  $B \Leftrightarrow (\forall x_0 \in B) (\forall \varepsilon > 0) (\exists N_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) (n > N_0 \Rightarrow$   
 $\downarrow$   
 $\text{ZAVISI OD } x \quad |Q_n(x_0) - Q(x_0)| < \varepsilon$   
 $\text{i od } \varepsilon$

**PRIMER** Funkcionalni niz  $Q_n: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Q_n(x) = x^n$  konvergira tačka po tačka ka funkciji  $Q(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$  na  $[0, 1]$ .

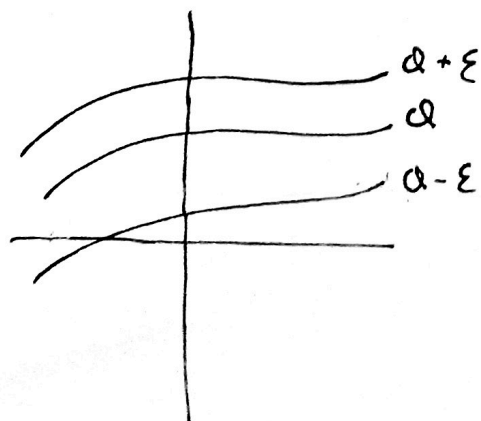
**PRIMER** Za funkcionalni niz  $Q_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Q_n(x) = 2x + n$  važi da za svako  $x_0 \in \mathbb{R}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2x_0 + n) = +\infty$ , pa funkcionalni niz ne konvergira tačka po tačka ni ka jednoj funkciji  $Q$  ni na jednom skupu  $B$ .

**PRIMER** Funkcionalni niz  $Q_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Q_n(x) = \arctg nx$  konvergira tačka po tačka ka funkciji  $Q(x) = \begin{cases} -\pi/2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \pi/2, & x > 0 \end{cases}$  na  $\mathbb{R}$ .



**DEFINICIJA** Funkcionalni niz  $Q_n: A \rightarrow \mathbb{R}$  ravnomerno konvergira ka funkciji  $Q: A \rightarrow \mathbb{R}$  na  $A$  ako za svako  $\varepsilon > 0$  postoji  $N_0 \in \mathbb{N}$  tako da za svako  $n \geq N_0$  i za svako  $x \in A$   $|Q_n(x) - Q(x)| < \varepsilon$  i označićemo sa  $Q_n \rightrightarrows Q$  na  $A$ .

DAKLE,  $Q_n \rightrightarrows Q$  na  $A \iff (\forall \varepsilon > 0) (\exists N_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in A)$   
 $\downarrow$   
 ZAVISI SAMO OD  $\varepsilon$



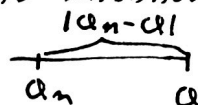
$$(n \geq N_0 \Rightarrow |Q_n(x) - Q(x)| < \varepsilon)$$

ZA SVAKI  $\varepsilon$ -POJAS GRAFIKA FUNKCIJE  $Q$  POSTOJI ČLAN  $N_0$  FUNKCIONALNOG NIZA TAKO DA ZA SVE ČLANOVE POSLE  $N_0$ -TOG VAŽI DA SE GRAFICI NALAZE UNUTAR  $\varepsilon$ -POJASA

NEKA JE  $(Q_n)$  NIŽ REALNIH BROJEVA. TADA JE

$$Q_n \rightarrow Q \Leftrightarrow Q_n - Q \rightarrow 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists N_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) (n \geq N_0 \Rightarrow |Q_n - Q| < \varepsilon)$$

$|Q_n - Q|$  MOŽEMO POSMATRATI KAO RAZDALJINU  
IZMEĐU  $Q_n$  I  $Q$



↓  
RAZDALJINA  
"  
 $d(Q_n, Q)$

OZNAČIMO TU RAZDALJINU SA  $d(a, b) = |a - b|$ . VAŽI:

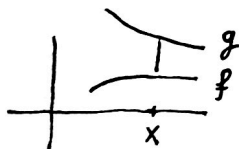
1) RAZDALJINA JE UVEK NEHEGATIVNA,  $d \geq 0$

2)  $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

3)  $d(a, b) = d(b, a)$  SIMETRIČNOST

4)  $d(a, b) = |a - b| = |a - c + c - b| \leq |a - c| + |c - b| = d(a, c) + d(c, b)$   
NEJEDNAKOST TROUGLA

NEKA SU  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  I  $g: A \rightarrow \mathbb{R}$  FUNKCIJE. PITANJE JE NA KOJE NAČINE  
MOŽEMO DEFINISATI RAZDALJINU IZMEĐU  $f$  I  $g$ .



$|f(x) - g(x)|$  ZA NEKO  $x$

SADA UZMEMO  $\sup_{x \in A}$

$$d(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$$

MOŽE SE POKAZATI DA SU ZADOVOLJENE OSOBINE 1), 2), 3) I 4) ZA  $d$ .

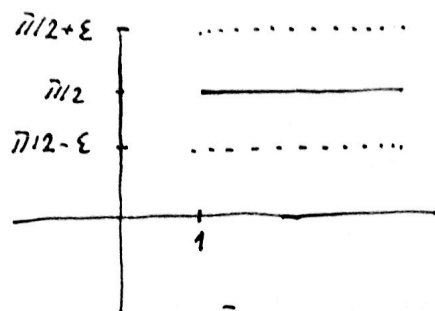
ODAVDE FUNKCIONALNI NIŽ  $Q_n(x)$  RAVNOMERNO KONVERGIRA KA  $Q(x)$  NA  $A$

$$Q_n \rightarrow Q \text{ NA } A \Leftrightarrow Q_n - Q \rightarrow 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists N_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) (n \geq N_0 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists N_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) (n \geq N_0 \Rightarrow \sup_{x \in A} |Q_n(x) - Q(x)| < \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |Q_n(x) - Q(x)| = 0$$

**PRIMER** FUNKCIONALNI NIZ  $Q_n: (1, +\infty)$ ,  $Q_n(x) = Q \ln x$  RAVNOMERNO KONVERGIRA KA FUNKCIJI  $Q: (1, +\infty)$ ,  $Q(x) = \frac{\pi}{2}$  NA  $(1, +\infty)$ .



NEKA JE  $\epsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

ZA  $x=1$   $Q_n(1) = 0 > \frac{\pi}{2} - \epsilon \Leftrightarrow Q \ln 1 > \frac{\pi}{2} - \epsilon$

POSTOJI  $N_0 \in \mathbb{N}$  ( $N_0 = \lceil \frac{2}{\epsilon} (\frac{\pi}{2} - \epsilon) \rceil + 1$ ) TAKO DA ZA SVAKO  $n \geq N_0$

$$Q \ln n > \frac{\pi}{2} - \epsilon, \text{ A ODAKLE ZA SVAKO } x \in [1, +\infty)$$

$$Q_n(x) = Q \ln x > \frac{\pi}{2} - \epsilon \quad \text{i} \quad |Q \ln x - \frac{\pi}{2}| < \epsilon.$$

MOŽE SE DOKAZATI  $Q_n \rightrightarrows Q$  NA  $(l, +\infty)$  ZA SVAKO  $l > 0$ , GDE SU  $Q_n$  I  $Q$  DEFINISANE NA  $(l, +\infty)$ .

**STAV** AKO FUNKCIONALNI NIZ RAVNOMERNO KONVERGIRA KA NEKOJ FUNKCIJI NA NEKOM SKUPU, ODAKLE ON I KONVERGIRA TAČKA PO TAČKA KA TOJ FUNKCIJI NA ISTOM SKUPU.

DOKAZ DOKAZ SLEDI DIREKTNO IZ DEFINICIJE. AKO RAVNOMERNO KONVERGIRA ODAKLE SE  $N_0$  MOŽE IZABRATI TAKO DA VAŽI SAMO OD  $\epsilon$ , ŠTO JE „TAČA“ DEFINICIJA NEGO KOD OBIČNE KONVERGENCIJE GDE  $N_0$  MOŽE ZAVISITI I OD  $x$ .

ODAKLE SLEDI DA AKO ŽELIMO DA ISPITAMO RAVNOMERNU KONVERGENCIJU, ODAKLE C'EMO PRVO ISPITATI OBIČNU KONVERGENCIJU I TEK U SLUČAJU DA FUNKCIONALNI NIZ OBIČNO KONVERGIRA KA NEKOJ FUNKCIJI ISPITAĆEMO DA LI NIZ RAVNOMERNO KONVERGIRA KA TOJ FUNKCIJI.

DOKAZALI SMO

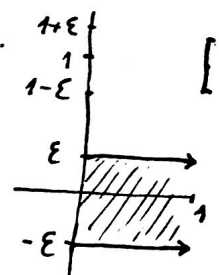
$$Q_n \rightrightarrows Q \text{ NA } A \Rightarrow Q_n \rightarrow Q \text{ NA } A \quad (\text{T.J. } \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x) = Q(x) \quad \forall x \in A)$$

OBRATNO NE MORA DA VAŽI. TO C'E NAM POKAZATI SLEDEĆI PRIMER.

# PRIMER

NEKA JE DAT NIŽ  $Q_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Q_n(x) = x^n$ . DOKAZALI SMO DA  $Q_n$  OBIČNO KONVERGIRA (TAČKA PO TAČKA) KA FUNKCIJI  $Q: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Q(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ . NA OSNOVU PRETHODNOG STAVA FUNKCIJA  $Q$  MOŽE BITI JEDINI KANDIDAT ZA GRANIČNU FUNKCIJU RAVNOMERNE KONVERGENCIJE. DOKAZAĆEMO DA  $Q_n$  NE KONVERGIRA RAVNOMERNO KA FUNKCIJI  $Q$ .

POSMATRAJMO NEKI  $\varepsilon$ -POJAS FUNKCIJE  $Q$



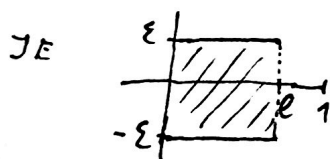
NE POSTOJI NEKI ČLAN  $N_0$  (T.J.  $Q_{N_0}(x) = x^{N_0}$ )

TAKO DA SVE FUNKCIJE  $Q_n(x) = x^n$ ,  $n \geq N_0$  IMAJU GRAFIK UNUTAR POJASA (JER SU  $Q_n$  NEPREKIDNE).

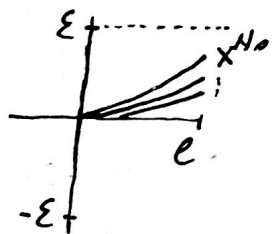
ZA  $\varepsilon = \frac{1}{3} > 0$  VAŽI DA ZA SVAKO  $N_0 \in \mathbb{N}$  AKO POSMATRAMO NEPREKIDNU FUNKCIJU  $Q_{N_0}(x) = x^{N_0}$  POSTOJI  $x_0 \in [0, 1]$  TAKO DA JE  $Q_{N_0}(x_0) = \frac{1}{2}$ , A  $\frac{1}{2}$  NE PRIPADA  $\frac{1}{3}$ -POJASU. DAKLE,

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall N_0 \in \mathbb{N}) (\exists n \geq N_0) (\exists x_0 \in [0, 1]) (|Q_n(x) - Q(x)| \geq \varepsilon)$$

MOŽE SE DOKAZATI DA DATI NIŽ  $Q_n$  RAVNOMERNO KONVERGIRA KA FUNKCIJI  $Q$  NA  $[0, \ell]$ ,  $\ell < 1$ . U OVOM SLUČAJU  $\varepsilon$ -POJAS



JE



ZA PROIZVOLJNO  $\varepsilon > 0$ . POSTOJI  $N_0 \in \mathbb{N}$  TAKO DA ZA SVAKO  $n \geq N_0$  VAŽI  $\ell^n < \varepsilon$  (JER  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell^n = 0$ ). ODAVDE ZA SVAKO  $x \in [0, \ell]$  I SVAKO  $n \geq N_0$  VAŽI  $x^n < \varepsilon$

DA BISMO JEDNOSTAVNIJE ISPITALI RAVNOMERNU KONVERGENCIJU FUNKCIONALNOG NIŽA NAVEŠĆEMO SLEDEĆI STAV

**STAV** Funkcionalni niz  $Q_n: A \rightarrow \mathbb{R}$  ravnomerno konvergira ka funkciji  $Q: A \rightarrow \mathbb{R}$  na skupu  $A$  ako važi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |Q_n(x) - Q(x)| = 0$$

DOKAZ važi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |Q_n(x) - Q(x)| = 0$  ako

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) (n \geq N_0 \Rightarrow \sup_{x \in A} |Q_n(x) - Q(x)| < \varepsilon)$$

Ako je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |Q_n(x) - Q(x)| = 0$ , onda

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) (n \geq N_0 \Rightarrow \forall x \in A |Q_n(x) - Q(x)| < \varepsilon)$$

$$\text{t.j. } (\forall \varepsilon > 0) (\exists N_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in A) (n \geq N_0 \Rightarrow |Q_n(x) - Q(x)| < \varepsilon)$$

što je definicija ravnomerne konvergenije.

Neaka je  $Q_n \Rightarrow Q$  na  $A$  i neaka je  $\varepsilon > 0$  proizvoljno.

Tada za  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$  postoji  $N_0 \in \mathbb{N}$  tako da za svako  $n \in \mathbb{N}$  i svako  $x \in A$

$$(n \geq N_0 \Rightarrow |Q_n(x) - Q_0(x)| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Odatle,  $(\exists N_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N})$

$$(n \geq N_0 \Rightarrow \sup_{x \in A} |Q_n(x) - Q_0(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon)$$

Dakle  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |Q_n(x) - Q_0(x)| = 0$ .

**PRIMER** Funkcionalni niz  $Q_n(x) = x^n$  ne konvergira ravnomerno na  $[0, 1]$  jer obično konvergira ka  $Q(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ .

$$A \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |Q_n(x) - Q_0(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |x^n - Q_0(x)| =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \max \left\{ \sup_{x \in [0, 1)} |x^n - Q_0(x)|, \underbrace{|1^n - Q_0(1)|}_1 \right\} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \max \left\{ \sup_{x \in [0, 1)} x^n, 0 \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max \{1, 0\} = 1 \neq 0$$

Funkcionalni niz  $Q_n(x) = x^n$  konvergira ravnomerno na  $[0, \ell]$ ,  $\ell < 1$ , jer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |Q_n(x) - Q_0(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |x^n - 0| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} x^n = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 0 \quad (l \in (0,1))$$

**STAV** NEKA SU  $f_n, g_n: A \rightarrow \mathbb{R}$  FUNKCIONALNI NIZOVI.

- a) AKO  $f_n \Rightarrow f$  I  $g_n \Rightarrow g$  NA  $A$ , Onda  $f_n + g_n \Rightarrow f + g$  NA  $A$ .  
 b) AKO  $f_n \Rightarrow f$  I  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ONDA  $\lambda f_n \Rightarrow \lambda f$  NA  $A$ .

DOKAZ a) TVRĐENJE SLEDI IZ NEJEDNAKOSTI:

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| \leq \sup_{x \in A} (|f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|) \\ \stackrel{①}{\leq} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x \in A} |g_n(x) - g(x)|.$$

NEJEDNAKOST ① SLEDI IZ  $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$ , GDE JE  $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$

AKO JE  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$  I  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |g_n(x) - g(x)| = 0$ , ONDA JE

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| = 0.$$

b) TVRĐENJE SLEDI IZ JEDNAKOSTI:

$$\sup_{x \in A} |(\lambda f_n)(x) - (\lambda f)(x)| = |\lambda| \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|.$$

ODAVDE IZ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$ , SLEDI  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |(\lambda f_n)(x) - (\lambda f)(x)| = 0$ .

PODSETIMO SE KOŠIJEVOG KRITERIJUMA KONVERGENCIJE NIZA,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = Q \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists N_0 \in \mathbb{N}) (\forall n, p \in \mathbb{N}) (n \geq N_0 \Rightarrow |Q_{n+p} - Q_n| < \varepsilon)$$

$$d(Q_{n+p}, Q_n)$$

**STAV** (KOŠIJEV KRITERIJUM RAVNOMERNE KONVERGENCIJE)

FUNKCIONALNI NIZ  $Q_n: A \rightarrow \mathbb{R}$  RAVNOMERNO KONVERGIRA KA FUNKCiji  $Q: A \rightarrow \mathbb{R}$  NA SKUPU  $A$  AKO I SAMO AKO ZA SVAKO  $\varepsilon > 0$  POSTOJI  $N_0 \in \mathbb{N}$  TAKO DA ZA SVAKO  $n, p \in \mathbb{N}$

$$n \geq N_0 \Rightarrow |Q_{n+p}(x) - Q_n(x)| < \varepsilon \text{ ZA SVAKO } x \in A, \text{ TO JEST}$$

$$Q_n \Rightarrow Q \text{ NA } A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists N_0 \in \mathbb{N}) (\forall n, p \in \mathbb{N}) (\forall x \in A) (n \geq N_0 \Rightarrow |Q_{n+p}(x) - Q_n(x)| < \varepsilon)$$