

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ У БЕОГРАДУ
- ИНФОРМАТИКА -

Анализа 2

- НЕЗВАНИЧНА СКРИПТА (У ИЗРАДИ) -

Аутор

Никола Маринковић

52/2025

Професор

др. Златко Лазовић

Трећи семестар, 2026.

Садржај

Пролог	3
0.1 Диференцијал	3
1 Примитивна функција и неодређени интеграли	4
1.1 Примитивна функција	4
1.2 Неодређени интеграли	6
1.2.1 Таблица неодређених интеграла	9
1.3 Смена променљиве	10
1.4 Парцијална интеграција	11
1.5 Интеграција рационалних функција	13

Пролог

Документ представља незваничну скрипту створену на основу предавања професора Златка Лазовића. Није створена у сарадњи са предавачима и не представља званични материјал. Уколико на испит изађете упознати искључиво са материјалом из овог документа, не постоји гаранција да ћете остварити задовољавајуће резултате.

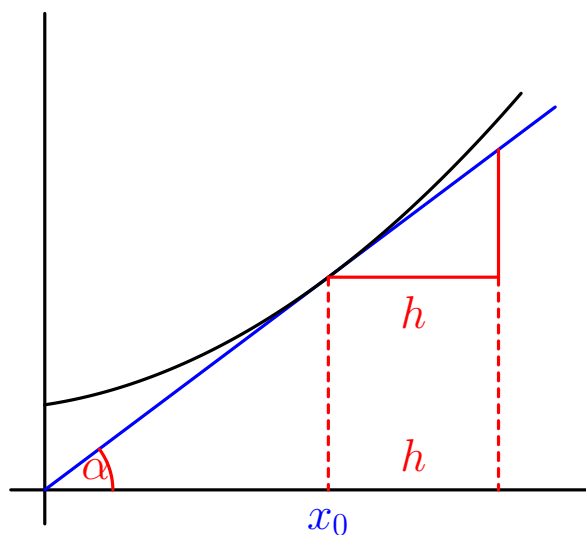
Секције испод представљају материјал предвиђен курсом Анализа 1, међутим у неким случајевима није био обрађен, те је неопходан за даље разумевање материјала са курса.

0.1 Диференцијал

Функција f је диференцијабилна на (a, b) .

Диференцијал функције (који представља једно линеарно пресликавање) представља се као:

$$df = f'(x)dx$$



Слика 1: Геометријска интерпретација диференцијала

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$df(x_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h$$

$$df(x_0) = f'(x_0)dx$$

I

Примитивна функција и неодређени интеграли

1.1 Примитивна функција

Дефиниција 1.1.1. Нека је дата функција $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Функција $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ се назива **примитивном функцијом** функције $f(x)$ ако задовољава $F'(x) = f(x)$ за свако $x \in (a, b)$.

Пример 1.1.1. Нека је дата функција

$$f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos x \quad (1.1)$$

Функција

$$F : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \sin x \quad (1.2)$$

је примитивна функција функције $f(x)$ јер важи

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x \\ \text{тј. } F'(x) &= f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Пример 1.1.2.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x$$

Функција

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{x^2}{2}$$

је примитивна функција функције $f(x)$ зато што важи:

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$$

Став 1.1.1. Ако је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$ на домену (a, b) , онда је и функција $F(x) + C$ примитивна функција функције f на (a, b) .

Доказ. Важи:

$$F'(x) = f(x) \quad (\forall x \in (a, b))$$

Одатле следи

$$(F(x) + c)' = F'(x) + c' = 0 = F'(x) = f(x)$$

Према томе, $F(x) + c$ је примитивна функција функције f на (a, b) .



Став 1.1.2. Ако су функције $F_1(x)$ и $F_2(x)$ примитивне функције функције $f(x)$ на (a, b) , онда је $F_1(x) - F_2(x)$ константна функција, то јест важи:

$$F_1(x) - F_2(x) = C \quad (\forall x \in (a, b))$$

Доказ. Важи:

$$F_1'(x) = f(x) \quad \wedge \quad F_2'(x) = f(x) \quad (\forall x \in (a, b))$$

Одавде

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad (\forall x \in (a, b))$$

Доказали смо да је $F_1(x) - F_2(x) = c$ за свако x из (a, b) .

Коментар. Из Анализе 1 знамо да важи:

$$(\forall x \in (a, b)) \quad g'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in (a, b)) \quad g(x) = c$$



Напомена Нека је

$$F_1 : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad F_1(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

Важи

$$F_1'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{1 + x^2}$$

Према томе, функција $F_1(x)$ је примитивна функција функције

$$f_1(x) = \frac{-1}{1 + x^2}$$

Посматрајмо функцију

$$F_2 : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$$

Коментар. Приметимо да две функције могу садржати исто правило пресликавања (формулу), али различит домен или кодомен, због чега нису истоветне.

На пример, посматрајмо две функције:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= \sin x \\ g : \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1], & g(x) &= \sin x \end{aligned}$$

За разлику од функције $f(x)$, функција $g(x)$ је сурјекција, због чега ове функције нису једнаке.



Важи

$$F_2'(x) = \frac{-1}{1+x^2} \quad (\forall x \in (-\infty, 0))$$

па је $F_2(x)$ примитивна функција функције $f(x)$ на $(-\infty, 0)$.

$\Rightarrow$

- $F_1(x) = \arctg \frac{1}{x}$ је примитивна функција функције $f(x) = \frac{-1}{1-x^2}$ на $(0, +\infty)$.
- $F_2(x) = \arctg \frac{1}{x}$ је примитивна функција функције $f(x) = \frac{-1}{1-x^2}$ на $(-\infty, 0)$.

1.2 Неодређени интеграл

Дефиниција 1.2.1. Скуп свих примитивних функција функције $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ називамо неодређеним интегралом функције f и означавамо са

$$\int f(x)dx$$

У овом изразу, функцију f називамо **подинтегралном функцијом** а $f(x)dx$ **подинтегралним изразом**.

На основу става 1.1.1, можемо закључити да важи

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

где је $F(x)$ једна примитивна функција функције $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ на (a, b) .

Краћи запис:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

где је $F(x)$ једна примитивна функција функције $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ на (a, b) .

Пример 1.2.1. Знамо да је $F(x) = \sin x$ примитивна функција функције $f(x) = \cos x$ на $\mathbb{R}$, одакле важи

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

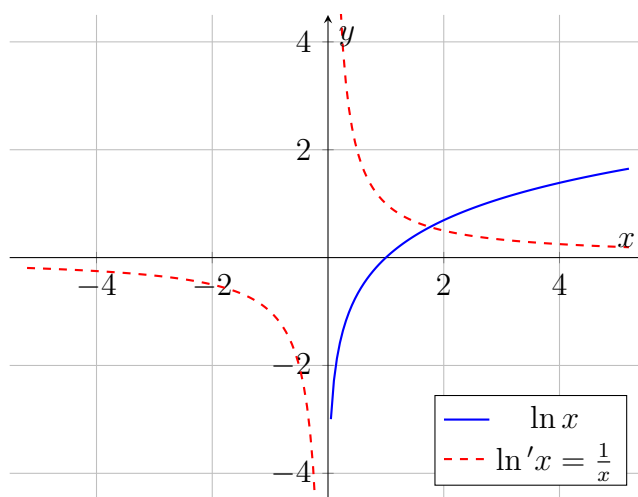
Напомена

- За функцију

$$F_1 : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_1(x) = \ln x$$

важи $F_1'(x) = \frac{1}{x}$, па кажемо да је $F_1(x) = \ln x$ примитивна функција функције $f_1(x) = \frac{1}{x}$ на $(0, +\infty)$.

$$\text{Дакле, } \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c \text{ на } (0, +\infty).$$



- За функцију

$$F_2 : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_2(x) = \ln(-x)$$

важи

$$F_2'(x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} \quad (\forall x \in (-\infty, 0))$$

па кажемо да је $F_2(x) = \ln(-x)$ примитивна функција функције $f_2(x) = \frac{1}{x}$ на $(-\infty, 0)$.

$$\text{Дакле, } \int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + c \text{ на } (-\infty, 0).$$

Коментар. Оба интеграла се краће могу записати на следећи начин:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

међутим, оваква формулација није исправна (иако ће бити коришћена на вежбама) јер се по дефиницији интеграла дефинишу на интервалима, док је овај израз дефинисан на унији интервала.



Став 1.2.1. Нека је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$ на (a, b) . Тада важи:

а) $d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$

Доказ. Из $\int f(x) dx = F(x) + c$ следи:

$$d \left(\int f(x) dx \right) = d(F(x) + c) = dF(x) + 0 = F'(x) dx = f(x) dx$$



б) $\int dF = F(x) + c$

Доказ.

$$\int dF = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + c$$

■

в) $\int \lambda f(x)dx = \lambda F(x) + c$

Доказ. Важи:

$$(\lambda F(x) + c)' = \lambda F'(x) + 0 = \lambda f(x)$$

па је $\lambda F(x) + c$ примитивна функција функције $\lambda f(x)$ и важи:

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda F(x) + c$$

■

г) $\int (f(x) \pm g(x)) = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Доказ. Ако је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$ и $G(x)$ примитивна функција функције $g(x)$ онда за свако $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ важи:

$$(F(x) + C_1 + G(x) + C_2)' = F'(x) + 0 + G'(x) + 0 = f(x) + g(x)$$

одакле важи:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Доказ је сличан и за $f(x) - g(x)$.

■

1.2.1 Таблица неодређених интеграла

- 1) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,$
- 2) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
- 3) $\int e^x dx = e^x + c$
- 4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
- 5) $\int \cos x dx = \sin x + c$
- 6) $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- 7) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$ ¹
- 8) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$
- 9) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$
- 10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + c$
- 11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + c$
- 12) $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c$

Пример 1.2.2.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{(6-\sqrt{x})(3+x)}{x^2} dx &= \int \frac{18+6x-3\sqrt{x}-x^{\frac{3}{2}}}{x^2} dx \\
 &= \int \frac{18}{x^2} dx + \int \frac{6}{x} dx - \int 3\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
 &= 18 \int x^{-2} dx + 6 \int \frac{dx}{x} - 3 \int x^{-\frac{3}{2}} dx - \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\
 &= 18 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 6 \ln|x| - 3 \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} - \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c \\
 &= -\frac{18}{x} + 6 \ln|x| + \frac{6}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + c
 \end{aligned}$$

¹ $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

1.3 Смена променљиве

Теорема 1.3.1. Нека је $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ функција и $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ њена примитивна функција. Ако је $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ диференцијабилна функција, онда важи:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c$$

Доказ. Доказаћемо да је $F(\varphi(t))$ примитивна функција функције $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$. Важи:

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

па је

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c$$

■

Пример 1.3.1. Одредити $\int t \sin t^2 dt$.

Решење. Нека су:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= \sin x \\ \varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \varphi(t) &= t^2 \end{aligned}$$

Функција φ је диференцијабилна на $\mathbb{R}$ и $F(x) = -\cos(x)$ је примитивна функција функције $f(x)$.

На основу теореме 1.3.1 имамо:

$$\int \sin t^2 \cdot 2t dt = -\cos t^2 + c$$

Одавде:

$$\begin{aligned} 2 \int t \sin t^2 dt &= -\cos t^2 + c \\ \int t \sin t^2 dt &= -\frac{1}{2} \cos t^2 + c_1 \quad c_1 \neq \frac{c}{2} \end{aligned}$$

Користимо c_1 како би демонстрирали да у питању није иста константа, али је прецртавамо зато што је то што није иста ирелевантно.

Коментар. Краћи запис:

$$\begin{aligned} \int t \sin t^2 dt &= \left(\begin{array}{l} x = t^2 \quad /d \\ 1 \cdot dx = 2t dt \\ t dt = \frac{dx}{2} \end{array} \right) = \int \sin x \frac{dx}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x + c = -\frac{1}{2} \cos t^2 + c \end{aligned}$$



✓

1.4 Парцијална интеграција

Теорема 1.4.1. Нека су $u, v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилне функције и функција $u(x)v(x)$ има примитивну функцију. Тада и функција $u(x)v'(x)$ има примитивну функцију и важи:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Коментар. Краћи запис: $\int u dv = uv - \int v du$



Доказ. С обзиром да

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

важи

$$\int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = u(x)v(x) + c$$

и важи

$$(u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u'(x)v(x) = u(x)v'(x)$$

Дакле

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$



Пример 1.4.1. Одредити $\int x \ln x dx$.

Решење. Нека су:

$$u(x) = \ln x$$

$$v(x) = \frac{x^2}{2}$$

Важи

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \int \ln x \left(\frac{x^2}{2} \right)' dx = \int u(x)v'(x)dx \\ &= u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

Коментар. Типично, метод ће се у задацима примењивати на следећи начин:

$$\begin{aligned}\int x \ln x dx &= \left(\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right) = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c\end{aligned}$$



✓

Пример 1.4.2. Одредити $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Решење.

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctg x + c$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \left(\begin{array}{l} u = \frac{1}{x^2 + 1} \Rightarrow du = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx \\ dv = dx \end{array} \right)$$

$$\stackrel{\text{п.и.}}{=} \frac{x}{x^2 + 1} - \int -\frac{2x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{x}{x^2 + 1} + 2 \int \frac{x^2 + 1 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$= \frac{x}{x^2 + 1} + 2 \left(\underbrace{\int \frac{dx}{x^2 + 1}}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}}_{I_2} \right)$$

$$I_1 = \frac{x}{x^2 + 1} + 2I_1 - 2I_2$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} I_1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \arctg x + c$$

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} = \left(\begin{array}{l} u = \frac{1}{(x^2 + 1)^n} \Rightarrow du = (-n)(x^2 + 1)^{-n-1} 2x dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right)$$

$$= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} - \int (-n) \cdot \frac{2x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \int \frac{x^2 + 1 - 1}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \left(\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} - \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n+1}} \right)$$

$$I_n = \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \cdot I_n - 2n \cdot I_{n+1}$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n} \left[\frac{x}{(x^2 + 1)^n} + (2n - 1) I_n \right], \quad n \in \mathbb{N}$$

✓

1.5 Интеграција рационалних функција

Нека су $P(x)$ и $Q(x)$ полиноми са реалним коефицијентима.

Посматрајмо рационалну функцију $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Постоје јединствени полиноми $T(x)$ и $P_1(x)$ тако да је степен полинома $P_1(x)$ мањи од степена полинома $Q(x)$ и важи:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

што значи $stP_1 < stQ$.

Нека је

$$Q(x) = A(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_p)^{k_p}\cdot(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}(x^2+b_2x+c_2)^{l_2}\dots(x^2+b_qx+c_q)^{l_q}$$

где квадратни полиноми

$$x^2 + b_1x + c_1, x^2 + b_2x + c_2, \dots$$

нису растављиви, то јест важи

$$b_1^2 - 4c_1 < 0, b_2^2 - 4c_2 < 0, \dots$$

Теорема 1.5.1. Рационална функција $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ (где је $stP_1 < stQ$) се на јединствен начин (постоје јединствене константе)

$A_{1,1}$	$A_{1,2}$	$\dots$	A_{1,k_1}	$B_{1,1}$	$B_{1,2}$	$\dots$	B_{1,l_1}	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$\dots$	C_{1,l_1}
$A_{2,1}$	$A_{2,2}$	$\dots$	A_{2,k_2}	$B_{2,1}$	$B_{2,2}$	$\dots$	B_{2,l_2}	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$\dots$	C_{2,l_2}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$A_{p,1}$	$A_{p,2}$	$\dots$	A_{p,k_p}	$B_{q,1}$	$B_{q,2}$	$\dots$	B_{q,l_q}	$C_{q,1}$	$C_{q,2}$	$\dots$	C_{q,l_q}

може записати на следећи начин:

$$\begin{aligned} \frac{P_1(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{1,1}}{(x-a_1)} + \frac{A_{1,2}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1,k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} \\ &+ \frac{A_{2,1}}{(x-a_2)} + \frac{A_{2,2}}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{A_{2,k_2}}{(x-a_2)^{k_2}} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{A_{p,1}}{(x-a_p)} + \frac{A_{p,2}}{(x-a_p)^2} + \dots + \frac{A_{p,k_p}}{(x-a_p)^{k_p}} \\ &+ \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2 + b_1x + c_1} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(x^2 + b_1x + c_1)^2} + \dots + \frac{B_{1,l_1}x + C_{1,l_1}}{(x^2 + b_1x + c_1)^{l_1}} \\ &+ \frac{B_{2,1}x + C_{2,1}}{x^2 + b_2x + c_2} + \frac{B_{2,2}x + C_{2,2}}{(x^2 + b_2x + c_2)^2} + \dots + \frac{B_{2,l_2}x + C_{2,l_2}}{(x^2 + b_2x + c_2)^{l_2}} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{B_{q,1}x + C_{q,1}}{x^2 + b_qx + c_q} + \frac{B_{q,2}x + C_{q,2}}{(x^2 + b_qx + c_q)^2} + \dots + \frac{B_{q,l_q}x + C_{q,l_q}}{(x^2 + b_qx + c_q)^{l_q}} \end{aligned}$$

Коментар. На вежбама се раде задаци облика

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n}, \quad \int \frac{Ax+b}{(x^2+cx+d)^n} dx$$



Недостаје пример.