

1. NEODREĐENI INTEGRAL

1.1 PRIMITIVNA FUNKCIJA I NEODREĐENI INTEGRAL

NEKA JE DATA FUNKCIJA $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

DEFINICIJA: FUNKCIJA $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ JE PRIMITIVNA FUNKCIJA FUNKCIJE f AKO JE DIFERENCIJABILNA I VAŽI

$$F'(x) = f(x) \text{ ZA SVAKO } x \in (a, b).$$

PRIMER a) FUNKCIJA $F(x) = \sin x$ JE PRIMITIVNA FUNKCIJA FUNKCIJE $f(x) = \cos x$ NA $\mathbb{R}$ JER VAŽI $(\sin x)' = \cos x$.

FUNKCIJA $F(x) = \sin x + 1$ JE PRIMITIVNA FUNKCIJA FUNKCIJE $f(x) = \cos x$.

SVE FUNKCIJE OBLIKA $F(x) = \sin x + C$, GDE JE C KONSTANTA, SU PRIMITIVNE FUNKCIJE FUNKCIJE $f(x) = \cos x$ JER VAŽI $(\sin x + C)' = \cos x$.

b) SVE FUNKCIJE OBLIKA $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$, GDE JE C KONSTANTA, SU PRIMITIVNE FUNKCIJE FUNKCIJE $f(x) = x$ JER VAŽI $(\frac{x^2}{2} + C)' = x$

STAV: a) AKO JE $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ PRIMITIVNA FUNKCIJA FUNKCIJE $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, ONDA JE I $F(x) + C$ PRIMITIVNA FUNKCIJA FUNKCIJE f , ZA SVAKU KONSTANTU C .

b) AKO SU F_1 I F_2 PRIMITIVNE FUNKCIJE FUNKCIJE f NA NEKOM INTERVALU (a, b) , ONDA SE ONE RAZLIKUJU ZA KONSTANTU, TO JEST $F_1(x) - F_2(x) = C$ ZA SVAKO $x \in (a, b)$.

DOKAZ: a) Ako je $F'(x) = f(x)$ za svako $x \in (a, b)$, onda je $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$, pa je $F(x) + C$ primitivna funkcija funkcije f .

b) Neka je $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$, $x \in (a, b)$. Tada je

$$F'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \text{ a odatle}$$

$\downarrow$
 F_1 i F_2 su primitivne

$F(x) = C$ za svako $x \in (a, b)$. (primenili smo teorem iz analize 1
Ako je $F'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$, onda je $F(x) = C \forall x \in (a, b)$)

NAPOMENA Primitivne funkcije smo definisali na intervalima.

Za funkciju $F(x) = \arctg \frac{1}{x}$, $F: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ važi $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

za svako $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ali nećemo reći da je

$F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

već da je $F_1(x) = \arctg \frac{1}{x}$, $F_1: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na $(-\infty, 0)$ i $F_2(x) = \arctg \frac{1}{x}$, $F_2: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na $(0, +\infty)$.

DEFINICIJA Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ se naziva neodređeni integral funkcije f i označava sa

$$\int f(x) dx.$$

U izrazu $\int f(x) dx$ funkcija $f(x)$ se naziva podintegralnom funkcijom a $\int f(x) dx$ podintegralnim izrazom.

Ako je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na nekom intervalu, onda se na osnovu prethodnog stava može zapisati

$$\int f(x) dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}, \text{ odnosno samo}$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

STAV NEKA JE $F(x)$ PRIMITIVNA FUNKCIJA FUNKCIJE $f(x)$ NA NEKOM INTERVALU. TADA JE

$$a) d(\int f(x) dx) = f(x) dx$$

$$b) \int dF(x) = F(x) + C$$

$$c) \int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$d) \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \quad \text{GDE SU } f \text{ I } g$$

DEFINISANE NA NEKOM INTERVALU.

DOKAZ a) $d(\int f(x) dx) = d(F(x) + C) = F'(x) dx = f(x) dx$

$$b) \int dF(x) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C$$

$$c) (\lambda \int f(x) dx)' = \lambda (\int f(x) dx)' = \lambda (F(x) + C)' = \lambda F'(x) = \lambda f(x)$$
$$(\int \lambda f(x) dx)' = \lambda f(x)$$

$$d) (\int (f(x) + g(x)) dx)' = f(x) + g(x)$$

$$(\int f(x) dx + \int g(x) dx)' = (\int f(x) dx)' + (\int g(x) dx)' = f(x) + g(x)$$

POSMATRAJMO FUNKCIJU $f_1(x) = \frac{1}{x}$ NA $(0, +\infty)$. JEDNA PRIMITIVNA FUNKCIJA FUNKCIJE f_1 JE $F_1(x) = \ln x$ NA $(0, +\infty)$. ODAVDE JE

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad \text{NA } (0, +\infty).$$

NEKA JE $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_2: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$. JEDNA PRIMITIVNA FUNKCIJA

FUNKCIJE f_2 JE $F_2(x) = \ln(-x)$ NA $(-\infty, 0)$ $((\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x})$.

ODAVDE JE

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C \quad \text{NA } (-\infty, 0).$$

ČESTO SE OBA NEODREĐENA INTEGRALA PIŠU IKAO JEDAN

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad \text{NA } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

KOJEG TREBA POSMATATI KAO 2 SLUČAJA ($x > 0$ i $x < 0$)
PRI ČEMU I KONSTANTE MOGU BITI RAZLIČITE NA SVAKOM OD TIH
INTERVALA.

SLIČNO JE I SA FUNKCIJOM $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ NA $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.

S OBZIROM DA JE $(\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2 x}$ NA SVAKOM INTERVALU,

IMAMO $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$ NA SVAKOM INTERVALU

KAO I U PRETHODNOM SLUČAJU (ZA FUNKCIJU $f(x) = \frac{1}{x}$) PIŠAĆEMO $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

PRI ČEMU I KONSTANTE MOGU BITI RAZLIČITE NA SVAKOM OD TIH
INTERVALA.

NAVEŠĆEMO TABLICU NEODREĐENIH INTEGRALA IMAJUĆI U VIDU DA NEKE
PODINTEGRALNE FUNKCIJE SU DEFINISANE NA UNICI OTVORENIH INTERVALA
I DA FORMULA VAŽI NA INTERVALU.

TABLICA NEODREĐENIH INTEGRALA

$$1) \int x^d = \frac{x^{d+1}}{d+1} + C, \quad d \neq -1$$

$$2) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$3) \int e^x dx = e^x + C,$$

$$4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$5) \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$6) \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$7) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$8) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$9) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C$$

$$10) \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$11) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$$

$$12) \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

PRIMER

$$\int \frac{(2-\sqrt{x})(3+x)}{x^2} dx = \int \frac{6+2x-3\sqrt{x}-x^{\frac{3}{2}}}{x^2} dx = \int \frac{6}{x^2} dx + \int \frac{2}{x} dx - \int \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$- \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 6 \int \frac{dx}{x^2} + 2 \int \frac{dx}{x} - 3 \int x^{-\frac{3}{2}} dx - \int x^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= 6 \int x^{-2} dx + 2 \int \frac{dx}{x} - 3 \int x^{-\frac{3}{2}} dx - \int x^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= 6 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 2 \ln|x| - 3 \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} - \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= -\frac{6}{x} + 2 \ln|x| + \frac{6}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + C$$

1.2 SMEHA PROMENLJIVE, PARCIJALNA INTEGRACIJA

SMEHA PROMENLJIVE

NEKA JE DATA FUNKCIJA $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ I NEKA JE $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ NJENA PRIMITIVNA FUNKCIJA. TADA JE $\int f(x) dx = F(x) + C$.

STAV (SMEHA PROMENLJIVE) NEKA JE $\varphi: (a, b) \rightarrow (a, b)$ DIFERENCIJABILNA FUNKCIJA. TADA JE

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C \quad \text{NA INTERVALU } (a, b).$$

DOKAZ IZVOD LEVE STRANE JE

$$\left(\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right)' = f(\varphi(t)) \varphi'(t),$$

A DESNE JE

$$(F(\varphi(t)) + C)' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) + C' = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

S OBZIROM DA SU IZVODI JEDNAKI, Onda se LEVA I DESNA STRANA RAZLIKUJU ZA NEKU KONSTANTU, PA JE

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C \quad \text{NA INTERVALU } (a, b).$$

PRIMER ODREDITI $\int t \sin(t^2) dt$ NA $(0, +\infty)$

NEKA JE $f(x) = \sin x$, $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I $F(x) = -\cos x$ JEDNA NJENA PRIMITIVNA FUNKCIJA.

NEKA JE $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $\varphi(t) = t^2$ DIFERENCIJABILNA.

NA OSNOVU PRETHODNOG STAVA

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C \quad \text{NA INTERVALU } (0, +\infty)$$

ODNOSNO

$$\int \sin(t^2) (2t) dt = -\cos(t^2) + C,$$

ODAKLE JE $\int t \sin t^2 dt = -\frac{1}{2} \cos t^2 + C$ NA $(0, +\infty)$

U PRETHODNOM STAVU SMO UVELI SMENU $x = \varphi(t)$ i IMALI SMO $dx = \varphi'(t) dt$.

AKO UVEDEMO SMENU $\varphi(x) = \varphi(t)$ ONDA IMAMO $\varphi'(x) dx = \varphi'(t) dt$.

PARCIJALNA INTEGRACIJA

STAV NEKA SU $u, v: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ DIFERENCIJABILNE FUNKCIJE I NEKA POSTOJI PRIMITIVNA FUNKCIJA FUNKCIJE $u'(x)v(x)$. TADA POSTOJI PRIMITIVNA FUNKCIJA FUNKCIJE $u(x)v'(x)$ i VAŽI:

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$$

DOKAZ S OBZIROM DA JE $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$,

VAŽI $\int (u(x)v(x))' dx = \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx$ i

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx,$$

TO JEST $\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x)$

(SKRAĆEN ZAPIS JE $\int u dv = uv - \int v du$)

PRIMER

a) $\int x \ln x dx = \left(\begin{array}{l} u(x) = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv(x) = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right) =$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

b) NEKA JE $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$

ZA $n=1$ $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C$

ZA $n=2$ $\tilde{I}_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

UVEDIMO PARCIJALNU INTEGRACIJU U $\tilde{I}_1$

$$\tilde{I}_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \left(\begin{array}{l} u = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow du = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right)$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2} dx$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2 \left(\int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \right) = \frac{x}{x^2+1} + 2(\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2)$$

ODAVDE $\tilde{I}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2+1} + \tilde{I}_1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x \right) + C$

NA SLIČAN NAČIN (KORIŠĆENJEM PARCIJALNE INTEGRACIJE U $\tilde{I}_n$)

SE MOŽE DOKAZATI: $\tilde{I}_{n+1} = \frac{1}{2n} \left(\frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1) \tilde{I}_n \right)$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\tilde{I}_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \left(\begin{array}{l} u = \frac{1}{(x^2+1)^n} \Rightarrow du = \frac{-n \cdot 2x}{(x^2+1)^{n+1}} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right) = \frac{x}{(x^2+1)^n} - \int \frac{-n \cdot 2 \cdot x^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2n \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \frac{x}{x^2+1} + 2n \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} - 2n \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2n \tilde{I}_n - 2n \tilde{I}_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

ODAVDE $\tilde{I}_{n+1} = \frac{1}{2n} \left[\frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1) \tilde{I}_n \right]$

1.3. INTEGRACIJA RACIONALNIH FUNKCIJA

NEKA SU $P(x)$ I $Q(x)$ POLINOMI NAD SKUPOM REALNIH BROJEVA.

SVAKU RACIONALNU FUNKCIJU $\frac{P(x)}{Q(x)}$ MOŽEMO NA JEDINSTVEN NAČIN

ZAPISATI U OBLIKU

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

GDE JE $T(x)$ POLINOM I STEPEN POLINOMA $P_1(x)$ JE MANJI OD STEPENA POLINOMA $Q(x)$.

POLINOM $Q(x)$ MOŽEMO RASTAVITI NA POLINOME OBLIKA

$x - \alpha$ (LINEARNI) I $x^2 + bx + c$ (KVADRATNI KOJI SU NEZASTAVLJIVI, $b^2 - 4c < 0$). DAKLE

$$Q(x) = A(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_p)^{k_p}(x^2 + b_1x + c_1)^{l_1} \dots (x^2 + b_qx + c_q)^{l_q}$$

$k_1 + k_2 + \dots + k_p = n, A, \alpha_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, b_i^2 - 4c_i < 0$

TEOREMA

RACIONALNA FUNKCIJA $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ (S $\deg P_1 < \deg Q$)

SE MOŽE NAISATI U OBLIKU

$$\begin{aligned} \frac{P_1(x)}{Q(x)} = & \left(\frac{A_{1,1}}{x - \alpha_1} + \frac{A_{1,2}}{(x - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{1,k_1}}{(x - \alpha_1)^{k_1}} \right) + \left(\frac{A_{2,1}}{x - \alpha_2} + \frac{A_{2,2}}{(x - \alpha_2)^2} + \dots + \frac{A_{2,k_2}}{(x - \alpha_2)^{k_2}} \right) \\ & + \dots + \left(\frac{A_{p,1}}{x - \alpha_p} + \frac{A_{p,2}}{(x - \alpha_p)^2} + \dots + \frac{A_{p,k_p}}{(x - \alpha_p)^{k_p}} \right) \\ & + \left(\frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2 + b_1x + c_1} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(x^2 + b_1x + c_1)^2} + \dots + \frac{B_{1,l_1}x + C_{1,l_1}}{(x^2 + b_1x + c_1)^{l_1}} \right) \\ & + \left(\frac{B_{2,1}x + C_{2,1}}{x^2 + b_2x + c_2} + \frac{B_{2,2}x + C_{2,2}}{(x^2 + b_2x + c_2)^2} + \dots + \frac{B_{2,l_2}x + C_{2,l_2}}{(x^2 + b_2x + c_2)^{l_2}} \right) + \dots + \\ & + \left(\frac{B_{q,1}x + C_{q,1}}{x^2 + b_qx + c_q} + \frac{B_{q,2}x + C_{q,2}}{(x^2 + b_qx + c_q)^2} + \dots + \frac{B_{q,l_q}x + C_{q,l_q}}{(x^2 + b_qx + c_q)^{l_q}} \right) \end{aligned}$$

DOKAZ TEOREME SLEDI NA OSHOVU SLEDEĆE DVE LEME.

LEMA 1 NEKA JE α REALNA KULA REDA k POLINOMA $Q(x)$ I NEKA JE

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ PRAVI RAZLOMAK ($\deg P < \deg Q$). TADA SE ON MOŽE NAPIŠATI U OBLIKU

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{k-s} Q_1(x)}, \quad A - \text{KONSTANTA, } s \in \mathbb{N}, 1 \leq s \leq k$$

POSLEDNJI RAZLOMAK JE PRAVI

DOKAZ

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{P(x)}{(x-\alpha)^k Q_1(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^k} + \frac{P(x)}{(x-\alpha)^k Q_1(x)} - \frac{A}{(x-\alpha)^k} = \\ &= \frac{A}{(x-\alpha)^k} + \frac{P(x) - A Q_1(x)}{(x-\alpha)^k Q_1(x)} \end{aligned}$$

IZABERIMO A TAKO DA JE $P(\alpha) - A Q_1(\alpha) = 0$ (TO JEST $A = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$)
POSTOJI $s \in \mathbb{N}$ T.D. $(x-\alpha)^s \mid P(x) - A Q_1(x)$ (S MAKSIMALNO)

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^k} + \frac{\frac{P(x) - A Q_1(x)}{(x-\alpha)^s}}{(x-\alpha)^{k-s} Q_1(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{k-s} Q_1(x)}$$



LEMA 2 NEKA JE $\frac{P(x)}{Q(x)}$ PRAVI RAZLOMAK I $Q(x)$ SE MOŽE NAPIŠATI U OBLIKU

$$Q(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)^k Q_1(x), \quad \alpha^2 - 4\beta < 0, \text{ A } x^2 + \alpha x + \beta \text{ I } Q_1(x) \text{ NEMAJU ZAJEDNIČKU}$$

NULA. TADA SE $\frac{P(x)}{Q(x)}$ MOŽE NAPIŠATI U OBLIKU

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + \alpha x + \beta)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + \alpha x + \beta)^{k-s} Q_1(x)}, \quad A, B \text{ KONSTANTE, SEM}$$

$1 \leq s \leq k$, POSLEDNJI RAZLOMAK JE PRAVI

DOKAZ TEOREME: NEKA JE $Q(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \dots (x - \alpha_p)^{k_p} (x^2 + b_1 x + c_1)^{l_1} \dots (x^2 + b_q x + c_q)^{l_q}$

PRIMEHOM LEME 1 DOBIJAMO (ZA NULU α_1)

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x - \alpha_1)^{k_1}} + \frac{P_2(x)}{(x - \alpha_1)^{k_1-s} Q_1(x)}$$

ZATIM, PRIMEHIMO LEMU 1 NA RACIONALNU FUNKCIJU $\frac{P_2(x)}{(x - \alpha_1)^{k_1-s} Q_1(x)}$;

$$\text{DOBIJAMO } \frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x - \alpha_1)^{k_1}} + \frac{A_1}{(x - \alpha_1)^{k_1-s}} + \frac{P_3(x)}{(x - \alpha_1)^{k_1-s-s_1} Q_1(x)}$$

NASTAVLJAJUĆI POSTUPAK DOBIJAMO

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_{1,1}}{x - \alpha_1} + \dots + \frac{A_{1,k_1}}{(x - \alpha_1)^{k_1}} + \frac{P_{k_1}(x)}{Q_1(x)}$$

POSLE PRIMEHE LEME 1 NA REALNE NULE $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ DOBIJAMO

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \left(\frac{A_{1,1}}{x - \alpha_1} + \dots + \frac{A_{1,k_1}}{(x - \alpha_1)^{k_1}} \right) + \dots + \left(\frac{A_{p,1}}{x - \alpha_p} + \dots + \frac{A_{p,k_p}}{(x - \alpha_p)^{k_p}} \right) + \frac{T(x)}{L(x)}$$

PRIMEHICEMO LEMU 2 NA $\frac{T(x)}{L(x)}$

$$L(x) = (x^2 + b_1 x + c_1)^{l_1} \dots (x^2 + b_q x + c_q)^{l_q}$$

ZA $(x^2 + b_1 x + c_1)^{l_1}, \dots, (x^2 + b_q x + c_q)^{l_q}$ (SLIČNO KAD ŠTO SMO PRIMEHIVALI LEMU 1)

$$\begin{aligned} \frac{P_1(x)}{Q(x)} = & \left(\frac{A_{1,1}}{x - \alpha_1} + \dots + \frac{A_{1,k_1}}{(x - \alpha_1)^{k_1}} \right) + \dots + \left(\frac{A_{p,1}}{x - \alpha_p} + \dots + \frac{A_{p,k_p}}{(x - \alpha_p)^{k_p}} \right) + \\ & + \left(\frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2 + b_1 x + c_1} + \dots + \frac{B_{1,l_1}x + C_{1,l_1}}{(x^2 + b_1 x + c_1)^{l_1}} \right) + \dots + \left(\frac{B_{q,1}x + C_{q,1}}{x^2 + b_q x + c_q} + \dots + \frac{B_{q,l_q}x + C_{q,l_q}}{(x^2 + b_q x + c_q)^{l_q}} \right) \end{aligned}$$



RAZLOMCI NA DESNOJ STRANI ZOVU SE PROSTI RAZLOMCI.

KOEFICIJENTE $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ i $C_{i,j}$ DOBIJAMO NA SLEDEĆI NAČIN:

MNOŽIMO JEDNAKOST SA $Q(x)$, SREDIMO DESNU STRANU (PREDSTAVIMO JE KAO POLINOM) i IZJEDNAČIMO POLINOME LEVE I DESNE STRANE (DVA POLINOMA SU JEDNAKA AKO IMAJU ISTE KOEFICIJENTE), ODAKLE DOBIJAMO SISTEM LINEARNIH JEDNAČINA PO $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$ KOTI REŠIMO.

POMOĆU PRETHODNE TEOREME $\int \frac{P_1(x)}{Q(x)} dx$ SE SVODI NA INTEGRALNE

$$\int \frac{A_{i,j}}{(x-Q_i)^j} dx \quad i \quad \int \frac{B_{i,j}x + C_{i,j}}{(x^2+b_ix+c_i)^j} dx \quad \text{KOTI SE MOGU REŠITI.}$$

PRIMER NAČI $\int \frac{x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^3 - x^2} dx$

DELJENJEM POLINOMA $P(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 2$ POLINOMOM $Q(x) = x^3 - x^2$

DOBIJAMO POLINOME $P_1(x)$ (OSTATAK) i $T(x)$ (KOLIČNIK)

$$\begin{array}{r} (x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 2) : (x^3 - x^2) = x \\ \underline{x^4 - x^3} \\ -2x^2 + x - 2 \end{array}$$

$$P_1(x) = -2x^2 + x - 2 \quad i \quad T(x) = x$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(x + \frac{-2x^2 + x - 2}{x^3 - x^2} \right) dx = \int x dx + \int \frac{-2x^2 + x - 2}{x^3 - x^2} dx$$

RASTAVIĆEMO POLINOM $Q(x)$

$$Q(x) = x^2(x-1)$$

PREMA TEOREMI POSTOJE KOEFICIJENTI A, B i C TAKO DA JE

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{-2x^2 + x - 2}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \quad / \text{MNOŽENJEM SA } Q(x)$$

$$-2x^2 + x - 2 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2$$

$$-2x^2 + x - 2 = Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2$$

$$-2x^2 + x - 2 = (A+C)x^2 + (-A+B)x - B$$

KADA IZJEDNAČIMO KOEFICIJENTE DOBIJAMO SISTEM

$$A+C=-2$$

$$-A+B=1, \text{ ODAKLE JE } A=1, B=2 \text{ i } C=-3 \text{ i VAŽI}$$

$$-B=-2$$

$$\begin{aligned} \int \frac{-2x^2+x-2}{x^2(x-1)} dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x-1} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2}{x^2} dx - \int \frac{3}{x-1} dx \\ &= \ln|x| + 2 \int x^{-2} dx - 3 \int \frac{dx}{x-1} \end{aligned}$$

$$\text{ZATIM, } \int \frac{dx}{x-1} = \left(\begin{array}{l} \text{SMEHA } t=x-1 \\ dt=dx \end{array} \right) = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x-1| + C$$

$$\int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

PREMA TOME,

$$\int \frac{x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^3 - x^2} dx = \int x dx + \int \frac{-2x^2 + x - 2}{x^2(x-1)} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x| - \frac{2}{x} - 3\ln|x-1| + C$$

DA BISMO URADILI INTEGRAL RACIONALNE FUNKCIJE POTREBNO JE DA RACIONALNU FUNKCIJU PREDSTAVIMO KAO ZBIR PROSTIH RAZLOMAKA I NEKOG POLINOMA.

INTEGRALI $\int \frac{dx}{(x-\alpha_i)^j}$ SE REŠAVAJU SMEKOM $t=x-\alpha_i$.

INTEGRALE $\int \frac{B_{i,1}x + C_{i,1}}{x^2 + b_ix + c_i} dx$ i $\int \frac{B_{i,j}x + C_{i,j}}{(x^2 + b_ix + c_i)^j} dx$

OBJASNIĆEMO NA ČASOVIMA VEŽBI