

NESVOJSTVENI INTEGRAL

NEOPHODAN USLOV DA BI FUNKCIJA BILA RIMAN INTEGRABILNA JESTE DA JE DEFINISANA NA SEGMENTU $[a, b]$ I DA JE OGRANIČENA.

ZNAČI, ISPITIVALI SMO DA LI POSTOJI INTEGRAL (RIMANOV)

SAMO ZA FUNKCIJE KOJE SU DEFINISANE NA SEGMENTU I OGRANIČENE.

PROŠIRIĆEMO POJAM INTEGRALA TAKO ŠTO ĆEMO POSMATRATI I

FUNKCIJE KOJE NISU OGRANIČENE I FUNKCIJE KOJE SU DEFINISANE NA $[a, b)$, (a, b) I $(a, b]$, GDE SU $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

DEFINICIJA NEKA JE FUNKCIJA f DEFINISANA NA $[a, b)$, $b \in \mathbb{R}$ I NEKA JE $f \in R[a, \beta]$ ZA SVAKO $\beta \in (a, b)$. GRANIČNA VREDNOST

$$\lim_{\beta \rightarrow b-} \int_a^{\beta} f(x) dx$$

SE NAZIVA NESVOJSTVENI INTEGRAL FUNKCIJE f NA INTERVALU $[a, b)$ I OZNAČAVA SA $\int_a^b f(x) dx$ (JEDNAK JE GRANIČNOJ VREDNOSTI RIMANOVIH INTEGRALA).

ZA TAČKU $x=b$ KAŽEMO DA JE SINGULARITET.

AKO POSTOJI KOHAČAN LIMES $\lim_{\beta \rightarrow b-} \int_a^{\beta} f(x) dx$, KAŽEMO DA INTEGRAL $\int_a^b f(x) dx$ KONVERGIRA, A AKO NE POSTOJI KOHAČAN KAŽEMO DA $\int_a^b f(x) dx$ DIVERGIRA.

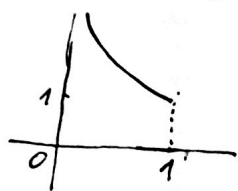
U SLUČAJU DA JE $f \in R[a, b]$, RIMANOV INTEGRAL $\int_a^b f(x) dx$ SE POKLAPA SA DEFINICIJOM NESVOJSTVENOG INTEGRALA (RIMANOV INTEGRAL JE JEDNAK NESVOJSTVENOM ZA SVAKU RIMAN INTEGRABILNU FUNKCIJU.)

Slično se definiše i nesvojstveni integral sa singularitetom u $x=a$ ($\int_a^b f(x) dx = \lim_{d \rightarrow a+} \int_d^b f(x) dx$) za $f \in R[d, b]$ za svako $d \in [a, b]$

PRIMER Ispitati konvergenciju integrala $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ u zavisnosti od realnog parametra p .

Ako je $p \leq 0$, funkcija $f(x) = \frac{1}{x^p}$ je neprekidna na $[0, 1]$, pa je i Riman integrabilna. Odatle integral $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ konvergira. U ovom slučaju nemamo singularitet.

Ako je $p > 0$, funkcija $f(x) = \frac{1}{x^p}$ nije definisana u $x=0$, a neprekidna na $(0, 1]$. Singularitet je $x=0$.



Potrebno je ispitati da li postoji $\lim_{d \rightarrow 0+} \int_d^1 \frac{1}{x^p} dx$ za $p > 0$

$$\text{Važi: } \int_d^1 \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \ln x \Big|_d^1, & p=1 \\ \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_d^1, & p \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \end{cases} = \begin{cases} -\ln d, & p=1 \\ \frac{1}{1-p} (1 - d^{1-p}), & p \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

za $p=1$, $\lim_{d \rightarrow 0+} -\ln d = +\infty$, pa nesvojstveni integral

$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ divergira

$$\text{za } p \neq 1, \lim_{d \rightarrow 0+} \int_d^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{d \rightarrow 0+} \frac{1}{1-p} (1 - d^{1-p}) = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & p \in (0, 1) \\ +\infty, & p > 1 \end{cases}$$

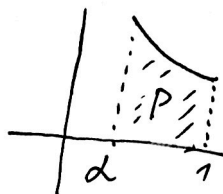
pa integral $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ konvergira ako i samo ako $p \in (0, 1)$

dakle, $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ konvergira ako i samo ako $p < 1$.

GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA (ZA SLUČAJ $p > 0$)

S OBZIROM DA JE $f(x) = \frac{1}{x^p}$ NEPREKIDNA NA $(0, 1]$, ONA JE I RIMAN INTEGRABILNA NA SVAKOM SEGMENTU $[\alpha, 1] \subset (0, 1]$.

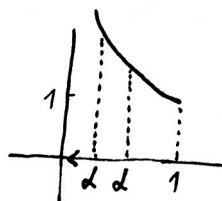
RIMANOV INTEGRAL $\int_{\alpha}^1 \frac{1}{x^p} dx$ MOŽEMO POSMATRATI KAO POVRŠINU KRIVOLINIJSKOG TRAPEZA



$$P = \int_{\alpha}^1 f(x) dx$$

KONVERGENCIJA INTEGRALA U OVOM SLUČAJU JE EKVIVALENTNA

EGZISTENCIJI GRAFIČKE VREDNOSTI POVRŠINA KADA $\alpha \rightarrow 0+$



U SLUČAJU $p \in (0, 1)$ POVRŠINA ISPOD

GRAFIKA A IZNAD X-OSE JE KONAČNA $P = \frac{1}{1-p}$



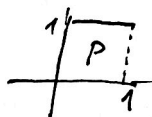
U SLUČAJU $p \geq 1$ POVRŠINA ISPOD

GRAFIKA A IZNAD X-OSE JE „BESKONAČNA“.



$$P = +\infty$$

U SLUČAJU $p = 0$,



U SLUČAJU $p < 0$, $P = \frac{1}{1-p}$



DAKLE, AKO POSMATRAMO FUNKCIJE $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = \frac{1}{x^2}$, SVE

TRI FUNKCIJE IMAJU SLIČNE GRAFIKE ($f_1 \leq f_2 \leq f_3$)



ISPOD GRAFIKA f_1 JE KONAČNA POVRŠINA,

A ISPOD f_2 I f_3 JE BESKONAČNA

DEFINICIJA NEKA JE $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I $f \in R[a, b]$ ZA SVAKO $b \in (a, +\infty)$

GRAFIČNA VREDNOST

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

SE NAZIVA NESVOJSTVENI INTEGRAL FUNKCIJE f NA $[a, +\infty)$

I OZNAČAVA SA $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

KAŽEMO DA JE $+\infty$ SINGULARITET.

SLIČNO SE DEFINIŠE I NESVOJSTVENI INTEGRAL FUNKCIJE f NA $(-\infty, a]$ (SINGULARITET JE $-\infty$)

AKO POSTOJI KOHAČAN LIMES $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ POSTOJI, KAŽEMO DA

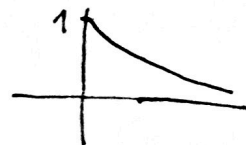
INTEGRAL $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ KONVERGIRA, A AKO NE POSTOJI KOHAČAN KAŽEMO DA DIVERGIRA.

PRIMER ISPITATI KONVERGENCIJU INTEGRALA $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

FUNKCIJA $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ JE DEFINISANA NA $[0, +\infty)$ I RIMAN INTEGRABILNA NA $[0, b]$ ZA SVAKO $b \in (0, +\infty)$. ODAVDE

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b = \frac{\pi}{2},$$

INTEGRAL $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ KONVERGIRA.



PRIMER

ISPITATI KONVERGENCIJU INTEGRALA $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ U ZAVISKOSTI OD REALNOG PARAMETRA p .

NEKA JE $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^p}$. FUNKCIJA f JE RIMAN INTEGRABILNA NA SVAKOM SEGMENTU $[1, z]$ (JER JE f NEPREKIDNA).

POTREBITO JE ISPITATI DA LI POSTOJI: $\lim_{z \rightarrow +\infty} \int_1^z f(x) dx$.

$$\text{IMAMO } \int_1^z f(x) dx = \int_1^z \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \ln x \Big|_1^z, & p=1 \\ \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^z, & p \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} \ln z, & p=1 \\ \frac{1}{1-p} (z^{1-p} - 1), & p \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{ZA } p=1 \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_1^z \frac{1}{x^p} dx = \lim_{z \rightarrow +\infty} \ln z = +\infty, \text{ DA NESVOJSTVENI INTEGRAL}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx \text{ DIVERGIRA}$$

$$\text{ZA } p \neq 1 \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_1^z \frac{1}{x^p} dx = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-p} (z^{1-p} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ +\infty, & p < 1 \end{cases}$$

$$\text{DA INTEGRAL } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \text{ KONVERGIRA AKO I SAMO AKO } p > 1$$

$$\text{DAKLE, } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \text{ KONVERGIRA AKO I SAMO AKO } p > 1.$$

GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA

S OBZIROM DA JE FUNKCIJA $f(x) = \frac{1}{x^p}$ NEPREKIDNA I POZITIVNA

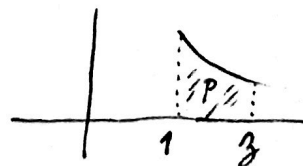
NA $[1, +\infty)$, RIMANOV INTEGRAL $\int_1^z \frac{1}{x^p} dx$ MOŽEMO POSMATRATI KAO

POVRŠINU KRIVOLINIJSKOG TRAPEZA

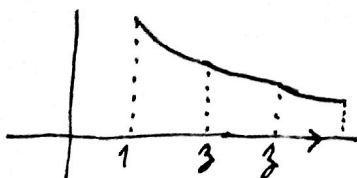
KONVERGENCIJA INTEGRALA U OVOM

SLUČAJU JE EKVIVALENTNA EGZISTENCIJI

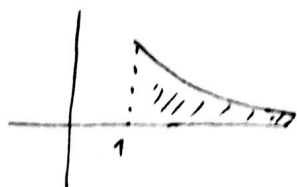
GRAFIČNE VREDNOSTI POVRŠINA KADA $z \rightarrow +\infty$.



$$P = \int_1^z \frac{1}{x^p} dx$$



U SLUČAJU $p > 1$ „POVRŠINA“ ISPOD GRAFIKA A IZNAD X-OSE JE KONACNA



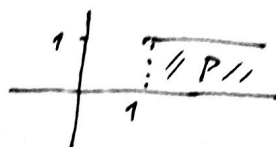
$$P = \frac{1}{p-1}$$

U SLUČAJU $p \in (0, 1]$ „POVRŠINA“ ISPOD GRAFIKA A IZNAD X-OSE JE „BESKONACNA“.



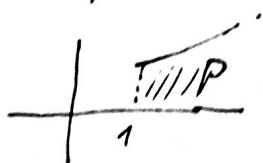
$$P = +\infty$$

U SLUČAJU $p = 0$, $P = +\infty$



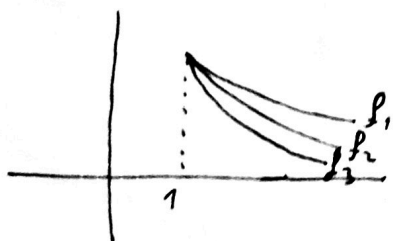
(IMAMO BESKONACNU TRAKU)

U SLUČAJU $p < 0$, $P = +\infty$



DAKLE, AKO POSMATRAMO FUNKCIJE $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$ i $f_3(x) = \frac{1}{x^2}$,

SVE TRI FUNKCIJE IMAJU SLIČNE GRAFIKE ($f_3 \leq f_2 \leq f_1$)



ISPOD GRAFIKA f_3 JE KONACNA POVRŠINA, A ISPOD f_2 I f_1 JE BESKONACNA.

STAV NEKA JE FUNKCIJA f DEFINISANA NA $[a, +\infty)$ I NEKA JE RIMAN INTEGRABILNA NA SVAKOM SEGMENTU $[a, \beta]$, $\beta \in (a, +\infty)$.

a) AKO JE $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ILI $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, ONDA $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ DIVERGIRA

b) AKO JE $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \neq 0$, ONDA $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ DIVERGIRA

NAVEDIMO NEKE OSOBINE NESVOJSTVENOG INTEGRALA $\int_a^b f(x) dx$,

GDE JE $b \in \bar{\mathbb{R}}$ SINGULARITET ($f \in R[a, \beta]$ ZA SVAKO $\beta \in (a, +\infty)$)

OSOBINE VAŽE I KADA JE DONJA GRANICA SINGULARITET.

STAV a) AKO INTEGRALI $\int_a^b f(x) dx$ I $\int_a^b g(x) dx$ KONVERGIRAJU, ONDA JE

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx \quad \text{ZA SVAKO } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

b) NEKA JE $a < c < b$.

INTEGRAL $\int_a^b f(x) dx$ KONVERGIRA AKO I SAMO AKO $\int_c^b f(x) dx$ KONVERGIRA

I VAŽI
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

c) AKO SU f I g GLATKE I POSTOJI $\lim_{x \rightarrow b} f(x)g(x)$ KONAČAN, ONDA

$\int_a^b f(x)g'(x) dx$ KONVERGIRA AKO I SAMO AKO $\int_a^b g(x)f'(x) dx$ KONVERGIRA

I VAŽI
$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx.$$

DOKAZ a) ZA SVAKO $\beta \in (a, b)$ VAŽI (OSOBINA RIMANOVOG INTEGRALA)

$$\int_a^\beta (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^\beta f(x) dx + \mu \int_a^\beta g(x) dx$$

KADA PUSTIMO $\beta \rightarrow b$ DOBITAMO JEDNAKOST.

b) ZA SVAKO $\beta \in (c, b)$ VAŽI (OSOBINA RIMANOVOG INTEGRALA)

$$\int_a^\beta f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^\beta f(x) dx$$

KADA PUSTIMO $z \rightarrow b$ DOBIJAMO JEDNAKOST.

c) ZA SVAKO $z \in (a, b)$ VAŽI (PARCIJALNA INTEGRACIJA KOD RIMANOVOG INTEGRALA)

$$\int_a^z f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^z - \int_a^z f'(x)g(x)dx$$

KADA PUSTIMO $z \rightarrow b$ DOBIJAMO

$$\lim_{z \rightarrow b} \int_a^z f(x)g'(x)dx = \lim_{z \rightarrow b} (f(x)g(x)|_a^z - \int_a^z f'(x)g(x)dx).$$

KAKO POSTOJI $\lim_{z \rightarrow b} f(x)g(x)|_a^z$,

GRANIČNA VREDNOST $\lim_{z \rightarrow b} \int_a^z f(x)g'(x)dx$ POSTOJI AKO I SAMO AKO

GRANIČNA VREDNOST $\lim_{z \rightarrow b} \int_a^z f'(x)g(x)dx$ POSTOJI.

DEFINICIJA a) NEKA JE FUNKCIJA f DEFINISANA NA (a, b) ($a < b$, a MOŽE BITI $-\infty$, b MOŽE BITI $+\infty$) I NEKA JE $f \in R[a, z]$, ZA SVAKO $[a, z] \subset (a, b)$

INTEGRAL $\int_a^b f(x)dx$ KONVERGIRA AKO KONVERGIRAJU INTEGRALI

$$\int_a^c f(x)dx \text{ i } \int_c^b f(x)dx \text{ ZA NEKO } c \in (a, b).$$

(KONVERGENCIJA NE ZAVISI OD TAČKE c .)

b) NEKA JE $a < a_1 < a_2 < \dots < a_n < b$ I NEKA INTEGRAL $\int_a^b f(x)dx$ IMA SINGULARITETE U TAČKAMA $a, a_1, \dots, a_n, b$.

INTEGRAL $\int_a^b f(x)dx$ KONVERGIRA AKO SLEDEĆI INTEGRALI KONVERGIRAJU

$$\int_a^{a_1} f(x)dx, \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx, \int_{a_2}^{a_3} f(x)dx, \dots, \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx \text{ i } \int_{a_{n+1}}^b f(x)dx$$

ZA NEKI IZBOR TAČKA $a, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, b$ ($a < a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} < b$).

PRIMER

ISPITATI KONVERGENCIJU SLEDEĆIH INTEGRALA

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx$ b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$

SINGULARITETI SU $-\infty$ I $+\infty$. ODAKLE, INTEGRAL $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx$

KONVERGIRA AKO KONVERGIRAJU INTEGRALI

$$\bar{I}_1 = \int_{-\infty}^0 e^{-|x|} dx \quad ; \quad \bar{I}_2 = \int_0^{+\infty} e^{-|x|} dx.$$

VAŽI $\lim_{z \rightarrow +\infty} \int_0^z e^{-|x|} dx = \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_0^z e^{-x} dx = \lim_{z \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) \Big|_0^z = \lim_{z \rightarrow +\infty} (-e^{-z} + 1) = 1$

i $\lim_{z \rightarrow -\infty} \int_z^0 e^{-|x|} dx = \lim_{z \rightarrow -\infty} \int_z^0 e^{-(-x)} dx = \lim_{z \rightarrow -\infty} \int_z^0 e^x dx = \lim_{z \rightarrow -\infty} (1 - e^z) = 1$

PREMA TOME, $\bar{I}_1$ I $\bar{I}_2$ KONVERGIRAJU, PA I INTEGRAL

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx \text{ KONVERGIRA.}$$

b) AKO JE $p > 0$, SINGULARITETI SU $x=0$ I $+\infty$.

AKO JE $p \leq 0$, SINGULARITET JE $+\infty$.

INTEGRAL $\bar{I} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ KONVERGIRA AKO INTEGRALI

$$\bar{I}_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^p} \quad ; \quad \bar{I}_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ KONVERGIRAJU}$$

DOKAZALI SMO DA INTEGRAL $\bar{I}_1$ KONVERGIRA AKIKO $p < 1$,

A INTEGRAL $\bar{I}_2$ KONVERGIRA AKIKO $p > 1$.

ODAKLE $\bar{I}$ DIVERGIRA ZA SVAKO $p \in \mathbb{R}$.

KRITERIJUMI ZA KONVERGENCIJU NESVOJSTVENOG INTEGRALA

DOSAD SMO ISPITIVALI KONVERGENCIJU NEKIH NESVOJSTVENIH INTEGRALA POMOCU RAČUNANJA GRANIČNE VREDNOSTI.

SADA ĆEMO NAVESTI NEKE KRITERIJUME ZA KONVERGENCIJU.

PODSETIMO SE KOŠIJEVOG PRINCIPA EGZISTENCIJE LIMESA.

NEKA JE $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$ I b JE TAČKA NAGOMILAVANJA SKUPA A . TADA

POSTOJI $\lim_{z \rightarrow b} \varphi(z)$ AKIKO $(\forall \varepsilon > 0) \exists U(b) \cdot \forall x', x'' \in A$

$$(x', x'' \in U(b) \Rightarrow |\varphi(x') - \varphi(x'')| < \varepsilon)$$

AKO JE b KONAČNA VREDNOST,

POSTOJI $\lim_{z \rightarrow b} \varphi(z)$ AKIKO $(\forall \varepsilon > 0) (\exists z_0) (\forall z', z'' \in A)$

$$(z', z'' \in (z_0, b) \Rightarrow |\varphi(z') - \varphi(z'')| < \varepsilon)$$

AKO JE $b = +\infty$,

POSTOJI $\lim_{z \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ AKIKO $(\forall \varepsilon > 0) (\exists z_0) (\forall z', z'' \in A)$

$$(z' > z_0, z'' > z_0 \Rightarrow |\varphi(z') - \varphi(z'')| < \varepsilon)$$

NEKA JE $f \in R[a, \beta]$ ZA SVAKO $[a, \beta] \subset [a, b)$ I NEKA JE $b \in \mathbb{R}$ SINGULARITET.

TEOREMA INTEGRAL $\int_a^b f(x) dx$ KONVERGIRA AKO I SAMO AKO

ZA SVAKO $\varepsilon > 0$ POSTOJI $z_0 \in (a, b)$ TAKO DA ZA SVAKO

$$z_1, z_2 \in (z_0, b) \text{ VAŽI } \left| \int_{z_1}^{z_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

DOKAZ INTEGRAL $\int_a^b f(x) dx$ KONVERGIRA AKO POSTOJI GRANIČNA VREDNOST $\lim_{z \rightarrow b} \varphi(z)$, GDE JE $\varphi(z) = \int_a^z f(x) dx$.

NA OSNOVU KOŠIJEVOG PRINCIPA, $\lim_{z \rightarrow b} \varphi(z)$ POSTOJI AKIKO

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists z_0) (\forall z', z'' \in (a, b))$$

$$(z' > z_0, z'' > z_0 \Rightarrow |\varphi(z') - \varphi(z'')| = \left| \int_{z'}^{z''} f(x) dx \right| < \varepsilon)$$

STAV NEKA JE $|f(x)| \leq g(x)$ ZA SVAKO $x \in (a, b)$.

AKO $\int_a^b g(x) dx$ KONVERGIRA, Onda i $\int_a^b f(x) dx$ KONVERGIRA.

DOKAZ NEKA SU ISPUHJENI USLOVI STAVA. DOKAZAĆEMO DA $\int_a^b f(x) dx$ KONVERGIRA.

NEKA JE $\varepsilon > 0$ PROIZVOLJNO. NA OSNOVU KONVERGENCIJE $\int_a^b g(x) dx$ I PRETHODNE TEOREME, POSTOJI $\beta_0 \in (a, b)$, TAKO DA ZA SVAKO

$$\beta', \beta'' \in (\beta_0, b) \quad \int_{\beta'}^{\beta''} g(x) dx < \varepsilon.$$

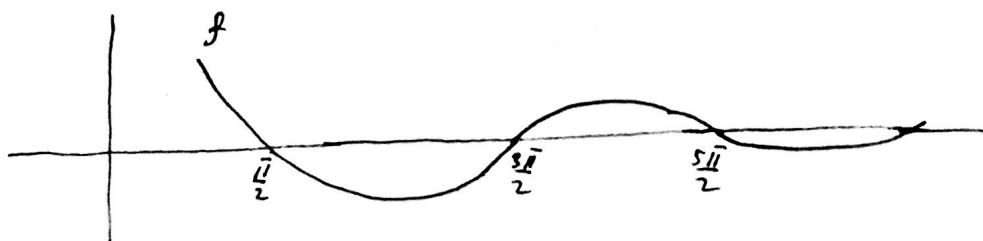
$$\text{TADA VAŽI } \left| \int_{\beta'}^{\beta''} f(x) dx \right| \leq \int_{\beta'}^{\beta''} |f(x)| dx \leq \int_{\beta'}^{\beta''} g(x) dx < \varepsilon.$$

DEFINICIJA NESVOJSTVENI INTEGRAL $\int_a^b f(x) dx$ APSOLUTNO KONVERGIRA AKO KONVERGIRA $\int_a^b |f(x)| dx$.

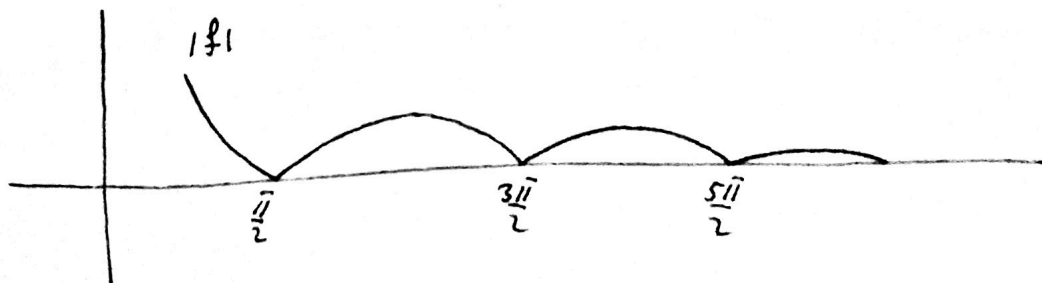
POSLEDICA AKO $\int_a^b f(x) dx$ APSOLUTNO KONVERGIRA, Onda $\int_a^b f(x) dx$ KONVERGIRA.

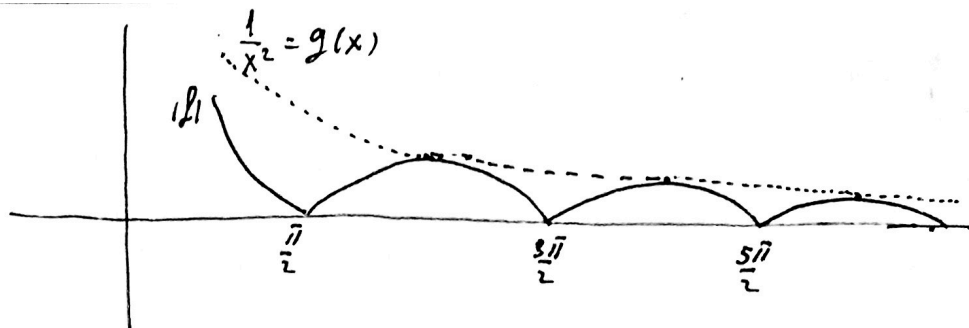
DOKAZ SLEDI NA OSNOVU PRETHODNOG STAVA ($g(x) = |f(x)|$)

PRIMER ISPITATI KONVERGENCIJU INTEGRALA $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$



$$f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$$





DOKAZAČEMO DA $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ APSOLUTNO KONVERGIRA.

VAŽI: $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ ZA SVAKO $x \geq 1$.

Iz konvergenције integrala $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ (VIDETI PRIMER, $p=2>1$)

i NA OSNOVU STAVA ($g(x) = \frac{1}{x^2}$) SLEDI KONVERGENCIJA INTEGRALA $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx$, TO JEST $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ APSOLUTNO KONVERGIRA.

NA OSNOVU POSLEDICE SLEDI DA $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ KONVERGIRA.

GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA STAVA

POVRŠINA OBLASTI „ISPOD“ $f(x)$ JE MANJA OD POVRŠINE „ISPOD“ $g(x)$.

DA SE PODSETIMO: KONVERGENCIJA NESVOJSTVENOG INTEGRALA $\int_a^b f(x) dx$ U SLUČAJU KADA JE $f \in C[a, b)$ POZITIVNA EKVIVALENTNA JE TOME DA LI JE POVRŠINA „ISPOD“ GRAFIKA FUNKCIJE f KONAČNA.

NAVEŠĆEMO NEKE KRITERIJUME KONVERGENCIJE INTEGRALA KADA JE FUNKCIJA NENEGATIVNA.

STAV: NEKA SU $\int_a^b f(x) dx$ I $\int_a^b g(x) dx$ NESVOJSTVENI INTEGRALI SA SINGULARITETOM U $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ I NEKA JE $0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b)$.

AKO $\int_a^b g(x) dx$ KONVERGIRA, Onda i $\int_a^b f(x) dx$ KONVERGIRA.

AKO $\int_a^b f(x) dx$ DIVERGIRA, Onda i $\int_a^b g(x) dx$ DIVERGIRA.

DOKAZ Funkcije $\varphi_1(x) = \int_a^x f(t)dt$ i $\varphi_2(x) = \int_a^x g(t)dt$ su rastuće

(jer su f i g nenegativne) i važi $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ $\forall x \in [a, b]$

Ako $\int_a^b g(x)dx$ konvergira, onda postoji $\lim_{\beta \rightarrow b} \varphi_2(\beta) = M$. Odatle

postoji $\lim_{\beta \rightarrow b} \varphi_1(\beta)$ (φ_1 je monotona i ograničena sa M), to jest

$\int_a^b f(x)dx$ konvergira

DRUGO TVRĐENJE JE KONTRAPOZICIJA PRVOG.

STAV NEKA SU $\bar{I}_1 = \int_a^b f(x)dx$ i $\bar{I}_2 = \int_a^b g(x)dx$ NESVOJSTVENI INTEGRALI SA SINGULARITETOM U $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f(x) \geq 0$ i $g(x) > 0$ $\forall x \in [a, b)$ i

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = C, \quad 0 \leq C \leq +\infty.$$

a) Ako je $C < +\infty$, onda iz konvergencije $\bar{I}_2$ sledi konvergencija $\bar{I}_1$.

b) Ako je $C > 0$, onda iz divergencije $\bar{I}_2$ sledi divergencija $\bar{I}_1$.

c) Specijalno, ako je $C \in (0, +\infty)$ onda

$\bar{I}_1$ konvergira $\Leftrightarrow \bar{I}_2$ konvergira

(to jest ekvivalentni, istog tipa konvergencije)

DOKAZ NEKA SU ZADOVOLJENI USLOVI STAVA.

a) NEKA JE $C < +\infty$ I NEKA $\bar{I}_2$ KONVERGIRA.

DOKAZAĆEMO DA $\bar{I}_1$ KONVERGIRA.

Iz $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = C$ sledi da za $\varepsilon = 1$ postoji β_0 tako da

$$C - 1 < \frac{f(x)}{g(x)} < C + 1 \quad \text{za svako } x \in (\beta_0, b),$$

$$\text{t.j. } (C - 1)g(x) < f(x) < (C + 1)g(x) \quad \text{za svako } x \in (\beta_0, b)$$

Iz konvergencije $\bar{I}_2$ sledi i konvergencija $\int_a^b (C + 1)g(x)dx$,
odakle na osnovu prethodnog stava sledi konvergencija $\bar{I}_1$.

b) NEKA JE $C > 0$; NEKA $\bar{I}_2$ DIVERGIRA. PRETPOSTAVIMO $\bar{I}_1$ KONVERGIRA.

$$\text{TADA JE } \lim_{x \rightarrow b} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{C} = C' < +\infty.$$

NA OSNOVU a) SLEDI DA $\bar{I}_2$ KONVERGIRA, ŠTO JE KONTRADIKCIJA.

DAKLE, $\bar{I}_1$ DIVERGIRA.

c) SLEDI IZ a) I b)

POSLEDICA NEKA SU $\bar{I}_1 = \int_a^b f(x) dx$ I $\bar{I}_2 = \int_a^b g(x) dx$ NESVOJSTVENI INTEGRALI
I $f(x) \geq 0$ I $g(x) \geq 0$ ZA SVAKO $x \in (a, b)$ ($b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ JE SINGULARITET)

AKO $f \sim g$ (KADA $x \rightarrow b$), Onda su $\bar{I}_1$ I $\bar{I}_2$ EKVIKONVERGENтни

(T.J. $\bar{I}_1$ -KONVERGIRA $\Leftrightarrow \bar{I}_2$ -KONVERGIRA)

PRIMER ISPITATI KONVERGENCIJU INTEGRALA

$$a) \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad b) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt[3]{1+x^3}}$$

a) NEKA JE $f(x) = e^{-x^2}$ I $g(x) = e^{-x}$, $x \in [1, +\infty)$,

VAŽI $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [1, +\infty)$.

IZ KONVERGENCIJE $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$, SLEDI KONVERGENCIJA $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

FUNKCIJA f JE RIMAN INTEGRABILNA NA $[0, 1]$, PA IMAMO

DA INTEGRAL $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ KONVERGIRA.

b) NEKA JE $f(x) = \frac{1}{x \sqrt[3]{1+x^3}}$ I $g(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in [1, +\infty)$

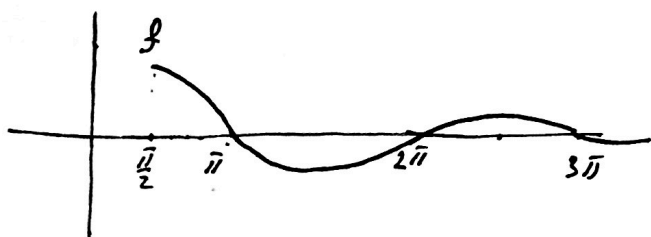
VAŽI: $f \sim g$ (KADA $x \rightarrow +\infty$) ($\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$)

INTEGRAL $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ KONVERGIRA ($2 > 1$)

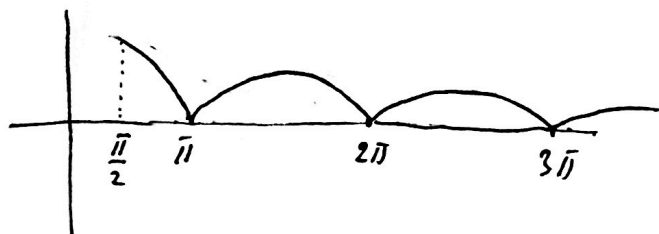
NA OSNOVU POSLEDICE INTEGRAL $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ KONVERGIRA.

PRIMER (NESVOJSTVENI INTEGRAL KOJI KONVERGIRA, A NE KONVERGIRA APSOLUTNO)

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$



$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx &\approx 0.4812 \\ \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx &\approx 0.2376 \\ \int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx &\approx 0.0474, \quad \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx \approx 0.1851 \\ \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx &= 0.904, \quad \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \approx 0.2 \end{aligned}$$



$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty$$

MOŽE SE DOKAZATI: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ ($\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$)

ZA SVAKO $\beta \in (\frac{\pi}{2}, +\infty)$ VAŽI

$$\int_{\pi/2}^{\beta} \frac{\sin x}{x} dx = \left(\begin{array}{l} u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{dx}{x^2} \\ dy = \sin x dx \Rightarrow y = -\cos x \end{array} \right) = \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_{\pi/2}^{\beta} - \int_{\pi/2}^{\beta} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Iz $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} -\frac{\cos \beta}{\beta} = 0$ i KONVERGENCIJE $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ (DOKAZALI SMO)

SLEDI i KONVERGENCIJA $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

DOKAZAĆEMO DA INTEGRAL $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ NE KONVERGIRA APSOLUTNO

VAŽI

$$\int_{\pi/2}^{\beta} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \int_{\pi/2}^{\beta} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\beta} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\beta} \frac{\cos 2x}{x} dx$$

Jer je $|\sin x| \geq \sin^2 x$

ZHAMO DA JE $\lim_{z \rightarrow +\infty} \int_{\pi/2}^z \frac{1}{x} dx = +\infty$ (JER $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{dx}{x}$ JE DIVERGENTAN)

DOKAZAĆEMO DA POSTOJI $\lim_{z \rightarrow +\infty} \int_{\pi/2}^z \frac{\cos 2x}{x} dx$

(TO JEST $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ KONVERGIRA),

$$\int_{\pi/2}^z \frac{\cos 2x}{x} dx = \left(\begin{array}{l} u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{dx}{x^2} \\ dv = \cos(2x) dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin 2x}{x} \Big|_{\pi/2}^z - \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^z \frac{\sin 2x}{x^2} dx.$$

Iz $\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\sin 2x}{x} = 0$ i KONVERGENCIJE INTEGRALA $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2} dx$

(ABSOLUTNO KONVERGIRA, SLIČNO KAO I $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$), SLEDI DA

$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ KONVERGIRA

PREMA TOME, $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ DIVERGIRA, PA I $\int_{\pi/2}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ DIVERGIRA

PRIMER (NESVOJSTVENI INTEGRAL KOJI KONVERGIRA SA SINGULARITETOM U $+\infty$, A NE VAŽI $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.)

FREIZELEDOVI INTEGRALI $I = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ i $J = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$

KONVERGIRAJU, A GRANIČNE VREDNOSTI $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x^2)$ i

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x^2)$ NE POSTOJE

ZA $x_n' = \sqrt{2n\pi} \rightarrow +\infty$ VAŽI $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x_n') = 0$,

A ZA $x_n'' = \sqrt{2n\pi + \pi} \rightarrow +\infty$ VAŽI $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x_n'') = 1$,

ODAKLE NE POSTOJI $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x^2)$ (SLIČNO I ZA $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x^2$)

ZA SVAKO $\beta \in (0, +\infty)$ VAŽI

$$\int_1^{\beta} \sin(x^2) dx = \left(\frac{t=x^2}{dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}} \right) = \frac{1}{2} \int_1^{\beta^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

DOKAZAĆEMO DA $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ KONVERGIRA, ODNOSNO ZA SVAKO $\varepsilon > 0$ POSTOJI β_0 TAKO DA ZA SVAKO $\beta', \beta'' > \beta_0$ $\left| \int_{\beta'}^{\beta''} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \right| < \varepsilon$.

NEKA JE $\varepsilon > 0$ PROIZVOLJNO.

ZA SVAKO $x, y \in (0, +\infty)$ $\left| \int_x^y \sin t dt \right| = |\cos y - \cos x| \leq 2$

Iz $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} = 0$, SLEDI DA ZA $\frac{\varepsilon}{4} > 0$ POSTOJI $\beta_0 \in (1, +\infty)$

TAKO DA $\frac{1}{\sqrt{t}} < \frac{\varepsilon}{4}$ ZA SVAKO $t > \beta_0$ ($\beta_0 = \frac{16}{\varepsilon^2}$)

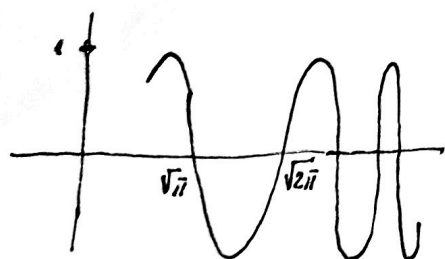
PREMA DRUGOJ TEOREMI O SREDNJOJ VREDNOSTI ZA $\beta_0 < \beta' < \beta'' < \infty$

POSTOJI $\eta \in [\beta', \beta'']$ TAKO DA VAŽI ($f(x) = \sin x, g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$)

$$\int_{\beta'}^{\beta''} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{\sqrt{\beta'}} \int_{\beta'}^{\eta} \sin x dx + \frac{1}{\sqrt{\beta''}} \int_{\eta}^{\beta''} \sin x dx$$

ODAVDE

$$\left| \int_{\beta'}^{\beta''} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \right| < \frac{\varepsilon}{4} \cdot 2 + \frac{\varepsilon}{4} \cdot 2 = \varepsilon$$



NULE FUNKCIJE $x_n^2 = n\pi, n \in \mathbb{N}$

$x_n = \sqrt{n\pi}, n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi} = \frac{(n+1)\pi - n\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}} \rightarrow 0$$

$$\int_1^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2) dx \approx 0.5846, \quad \int_1^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2) dx \approx 0.1201$$

$$\int_1^{\sqrt{3\pi}} \sin(x^2) dx \approx 0.478, \quad \int_1^{\sqrt{4\pi}} \sin(x^2) dx \approx 0.176$$

$$\int_1^{\sqrt{5\pi}} \sin(x^2) dx \approx 0.4422, \quad \int_1^{\sqrt{6\pi}} \sin(x^2) dx \approx 0.2015$$

$$\int_1^{+\infty} \sin(x^2) dx \approx 0.3164, \quad \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \approx 0.6267$$

PRIMER

ISPITATI KONVERGENCIJU INTEGRALA U ZAVISNOSTI OD REALNIH PARAMETARA α I β .

$$a) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e x^\alpha (\ln x)^\beta}$$

$$b) \int_1^e \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$$

$$c) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$$

a) ZA $\alpha > 1$ IMAMO $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^{-\beta}}{x^{\alpha-\lambda}} = 0$
 $\lambda \in (1, \alpha)$
 PR: $\lambda = \frac{\alpha+1}{2}$

I IZ KONVERGENCIJE INTEGRALA $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha-1}}$ I TEOREME
 SLEDI DA $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e x^\alpha (\ln x)^\beta}$ KONVERGIRA.

ZA $\alpha < 1$ IMAMO

$\lambda \in (\alpha, 1)$
 PR: $\lambda = \frac{\alpha+1}{2}$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{(\ln x)^\beta} = +\infty$

I IZ DIVERGENCIJE INTEGRALA $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ I TEOREME
 SLEDI DA $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e x^\alpha (\ln x)^\beta}$ DIVERGIRA.

ZA $\alpha = 1$ IMAMO

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e x (\ln x)^\beta} = \left(\ln x = t \right) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta} \text{ KONVERGIRA AKKO } \beta > 1$$

I KONVERGIRA AKKO ($\alpha > 1$) ILI ($\alpha = 1$ I $\beta > 1$)

b) SINGULARITET JE $x=1$ (ZA $\beta > 0$)

ZA $\beta \leq 0$ $f(x) = \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ JE NEPREKIDNA NA $[1, e]$ I INTEGRAL KONVERGIRA

ZA $\beta > 0$

$$\int_1^e \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx = \left(\ln x = t \right) = \int_0^1 \frac{e^t dt}{e^{\alpha t} t^\beta} = \int_0^1 \frac{e^{(1-\alpha)t}}{t^\beta} dt$$

KADA $t \rightarrow 0$ $\frac{e^{(1-\alpha)t}}{t^\beta} \sim \frac{1}{t^\beta}$ PA IZ TEOREME SLEDI:

$\int_1^e f(x) dx$ KONVERGIRA AKKO $\beta < 1$

$\tilde{I}$ KONVERGIRA AKKO $\beta < 1$.

c) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ KONVERGIRA AKO KONVERGIRAJU $\int_1^e \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$

i $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ KONVERGIRA AKKO $\alpha > 1$ i $\beta < 1$.