

GAMA FUNKCIJA

$$\int_0^{+\infty} x^{d-1} e^{-x} dx \quad \text{ZA REALNI PARAMETAR } d.$$

U SLUČAJU DA INTEGRAL KONVERGIRA VREDNOST INTEGRALA ZAVISI OD α ,
PA ĆEMO INTEGRAL OZNAČITI $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ I REĆI ĆEMO DA
JE TO GAMA FUNKCIJA.

STAV Q) INTEGRAL $\Gamma(x)$ KONVERGIRA ZA $x > 0$. DAKLE, DOMEN GAMMA FUNKCIJE JE $(0, +\infty)$, $\Gamma: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

6) VAŽI: $\Gamma(d) = (d-1)\Gamma(d-1)$ ZA SVAKO $d > 1$

c) VAŽI $\Gamma(n) = (n-1)!$ ZA SVAKO $n \in \mathbb{N}$

a) Vazı: $\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} x^{2-1} e^{-x} dx = \left(t = e^x, x = \ln t, \right. \\ \left. dx = \frac{dt}{t} \right) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^{2-1} t}{t^2} dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \ln^2 t}$

NA OSNOVU PRIMERA INTEGRAL KONVERGIRA AKKO $1-\alpha < 1$,
TO JEST $\alpha > 0$.

DOBILI SMO DA JE DOMEH GAMA FUNKCIJE $(0, +\infty)$.

6) NEKA JE $\alpha > 1$. TADA JE

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \left(\begin{array}{l} u = x^{\alpha-1} \Rightarrow du = (\alpha-1) x^{\alpha-2} dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right)$$

S OBZIROM DA JE $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{d-1}}{e^x} = 0$, IMAMO

$$\Gamma(d) = (d-1) \int_0^{\infty} x^{d-2} e^{-x} dx = (d-1) \Gamma(d-1).$$

c) ZA $\alpha = 1$ VA $\tilde{z}_i$: $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$, A $\tilde{z}_B$ $\alpha = n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \underset{\downarrow}{=} (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \underset{\downarrow}{=} (n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1\Gamma(1)$$

$$= (n-1)!.$$

NA OSNOVU PRETHODNOG STAVA (VIDETI DEO C) GAMA FUNKCIJU MOŽEMO POSMATRATI KAO PRODUŽENJE FAKTORIJELA SA SKUPA PRIRODNIH BROJEVA NA SKUP POZITIVNIH REALNIH BROJEVA.

U NAPREDNIJEM KURSU U KOJEM SE RADE PARAMETARSKI INTEGRALI DOKAZUJE SE DA JE $\Gamma(x)$ BESKONAČNO DIFERENCIJABILNA NA $(0, +\infty)$ I DA VAŽI:

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} x^{x-1} e^{-x} \ln^n x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ODAVDE ZA $n=2$ PODINTEGRALNA FUNKCIJA JE NENEGATIVNA PA JE

$\Gamma''(x) \geq 0$ ZA SVAKO $x > 0$. FUNKCIJA $\Gamma(x)$ JE KONVEKSNJA NA $(0, +\infty)$

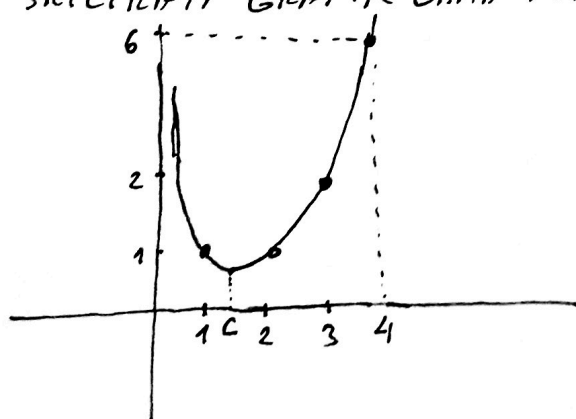
FUNKCIJA $\Gamma(x)$ JE DIFERENCIJABILNA NA $(1, 2)$, NEPREKIDNA NA $[1, 2]$ I VAŽI: $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. NA OSNOVU ROLLOVE TEOREME

POSTOJI $c \in (1, 2)$ TAKO DA JE $\Gamma'(c) = 0$. ZBOG KONVEKSNOSTI FUNKCIJE $\Gamma(x)$ TAČKA c JE JEDINA NULA FUNKCIJE $\Gamma'(x)$.

VAŽI: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$, JER $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma(n) = +\infty$ I $\Gamma(x) > \Gamma(n)$ ZA $x > n$.

VAŽI: $\lim_{x \rightarrow 0+} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \left(\frac{1}{0+} \right) = +\infty$.

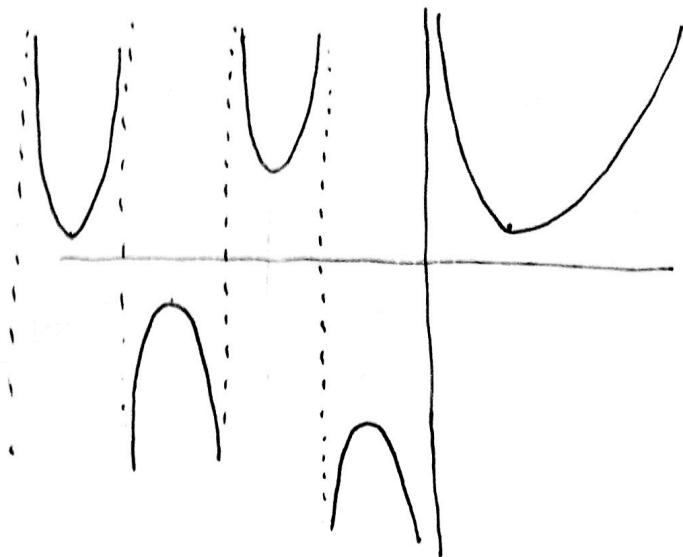
MOŽEMO SKICIRATI GRAFIK GAMA FUNKCIJE



$$c \approx 1.46, \quad \Gamma(c) \approx 0.89$$

S OBZIROM DA JE $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ ZA SVAKO $x > 1$, DOVOLJNO JE ZNATI VREDNOSTI GAMA FUNKCIJE NA $(0, 1]$.

AKO POSMATRAMO JEDNAKOST $\Gamma(x-1) = \frac{\Gamma(x)}{x-1}$, ONDA MOŽEMO DODEFINISATI GAMA FUNKCIJU I ZA NEGATIVNE VREDNOSTI (NA INTERVALIMA $(-1, 0)$, $(-2, -1)$, ...). DOBIJAMO PRODUŽENJE $\bar{\Gamma}: \mathbb{R} \setminus \{-n | n \in \mathbb{N}_0\} \rightarrow \mathbb{R}$



STAV VAŽE SLEDEČE FORMULE

a) $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \frac{(n-1)!}{x(x+1) \cdots (x+n-1)}$ OJLER - GAUSOVA FORMULA ;

b) $\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$, $x \in (0, 1)$ FORMULA DOPUNJAVANJA ;

c) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$;

d) $\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} \cdot e^{-x + \frac{\theta(x)}{12x}}$, $\theta(x) \in (0, 1)$. STIRLINGOVA FORMULA.

e) $n! \sim \sqrt{2\pi n} (\frac{n}{e})^n$
BETA FUNKCIJA

POSMATRAJMO NESVOJSTVENI INTEGRAL

$$\int_0^1 x^{x-1} (1-x)^{\beta-1} dx \quad \text{ZA REALNE PARAMETRE } x \text{ I } \beta.$$

U SLUČAJU DA INTEGRAL KONVERGIRA VREDNOST INTEGRALA ZAVISI OD x I β , PA ĆEMO INTEGRAL OZNAČITI: $B(x, \beta) = \int_0^1 x^{x-1} (1-x)^{\beta-1} dx$;
REC'I ĆEMO DA JE TO BETA FUNKCIJA.

STAV a) INTEGRAL $B(x, \beta)$ KONVERGIRA AKO JE $x > 0, \beta > 0$.

b) VAŽI: $B(x, \beta) = B(\beta, x)$ ZA SVAKO $x, \beta > 0$.

c) VAŽI: $B(x, \beta) = \frac{x-1}{x+\beta-1} B(x-1, \beta)$ ZA SVAKO $x > 1 ; \beta > 0$.

d) VAŽI: $B(x, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+\beta}} dt$.

e) VAŽI $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ ZA $\alpha > 0, \beta > 0$.

f) VAŽI $B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$ ZA $m, n \in \mathbb{N}$.

g) VAŽI $B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$ ZA $\alpha \in (0, 1)$.

DOKAZ a) SINGULARITETI SU $x=0$ I $x=1$. ZBOG SINGULARITETA $x=0$

$$\frac{1}{x^{1-\alpha}} \cdot (1-x)^{\beta-1} \sim \frac{1}{x^{1-\alpha}} (x \rightarrow 0+) \text{ IMAMO DA INTEGRAL KONVERGIRA}$$

IKADA $1-\alpha < 1$, TO JEST $\alpha > 0$. ZBOG SINGULARITETA $x=1$

$$\frac{x^{\alpha-1}}{(1-x)^{1-\beta}} \sim \frac{1}{(1-x)^{1-\beta}} (x \rightarrow 1-) \text{ IMAMO DA INTEGRAL KONVERGIRA}$$

IKADA $1-\beta < 1$, TO JEST $\beta > 0$.

DOBILI SMO DA INTEGRAL KONVERGIRA AKIKO $\alpha > 0, \beta > 0$.

b) VAŽI: $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \left(\begin{matrix} 1-x=t \\ dx=-dt \end{matrix} \right) = - \int_1^0 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt = B(\beta, \alpha)$

ZA SVAKO $\alpha > 0, \beta > 0$.

c) ZA $\alpha > 1; \beta > 0$ IMAMO

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \left(\begin{matrix} u = x^{\alpha-1} \Rightarrow du = (\alpha-1)x^{\alpha-2} dx \\ dv = (1-x)^{\beta-1} dx \Rightarrow v = -\frac{(1-x)^\beta}{\beta} \end{matrix} \right)$$

$$= -\frac{1}{\beta} x^{\alpha-1} (1-x)^\beta \Big|_0^1 + \frac{1}{\beta} (\alpha-1) \int_0^1 x^{\alpha-2} (1-x)^\beta dx$$

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{\alpha-1}{\beta} \int_0^1 x^{\alpha-2} (1-x)^\beta dx = \frac{\alpha-1}{\beta} \int_0^1 x^{\alpha-2} (1-x)^{\beta-1} (1-x) dx$$

$$= \frac{\alpha-1}{\beta} \left(\int_0^1 x^{\alpha-2} (1-x)^{\beta-1} dx - \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \right)$$

$$= \frac{\alpha-1}{\beta} (B(\alpha-1, \beta) - B(\alpha, \beta)).$$

ODAVDE $(1 + \frac{\alpha-1}{\beta}) B(\alpha, \beta) = \frac{\alpha-1}{\beta} B(\alpha-1, \beta)$, PA JE $B(\alpha, \beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1} B(\alpha-1, \beta)$.

d) Imamo

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \left(x = \frac{t}{1+t}, \right. \\ \left. dx = \frac{1}{(1+t)^2} dt \right) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{1+t} \right)^{\beta-1} \frac{dt}{(1+t)^2} = \\ = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} dt$$

e) OVAJ DEO STAVA NEĆEMO DOKAZATI.

f) $\mathbb{Z}_A m, n \in \mathbb{N}$

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \frac{(m-1)! (n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

e)

g) $\mathbb{Z}_A \alpha \in (0, 1)$

$$B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha+1-\alpha)} = \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$$

$$\mathbb{Z}_A \alpha = \frac{1}{2} \quad B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$$

REDOVI

NEKA JE $a_1, a_2, a_3, \dots$ NIZ REALNIH BROJEVA.

POSMATRAJMO SLEDEĆI NIZ $(S_m)_{m=1}^{\infty}$

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$\vdots$

$$S_m = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m$$

$\vdots$

TO JEST $S_m = \sum_{n=1}^m a_n$, $m \in \mathbb{N}$.

DEFINICIJA IZRAZ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ZOVEMO BESKONAČNI RED SA OPŠTIM ČLANOM a_n ,
A NIZ $(S_m)_{m=1}^{\infty}$ ZOVEMO NIZ PARCIJALNIH SUMA REDA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

DEFINICIJA IKAŽEMO DA RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA AKO NJEGOV NIZ
PARCIJALNIH SUMA (S_m) KONVERGIRA.

(AKO JE $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S$, PIŠEMO $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.)

U SLUČAJU DA NIZ (S_m) NE KONVERGIRA (ILI NE POSTOJI ILI JE
 $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \pm \infty$) IKAŽEMO DA RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGIRA.

PRIMER (GEOMETRIJSKI RED)

NEKA JE $a_1 \in \mathbb{R}$ I $a_n = q \cdot a_{n-1}$, $n \geq 2$, $q \in \mathbb{R}$ GEOMETRIJSKI NIZ

$(a_1 \in \mathbb{R}, a_2 = q \cdot a_1, a_3 = q^2 a_1, \dots, a_n = q^{n-1} a_1, \dots)$.

NJEGOVA PARCIJALNA SUMA S_m JEDNAKA JE

$$S_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{m-1} = \begin{cases} m a_1, & q = 1 \\ \frac{1 - q^m}{1 - q}, & q \neq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & , |q| < 1 \\ \infty & , q \geq 1 \\ \text{NE POSTOJI, } q \leq -1 \end{cases}$$

ODAVDE RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA AKIKO $|q| < 1$ I VAŽI: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-q}$

PRIMER NEKA JE DAT RIZ $a_n = (-1)^n$. DOKAZAĆEMO DA RED $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ DIVERGIRA.

NIZ PARCIJALNIH SUMA (S_m) JEDNAK JE

$$S_1 = -1$$

$$S_2 = -1 + 1 = 0$$

$$S_3 = -1 + 1 - 1 = -1$$

$$S_4 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$$

⋮

$$S_m = \begin{cases} -1 & , m \text{ NEPARAN} \\ 0 & , m \text{ PARAN} \end{cases}$$

(S_m) NE KONVERGIRA, PA RED $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ DIVERGIRA

PRIMER ISPITATI KONVERGENCIJU REDA $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$.

OPŠTI ČLAN REDA JE $a_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$

NIZ PARCIJALNIH SUMA JE

$$S_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m = \ln(1 + \frac{1}{1}) + \ln(1 + \frac{1}{2}) + \ln(1 + \frac{1}{3}) + \dots + \ln(1 + \frac{1}{m})$$

$$= \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln(\frac{m+1}{m}) = \ln(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{m+1}{m}) =$$

$$= \ln(m+1),$$

ODAKLE $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = +\infty$ I RED $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ DIVERGIRA ($\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}) = +\infty$)

NAPOMENA AKO JE NIZ (a_n) NEHEGATIVAN, ONDA JE NIZ PARCIJALNIH

SUMA RASTUĆI ($S_{m+1} - S_m = a_{m+1} \geq 0$ ZA SVAKO m) I

KONVERGENCIJA REDA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ JE EKVIVALENTNA TOMU DA LI JE

SUMA $\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ KONAČNA ILI BESKONAČNA.

U PRETHODKOM PRIMERU

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(1 + \frac{1}{1}) + \ln(1 + \frac{1}{2}) + \dots = +\infty$$

KASNIJE ĆEMO DOKAZATI DA RED $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ DIVERGIRA, ODHOSNO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = +\infty,$$

A RED $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ KONVERGIRA.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6} < +\infty$$

U PRIMERU $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ OPŠTI ČLAN NIJE NENEGATIVAN, PA KONVERGENCIJU NE TREBA POSMATRATI KAO SUMU

$$-1 + 1 - 1 + \dots$$

(TO JEST DA LI JE SUMA KONAČNA ILI BESKONAČNA).

DEFINICIJA NEKA JE DAT RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. RED $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ NAZVAMO

OSTATKOM REDA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ POSLE m -TOG ČLANA I OZNAČIĆEMO GA SA r_m .

$$(r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n).$$

STAV RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA AKIKO $r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA ZA BILO KOJE m

U SLUČAJU KONVERGENCIJE VAŽI $\lim_{m \rightarrow \infty} r_m = 0$

DOKAZ NEKA JE m FIKSIRANO. NEKA JE $S_k = \sum_{n=1}^k a_n$ PARCIJALNA

SUMA REDA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, A $S'_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k}$ PARCIJALNA

SUMA REDA $r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$. TADA JE $S_{m+k} = S_m + S'_k$ ZA SVAKO $k \in \mathbb{N}$.

VREDNOST S_m JE FIKSIRANA, PA $\lim_{k \rightarrow \infty} S'_k$ POSTOJI AKIKO $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{m+k}$

POSTOJI (ZHAMO DA $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{k+m}$ AKO POSTOJE)

DAKLE, $\lim_{k \rightarrow \infty} S'_k$ POSTOJI AKIKO $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ POSTOJI.

U SLUČAJU DA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA, REDOVI $r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRAJU

I VAŽI $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S$, ODAKLE $\lim_{k \rightarrow \infty} (S - S_k) = 0$, PA JE $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$ ($r_k = S - S_k$)

NA OSNOVU PRETHODNOG STAVA SLEDI DA KONVERGENCIJA REDA NE ZAVISI OD KONAČNOG BROJA ČLANOVA (MOŽEMO ODBACITI ILI DODATI KONAČAN BROJ ČLANOVA I KONVERGENCIJA SE NEĆE PROMENITI).

TEOREMA (KOŠIJEV KRITERIJUM ZA KONVERGENCIJU REDA)

RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA AKO I SAMO AKO

ZA SVAKO $\varepsilon > 0$ POSTOJI $N_0 \in \mathbb{N}$ TAKO DA ZA SVAKO $n > N_0$ I $p \in \mathbb{N}$

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

DOKAZ PRIMENIMO KOŠIJEV KRITERIJUM ZA KONVERGENCIJU NIŽA (S_m)

NIŽ S_m KONVERGIRA AKO I SAMO AKO

ZA SVAKO $\varepsilon > 0$ POSTOJI $N_0 \in \mathbb{N}$ TAKO DA ZA SVAKO $n > N_0$ I $p \in \mathbb{N}$

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

ZBOG $S_{n+p} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}$ SLEDI TVRĐENJE

STAV a) AKO RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA, ONDA I RED $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ KONVERGIRA, GDE

$$\text{PRI TOME JE } \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

b) AKO REDOVI $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ I $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ KONVERGIRAJU, ONDA I RED

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ KONVERGIRA.}$$

$$\text{PRI TOME JE } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

DOKAZ a) AKO RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA, ONDA POSTOJI $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S$,

GDE JE S_m NIŽ PARCIJALNIH SUMA.

NIŽ PARCIJALNIH SUMA S'_m REDA $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ JE

$$S'_m = \sum_{n=1}^m c a_n = c \sum_{n=1}^m a_n = c \cdot S_m.$$

ODAVDE $\lim_{m \rightarrow \infty} S'_m = \lim_{m \rightarrow \infty} c S_m = c \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = c \cdot S$, PA RED

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n \text{ KOKVERGIRA i VAŽI } \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

6) NEKA JE $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m' = S'$ i $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m'' = S''$, GDE SU S_m' i S_m'' PARCIJALNE SUME REDOVA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

TADA JE T_m PARCIJALNA SUMA REDA $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ JEDNAKA

$$T_m = \sum_{n=1}^m (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^m a_n + \sum_{n=1}^m b_n = S_m' + S_m''.$$

IZ JEDNAKOSTI: $\lim_{m \rightarrow \infty} T_m = \lim_{m \rightarrow \infty} (S_m' + S_m'') = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m' + \lim_{m \rightarrow \infty} S_m'' = S + S''$,

SLEDI DA RED $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ KOKVERGIRA i VAŽI

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

POSLEDICA NEKA SU $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ REDOVI.

a) AKO $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KOKVERGIRA i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ DIVERGIRA, OKDA $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ DIVERGIRA („K+D=D“).

b) AKO $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGIRA i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ DIVERGIRA, OKDA NE MOŽEMO NIŠTA RECI UOPŠTEHO O KOKVERGENCIJI REDA $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ („D+D=?“).

MOŽEMO DATI PRIMER GDE JE „D+D=D“:

$$a_n = n, b_n = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ DIVERGIRA, } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ DIVERGIRA}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ DIVERGIRA}$$

MOŽEMO DATI PRIMER GDE JE „D+D=K“:

$$a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n+1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ DIVERGIRA, } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ DIVERGIRA}$$

$$a_n + b_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \text{ KOKVERGIRA}$$

c) Ako redovi: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ DIVERGIRAJU i $a_n \geq 0, b_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$,
onda i red $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ DIVERGIRA

("D+D=D" ZA NENEGATIVNE REDOVE)

STAN (NEOPHODAN USLOV ZA KONVERGENCIJU REDA)

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA, onda $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

DOKAZ NEKA RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA. TADA JE $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S$ i

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{m-1} = S. \text{ VAŽI}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

POSLEDICA Ako niz (a_n) NE KONVERGIRA KA NULI, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGIRA.

PRIMER Niz $a_n = (-1)^n$ NE KONVERGIRA KA NULI, PA RED $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ DIVERGIRA.

NAPOMENA NEOPHODAN USLOV $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ NIJE DOVOLJAN. HAVESĆEMO

PRIMER DIVERGENTNOG REDA KOJI KOJEG JE $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

PRIMER DOKAZALI SMO DA RED $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ DIVERGIRA, A

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + \frac{1}{n}) = 0.$$

REDOVI SA POZITIVNIM ČLANOVIMA

DEFINICIJA

KAŽEMO DA JE RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ RED SA POZITIVNIM ČLANOVIMA

AKO POSTOJI $n_0 \in \mathbb{N}$ TAKO DA JE $a_n \geq 0$ ZA SVAKO $n \geq n_0$

(SVI ČLANOVI POSLE n_0 -ČLANA SU NEHEGATIVNI)

KOD OVAKVIH REDOVA PARCIJALNE SUME SU NEOPADAJUĆE (POSLE n_0 -ČLANA).

STAV RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ SA POZITIVNIM ČLANOVIMA KONVERGIRA AKO I SAMO AKO JE NJEGOV NIZ PARCIJALNIH SUMA OGRANIČEN.

DOKAZ MONOTON NIZ KONVERGIRA AKO I SAMO AKO JE OGRANIČEN.

PRIMER HARMONIJSKI RED $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ DIVERGIRA.

$$S_1=1, S_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}, S_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}, S_4 \approx 2.08, \dots, S_m = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n}$$

m	1	2	3	4	5	6	7	10	100	1000	10000
S_m	1	1.5	1.83	2.08	2.28	2.45	2.59	2.93	5.19	7.49	9.79

DOKAZAĆEMO DA JE $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = +\infty$

VAŽI: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} > 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

...

$$i \quad S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32}\right)}_{\frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right)}_{\frac{1}{2}}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + k \cdot \frac{1}{2}$$

ODAVDE $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2^k} = +\infty$ ($S_2 \geq \frac{3}{2}$, $S_4 \geq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$, $S_8 \geq 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$, ...)

NAŠLI SMO JEDAN PODNIZ KOJI TEŽI $+\infty$, A ZNAMO DA JE S_n RASTUĆI NIZ.

DAKLE, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ I RED $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ DIVERGIRA

NEKA SU $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ I $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ REDOVI SA POZITIVNIM ČLANOVIMA.

NAVEŠĆEMO NEKE KRITERIJUME ZA KONVERGENCIJU.

TEOREMA NEKA JE $a_n \leq b_n$ ZA SVAKO $n \geq n_0$.

a) AKO RED $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ KONVERGIRA, ONDA I RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA

b) AKO RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGIRA, ONDA I RED $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ DIVERGIRA

DOKAZ NEKA SU S_m' I S_m'' NIŽOVI PARCIJALNIH SUMA REDOVA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ I $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

NIŽOVI S_m' I S_m'' SU NEOPADAJUĆI I VAŽI $0 \leq S_m' \leq S_m''$.

AKO S_m'' KONVERGIRA, ONDA I S_m' KONVERGIRA.

AKO S_m' DIVERGIRA, ONDA I S_m'' DIVERGIRA.

TEOREMA NEKA POSTOJI $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = C$, $0 \leq C \leq +\infty$ I $b_n > 0$ ZA SVAKO $n \geq n_0$.

a) AKO JE $C < +\infty$, ONDA IZ KONVERGENCIJE REDA $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ SLEDI

KONVERGENCIJA REDA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) AKO JE $C > 0$, ONDA IZ DIVERGENCIJE REDA $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ SLEDI

DIVERGENCIJA REDA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

c) SPECIJALNO, AKO JE $C \in (0, +\infty)$ ONDA

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ KONVERGIRA} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ KONVERGIRA}$$

DOKAZ a) NEKA JE $C < +\infty$ I NEKA $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ KONVERGIRA

DOKAZAĆEMO DA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA.

Iz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = C$ SLEDI DA ZA $\varepsilon = 1$ POSTOJI $N_0 \in \mathbb{N}$ TAKO DA

$$C - 1 < \frac{a_n}{b_n} < C + 1 \text{ ZA SVAKO } n \geq N_0,$$

T.J. $(C-1)b_n < a_n < (C+1)b_n$ ZA SVAKO $n \geq N_0$

Iz KONVERGENCIJE $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ SLEDI I KONVERGENCIJA $\sum_{n=1}^{\infty} (C+1)b_n$,

ODAKLE NA OSNOVU PRETHODNOG STAVA SLEDI KONVERGENCIJA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

6) NEKA JE $C > 0$ I NEKA $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ DIVERGIRA. PRETPOSTAVIMO DA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA. TADH JE

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{C} = C' < +\infty$$

NA OSNOVU a) SLEDI DA $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ KONVERGIRA, ŠTO JE KONTRADIKCIJA. DAKLE, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGIRA.

c) SLEDI IZ a) I b).

POSLEDICA NEKA SU $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ I $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ REDOVI SA POZITIVNIM ČLANOVIMA.

AKO $a_n \sim b_n$, ONDA SU $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ I $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ EKVIKONVERGENTNI

$$(T.J. \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ KONVERGIRA} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ KONVERGIRA})$$

PRIMER ISPITATI KONVERGENCIJU REDA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+q^n}$, $q > 1$

NEKA JE $a_n = \frac{1}{1+q^n}$ I $b_n = \frac{1}{q^n}$. VAŽI $a_n \sim b_n$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{1+q^n} = 1$).

PA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA AKKO $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ KONVERGIRA.

RED $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n$ KONVERGIRA (GEOMETRIJSKI), ODAKLE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA.

TEOREMA (DALAMBEROV KRITERIJUM)

NEKA JE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ RED SA POZITIVNIM ČLANOVIMA

a) AKO JE $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ ZA SVAKO $n \geq n_0$, ONDA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA

b) AKO JE $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ZA SVAKO $n \geq n_0$, ONDA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGIRA

c) AKO POSTOTI $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, ONDA

ZA $\ell > 1$ RED DIVERGIRA

ZA $\ell \in [0, 1)$ RED KONVERGIRA

DOKAZ a) VAŽI $Q_{n_0+1} \leq q \cdot Q_{n_0}$, $Q_{n_0+2} \leq q^2 Q_{n_0}$, ..., $Q_{n_0+k} \leq q^k Q_{n_0}$

Iz KONVERGENCIJE REDA $\sum_{k=1}^{\infty} Q_{n_0} \cdot q^k$ (GEOMETRIJSKI RED, $q \in (0, 1)$)

SLEDI KONVERGENCIJA REDA $\sum_{k=1}^{\infty} Q_{n_0+k}$, ODAKLE KONVERGIRA I $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$.

b) Niz (Q_n) JE NEOPADAJUĆI I NEHEGATIVAN, PA NE TEŽI NULI.

PREMA TOME, $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ DIVERGIRA.

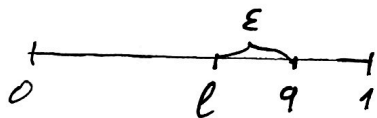
c) AKO JE $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \ell > 1$, Onda za $\varepsilon = \ell - 1$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ TAKO DA JE

$\ell + \varepsilon > \frac{Q_{n+1}}{Q_n} > \ell - \varepsilon = 1$ ZA SVAKO $n \geq n_0$. NA OSNOVU b) RED $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ DIVERGIRA.

AKO JE $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \ell \in (0, 1)$, Onda za $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ TAKO

DA JE $\ell - \varepsilon < \frac{Q_{n+1}}{Q_n} < \ell + \varepsilon = \frac{1+\ell}{2} < 1$, PA ZA $q = \frac{1+\ell}{2}$ ISKORISTI MO

DEO ZADATKA POD a) I DOBIJAMO DA RED $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ KONVERGIRA.



NAPOMENA AKO JE $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = 1$, Onda NA OSNOVU DALAMBEROVOG

KRITERIJUMA NE MOŽEMO NIŠTA REĆI O KONVERGENCIJI REDA.

PRIMER ISPITATI KONVERGENCIJU REDA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

OPŠTI ČLAN JE $Q_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Iz GRANIČNE VREDNOSTI

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)! \cdot n! \cdot n!}{(2n)!! \cdot (n+1)! \cdot (n+1)!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = 4 > 1 \quad \text{i NA OSNOVU DALAMBEROVOG}$$

KRITERIJUMA SLEDI DA RED $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ DIVERGIRA.

TEOREMA

(KOŠIJEV KRITERIJUM)

NEKA JE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ RED SA POZITIVNIM ČLANOVIMA.a) AKO JE $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ ZA SVAKO $n \geq n_0$, ONDA RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA.b) AKO JE $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ ZA SVAKO $n \geq n_0$, ONDA RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGIRAc) AKO POSTOJI $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$, ONDAZA $\ell > 1$ RED DIVERGIRAZA $\ell \in (0, 1)$ RED KONVERGIRADOKAZ a) VAŽI $a_{n_0} \leq q^{n_0}$, $a_{n_0+1} \leq q^{n_0+1}$, ..., $a_{n_0+k} \leq q^{n_0+k}$.IZ KONVERGENCIJE REDA $\sum_{k=1}^{\infty} q^{n_0+k}$ (GEOMETRIJSKI RED, $q \in (0, 1)$)SLEDI KONVERGENCIJA REDA $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$, ODAKLE KONVERGIRA I $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.b) AKO JE $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ ZA SVAKO $n \geq n_0$, ONDA JE $a_n \geq 1 \quad \forall n \geq n_0$, PA a_n NE TEŽI NULI, ODAKLE RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGIRA.c) AKO JE $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell > 1$, ONDA JE $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ POČEV OD NEKOG n_0 , PA NA OSNOVU b) RED DIVERGIRA.AKO JE $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in (0, 1)$, ONDA ZA $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$ POSTOJI $n_0 \in \mathbb{N}$ TAKO DA JE $\ell - \varepsilon > \sqrt[n]{a_n} > \ell + \varepsilon = \frac{1+\ell}{2} < 1$ ZA SVAKO $n \geq n_0$, PAZA $q = \frac{1+\ell}{2}$ ISKORISTIMO DEO ZADATAKA POD a) I DOBIJAMO DA RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA.**NAPOMENA**AKO JE $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, ONDA NA OSNOVU KOŠIJEVOG KRITERIJUMA

NE MOŽEMO NIŠTA REĆI O KONVERGENCIJI REDA.

PRIMERISPITATI KONVERGENCIJU REDA $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n$.IZ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1$, SLEDI DA RED KONVERGIRA