

1.4 INTEGRACIJA NEKIH IRACIONALNIH I TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

INTEGRALI OBLIKA $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$ GDE JE R RACIONALNA FUNKCIJA SE REŠAVAJU SMEKOM $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$

ONDA JE $ax+b = t^n(cx+d)$, ODKOSKO $(a-t^nc)x = t^nd-b$,

PA JE $x = \frac{t^nd-b}{a-t^nc}$. DIFERENCIIRANJEM DOBITAMO

$$dx = \frac{nt^{n-1}d(a-t^nc)^2 - (t^nd-b)(-nt^{n-1}c)}{(a-t^nc)^2} dt$$

DAKLE, SMEKOM $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$ DOBITAMO INTEGRAL RACIONALNE FUNKCIJE

INTEGRALI OBLIKA $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ SE REŠAVAJU OJLEROVIM SMEHAMA

1) AKO JE $a > 0$, ONDA MOŽEMO UZETI SMENU $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x \pm t$
↑
IZABEREMO + ILI -
 (PRVA OJLEROVA SMEHA)

2) AKO JE $c > 0$, ONDA MOŽEMO UZETI SMENU

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c} \quad (\text{DRUGA OJLEROVA SMEHA})$$

↓
IZABEREM + ILI -

3) AKO JE $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, $x_1 \neq x_2$, ONDA

$$\text{MOŽEMO UZETI SMENU } \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$$

(TREĆA OJLEROVA SMEHA)

KOD SVE TRI SMEHE KVADRIRANJEM SMEHE SE IZRAZI x ,
 A ZATIM SE IZRAZI dx .

INTEGRALI OBLIKA $\int R(\sin x, \cos x) dx$, GDE JE R RACIONALNA FUNKCIJA

1) AKO JE $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, ONDA UZETI SMENU $t = \cos x$

2) AKO JE $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, ONDA UZETI SMENU $t = \sin x$

3) Ako je $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, onda uzeti smenu

$\operatorname{tg} x = t$, pri čemu je

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

4) Ako ne važi nijedna jednakost iz 1), 2) i 3), onda uzeti

smenu $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

2. ODREĐENI INTEGRAL

2.1 POJAM RIMANOVOG INTEGRALA

UOČIMO SEGMENT $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

KONAČAN SKUP TAČAKA $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, TAKAV DA JE

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, NAZVAMO PODELOM SEGMENTA $[a, b]$.

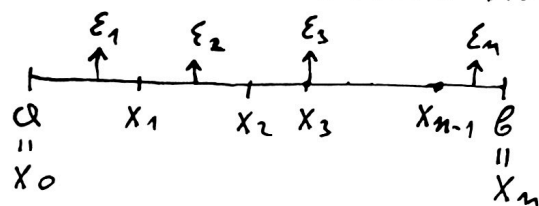
NEKA JE $\mathcal{P}[a, b]$ SKUP SVIH PODELA SEGMENTA. NA OVOM SKUPU MOŽEMO POSMATRATI RELACIJU $\subset$

$P_1 \subset P_2$ (PODELA P_2 JE FINIJA OD PODELE P_1).

U SVAKOJ PODELI P UVEŠĆEMO OZNAKE $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$

I POJAM PARAMETRA PODELE $\lambda(P) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$.

NA SVAKOM SEGMENTU $[x_{i-1}, x_i]$ MOŽEMO IZABRATI PO TAČIKU ξ_i .



NA OVAJ NAČIN DOBILI SMO PODELU P SA IZABRAKIM TAČIKAMA $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, U OZNACI (P, ξ) .

PRIMER NEKA JE $[1, 3]$ SEGMENT. NEKA JE $P = \{1, 1.3, 1.5, 2.1, 3\}$ PODELA I $\xi = \{1.1, 1.5, 2.1, 2.5\}$ IZABRAHE TAČIKE.

(P, ξ) PODELA SA IZABRAKIM TAČIKAMA

DEFINICIJA NEKA JE $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ I (P, ξ) JE NEKA PODELA SEGMENTA $[a, b]$ SA IZABRAKIM TAČIKAMA.

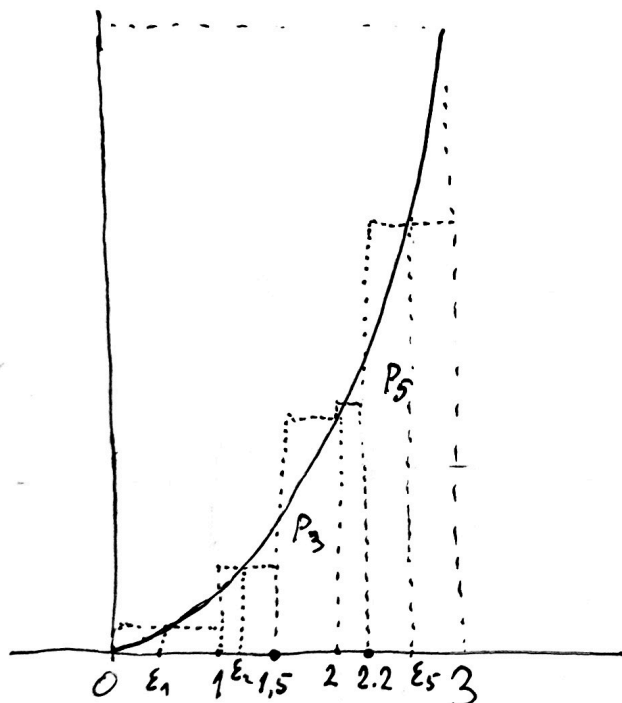
ZBIR $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ SE NAZIVA INTEGRALNOM SUMOM

FUNKCIJE f ZA DATU PODELU (P, ξ) , U OZNACI $\sigma(f, P, \xi)$.

PRIMER NEKA JE $f(x) = x^2$ I (P, ξ) PODELA SEGMENTA $[0, 3]$ SA IZABRANIM TAČKAMA ξ TAKVA DA JE $P = \{0, 1, 1.5, 2, 2.2, 3\}$ I $\xi = \{0.4, 1.2, 2, 2.1, 2.5\}$.

TADA JE

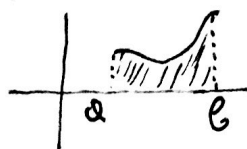
$$\begin{aligned} \sigma(f, P, \xi) &= \sum_{i=1}^5 f(\xi_i) \Delta x_i = f(0.4) \cdot (1-0) + f(1.2) \cdot (1.5-1) \\ &\quad + f(2) \cdot (2-1.5) + f(2.1) \cdot (2.2-2) + f(2.5) \cdot (3-2.2) \\ &= (0.4)^2 + (1.2)^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot (0.5) + (2.1)^2 \cdot 0.2 + (2.5)^2 \cdot 0.8 \\ &= 8.762 \end{aligned}$$



$$\sigma(f, P, \xi) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$$

P_i - PLOŠĆINE PRAVOUGAONIKA

AKO BIRAMO TAČKE ξ_i NA KRAJEVIMA SEGMENTA OHLA DOSTAJAMO DESNU INTEGRALNU SUMU $R(f, P) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$ (AKO BIRAMO DESNU GRANIČU) I LEVU INTEGRALNU SUMU $L(f, P) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x_i$ (AKO BIRAMO LEVU GRANIČU). AKO JE FUNKCIJA NEPREKIDNA I POZITIVNA NA $[a, b]$, OHLA IMA SMISLA RAČUNATI PLOŠĆINU ISPOD GRAFIKA A IZNAD X-OSE NA SEGMENTU $[a, b]$



POSTAVLJA SE PITANJE DA LI SE USITNJAVANJEM PODELE
(TO JEST KADA $\lambda(P) \rightarrow 0$) INTEGRALNA SUMA PRIBLIŽAVA TOJ POUVRŠINI.
ODGOVOR JE POTVRĐAN I KASNIJE ĆEMO GA DETALJNO OBJASNITI.

DEFINICIJA ZA FUNKCIJU $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ KAŽEMO DA JE INTEGRABILNA
U RIMANOVOM SMISLU NA SEGMENTU $[a, b]$ AKO POSTOJI
KONACAN LIMES $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma(f, P, \epsilon) = \bar{I}$, A TO ZNAČI DA POSTOJI
 $\bar{I} \in \mathbb{R}$ TAKO DA ZA SVAKO $\epsilon > 0$ POSTOJI $\delta > 0$ TAKO DA ZA SVAKU
PODELU (P, ϵ) KOD KOJE $\lambda(P) < \delta$ VAŽI:

$$|\sigma(f, P, \epsilon) - \bar{I}| < \epsilon.$$

DAKLE,

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma(f, P, \epsilon) = \bar{I} \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall (P, \epsilon)) (\lambda(P) < \delta \Rightarrow |\sigma(f, P, \epsilon) - \bar{I}| < \epsilon)$$

U TOM SLUČAJU BROJ $\bar{I}$ ZAPISACEMO KAO $\bar{I} = \int_a^b f(x) dx$

I REĆI ĆEMO DA JE RIMANOM INTEGRAL FUNKCIJE f NA
SEGMENTU $[a, b]$.

BROJ a JE DONJA GRANIČA, A BROJ b JE GORNJA GRANIČA INTEGRALA
FUNKCIJA f JE PODINTEGRALNA FUNKCIJA, A INTEGRACIJSKA PROMENLJIVA
JE x I ONA SE MOŽE ZAMENITI BILIKO KOJIM SLOVOM, TO JEST

$$\bar{I} = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(\xi) d\xi \quad \text{ZA RIMAN INTEGRABILNU FUNKCIJU } f$$

SKUP SVIH INTEGRABILNIH FUNKCIJA U RIMANOVOM SMISLU NA
SEGMENTU $[a, b]$ OZNAČIĆEMO SA $\mathcal{R}[a, b]$.

PRIMER NEKA JE $f(x) = c, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

DOKAZAĆEMO DA JE f RIMAN INTEGRABILNA NA $[a, b]$
I DA JE $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b c dx = c(b-a)$.

NEKA JE (P, ξ) PROIZVOLJNA PODELA SEGMENTA $[a, b]$

SA IZABRAKIM TAČKAMA, $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ I

$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$. INTEGRALNA SUMA JE JEDNAKA

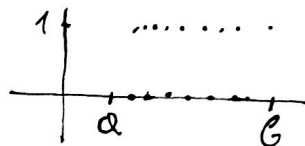
$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n c \cdot (x_i - x_{i-1}) = c \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = c(b-a)$$

ZA SVAKU PODELU $\sigma(f, P, \xi) = c(b-a)$, PA JE $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma(f, P, \xi) = c(b-a)$

DOKAZALI SMO $\int_a^b c dx = c(b-a)$, A ZA $c=1$ $\int_a^b dx = b-a$.

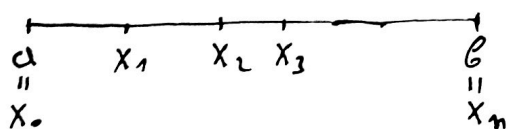
PRIMER NEKA JE $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, DIRICHLEOVA FUNKCIJA DEFINISANA SA

$$x(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \\ 0, & x \in \mathbb{I} \cap [a, b] \end{cases}$$



DOKAZAĆEMO DA FUNKCIJA x NIJE INTEGRABILNA U
RIMANOV SMISLU.

NEKA JE P PROIZVOLJNA PODELA, $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.



U SVAKOM SEGMENTU $[x_{i-1}, x_i]$ MOŽEMO IZABRATI TAČKU $\xi_i \in \mathbb{Q}$,
A MOŽEMO IZABRATI I $\xi'_i \in \mathbb{I}$ (JER SKUPOVI $\mathbb{Q}$ I $\mathbb{I}$ SU GUSTI U $\mathbb{R}$)

ODAVDE

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = b-a,$$

$$\sigma(f, P, \xi') = \sum_{i=1}^n f(\xi'_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0$$

ZA SVAKU PODELU (KOLIKO GOD JE „MALA“, TO JEST USITNJENA),
MOŽEMO IZABRATI ξ I ξ' TAKO DA JE $\sigma(f, P, \xi) = b-a$
I $\sigma(f, P, \xi') = 0$. ODAVDE NE POSTOJI $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma(f, P, \xi)$.

STAV Ako je funkcija f RIMAN INTEGRABILNA NA $[a, b]$, ONDA JE f OGRANIČENA.

DOKAZ NEKA JE f NEOGRANIČENA NA $[a, b]$. TADA SE MOŽE DOKAZATI DA ZA SVAKO $M > 0$ MOŽEMO IZABRATI PODELU (P, ξ) TAKVU DA JE $|S(f, P, \xi)| > M$ (IZBOROM ξ UNUTAR SEGMENTA $[x_{i-1}, x_i]$ GDE JE f NEOGRANIČENA TAKO DA JE $|f(\xi_i)|$ Dovoljno VELIKI BROJ).

DARBUOV INTEGRAL

DEFINISAMO DARBUOVE SUME ZA OGRANIČENE FUNKCIJE NA $[a, b]$.

NEKA JE $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ OGRANIČENA FUNKCIJA I NEKA JE $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ PODELA.

GORNJA DARBUOVA SUMA FUNKCIJE f ZA PODELU P JE

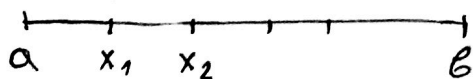
$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n \sup_{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i,$$

A DONJA DARBUOVA SUMA JE

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n \inf_{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

(SUPREMUMI I INFINIMUMI NA SEGMENTIMA POSTOJE JER JE FUNKCIJA OGRANIČENA).

PODELA P SEGMENTA $[a, b]$ JE RAVNOMERNA AKO JE $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ ZA SVAKO $i=1, \dots, n$, TO JEST SVI SEGMENTI SU ISTE DUŽINE.

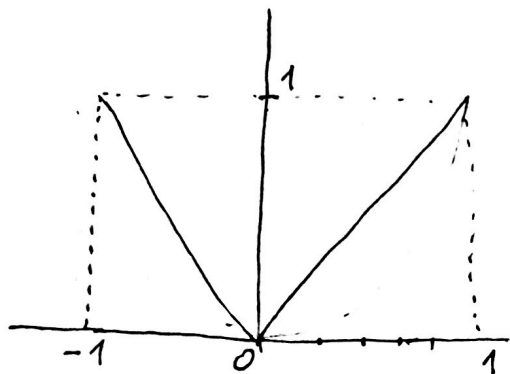


U OVOM SLUČAJU $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ ZA SVAKO $i=1, \dots, n$

PRIMER IZRAČUNATI $S(f, P)$ I $s(f, P)$ ZA FUNKCIJU $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = |x|$ ZA RAVNOMERNU PODELU P NA $2n$ JEDNAKIH SEGMENTA.

$$x_i = -1 + i \frac{b-a}{2n} = -1 + i \cdot \frac{1}{n}, \quad x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{2n} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$$



NA SEGMENTIMA $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$ VAŽI $M_i = \sup_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi) = f(x_{i-1})$

I $m_i = \inf_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi) = f(x_i)$ (JER JE f OPADAJUĆA NA $[-1, 0]$).

NA SEGMENTIMA $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{n+1, \dots, 2n\}$ VAŽI $M_i = \sup_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi) = f(x_i)$ I

$m_i = \inf_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi) = f(x_{i-1})$ (JER JE f RASTUĆA NA $[0, 1]$).

ODAVDE

$$\begin{aligned} S(f, P) &= \sum_{i=1}^{2n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=n+1}^{2n} M_i \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \frac{1}{n} \\ &+ \sum_{i=n+1}^{2n} f(x_i) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n f(-1 + (i-1) \cdot \frac{1}{n}) \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=n+1}^{2n} f(-1 + i \cdot \frac{1}{n}) \cdot \frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n \left| -1 + (i-1) \cdot \frac{1}{n} \right| \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=n+1}^{2n} \left| -1 + i \cdot \frac{1}{n} \right| \cdot \frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(1 - (i-1) \cdot \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=n+1}^{2n} \left(-1 + i \cdot \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) + \frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{2n} (-1) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=n+1}^{2n} i \\ &= \frac{1}{n} \cdot n - \frac{1}{n^2} \frac{(n-1) \cdot n}{2} + \frac{1}{n} (-n) + \frac{1}{n^2} \left(\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{n-1}{2n} - 1 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{4n^2 + 2n - n^2 - n}{2} \right) = -\frac{n-1}{2n} + \frac{3n+1}{2n} =$$

$$= \frac{2n+2}{2n} = 1 + \frac{1}{n}$$

$$\lambda(f, P) = \sum_{i=1}^{2n} m_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=n+1}^{2n} f(x_{i-1}) \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left| -1 + i \cdot \frac{1}{n} \right| \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=n+1}^{2n} \left| -1 + (i-1) \cdot \frac{1}{n} \right| \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(1 - i \cdot \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=n+1}^{2n} \left(-1 + (i-1) \cdot \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i - \frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{2n} (-1) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=n+1}^{2n} (i-1) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot n - \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n} (-n) + \frac{1}{n^2} (n + (n+1) + \dots + 2n-1)$$

$$= -\frac{n+1}{2n} + \frac{1}{n^2} \left(\frac{(2n-1) \cdot 2n}{2} - \frac{(n-1) \cdot n}{2} \right) =$$

$$= -\frac{n+1}{2n} + \frac{1}{n^2} \frac{4n^2 - 2n - n^2 + n}{2} = -\frac{n+1}{2n} + \frac{3n-1}{2n} = \frac{2n-2}{2n}$$

$$= 1 - \frac{1}{n}$$

STAV NEKA JE f OGRANIČENA NA $[a, b]$ I NEKA JE (P, ξ) PODELA.

TADA JE

$$m(b-a) \leq \lambda(f, P) \leq \sigma(f, P, \xi) \leq S(f, P) \leq M(b-a),$$

$$\text{GDE JE } m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \text{ I } M = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

DOKAZ NA SVAKOM SEGMENTU $[x_{i-1}, x_i]$ VAŽI

$$m \leq m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i \leq M,$$

ODAKLE JE

$$m(b-a) = \sum_{i=1}^n m \Delta x_i \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i}_{\lambda(f, P)} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i}_{\sigma(f, P, \xi)} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i}_{S(f, P)} \leq \sum_{i=1}^n M \Delta x_i \leq M(b-a)$$

STAV: NEKA JE $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ OGRANIČENA. TADA VAŽI:

a) $P < P' \Rightarrow \Lambda(f, P) \leq \Lambda(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P)$

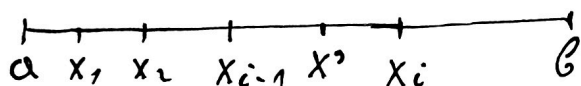
b) $\Lambda(f, P) \leq S(f, P')$ ZA PROIZVOLJNE PODELE P, P'

c) POSTOJE KONČNI:

$$\sup_P \Lambda(f, P) \quad \text{ i } \quad \inf_P S(f, P)$$

DOKAZ:

a) Dovoljno je dokazati u slučaju da je $P' = P \cup \{x'\}$,
 $x' \in (x_{i-1}, x_i)$ za neko i .



VAŽI:

$$\inf_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \inf_{\xi \in [x_{i-1}, x_i']} f(\xi) \cdot (x_i - x') + \inf_{\xi \in [x', x_i]} f(\xi) \cdot (x' - x_{i-1})$$

$$\leq \inf_{\xi \in [x', x_i]} f(\xi) (x_i - x') + \inf_{\xi \in [x_{i-1}, x']} f(\xi) \cdot (x' - x_{i-1})$$

ODAVDE $\Lambda(f, P) \leq \Lambda(f, P')$.

Slično se dokazuje $S(f, P') \leq S(f, P)$

b) NEKA IMAMO PROIZVOLJNE PODELE P i P' . NEKA JE $P'' = P \cup P'$

TADA JE $P < P''$ i $P' < P''$.

Iz $P < P''$ sledi (na osnovu dela a) $\Lambda(f, P) \leq \Lambda(f, P'')$

Iz $P' < P''$ sledi (na osnovu dela a) $S(f, P'') \leq S(f, P')$

Zbog $\Lambda(f, P'') \leq S(f, P'')$ imamo

$$\Lambda(f, P) \leq S(f, P').$$

c) S OBZIROM DA JE $\lambda(f, P) \leq S(f, P')$ ZA SVAKU PODELU P (DEO STAVA POD b)), SKUP $\{\lambda(f, P) \mid P \in \mathcal{P}\}$ JE OGRANIČEN ODOLJE, PA POSTOJI $\sup_P \lambda(f, P)$.

SLIČNO SE DOKAZUJE DA POSTOJI $\inf_P S(f, P)$.

DEFINICIJA NEKA JE $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ OGRANIČENA.

GORNJI DARBUDOV INTEGRAL JE $\bar{I} = \inf_P S(f, P)$,

A DONJI DARBUDOV INTEGRAL JE $\underline{I} = \sup_P \lambda(f, P)$

(NA OSNOVU PRETHODNOG STAVA INTEGRALI POSTOJE.)

VAŽI $\lambda(f, P) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S(f, P)$ ZA SVAKU PODELU P .

SLEDEĆU TEOREMU NAVODIMO BEZ DOKAZA.

TEOREMA NEKA JE $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ OGRANIČENA. TADA SU SLEDEĆA TVRĐENJA EKVIVALENTNA:

a) f JE RIMAN INTEGRABILNA NA $[a, b]$.

b) $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} (S(f, P) - \lambda(f, P)) = 0$, TO JEST

$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall P) (\lambda(P) < \delta \Rightarrow S(f, P) - \lambda(f, P) < \varepsilon)$

c) $\bar{I} = \underline{I}$ (GORNJI I DONJI DARBUDOV INTEGRAL SU JEDNAKI)

PRIMER KOD PRETHODNOG PRIMERA ZA FUNKCIJU $f(x) = |x|$ NA $[-1, 1]$ IMAMO $S(f, P) = 1 + \frac{1}{n}$ I $\lambda(f, P) = 1 - \frac{1}{n}$ ZA RAVNOMERNU PODELU P .

ODAVDE $\sup_P \lambda(f, P) \geq 1 - \frac{1}{n}$ I $\inf_P S(f, P) \leq 1 + \frac{1}{n}$.

KADA $n \rightarrow \infty$ IMAMO $1 \leq \sup_P \lambda(f, P) \leq \inf_P S(f, P) \leq 1$,

PA JE $\underline{I} = \bar{I} = 1$.

DAKLE $\int_a^b f(x) dx = 1$