

PRIMENA INTEGRALA

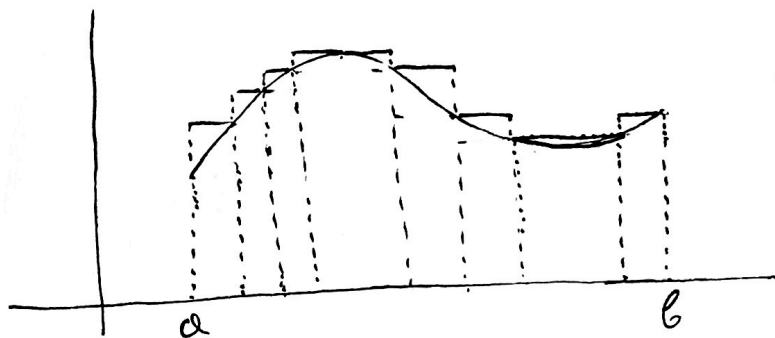
POVRŠINA RAVNIH LIKOVA

NEKA JE $f \in C[a, b]$ NENEGATIVNA FUNKCIJA. TADA JE f RIMAN INTEGRABILNA

$$i \quad \bar{I} = \int_a^b f(x) dx = \inf_P S(f, P) = \sup_P \lambda(f, P), \text{ ODNOSNO ZA SVAKO } \varepsilon > 0$$

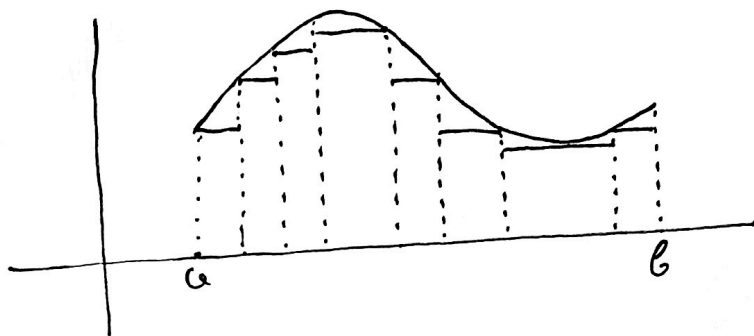
POSTOJI $\delta > 0$ TAKO DA ZA SVAKU PODELU P

$$\lambda(P) < \delta \Rightarrow |S(f, P) - \lambda(f, P)| < \varepsilon.$$



$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

JE ZBIR POVRŠINA OPISANIH
PRAVOUTUGAONIKA



$$\lambda(f, P) = \sum_{i=1}^n \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

JE ZBIR POVRŠINA UPISANIH
PRAVOUTUGAONIKA

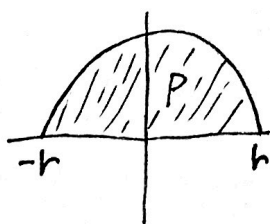
ZBOG INTEGRABILNOSTI FUNKCIJE f IMAMO DA JE POVRŠINA OBLASTI

OGRANIČENE GRAFIKOM FUNKCIJE, X-OSOM I PRAVAMA $x=a, x=b$

(KRIVOLINIJSKI TRAPEZ) JEDNAKA

$$P = \inf_P S(f, P) = \sup_P \lambda(f, P) = \int_a^b f(x) dx$$

PRIMER IZRAČUNATI POVRŠINU POLUKRUGA POLUPREČNICA h .



$$iz \quad x^2 + y^2 = h^2, \text{ sledi } y = \sqrt{h^2 - x^2}, \quad y \geq 0$$

$$P = \int_{-h}^h \sqrt{h^2 - x^2} dx = \left(\begin{array}{l} x = h \sin t \\ x = -h \rightarrow t = -\frac{\pi}{2}, \quad x = h \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right)$$

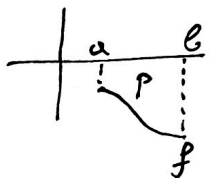
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{h^2 \cos^2 t} \cdot h \cos t dt = h^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt$$

$$= h^2 \left(\frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt \right) = \frac{h^2}{2} \left(\pi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2t dt \right) = \left(\begin{matrix} u=2t \\ du=2dt \end{matrix} \right) =$$

$$= \frac{h^2}{2} \left(\pi + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos u du \right) = \frac{h^2}{2} \pi. \text{ Plošina kruga je } \pi r^2.$$

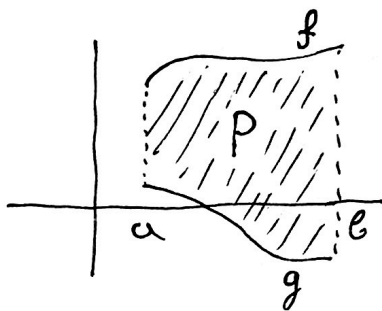
Ako $f \in C[a, b]$ nije pozitivna ($f(x) \leq 0 \forall x \in [a, b]$), onda je

$$\int_a^b f(x) dx = -P$$



POSLEDICA NEKA SU $f, g \in C[a, b]$ TAKVE DA JE $g(x) \leq f(x)$ ZA SVAKO $x \in [a, b]$. Plošina dela ravni ograničenog grafičima funkcija f i g i pravama $x=a, x=b$ jednaka je

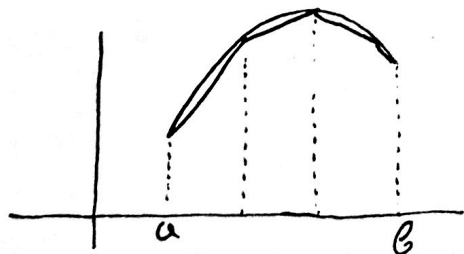
$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



Ako je $f \in C[a, b]$ data u parametarskom obliku $x=x(t), y=y(t), t \in [a, b]$ onda se može dokazati da je $P = \int_a^b y(t) x'(t) dt$ (f nenegativna).

DUŽINA KRIVE

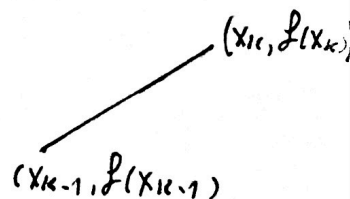
NEKA JE $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ NEPREKIDNO DIFERENCIJABILNA.



INTUITIVNO JE OČEKIVATI DA JE DUŽINA KRIVE GRANIČNA VREDNOST DUŽINA IZLOMLJENIH LINIJA

NEKA JE $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ PODELA SEGMENTA $[a, b]$.

DUŽINA JEDNE DUŽI JE $\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$



A IZLOMLJENA LINIJE JE

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}{(x_i - x_{i-1})^2}} (x_i - x_{i-1})$$

S OBZIROM DA JE f NEPREKIDNA NA $[x_{i-1}, x_i]$ I DIFERENCIJABILNA NA (x_{i-1}, x_i) , NA OSNOVU LAGRANŽOVE TEOREME, POSTOJE $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ TAKO DA JE $f'(\xi_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$, A ODATLE DUŽINA IZLOMLJENE

LINIJJE JE
$$\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} (x_i - x_{i-1}).$$

POSMATRAJMO GRANIČNU VREDNOST

$$A = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} (x_i - x_{i-1}) \quad (\xi_i \text{ PROIZVOLJAN IZBOR TAČAKA})$$

ZNAMO DA JE FUNKCIJA $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ NEPREKIDNA, A ODATLE I RIMAN INTEGRABILNA, PA (NEZAVISKO OD IZBORA TAČAKA ξ_i) VAŽI

$$A = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad \left(= \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} (x_i - x_{i-1}) \right)$$

DAKLE, DUŽINA KRIVE JE

$$L = A = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

NEKA JE FUNKCIJA $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ DATA U PARAMETARSKOM OBLIKU

$$f: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [a, b] \quad x, y \in C^1[a, b].$$

DUŽINA KRIVE (GRAFIK FUNKCIJE f) JE

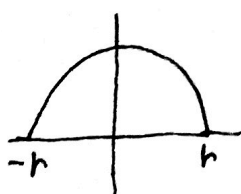
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} x'(t) dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

$$\downarrow$$

$$\left(\frac{df}{dx} = \frac{\frac{df}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \right)$$

PRIMER

IZRAČUNATI DUŽINU POLUKRUŽNICE POLUPREČNIKA r



$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

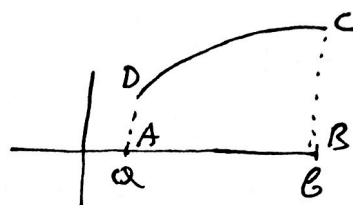
$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$L = \int_{-r}^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_{-r}^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx =$$

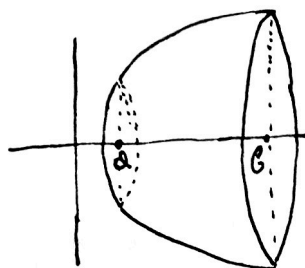
$$= r \arcsin \frac{x}{r} \Big|_{-r}^r = r \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = r\pi$$

ZAPREMINA OBRTHIH TELO

NEKA JE f LECO, $[a, b]$ POZITIVNA FUNKCIJA

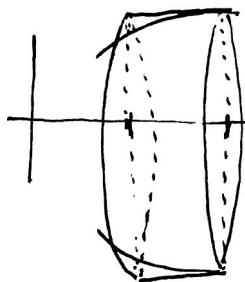


AKO KRIVOLINIJSKI TRAPEZ ABCD ROTIRA OKO X-OSE DOBIVA SE TELO.



NEKA JE $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ PODELA SEGMENTA $[a, b]$
 I NEKA SU $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ I $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$.

TADA SU $m_i^2 \pi \cdot (x_i - x_{i-1})$ ZAPREMI NE UPISANIH VALJAKA



A $M_i^2 \pi \cdot (x_i - x_{i-1})$ SU ZAPREMI NE OPISANIH VALJAKA

ZBIR SVIH UPISANIH VALJAKA JE $\sum_{i=1}^n m_i^2 \pi (x_i - x_{i-1})$,

A ZBIR SVIH OPISANIH VALJAKA JE $\sum_{i=1}^n M_i^2 \pi (x_i - x_{i-1})$

OVI ZBIROVI SU DONJA DARBOUVA SUMA I GORNJA DARBOUVA SUMA

ZA FUNKCIJU $f^2(x) \cdot \pi$ I PODELU P , A NJIHOVA GRANIČNA VREDNOST

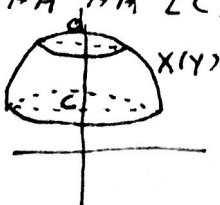
JE $\int_a^b f^2(x) \pi dx$ (f^2 JE NEPREKIDNA, PA JE $f^2(x) \cdot \pi$ RIMAN INTEGRABILNA)

OČEKIVANA DEFINICIJA ZAPREMI NE OBRTHOG TELA BI BILA OVA
 GRANIČNA VREDNOST (TO JEST GRANIČNA VREDNOST ZBIRA UPISANIH,
 ODHOSHO OPISANIH VALJAKA). DAKLE

$$V = \int_a^b f^2(x) \pi dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

AKO $x = x(y)$ JE NEPREKIDNA NA $[c, d]$ I ROTIRA OKO Y-OSE, Onda

$$JE \quad V = \pi \int_c^d x^2(y) dy$$



AKO JE FUNKCIJA DATA U PARAMETARSKOM OBLIKU

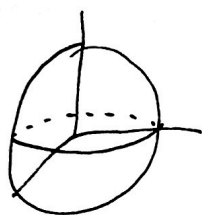
$$x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$$

OKIDA JE ZAPREMINA OBRTHOG TEĽA NASTALOG ROTACIJOM OKO X-OSE

$$V = \pi \int_a^b y^2(t) x'(t) dt.$$

PRIMER

IZRAČUNATI ZAPREMINU LOPTE POLUPREČNIKA h .

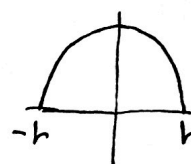


LOPTA SE DOBIVA ROTACIJOM POLUKRUGA

$$x^2 + y^2 = h^2, y \geq 0 \text{ OKO } x\text{-OSE}$$

$$(T.J. y = \sqrt{h^2 - x^2})$$

ZAPREMINA LOPTE JE

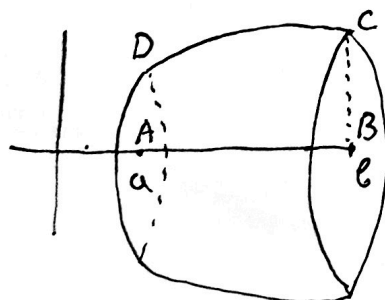


$$V = \pi \int_{-h}^h y^2(x) dx = \pi \int_{-h}^h (h^2 - x^2) dx = \pi \left(h^2 \cdot \int_{-h}^h dx - \frac{x^3}{3} \Big|_{-h}^h \right)$$

$$= \pi \left(h^2 \cdot 2h - \left(\frac{h^3}{3} + \frac{h^3}{3} \right) \right) = \pi \left(2h^3 - \frac{2}{3}h^3 \right) = \frac{4}{3}h^3\pi$$

POVRŠINA OBRTHIH TEĽA

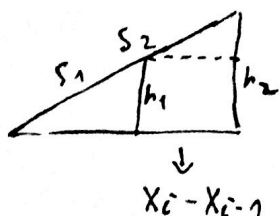
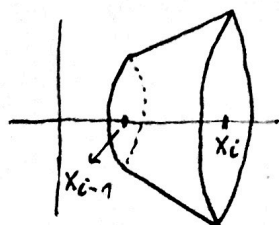
NEKA JE FUNKCIJA NEPREKIDNO DIFERENCIJABILNA NA $[a, b]$ I POZITIVNA.



DEFINIŠIMO POVRŠINU OMOTAČA TEĽA KOJE DOBIVA ROTACIJOM KRIVOLINIJSKOG TRAPEZA ABCD OKO X-OSE.

NEKA JE $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ PODELA SEGMENTA $[a, b]$.

POSMATRAJMO TRAPEZ SA TEMELJIMA $(x_{i-1}, 0), (x_i, 0), (x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ I $(x_i, f(x_i))$. ROTACIJOM OVOG TRAPEZA OKO X-OSE DOBIVA SE ZARUBljena KUPA ČIJA POVRŠINA OMOTAČA $P = h_2\pi s_2 - h_1\pi s_1$ ($h_1 = f(x_{i-1}), h_2 = f(x_i)$)



$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{s_2}{s_1}$$

$$(s_2 - s_1)^2 = (x_i - x_{i-1})^2 + (h_2 - h_1)^2$$

$$S_2 = S_1 \frac{h_2}{h_1}$$

$$\left(S_1 \frac{h_2}{h_1} - S_1\right)^2 = (x_i - x_{i-1})^2 + (h_2 - h_1)^2$$

$$S_1^2 = \frac{(x_i - x_{i-1})^2 + (h_2 - h_1)^2}{\left(\frac{h_2}{h_1} - 1\right)^2}, \quad S_1 = \sqrt{\frac{h_1^2 [(x_i - x_{i-1})^2 + (h_2 - h_1)^2]}{(h_2 - h_1)^2}}$$

$$= \frac{h_1}{h_2 - h_1} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (h_2 - h_1)^2}$$

$$P = h_2 \pi \frac{h_1}{h_2 - h_1} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (h_2 - h_1)^2} \frac{h_2}{h_1} \rightarrow h_1 \pi \frac{h_1}{h_2 - h_1} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (h_2 - h_1)^2}$$

$$= \pi \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (h_i - h_1)^2} \cdot \frac{1}{h_2 - h_1} (h_2^2 - h_1^2) = \pi (h_1 + h_2) \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (h_2 - h_1)^2}$$

ODAVDE POUVRŠINA OMOTAČA SVIH ZARUBLJENIH KUPA JE

$$\sum_{i=1}^n \pi (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \sqrt{\Delta x_i^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

OČEKIVANA DEFINICIJA POUVRŠINE OMOTAČA OBRTHOG TELA BI BILA GRAFIČNA VREDNOST ZBIRA OVIH OMOTAČA ZARUBLJENIH KUPA IKADA $\lambda(P) \rightarrow 0$, TO JEST

$$S = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \sqrt{\Delta x_i^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

$$= \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} 2\pi \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

FUNKCIJA f JE NEPREKIDNA NA $[x_{i-1}, x_i]$, PA NA OSNOVU BOLCAKO KOŠIJEVE TEOREME ZA $\xi_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \in [f(x_{i-1}), f(x_i)]$ POSTOJI; $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ TAKO DA JE $f(\xi_i) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$.

FUNKCIJA f JE NEPREKIDNA NA $[x_{i-1}, x_i]$ I DIFFERENCIJABILNA NA (x_{i-1}, x_i) , PA NA OSNOVU LAGRANŽOVE TEOREME POSTOJI $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ TAKO DA JE $f'(\xi_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}$.

ODAVDE
$$S = 2\pi \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2} \Delta x_i.$$

ZAPIŠIMO SUMU NA SLEDEĆI NAČIN

$$S = 2\pi \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2} \Delta x_i + \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})) \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2} \Delta x_i \right)$$

S OBZIROM DA JE f GLATKA, FUNKCIJA $f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2}$ JE NEPREKIDNA NA $[a, b]$, A ODATLE I RIMAN INTEGRABILNA I

VAŽI:
$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2} \Delta x_i = \int_a^b f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$$

(KADA JE FUNKCIJA RIMAN INTEGRABILNA GRANIČNA VREDNOST)
(NE ZAVISI OD IZBORA TAČKA ξ_i)

DOKAZAĆEMO DA JE $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})) \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2} \Delta x_i = 0$
NEKA JE $\varepsilon > 0$.

FUNKCIJA $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ JE NEPREKIDNA NA $[a, b]$, PA NA OSNOVU

VAJERŠTRASOVE TEOREME OGRAĐENA JE, $\sqrt{1+(f'(x))^2} \leq M$ ZA SVAKO $x \in [a, b]$.

FUNKCIJA f JE RAVNOMERNO NEPREKIDNA NA $[a, b]$ (IZ KANTOROVE TEOREME) I ZA $\frac{\varepsilon}{(b-a)M}$ POSTOJI $\delta > 0$ TAKO DA ZA SVAKO $\xi_i, \xi_{i-1} \in [a, b]$

$$|\xi_i - \xi_{i-1}| < \delta \Rightarrow |f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{(b-a)M}$$

ZA SVAKU PODELU P , AKO JE $\lambda(P) < \delta$ Onda je

$$\left| \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})) \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2} \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})| \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2} \Delta x_i$$

$$< \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{(b-a)M} \cdot M \cdot \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \underbrace{\sum_{i=1}^n \Delta x_i}_{b-a} = \varepsilon$$

ODAVDE $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})) \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2} \Delta x_i = 0$ i

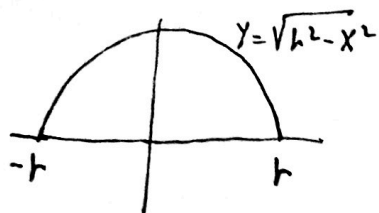
$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$$

AKO JE FUNKCIJA f DATA U PARAMETARSKOM OBLIKU $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$

$$S = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad (f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)})$$

PRIMERIZRAČUNATI PLOŠĆINU LOPTE POLUPREČNIKA h .

LOPTA JE TELO KOJE SE DOBIJA ROTACIJOM POLUKRUGA
(OGRAĐENOG X-OSOM I FUNKCIJOM $f(x) = \sqrt{h^2 - x^2}$, $x \in [-h, h]$)



$$P = 2\pi \int_{-h}^h f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$1 + f'(x)^2 = 1 + \left(\frac{x}{\sqrt{h^2 - x^2}}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{h^2 - x^2} = \frac{h^2}{h^2 - x^2}$$

$$P = 2\pi \int_{-h}^h \sqrt{h^2 - x^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 - x^2}} dx = 2\pi h \int_{-h}^h dx = 2\pi h \cdot 2h = 4h^2\pi.$$