

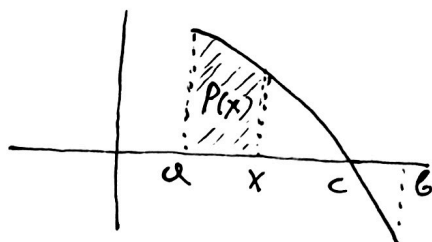
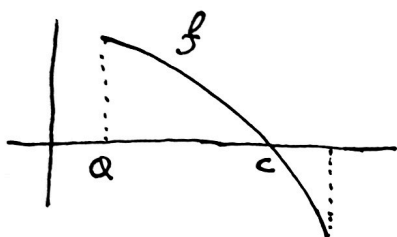
VEZA IZMEĐU ODREĐENOG INTEGRALA I IZVODA

FUNKCIJA POVRŠINE

ZA POČETAK POSMATRAJMO NEPREKIDNU FUNKCIJU $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

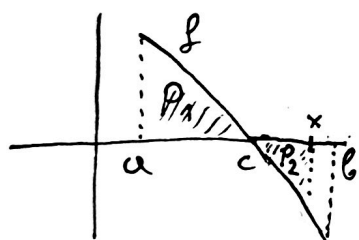
FUNKCIJU POVRŠINE ĆEMO DEFINISATI KAO

$$P: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad P(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \left(\begin{array}{l} \text{PROMENLJIVA JE GORNJA} \\ \text{GRANIČA INTEGRALA} \end{array} \right)$$



$P(x)$ JE POVRŠINA
KRIVOULINIJSKOG
TRAPEZA STRANICE $x-a$

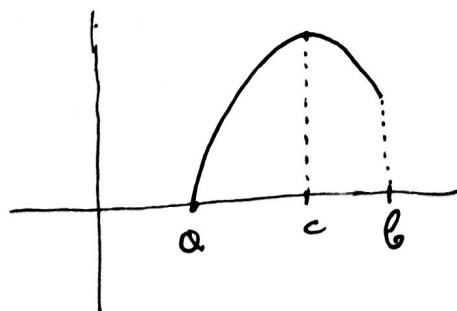
OČIGLEDNO $P(a) = \int_a^a f(x) dx = 0$; $P(x)$ JE RASTUĆA ZA $x \in [a, c]$.
KADA JE $x \in (c, b)$



$$\begin{aligned} P(x) &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^x f(x) dx = \\ &= P(c) - P_2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{JER JE } f(x) < 0 \\ \text{NA } [c, b] \end{array} \right) \end{aligned}$$

$P(x)$ OPADA NA $[c, b]$

GRAFIK FUNKCIJE $P(x)$



NA INTERVALIMA GDE JE f POZITIVNA, FUNKCIJA POVRŠINE RASTE,
A GDE JE f NEGATIVNA, FUNKCIJA POVRŠINE OPADA.

OVAJ POJAM MOŽEMO PROŠIRITI I NA INTEGRABILNE FUNKCIJE.

NEKA JE $f \in R[a, b]$. FUNKCIJA $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$ SE NAZIVA INTEGRALOM SA PROMENLJIVOM GORNJOM GRANICOM.

STAV NEKA JE $f \in R[a, b]$ I $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \in [a, b]$. TADA

a) FUNKCIJA φ JE NEPREKIDNA NA $[a, b]$

b) AKO JE f NEPREKIDNA U $x_0 \in [a, b]$, Onda JE φ DIFERENCIJABILNA U x_0 I VAŽI $\varphi'(x_0) = f(x_0)$

DOKAZ a) NEKA JE $x_0 \in [a, b]$ PROIZVOLJNA TAČKA. FUNKCIJA φ JE NEPREKIDNA U x_0 AKO $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$, ODKOSKO $\lim_{x \rightarrow x_0} (\varphi(x) - \varphi(x_0)) = 0$.

NEKA $x \in [a, b]$. TADA JE

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right|$$

LINEARNOST
INTEGRALA

$$\leq M \cdot |x - x_0| \quad \text{GDE JE } M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Iz $x \rightarrow x_0$, sledi $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x_0)$. FUNKCIJA φ JE NEPREKIDNA U x_0 .

b) NEKA JE $x_0 \in (a, b)$ PROIZVOLJNA TAČKA. DOKAZAĆEMO DA JE

$$\varphi'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} = f(x_0).$$

VAŽI:

$$\frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$$

$$\begin{aligned} \text{i} \quad \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} - f(x_0) &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt = \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt, \quad \text{A ODATLE} \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt \right| \leq \frac{1}{|h|} \cdot M_R \cdot |h| = M_R$$

GDE JE $M_h = \sup_{t \in [x_0, x_0+h]} |f(t) - f(x_0)|$. S OBZIROM DA JE f NEPREKIDNA U x_0 ,

IMAMO $M_h \rightarrow 0$ KADA $h \rightarrow 0$, ODAKLE JE

$$\varphi'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} = f(x_0)$$

ZA SLUČAJ KADA JE $x_0 = a$ ($x_0 = b$), POSMATRAJU SE GRANIČNE VREDNOSTI

KADA $h \rightarrow 0_+$ ($h \rightarrow 0_-$), ODAKLE SE DOBITA DESNI (LEVI) IZVOD

$$\varphi'_+(a) = f(a) \quad (\varphi'_-(b) = f(b)).$$

DOKAZALI SMO $\left(\int_a^x f(t) dt\right)' = f(x)$ ZA SVAKO $x \in [a, b]$ ZA NEPREKIDNU FUNKCIJU

(IZVOD INTEGRALA PO GORNJOJ GRANICI JE VREDNOST FUNKCIJE)
U GORNJOJ GRANICI

POSLEDICA ZA NEPREKIDNU FUNKCIJU $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\int_x^b f(t) dt\right)' = -f(x) \text{ ZA SVAKO } x \in [a, b].$$

SLEDEĆI PRIMER POKAZUJE DA JE BITNA NEPREKIDNOST KOD PRETHODNOG STAVA.

PRIMER NEKA JE $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \\ 1, & x \in (1, 2] \end{cases}$. TADA JE

$$\varphi'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{1}{h} \cdot 1 \cdot h = 1 \quad \left(\begin{array}{l} \int_1^{1+h} f(t) dt = \int_1^{1+h} f_1(t) dt \\ f_1(t) = 1 \text{ NA } [1, 2] \end{array} \right)$$

$$\text{ODAVDE } \varphi'_+(1) \neq f(1) = 0$$

NA OSNOVU PRETHODNOG STAVA SLEDI SLEDEĆA TEOREMA

TEOREMA AKO JE $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ NEPREKIDNA FUNKCIJA, ONDA JE

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

NJENA PRIMITIVNA FUNKCIJA.

TEOREMA (NJUTN-LAJBNICOVA TEOREMA)

NEKA JE $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ NEPREKIDNA I $F(x)$ PROIZVOLJNA NJENA PRIMITIVNA FUNKCIJA. TADA VAŽI

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (\text{ili } F(x) \Big|_a^b)$$

DOKAZ NA OSNOVU PRETHODNE TEOREME $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$ JE PRIMITIVNA FUNKCIJE $f(x)$ NA $[a, b]$. ODAVDE POSTOJI KONSTANTA C TAKVA DA JE $\varphi(x) = F(x) + C$ ZA SVAKO $x \in [a, b]$.

ZA $x=a$ IMAMO $\varphi(a) = F(a) + C$, A

ZA $x=b$ IMAMO $\varphi(b) = F(b) + C$, PA JE

$$\varphi(b) - \varphi(a) = F(b) - F(a), \text{ ODHOSIHO } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \\ (\text{ISKORISTILI SMO } \varphi(a) = 0, \varphi(b) = \int_a^b f(x) dx)$$

NJUTN-LAJBNICOVA FORMULA VAŽI I KADA JE $b < a$.

PRIMER IZRAČUNATI $\int_0^1 x^2 dx$.

Iz $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$, SLEDI DA JE $F(x) = \frac{x^3}{3}$ JEDNA PRIMITIVNA FUNKCIJA FUNKCIJE $f(x) = x^2$ NA $[0, 1]$. ODAVDE

$$\int_0^1 x^2 dx = F(x) \Big|_0^1 = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

NEKA JE $C'[a, b] = \{f \in C[a, b] : f' \in C[a, b] \text{ i postoji } f'_+(a) \text{ i } f'_-(b)\}$

SKUP SVIH GLATKIH FUNKCIJA

DRUGA TEOREMA O SREDNJOJ VREDNOSTI

STAV NEKA JE f NEPREKIDNA, A g RASTUĆA, NEHEGATIVNA I GLATKA FUNKCIJA NA $[a, b]$. TADA POSTOJI $\xi \in [a, b]$ TAKO DA JE

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \int_a^b f(x)dx.$$

DOKAZ AKO JE $g(b)=0$, Onda JE DESNA STRANA JEDNAKA NULI. I LEVA STRANA JE JEDNAKA NULI JER JE $g(x)=0$ ZA SVAKO $x \in [a, b]$ ($g(b)=0$ I g RASTUĆA).

AKO JE $g(b) \neq 0$, Onda JE POTREBNO DOKAZATI DA POSTOJI $\xi \in [a, b]$

TAKO DA JE
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{g(b)} \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

POSMATRAJMO FUNKCIJU $\varphi(x) = \int_x^b f(t)dt, x \in [a, b]$

NA OSNOVU STAVA φ JE NEPREKIDNA

Dovoljno JE DOKAZATI DA JE

$$\min_{x \in [a, b]} \varphi(x) \leq \frac{1}{g(b)} \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \max_{x \in [a, b]} \varphi(x), \text{ JER NA OSNOVU}$$

$\parallel$ $\parallel$ $\parallel$
 m A M

BOCCARDI

TEOREME POSTOJI $\xi \in [a, b]$ TAKO DA JE

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{g(b)} \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

NA OSNOVU STAVA

(f JE NEPREKIDNA) VAŽI $\varphi'(x) = -f(x)$,

ODAKLE JE $A = \frac{1}{g(b)} \int_a^b f(x)g(x)dx = -\frac{1}{g(b)} \int_a^b g(x)\varphi'(x)dx$

$$= -\frac{1}{g(b)} \left(g(x)\varphi(x) \Big|_a^b - \int_a^b \varphi(x)g'(x)dx \right)$$

$$= -\frac{1}{g(b)} \left(\underbrace{g(b)\varphi(b)}_0 - g(a)\varphi(a) - \int_a^b \varphi(x)g'(x)dx \right)$$

$$= \frac{g(a)\varphi(a)}{g(b)} + \frac{1}{g(b)} \int_a^b \varphi(x)g'(x)dx$$

ODAVDE

$$A \leq \frac{g(a)\varphi(a)}{g(b)} + \frac{1}{g(b)} \int_a^b M g'(x)dx = \frac{g(a)\varphi(a)}{g(b)} + \frac{1}{g(b)} \cdot M(g(b) - g(a))$$

$$= M + \frac{g(a)(\varphi(a) - M)}{g(b)} \stackrel{\leq 0}{\leq} M$$

NA SLIČAN NAČIN SE DOKAŽE $A \geq m$

DAKLE, POSTOJI $\xi \in [a, b]$ TAKO DA JE

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{g(b)} \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

TEOREMA (DRUGA TEOREMA O SREDNJOJ VREDNOSTI)

NEKA JE f NEPREKIDNA, A g MONOTONA I GLATKA NA $[a, b]$.

TADA POSTOJI $\xi \in [a, b]$ TAKO DA VAŽI

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x)dx.$$

DOKAZ RADI ODREĐENOSTI, PRETPOSTAVIMO DA JE g RASTUĆA.

PRIMENIĆEMO PRETHODNI STAV NA FUNKCIJU $g_1(x) = g(x) - g(a)$, (JER JE POTREBNO DA JE g_1 NENEGATIVNA). TADA POSTOJI $\xi \in [a, b]$ TAKO DA JE

$$\int_a^b f(x)g_1(x)dx = g_1(b) \int_{\xi}^b f(x)dx.$$

ODAVDE

$$\int_a^b f(x)(g(x) - g(a))dx = (g(b) - g(a)) \int_{\xi}^b f(x)dx, \text{ TO JEST}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \underbrace{g(a) \int_a^b f(x)dx - g(a) \int_{\xi}^b f(x)dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x)dx}_{= g(a) \int_a^{\xi} f(x)dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x)dx} \end{aligned}$$

NAPOMENA PRETHODNA TEOREMA VAŽI I U SLUČAJU KADA JE $f \in R[a, b]$ I g MONOTONA.

PRIMER

NEKA JE $f \in C(\mathbb{R})$ I $g_1, g_2 \in D(\mathbb{R})$. TADA JE

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t) dt \right) = f(g_2(x)) \cdot g_2'(x) - f(g_1(x)) \cdot g_1'(x)$$

NEKA JE $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. TADA JE

$$(F \circ g_1)(x) = F(g_1(x)) = \int_0^{g_1(x)} f(t) dt \quad ;$$

$$(F \circ g_2)(x) = F(g_2(x)) = \int_0^{g_2(x)} f(t) dt .$$

ODAVDE

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t) dt \right) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^{g_2(x)} f(t) dt - \int_0^{g_1(x)} f(t) dt \right) =$$

$$= \frac{d}{dx} ((F \circ g_2)(x) - (F \circ g_1)(x)) = \frac{d}{dx} (F \circ g_2)(x) - \frac{d}{dx} (F \circ g_1)(x)$$

$$= F'(g_2(x)) \cdot g_2'(x) - F'(g_1(x)) \cdot g_1'(x)$$

$$= f(g_2(x)) \cdot g_2'(x) - f(g_1(x)) \cdot g_1'(x)$$

↓
ISKORISTI: SMO $F'(x) = f(x)$

PARCIJALNA INTEGRACIJA

TEOREMA

NEKA FUNKCIJE $u(x)$ I $v(x)$ IMAJU NEPREKIDNE IZVODE NA $[a, b]$. TADA VAŽI JEDNAKOST

$$\int_a^b u(x) dv(x) = [u(x) \cdot v(x)] \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x)$$

DOKAZ

Iz $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ sledi

$$\int_a^b (u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)) dx = [u(x) \cdot v(x)] \Big|_a^b$$

(PRIMEKILI SMO NEWTON-LAJBNICOVU FORMULU.)

ODAVDE
$$\int_a^b u(x) dv(x) = [u(x) v(x)] \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x)$$

KRAĆI ZAPIS OVE FORMULE JE
$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

SMENA PROMENLJIVE KOD ODREĐENOG INTEGRALA

TEOREMA

(SMENA PROMENLJIVE)

NEKA JE $f: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ NEPREKIDNA, A FUNKCIJA $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [A, B]$ IMA NEPREKIDAN IZVOD I $\varphi(\alpha) = A$, $\varphi(\beta) = B$. TADA VAŽI

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

JEDNAKOST VAŽI I U SLUČAJU DA JE $f \in R[A, B]$ I φ STROGO MONOTONA.

DOKAZ S OBZIROM DA JE $f \in C[A, B]$, FUNKCIJA f IMA PRIMITIVNU FUNKCIJU F ($F(x) = \int_A^x f(t) dt$ JEDNA PRIMITIVNA FUNKCIJA),
 $F'(x) = f(x)$ ZA SVAKO $x \in [A, B]$. ODAVDE

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),$$

PA JE $F(\varphi(t))$ PRIMITIVNA FUNKCIJA FUNKCIJE $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$
 NA OSNOVU NOVIH LAIBNICOVE FORMULE

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\text{tj. } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

$$\text{ODAVDE } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

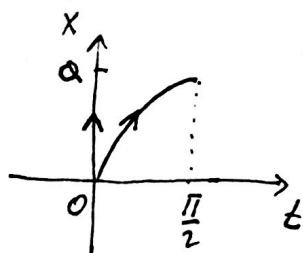
PRIMER IZRAČUNATI $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$, $a > 0$.

FUNKCIJA $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ JE NEPREKIDNA NA $[0, a]$. A $g(x) = a \sin x$ IMA NEPREKIDAN IZVOD I $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\frac{\pi}{2}) = a$.
 ($g'(x) = a \cos x$ JE NEPREKIDNA)

NA OSNOVU SMEHE PROMENLIVE IMAMO

$$I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left(\begin{array}{l} f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, g(x) = a \sin x \\ a = 0, b = \frac{\pi}{2} \end{array} \right) = \int_0^{\pi/2} f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

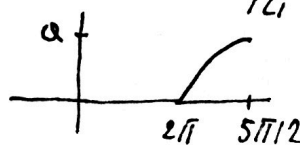
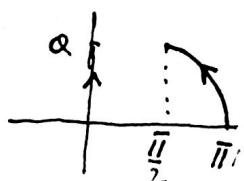
$$\text{tj. } \left(\begin{array}{l} x = a \sin t, dx = a \cos t dt \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = a \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt$$



KADA x IDE OD 0 DO a

TADA t IDE OD 0 DO $\frac{\pi}{2}$

(MOGLI SMO IZABRATI DA t IDE OD π DO $\frac{3\pi}{2}$ ILI OD 2π DO $\frac{5\pi}{2}$)



$$\text{Dakle, } \bar{I} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt$$

$$\begin{aligned} \text{Dakle} \quad \bar{I} &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 t} \cdot a \cos t dt = a^2 \int_0^{\pi/2} |\cos t| \cdot \cos t dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left(\int_0^{\pi/2} dt + \int_0^{\pi/2} \cos 2t dt \right) = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} \cos 2t dt \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos 2x dx &= \left(\begin{array}{l} f(x) = \cos 2x, \quad g(x) = \frac{1}{2}x \\ x=0 \rightarrow d=0, \quad x=\frac{\pi}{2} \rightarrow g=\frac{\pi}{2} \end{array} \right) \text{ ili } \left(\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}t, \quad dx = \frac{1}{2}dt \\ x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \rightarrow t=\pi \end{array} \right) \\ &= \int_0^{\pi} \cos 2 \cdot \left(\frac{1}{2}t \right) \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} (0 - 0) = 0 \end{aligned}$$

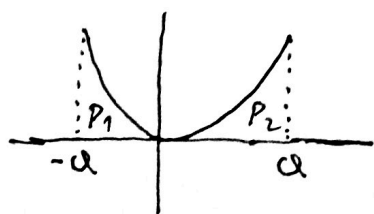
$$\text{ili } \left(\begin{array}{l} t = 2x, \quad dt = 2dx \\ x=0 \rightarrow t=0, \quad x=\frac{\pi}{2} \rightarrow t=\pi \end{array} \right) = \int_0^{\pi} \cos t \cdot \frac{1}{2} dt = 0$$

$$\text{Dakle } \bar{I} = \frac{a^2 \pi}{4}$$

PRIMER Ako je $f \in R[-a, a]$ parna, onda je $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \left(\begin{array}{l} \text{Uvedemo smenu } x = -t \\ \text{strogo monotona smena} \\ \text{pa se može primeniti na Riman} \\ \text{integrabilnoj funkciji} \\ dx = -dt \end{array} \right) \\ &= \int_a^0 f(-t) (-dt) + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt \\ &\quad f(t) \text{ jer je } f \text{ parna} \end{aligned}$$

GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA: Neka je f neprekidna na $[-a, a]$



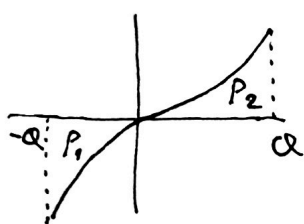
$\int_{-a}^a f(x) dx$ površina između grafika i x-ose, $P_1 + P_2$
 $\int_{-a}^0 f(x) dx$ površina P_1 , $\int_0^a f(x) dx$ površina P_2
 $P_1 = P_2$ jer je f parna

PRIMER

AKO JE $f \in R[-a, a]$ NEPARNA, ONDA JE $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \left(\begin{array}{l} x = -t \text{ u PRVOM INTEGRALU} \\ dx = -dt \end{array} \right) \\ &= \int_a^0 f(-t) (-dt) + \int_0^a f(x) dx = \int_a^0 f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 0 \\ &\quad \text{"} \\ &\quad -f(t) \end{aligned}$$

GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA: NEKA JE f NEPREKIDNA NA $[-a, a]$



$\int_{-a}^a f(x) dx$ POVRŠINA IZMEĐU GRAFIKA I X-OSE
PRI ČEMU SE KOD NEGATIVNE FUNKCIJE
UZIMA PREDZNAK - (T.J. - POVRŠINA)

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = -P_1, \quad \int_0^a f(x) dx = P_2$$

$$P_1 = P_2$$

PRIMER NEKA JE $f \in C(-\infty, +\infty)$ PERIODIČNA SA PERIODOM T . TADA JE

$$a) \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx \text{ ZA SVAKO } a, b \in \mathbb{R}$$

$$b) \int_a^{a+kT} f(x) dx = k \int_a^{a+T} f(x) dx \text{ ZA SVAKO } a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

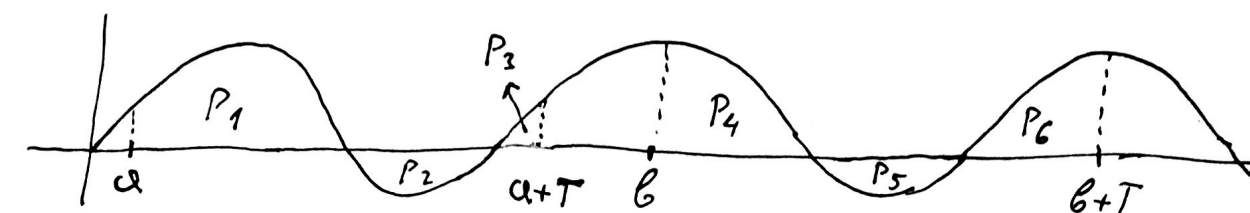
$$c) \int_a^b f(x) dx = \int_{a+kT}^{b+kT} f(x) dx \text{ ZA SVAKO } a, b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} a) \int_a^{a+T} f(x) dx &= \int_a^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx = \left(\begin{array}{l} \text{UVEDEMO SMENU } x - T = t \\ \text{u DRUGOM INTEGRALU} \\ dx = dt \end{array} \right) \\ &= \int_a^T f(x) dx + \int_0^a f(t+T) dt = \int_a^T f(x) dx + \int_0^a f(t) dt = \int_0^T f(x) dx \\ &\quad \text{"} \\ &\quad f(t) \end{aligned}$$

PRETHODNA JEDNAKOST VAŽI ZA SVAKO $a \in \mathbb{R}$, PA JE

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx \text{ ZA SVAKO } a, b \in \mathbb{R}$$

GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA:



$$\int_a^{a+T} f(x) dx = P_1 - P_2 + P_3, \quad \int_b^{b+T} f(x) dx = P_4 - P_5 + P_6, \quad \int_0^T f(x) dx = P_1 - P_2 + P_3$$

$$P_2 = P_5, \quad P_1 + P_3 = P_4 + P_6$$

$$b) \quad \int_a^{a+kT} f(x) dx = \int_a^{a+T} f(x) dx + \int_{a+T}^{a+2T} f(x) dx + \dots + \int_{a+(k-1)T}^{a+kT} f(x) dx$$

$$= \int_a^{a+T} f(x) dx + \int_a^{a+T} f(x) dx + \dots + \int_a^{a+T} f(x) dx = k \cdot \int_a^{a+T} f(x) dx$$

$$c) \quad \int_a^b f(x) dx = \left(\begin{matrix} t = x + kT \\ dx = dt \end{matrix} \right) = \int_{a+kT}^{b+kT} f(t-kT) dt = \int_{a+kT}^{b+kT} f(t) dt = \int_{a+kT}^{b+kT} f(x) dx$$

GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA

