

INTEGRABILNOST NEKIH KLASA FUNKCIJA

TEOREMA SVAKA NEPREKIDNA FUNKCIJA NA $[a, b]$ JE RIMAN INTEGRABILNA NA $[a, b]$, TO JEST $C[a, b] \subset R[a, b]$.

DOKAZ NEKA JE f NEPREKIDNA FUNKCIJA NA $[a, b]$. NA OSNOVU KANTOROVE TEOREME SLEDI DA JE f RAVNOMERNO NEPREKIDNA NA $[a, b]$. DOKAZAĆEMO DA JE $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} (S(f, P) - \lambda(f, P)) = 0$ I ISKORISTIĆEMO PRETHODNU TEOREMU.

NEKA JE $\varepsilon > 0$ PROIZVOLJNO. TADA ZA $\frac{\varepsilon}{b-a}$ POSTOJI $\delta > 0$ TAKO DA SVAKO $x', x'' \in [a, b]$ JE

$$|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

ZA PROIZVOLJNU PODELU P KOD KOTE JE $\lambda(P) < \delta$ VAŽI $b-a$

$$S(f, P) - \lambda(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \stackrel{①}{<} \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon$$

①. NEJEDNAKOST VAŽI ZER JE $x_i - x_{i-1} < \delta$, PA JE

$$f(\xi_i') - f(\xi_i'') < \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ ZA SVAKO } \xi_i', \xi_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$$

PREMA TOME, $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} S(f, P) - \lambda(f, P) = 0$, ODAKLE JE $f \in R[a, b]$

Š OBZIROM DA ZA SVAKU NEPREKIDNU FUNKCIJU POSTOJI

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma(f, P, \varepsilon) = \bar{I} = \int_a^b f(x) dx \text{ Onda DA BI'SMO IZRAČUNALI } \bar{I}$$

DOVOLJNO JE DA NAĐEMO GRAFIČNU VREDNOST ZA BILO KOTI NIZ

PODELA P_n TAKAV DA $\lambda(P_n) \rightarrow 0$, TO JEST $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f, P_n, \varepsilon_n)$

NEKA JE P_n RAVNOMERNA PODELA $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$.

MOŽEMO POSMATRATI

DESHU RIMANOVU SUMU (KADA BIRAMO TAČKE ξ NA KRAJEVIMA

SEGMENTA)

$$\sigma_R(f, P_n, \xi_n) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n}$$

i LEVO RIMAKOVU SUMU (KADA BIRAMO TAČKE ξ NA LEVIM KRAJEVIMA

$$\text{SEGMENTA}) \quad \sigma_L(f, P_n, \xi_n) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \frac{b-a}{n}$$

PREMA TOME, ZA NEPREKIDNE FUNKCIJE VAŽI:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \frac{b-a}{n}$$

ZA BILO KOTI IZBOR TAČKICA UNUTAR
SEGMENTA $[x_{i-1}, x_i]$

PRIMER

$$\text{IZRAČUNATI } \int_a^b x dx$$

NEKA JE P_n RAVNOMERNA PODELA $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$, $i=0, \dots, n$.

$$\text{TADA JE } \sigma_R(f, P_n, \xi_n) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n} = \sum_{i=1}^n (a + i \frac{b-a}{n}) \cdot \frac{b-a}{n} =$$

$$= \frac{a(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{a(b-a)}{n} \cdot n + \frac{(b-a)^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= ab - a^2 + (b-a)^2 \frac{n+1}{2n} \quad ; \quad \text{VAŽI}$$

$$\int_a^b x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_R(f, P_n, \xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} ab - a^2 + (b-a)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) =$$

$$= ab - a^2 + \frac{1}{2} (b^2 - 2ab + a^2) = ab - a^2 + \frac{b^2}{2} - ab + \frac{a^2}{2} =$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2}$$

ISTI REZULTAT BISMO DOBILI I DA SMO RADILI SLEDEĆE

GRAFIČKE VREDNOSTI

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \frac{b-a}{n} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

PRIMER

IZRAČUNATI $\int_a^b \frac{1}{x^2} dx$, $0 < a < b$

NEKA JE P_n RAVNOMERNA PODELA SEGMENTA $[a, b]$

FUNKCIJA $f(x) = \frac{1}{x^2}$ JE NEPREKIDNA NA $[a, b]$, PA JE

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \frac{b-a}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i^2} \cdot \frac{b-a}{n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i^2} \end{aligned}$$

IZABRAČEMO TAČKE $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ TAKO DA MOŽEMO IZRAČUNATI

SUMU $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i^2}$. NEKA JE $\xi_i = \sqrt{x_{i-1} \cdot x_i} \in [x_{i-1}, x_i]$. TADA JE

↓
GEOMETRIJSKA SREDNJA

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{i-1} \cdot x_i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right) \cdot \frac{1}{x_{i-1} - x_i} = \frac{n}{b-a} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right) \\ &= \frac{n}{b-a} \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n} \right) = \frac{n}{b-a} \cdot \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} \right) \\ &= \frac{n}{b-a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

$$\int_a^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n}{b-a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

PRIMER

NADİ GRAFIČNU VREDNOST

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right).$$

NEKA JE $S_n = \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2+i^2}$.

NADİ ČEMO NEPREKIDNU FUNKCIJU f NA $[a, b]$ TAKO DA JE

$\frac{n}{n^2+i^2} = f(\xi_i) \cdot \frac{b-a}{n}$ ZA NEKI IZBOR TAČAKA ξ_i NA SEGMENTU $[x_{i-1}, x_i]$, $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$.

Iz $\frac{n}{n^2+i^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}$ SLEDI DA JE $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $[a, b] = [0, 1]$ i

$$\xi_i = \frac{i}{n} \text{ . DAKLE } S_n = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1-0}{n} \text{ , PA JE}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

NAPOMENA

AKO FUNKCIJA f NIJE NEPREKIDNA NA $[a, b]$, ONDA

NE MORA VAŽITI $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \frac{b-a}{n}$, $\xi_i = a + i \frac{b-a}{n}$.

NA PRIMER ZA DIRICHLEOVU FUNKCIJU $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$ NA

SEGMENTU $[0, 1]$ VAŽI $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \chi(\xi_i) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1$,

A DOKAZALI SMO DA $\int_0^1 \chi(x) dx$ NE POSTOJI.

STAV MONOTONA FUNKCIJA NA SEGMENTU JE RIMAN INTEGRABILNA.

DOKAZ

NEKA JE FUNKCIJA f MONOTONA NA SEGMENTU $[a, b]$.

ZA KONSTANTNU FUNKCIJU f DOKAZALI SMO DA JE RIMAN INTEGRABILNA I DA JE $\int_a^b f(x) dx = c \cdot (b-a)$, $f(x) = c \quad \forall x \in [a, b]$

AKO FUNKCIJA f NIJE KONSTANTNA, ONDA JE $f(a) \neq f(b)$.

PREPOSTAVIMO DA JE f RASTUĆA, $f(a) < f(b)$.

ZA PROIZVOLJNO $\varepsilon > 0$ IZABERIMO $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$.

ZA SVAKU PODELU P ZA KOTU JE $\lambda(P) < \delta$, VAŽI

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i \text{ GDE JE } M_i = f(x_i) \text{ ;}$$

$$m_i = f(x_{i-1}) \text{ , PA JE}$$

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \Delta x_i$$

$$< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot (f(b) - f(a)) = \varepsilon$$

DEFINICIJA

SKUP $E \subset \mathbb{R}$ IMA MERU NULA AKO ZA SVAKO $\varepsilon > 0$ POSTOJI
 NIZ $\tilde{I}_n = (a_n, b_n)$, $a_n \leq b_n$ TAKO DA JE $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{I}_n$;

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \leq \varepsilon$$
 (SKUP E SE MOŽE POKRITI NAJVIŠE
 PREBROJIVOM FAMILIJOM INTERVALA ČIJA UKUPNA DUŽINA
 JE MANJA ILI JEDNAKA ε).

PRIMER

JEDNOČLAN SKUP JE SKUP MERE NULA.

NEKA JE $A = \{a\}$. ZA SVAKO $\varepsilon > 0$ POSTOJI INTERVAL
 $\tilde{I} = (a - \frac{\varepsilon}{4}, a + \frac{\varepsilon}{4})$ TAKAV DA JE $A \subset \tilde{I}$ I DUŽINA
 INTERVALA JE MANJA OD ε .

PRIMER

KONAČAN SKUP JE SKUP MERE NULA

NEKA JE $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$. ZA SVAKO $\varepsilon > 0$ POSTOJE
 INTERVALI $\tilde{I}_i = (a_i - \frac{\varepsilon}{2p}, a_i + \frac{\varepsilon}{2p})$ TAKVI DA JE $A \subset \bigcup_{i=1}^p \tilde{I}_i$
 I UKUPNA DUŽINA INTERVALA JE ε .

PRIMER

PREBROJIV SKUP JE SKUP MERE NULA.

NEKA JE $A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. ZA SVAKO $\varepsilon > 0$ POSTOJE
 INTERVALI $\tilde{I}_i = (a_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, a_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}})$ TAKVI DA JE $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{I}_i$

$$\sum_{i=1}^{\infty} ((a_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}) - (a_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}})) = \sum_{i=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon.$$

PRIMER

POSTOJE SKUPOVI KOJI SU MERE NULA, A NISU PREBROJIVI (KANTOROV).
 HAVEŠĆEMO LEBEGOV KRITERIJUM INTEGRABILNOSTI, BEZ DOKAZA

TEOREMA

NEKA JE FUNKCIJA f OGRANIČENA NA $[a, b]$
 I NEKA JE A SKUP TAČAKA PREKIDA.

FUNKCIJA f JE INTEGRABILNA AKO I SAMO AKO JE
 A SKUP MERE NULA.

Posledica a) Ako je funkcija neprekidna na $[a, b]$, osim na skupu mere nula, onda je Riman integrabilna na $[a, b]$

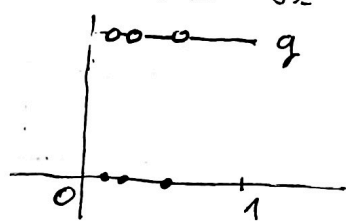
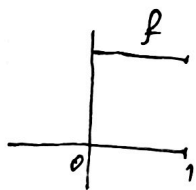
b) Ako $f, g \in R[a, b]$ i ako se razlikuju samo na skupu mere nula, onda je $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$

Primer Dirihleova funkcija ima prekid u svakoj tački segmenta $[a, b]$, a skup $[a, b]$ nije skup mere nula. Na osnovu teoreme $\chi(x)$ nije Riman integrabilna.

Primer Funkcija $f(x) = 1$ je Riman integrabilna na $[0, 1]$ i važi: $\int_0^1 f(x) dx = 1$ (dokazati smo)

Funkcija $g(x) = \begin{cases} 0, & x = \frac{1}{2^i}, i \in \mathbb{N} \\ 1, & \text{inače} \end{cases}$ je Riman integrabilna

(skup tačaka prekida je $\{\frac{1}{2^i} | i \in \mathbb{N}\}$ koji je probrojan).



Na osnovu posledice $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 1$

SVOJSTVA INTEGRALA

TEOREMA (LINEARNOST INTEGRALA)

NEKA $f, g \in R[a, b]$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. TADA $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$ i VAŽI:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

DOKAZ ZA PROIZVOLJNU PODELU (P, ξ) VAŽI:

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha f + \beta g, P, \xi) &= \sum_{i=1}^n (\alpha f + \beta g)(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \beta \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \cdot \Delta x_i \\ &= \alpha \sigma(f, P, \xi) + \beta \sigma(g, P, \xi) \end{aligned}$$

PRELASKOM NA LIMES (KADA $\lambda(P) \rightarrow 0$) DOBIVAMO

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

TEOREMA NEKA $f, g \in R[a, b]$. TADA

- 1) $\beta g \in R[a, b]$ 2) $|f| \in R[a, b]$
- 3) $\frac{1}{f} \in R[a, b]$ UZ USLOV $|f(x)| \geq \alpha > 0 \quad \forall x \in [a, b]$
- 4) $f \in R[\alpha, \beta] \quad \forall [\alpha, \beta] \subset [a, b]$

USLOV $|f(x)| > 0 \quad \forall x \in [a, b]$ KOD TVRĐENJA 3) NIJE NAM DOVOLJAN I TO NAM

POKAZUJE SLEDEĆI PRIMER $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}, f \in R[0, 1]$

FUNKCIJA $g = \frac{1}{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ NIJE

RIMAN INTEGRABILNA (JER NIJE OGRANIČENA) A VAŽI:

$f(x) > 0$ ZA SVAKO $x \in [0, 1]$

STAV: Ako $f \in R[a, b]$ i $a < c < b$, onda $f \in R[a, c]$, $f \in R[c, b]$ i važi:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

DOKAZ NA OSNOVU STAVA

$f \in R[a, c]$ i $f \in R[c, b]$.

S OBZIROM DA JE $f \in R[a, b]$, VAŽI: $I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma(f, P, \epsilon)$,

TO JEST LIMES POSTOJI, PA MOŽEMO BIRATI PROIZVOLJNE PODELE (P, ϵ) TAKVE DA $\lambda(P) \rightarrow 0$. NEKA JE (P, ϵ) PROIZVOLJNA PODELA SA IZABRAHIM TAČKAMA ξ I KOJA SADRŽI TAČKU c . TADA JE

$P' = P \cap [a, c]$ JEDINA PODELA SEGMENTA $[a, c]$ i

$\xi' = \xi \cap [a, c]$ JEDAN IZBOR TAČAKA PRI PODELI P .

NA SLIČAN NAČIN DOBIJEMO I $P'' = P \cap [c, b]$ i $\xi'' = \xi \cap [c, b]$.

VAŽI: $\sigma(f, P, \epsilon) = \sigma(f, P', \xi') + \sigma(f, P'', \xi'')$ i KADA $\lambda(P) \rightarrow 0$

IMAMO $\lambda(P') \rightarrow 0$ i $\lambda(P'') \rightarrow 0$. PRELAZIKOM NA LIMES

DOBIJAMO

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma(f, P, \epsilon) = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma(f, P', \xi') + \sigma(f, P'', \xi'') \\ &= \lim_{\lambda(P') \rightarrow 0} \sigma(f, P', \xi') + \lim_{\lambda(P'') \rightarrow 0} \sigma(f, P'', \xi'') = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \end{aligned}$$

MOŽEMO DODEFINISATI RIMANOV INTEGRAL I ZA SLUČAJEVE $a > b$ i $a = b$.

DEFINICIJA

a) Ako je f DEFINISANA U a , ONDA JE $\int_a^a f(x) dx = 0$

b) Ako je $a > b$ i $\int_b^a f(x) dx$ POSTOJI, ONDA JE

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

SADA PRETHODNI STAV MOŽEMO NAVESTI; I U SLUČAJU BILO KAKVOG PORETKA TAČKA a, b I c .

STAV NEKA TAČKE a, b I c PREDSTAVLJAJU IKRAJEVE SEGMENTA I NEKASU U BILO KAKVOM PORETKU. AKO JE FUNKCIJA f RIMAN INTEGRABILNA NA NAJVEĆEM SEGMENTU, Onda JE RIMAN INTEGRABILNA NA MANJIM I VAŽI:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

DAKLE, JEDNAKOST VAŽI I U SLUČAJEVIMA $a < b < c$ I $b < a < c$.

DOKAZ DOKAŽIMO DA JEDNAKOST VAŽI ZA SLUČAJ $a < b < c$.

NA OSNOVU PRETHODNOG STAVA, IZ $f \in R[a, c]$ SLEDI: $f \in R[a, b]$ I $f \in R[b, c]$ I

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

$$\text{ODAVDE } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

PO DEFINICIJI

MONOTONOST I PROCENA INTEGRALA

STAV Ako je $f \in R[a, b]$, $a < b$ i $f(x) \geq 0$ za svako $x \in [a, b]$, onda je $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

DOKAZ Za svaku podjelu sa izabranim tačkama (P, ξ) važi:
$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \geq 0.$$

Odatle $\bar{I} = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma(f, P, \xi) \geq 0$

POSLEDICA Ako je $f(x) \leq g(x)$ za svako $x \in [a, b]$, $a < b$ i $f, g \in R[a, b]$ onda je $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

DOKAZ PRIMENIMO PRETHODNI STAV NA FUNKCIJU $g(x) - f(x)$.

STAV NEKA JE $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ NEPREKIDNA I NENEGATIVNA FUNKCIJA.

AKO POSTOJI $c \in [a, b]$ TAKO DA JE $f(c) > 0$, ONDA JE

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

DOKAZ FUNKCIJA f JE NEPREKIDNA U x_0 AKO ZA SVAKO $\varepsilon > 0$ POSTOJI $\delta > 0$ TAKO DA ZA SVAKO $x \in [a, b]$

NEKA JE $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

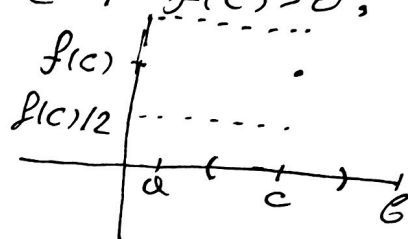
S OBZIROM DA JE f NEPREKIDNA U c I $f(c) > 0$,

ZA $\varepsilon = \frac{f(c)}{2}$ POSTOJI $\delta > 0$

ZA SVAKO $x \in [a, b]$

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{f(c)}{2}$$

$$(tj. \frac{f(c)}{2} < f(x) < 3 \frac{f(c)}{2})$$



NAŠLI SMO OKOLINU $(c - \delta, c + \delta)$ TAKVU DA

ZA SVAKO $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$ VAŽI: $f(x) > \frac{f(c)}{2}$

II

(m_1, m_2) GDE JE $m_1 = \max\{a, c - \delta\}$
 $m_2 = \min\{b, c + \delta\}$.

ODAVDE

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{m_1} f(x) dx + \int_{m_1}^{m_2} f(x) dx + \int_{m_2}^b f(x) dx$$

$$\geq \int_{m_1}^{m_2} f(x) dx \geq \int_{m_1}^{m_2} \frac{f(c)}{2} dx = \frac{f(c)}{2} \cdot (m_2 - m_1)$$

1) SLEDI IZ STAVA

> 0

2) SLEDI IZ STAVA

STAV AKO JE $f \in R[a, b]$, $a < b$, ONDA VAŽI (INTEGRALNA NEJEDNAKOST)

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot (b - a)$$

DOKAZ Iz $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ ZA SVAKO $x \in [a, b]$, SLEDI:

(NA OSHOVU STAVA)

$$\int_a^b -|f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

ODAKLE JE $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$

AKO JE $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$, ONDA JE $\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a)$

TEOREMA (PRVA TEOREMA O SREDNJOJ VREDNOSTI)

NEKA $f, g \in R[a, b]$, $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ i $g(x) \geq 0$

ZA SVAKO $x \in [a, b]$. TADA POSTOJI $\eta \in [m, M]$ TAKO DA JE

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \eta \int_a^b g(x) dx.$$

AKO JE DODATNO f NEPREKIDNA NA $[a, b]$, ONDA POSTOJI

$c \in [a, b]$ TAKO DA JE

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

DOKAZ Iz $f \in R[a, b]$ SLEDI DA JE f OGRANIČENA NA $[a, b]$, PA

POSTOJE KONAČNI $\inf_{x \in [a, b]} f(x)$ i $\sup_{x \in [a, b]} f(x)$. Iz $f, g \in R[a, b]$, SLEDI $f \cdot g \in R[a, b]$

Iz NEJEDNAKOSTI $m \leq f(x) \leq M$ ZA SVAKO $x \in [a, b]$, MNOŽENJEM NENEGATIVNOM FUNKCIJOM $g(x)$, IMAMO

$$m g(x) \leq f(x) g(x) \leq M g(x) \text{ ZA SVAKO } x \in [a, b].$$

ODAVDE
$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

AKO JE $\int_a^b g(x) dx = 0$, ONDA JE i $\int_a^b f(x) g(x) dx = 0$, PA ZA SVAKO

$$\eta \in [m, M] \text{ VAŽI } \int_a^b f(x) g(x) dx = \eta \int_a^b g(x) dx$$

Ako je $\int_a^b g(x) dx > 0$, onda je

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M.$$

ZA $m = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \in [m, M]$ VAŽI:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = m \int_a^b g(x) dx.$$

U SLUČAJU DA JE f NEPREKIDNA, NA OSNOVU BOLCAHO KOŠIJEVE TEOREME ZA $m \in [m, M]$ POSTOJI $c \in (a, b)$ TAKO DA JE $f(c) = m$. DAKLE, $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$.

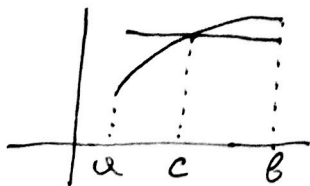
SLEDEĆA POSLEDICA JE SPECIJALAN SLUČAJ ZA $g(x) = 1, x \in [a, b]$.

POSLEDICA NEKA $f \in R[a, b]$, $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, i $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

TADA POSTOJI $m \in [m, M]$ TAKO DA JE

$$\int_a^b f(x) dx = m(b-a).$$

Ako je još f NEPREKIDNA NA $[a, b]$, ONDA POSTOJI $c \in [a, b]$ TAKO DA JE $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$



GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA

POSTOJI $c \in [a, b]$ TAKO DA JE
POVRŠINA KRIVOLINIJSKOG TRAPEZA
JEDNAKA POVRŠINI PRAVOUGAONIKA