

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ У БЕОГРАДУ
- ИНФОРМАТИКА -

Анализа 2

- НЕЗВАНИЧНА СКРИПТА (У ИЗРАДИ) -

Аутор
Никола Маринковић
52/2025

Професор
др. Златко Лазовић

Трећи семестар, 2026.

Садржај

Пролог	3
0.1 Диференцијал	3
0.2 Хиперболичке функције	4
1 Примитивна функција и неодређени интеграл	6
1.1 Примитивна функција	6
1.2 Неодређени интеграл	8
1.2.1 Таблица неодређених интеграла	11
1.3 Смена променљиве	12
1.4 Парцијална интеграција	13
1.5 Интеграција рационалних функција	15
1.6 Интеграција неких ирационалних и тригонометријских функција . .	17
2 Одређени интеграл	19
2.1 Појам Римановог интеграла	19
2.2 Дарбуове суме	23

Пролог

Документ представља незваничну скрипту створену на основу предавања професора Златка Лазовића. Није створена у сарадњи са предавачима и не представља званични материјал. Уколико на испит изађете упознати искључиво са материјалом из овог документа, не постоји гаранција да ћете остварити задовољавајуће резултате.

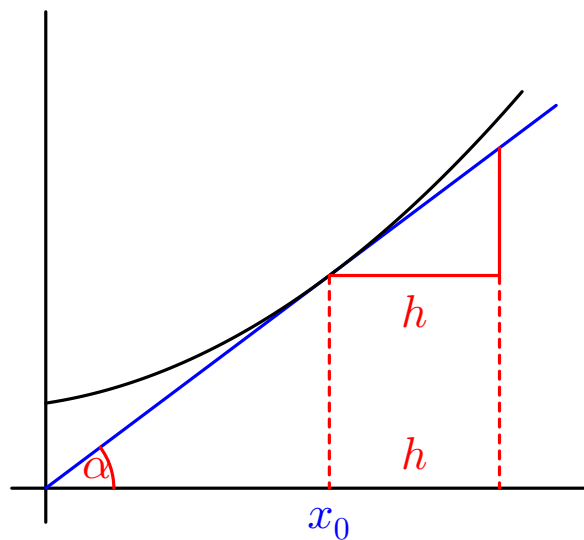
Секције испод представљају материјал предвиђен курсом Анализа 1, међутим у неким случајевима није био обрађен, те је неопходан за даље разумевање материјала са курса.

0.1 Диференцијал

Функција f је диференцијабилна на (a, b) .

Диференцијал функције (који представља једно линеарно пресликавање) представља се као:

$$df = f'(x)dx$$



Слика 0.1.1: Геометријска интерпретација диференцијала

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$df(x_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h$$

$$df(x_0) = f'(x_0)dx$$

0.2 Хиперболичке функције

Користећи Ојлерову формулу

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

можемо засновати тригонометријске формуле на следећи начин:

$$\begin{aligned}\sin x &:= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \cos x &:= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\end{aligned}$$

Хиперболичке функције изгледају слично, и разликују се у томе што смо склонили сваку појаву имагинарне јединице:

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \operatorname{ch} x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\end{aligned}$$

Графици ових функција налазе се на слици 0.2.1. За њих важе неке занимљиве особине:

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}' x &= \operatorname{ch}' x \\ \operatorname{ch}' x &= \operatorname{sh}' x \\ \operatorname{ch}^2 x &= 1 + \operatorname{sh}^2 x\end{aligned}$$

Одредимо инверз хиперболичког синуса, који ће нам касније бити користан.

$$\operatorname{arcsch} x = \operatorname{sh}^{-1} x$$

Решење.

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad / \cdot e^x \cdot 2$$

$$2ye^x = e^{2x} - 1$$

смена $t = e^x$, $t > 0$ (функција e^x је строго позитивна)

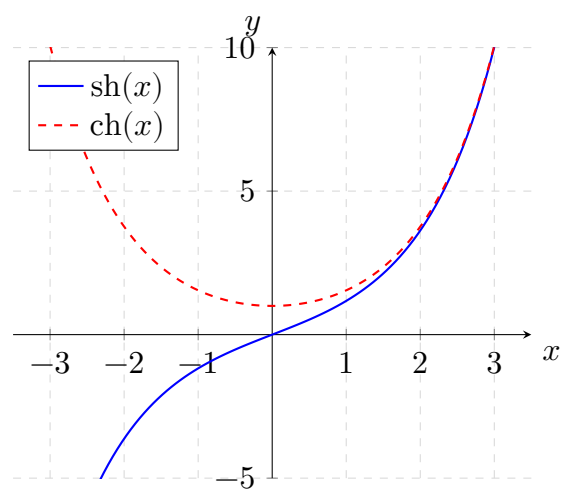
$$2yt = t^2 - 1 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

Пошто важи $\sqrt{y^2 + 1} > \sqrt{y^2} = |y|$ и $t > 0$, одбацујемо решење са минусом.
 $\Rightarrow t = y + \sqrt{y^2 + 1} \Rightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$

Решење је:

$$\operatorname{arcsch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

□

Слика 0.2.1: График функција $\text{sh } x$ и $\text{ch } x$

I

Примитивна функција и неодређени интеграли

1.1 Примитивна функција

Дефиниција 1.1.1. Нека је дата функција $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Функција $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ се назива **примитивном функцијом** функције $f(x)$ ако задовољава $F'(x) = f(x)$ за свако $x \in (a, b)$.

Пример 1.1.1. Нека је дата функција

$$f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos x \quad (1.1)$$

Функција

$$F : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \sin x \quad (1.2)$$

је примитивна функција функције $f(x)$ јер важи

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x \\ \text{тј. } F'(x) &= f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Пример 1.1.2.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x$$

Функција

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{x^2}{2}$$

је примитивна функција функције $f(x)$ зато што важи:

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$$

Став 1.1.1. Ако је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$ на домену (a, b) , онда је и функција $F(x) + C$ примитивна функција функције f на (a, b) .

Доказ. Важи:

$$F'(x) = f(x) \quad (\forall x \in (a, b))$$

Одатле следи

$$(F(x) + c)' = F'(x) + c' = 0 = F'(x) = f(x)$$

Према томе, $F(x) + c$ је примитивна функција функције f на (a, b) . ■

Став 1.1.2. Ако су функције $F_1(x)$ и $F_2(x)$ примитивне функције функције $f(x)$ на (a, b) , онда је $F_1(x) - F_2(x)$ константна функција, то јест важи:

$$F_1(x) - F_2(x) = C \quad (\forall x \in (a, b))$$

Доказ. Важи:

$$F_1'(x) = f(x) \quad \wedge \quad F_2'(x) = f(x) \quad (\forall x \in (a, b))$$

Одавде

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad (\forall x \in (a, b))$$

Доказали смо да је $F_1(x) - F_2(x) = c$ за свако x из (a, b) .

Коментар. Из Анализе 1 знамо да важи:

$$(\forall x \in (a, b)) \quad g'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in (a, b)) \quad g(x) = c$$



Напомена Нека је

$$F_1 : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad F_1(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

Важи

$$F_1'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{1 + x^2}$$

Према томе, функција $F_1(x)$ је примитивна функција функције

$$f_1(x) = \frac{-1}{1 + x^2}$$

Посматрајмо функцију

$$F_2 : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$$

Коментар. Приметимо да две функције могу садржати исто правило пресликавања (формулу), али различит домен или кодомен, због чега нису истоветне.

На пример, посматрајмо две функције:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= \sin x \\ g : \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1], & g(x) &= \sin x \end{aligned}$$

За разлику од функције $f(x)$, функција $g(x)$ је сурјекција, због чега ове функције нису једнаке.



Важи

$$F_2'(x) = \frac{-1}{1+x^2} \quad (\forall x \in (-\infty, 0))$$

па је $F_2(x)$ примитивна функција функције $f(x)$ на $(-\infty, 0)$.

$\Rightarrow$

- $F_1(x) = \arctg \frac{1}{x}$ је примитивна функција функције $f(x) = \frac{-1}{1-x^2}$ на $(0, +\infty)$.
- $F_2(x) = \arctg \frac{1}{x}$ је примитивна функција функције $f(x) = \frac{-1}{1-x^2}$ на $(-\infty, 0)$.

1.2 Неодређени интеграл

Дефиниција 1.2.1. Скуп свих примитивних функција функције $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ називамо неодређеним интегралом функције f и означавамо са

$$\int f(x)dx$$

У овом изразу, функцију f називамо **подинтегралном функцијом** а $f(x)dx$ **подинтегралним изразом**.

На основу става 1.1.1, можемо закључити да важи

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

где је $F(x)$ једна примитивна функција функције $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ на (a, b) .

Краћи запис:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

где је $F(x)$ једна примитивна функција функције $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ на (a, b) .

Пример 1.2.1. Знамо да је $F(x) = \sin x$ примитивна функција функције $f(x) = \cos x$ на $\mathbb{R}$, одакле важи

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

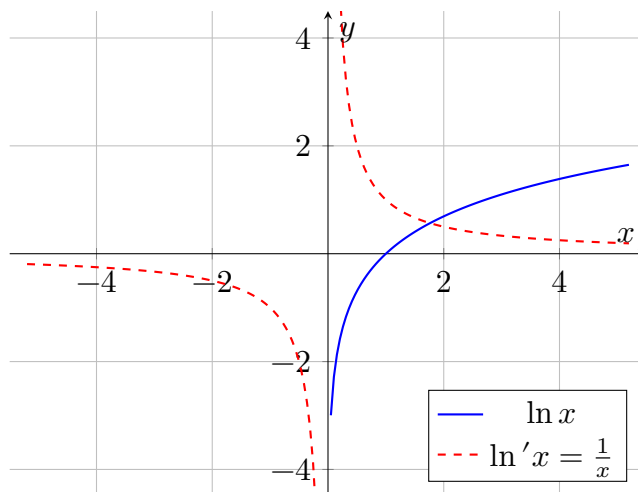
Напомена

- За функцију

$$F_1 : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_1(x) = \ln x$$

важи $F_1'(x) = \frac{1}{x}$, па кажемо да је $F_1(x) = \ln x$ примитивна функција функције $f_1(x) = \frac{1}{x}$ на $(0, +\infty)$.

$$\text{Дакле, } \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c \text{ на } (0, +\infty).$$



- За функцију

$$F_2 : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_2(x) = \ln(-x)$$

важи

$$F_2'(x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} \quad (\forall x \in (-\infty, 0))$$

па кажемо да је $F_2(x) = \ln(-x)$ примитивна функција функције $f_2(x) = \frac{1}{x}$ на $(-\infty, 0)$.

$$\text{Дакле, } \int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + c \text{ на } (-\infty, 0).$$

Коментар. Оба интеграла се краће могу записати на следећи начин:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

међутим, оваква формулација није исправна (иако ће бити коришћена на вежбама) јер се по дефиницији интеграла дефинишу на интервалима, док је овај израз дефинисан на унији интервала.



Став 1.2.1. Нека је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$ на (a, b) . Тада важи:

$$\text{а) } d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx$$

Доказ. Из $\int f(x)dx = F(x) + c$ следи:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + c) = dF(x) + 0 = F'(x)dx = f(x)dx$$

■

б) $\int dF = F(x) + c$

Доказ.

$$\int dF = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + c$$

■

в) $\int \lambda f(x)dx = \lambda F(x) + c$

Доказ. Важи:

$$(\lambda F(x) + c)' = \lambda F'(x) + 0 = \lambda f(x)$$

па је $\lambda F(x) + c$ примитивна функција функције $\lambda f(x)$ и важи:

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda F(x) + c$$

■

г) $\int (f(x) \pm g(x)) = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Доказ. Ако је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$ и $G(x)$ примитивна функција функције $g(x)$ онда за свако $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ важи:

$$(F(x) + C_1 + G(x) + C_2)' = F'(x) + 0 + G'(x) + 0 = f(x) + g(x)$$

одакле важи:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Доказ је сличан и за $f(x) - g(x)$.

■

1.2.1 Таблица неодређених интеграла

- 1) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,$
- 2) $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$
- 3) $\int e^x dx = e^x + c$
- 4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
- 5) $\int \cos x dx = \sin x + c$
- 6) $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- 7) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$ ¹
- 8) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$
- 9) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$
- 10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
- 11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + c$
- 12) $\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c$

Пример 1.2.2.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{(6 - \sqrt{x})(3 + x)}{x^2} dx &= \int \frac{18 + 6x - 3\sqrt{x} - x^{\frac{3}{2}}}{x^2} dx \\
 &= \int \frac{18}{x^2} dx + \int \frac{6}{x} dx - \int 3 \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
 &= 18 \int x^{-2} dx + 6 \int \frac{dx}{x} - 3 \int x^{-\frac{3}{2}} dx - \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\
 &= 18 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 6 \ln |x| - 3 \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} - \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c \\
 &= -\frac{18}{x} + 6 \ln |x| + \frac{6}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + c
 \end{aligned}$$

¹ $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

1.3 Смена променљиве

Теорема 1.3.1. Нека је $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ функција и $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ њена примитивна функција. Ако је $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ диференцијабилна функција, онда важи:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c$$

Доказ. Доказаћемо да је $F(\varphi(t))$ примитивна функција функције $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.
Важи:

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

па је

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c$$



Пример 1.3.1. Одредити $\int t \sin t^2 dt$.

Решење. Нека су:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= \sin x \\ \varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \varphi(t) &= t^2 \end{aligned}$$

Функција φ је диференцијабилна на $\mathbb{R}$ и $F(x) = -\cos(x)$ је примитивна функција функције $f(x)$.

На основу теореме 1.3.1 имамо:

$$\int \sin t^2 \cdot 2t dt = -\cos t^2 + c$$

Одавде:

$$\begin{aligned} 2 \int t \sin t^2 dt &= -\cos t^2 + c \\ \int t \sin t^2 dt &= -\frac{1}{2} \cos t^2 + c_1 \quad c_1 \neq \frac{c}{2} \end{aligned}$$

Користимо c_1 како би демонстрирали да у питању није иста константа, али је прецртавамо зато што је то што није иста ирелевантно.

Коментар. Краћи запис:

$$\begin{aligned} \int t \sin t^2 dt &= \left(\begin{array}{l} x = t^2 \quad /d \\ 1 \cdot dx = 2t dt \\ t dt = \frac{dx}{2} \end{array} \right) = \int \sin x \frac{dx}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x + c = -\frac{1}{2} \cos t^2 + c \end{aligned}$$



1.4 Парцијална интеграција

Теорема 1.4.1. Нека су $u, v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилне функције и функција $u(x)v'(x)$ има примитивну функцију. Тада и функција $u(x)v'(x)$ има примитивну функцију и важи:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Коментар. Краћи запис: $\int u dv = uv - \int v du$



Доказ. С обзиром да

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

важи

$$\int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = u(x)v(x) + c$$

и важи

$$(u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u'(x)v(x) = u(x)v'(x)$$

Дакле

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$



Пример 1.4.1. Одредити $\int x \ln x dx$.

Решење. Нека су:

$$u(x) = \ln x$$

$$v(x) = \frac{x^2}{2}$$

Важи

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \int \ln x \left(\frac{x^2}{2} \right)' dx = \int u(x)v'(x)dx \\ &= u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

Коментар. Типично, метод ће се у задацима примењивати на следећи начин:

$$\begin{aligned}\int x \ln x dx &= \left(\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right) = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c\end{aligned}$$



□

Пример 1.4.2. Одредити $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Решење.

$$\begin{aligned}I_1 &= \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctg x + c \\ I_1 &= \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \left(\begin{array}{l} u = \frac{1}{x^2 + 1} \Rightarrow du = -\frac{1}{(x^2 + 1)^2} 2x dx \\ dv = dx \end{array} \right) \\ &\stackrel{\text{п.и.}}{=} \frac{x}{x^2 + 1} - \int -\frac{2x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{x}{x^2 + 1} + 2 \int \frac{x^2 + 1 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= \frac{x}{x^2 + 1} + 2 \left(\underbrace{\int \frac{dx}{x^2 + 1}}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}}_{I_2} \right) \\ I_1 &= \frac{x}{x^2 + 1} + 2I_1 - 2I_2 \\ I_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} I_1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \arctg x + c \\ I_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} = \left(\begin{array}{l} u = \frac{1}{(x^2 + 1)^n} \Rightarrow du = (-n)(x^2 + 1)^{-n-1} 2x dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right) \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} - \int (-n) \cdot \frac{2x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \int \frac{x^2 + 1 - 1}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \left(\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} - \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n+1}} \right) \\ I_n &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \cdot I_n - 2n \cdot I_{n+1} \\ I_{n+1} &= \frac{1}{2n} \left[\frac{x}{(x^2 + 1)^n} + (2n - 1)I_n \right], \quad n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

□

1.5 Интеграција рационалних функција

Нека су $P(x)$ и $Q(x)$ полиноми са реалним коефицијентима.

Посматрајмо рационалну функцију $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Постоје јединствени полиноми $T(x)$ и $P_1(x)$ тако да је степен полинома $P_1(x)$ мањи од степена полинома $Q(x)$ и важи:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

што значи $stP_1 < stQ$.

Нека је

$$Q(x) = A(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_p)^{k_p}\cdot(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}(x^2+b_2x+c_2)^{l_2}\dots(x^2+b_qx+c_q)^{l_q}$$

где квадратни полиноми

$$x^2 + b_1x + c_1, x^2 + b_2x + c_2, \dots$$

нису растављиви, то јест важи

$$b_1^2 - 4c_1 < 0, b_2^2 - 4c_2 < 0, \dots$$

Теорема 1.5.1. Рационална функција $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ (где је $stP_1 < stQ$) се на јединствен начин (постоје јединствене константе)

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,k_1} & B_{1,1} & B_{1,2} & \dots & B_{1,l_1} & C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,l_1} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,k_2} & B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,l_2} & C_{2,1} & C_{2,2} & \dots & C_{2,l_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p,1} & A_{p,2} & \dots & A_{p,k_p} & B_{q,1} & B_{q,2} & \dots & B_{q,l_q} & C_{q,1} & C_{q,2} & \dots & C_{q,l_q} \end{array}$$

може записати на следећи начин:

$$\begin{aligned} \frac{P_1(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{1,1}}{(x-a_1)} + \frac{A_{1,2}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1,k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} \\ &+ \frac{A_{2,1}}{(x-a_2)} + \frac{A_{2,2}}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{A_{2,k_2}}{(x-a_2)^{k_2}} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{A_{p,1}}{(x-a_p)} + \frac{A_{p,2}}{(x-a_p)^2} + \dots + \frac{A_{p,k_p}}{(x-a_p)^{k_p}} \\ &+ \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2 + b_1x + c_1} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(x^2 + b_1x + c_1)^2} + \dots + \frac{B_{1,l_1}x + C_{1,l_1}}{(x^2 + b_1x + c_1)^{l_1}} \\ &+ \frac{B_{2,1}x + C_{2,1}}{x^2 + b_2x + c_2} + \frac{B_{2,2}x + C_{2,2}}{(x^2 + b_2x + c_2)^2} + \dots + \frac{B_{2,l_2}x + C_{2,l_2}}{(x^2 + b_2x + c_2)^{l_2}} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{B_{q,1}x + C_{q,1}}{x^2 + b_qx + c_q} + \frac{B_{q,2}x + C_{q,2}}{(x^2 + b_qx + c_q)^2} + \dots + \frac{B_{q,l_q}x + C_{q,l_q}}{(x^2 + b_qx + c_q)^{l_q}} \end{aligned}$$

Коментар. На вежбама се раде задаци облика

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n}, \quad \int \frac{Ax+b}{(x^2+cx+d)^n} dx$$



Доказ ове теореме следи на основу следеће две леме.

Лема 1.5.1. Нека је a нула реда k полинома $Q(x)$. Тада постоје константе $A \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$ и полиноми $S(x)$ и $Q_1(x)$ тако да:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{S(x)}{(x-a)^{k-j}Q_1(x)}$$

Доказ.

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{A}{(x-a)^k} + \underbrace{\frac{P_1(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^k Q_1(x)}}_{Q(x)}$$

Ако изаберемо $A = \frac{P_1(a)}{Q_1(a)}$, онда је a нула реда j полинома:

$$\begin{aligned} & P_1(x) - AQ_1(x) \\ & (\text{јер } P_1(a) - AQ_1(a) = 0) \end{aligned}$$

па је

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{\frac{P_1(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^j}}{(x-a)^{k-j}Q_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{S(x)}{(x-a)^{k-j}Q_1(x)}$$



Лема 1.5.2. Нека $(x^2 + bx + c)^l$ дели полином $Q(x)$, $b^2 - 4c < 0$, $stP_1 < stQ$. Тада постоје константе $A, B \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$ и полиноми $S(x)$ и $Q_1(x)$ тако да

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^l} + \frac{S(x)}{(x^2+bx+c)^{l-j}Q_1(x)}$$

Доказ. Доказ је сличан као и за Лему 1.5.1.



Доказ. Доказ теореме

Нека је $Q(x) = A(x-a_1)^{k_1}$ (a_1 је нула реда k_1)

$$\underbrace{\frac{P_1(x)}{Q(x)}}_{\text{Применимо лему 1.5.1}} = \frac{A}{(x-a_1)^{k_1}} + \underbrace{\frac{S(x)}{(x-a_1)^{k_1-j}Q_1(x)}}_{\text{Применимо лему 1.5.1}} \quad (a_1 \text{ је нула реда } k_1 - j)$$

Применимо лему 1.5.1

Применимо лему 1.5.1

$$\begin{aligned}
 &= \frac{A}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_1}{(x-a_1)^{k_1-j}} + \frac{S_1}{(x-a_1)^{k_1-j-j_1}Q_2(x)} \\
 &= \underbrace{\quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad}_{\text{Примењујемо лему 1.5.1 док не добијемо } k_1-j-j_1-\dots=0}
 \end{aligned}$$

■

1.6 Интеграција неких ирационалних и тригонометријских функција

Интеграли облика

$$\int R \left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx, \quad (c, d) \neq (0, 0), \quad ad-bc \neq 0$$

где је R рационална функција, се решава сменом

$$\begin{aligned}
 t &= \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad /^n \\
 t^n &= \frac{ax+b}{cx+d} \\
 cxt^n + dt^n &= ax+b \\
 x(ct^n - a) &= b - dt^n \\
 x &= \frac{b - dt^n}{ct^n - a}, \\
 dx &= \frac{-dnt^{n-1}(ct^n - a) - (b - dt^n)cnt^{n-1}}{(ct^n - a)^2} dt
 \end{aligned}$$

Интеграли типа $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ се решавају Ојлеровим сменама:

1. Прва Ојлерова смена $a > 0$
 $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{ax} \pm t$
2. Друга Ојлерова смена $c > 0$
 $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$
3. Трећа Ојлерова смена $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$
 $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$

Интеграл типа $\int R(\sin x, \cos x) dx$:

$$\begin{aligned}
 R(-\sin x, \cos x) &= -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow t = \cos x \\
 R(\sin x, -\cos x) &= -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow t = \sin x \\
 R(-\sin x, -\cos x) &= R(\sin x, \cos x) \Rightarrow t = \operatorname{tg} x \\
 dx &= \frac{dt}{1-t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\
 \text{универзална смена} &\Rightarrow t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\
 dx &= \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}
 \end{aligned}$$

Напомена

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1 + \sin^2 x}{\sin^3 x + \sin^2 x}$$

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{1 + \sin^2 x}{-\sin^3 x + \sin^2 x}$$

или

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1 + \sin^2 x}{\sin^3 x + \sin^5 x}$$

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{1 + \sin^2 x}{-\sin^3 x - \sin^5 x} = -R(\sin x, \cos x)$$

II

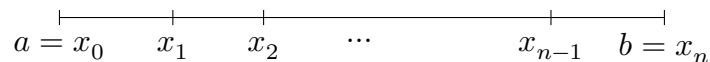
Одређени интеграл

2.1 Појам Римановог интеграла

Нека је $[a, b]$ сегмент. Коначан скуп тачака $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ такав да је

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

називамо поделом сегмента $[a, b]$ и означавамо са $\mathcal{P}$.



Слика 2.1.1: Подела сегмента

На скупу свих подела $\mathcal{P}$ можемо посматрати уређење $<$.

$$\underbrace{\mathcal{P}_1}_{\text{груба подела}} \subset \underbrace{\mathcal{P}_2}_{\text{финија подела}}$$

За сваку поделу $\mathcal{P}$ можемо дефинисати

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \\ (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$$

и дијаметар (параметар) поделе

$$\lambda(\mathcal{P}) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$

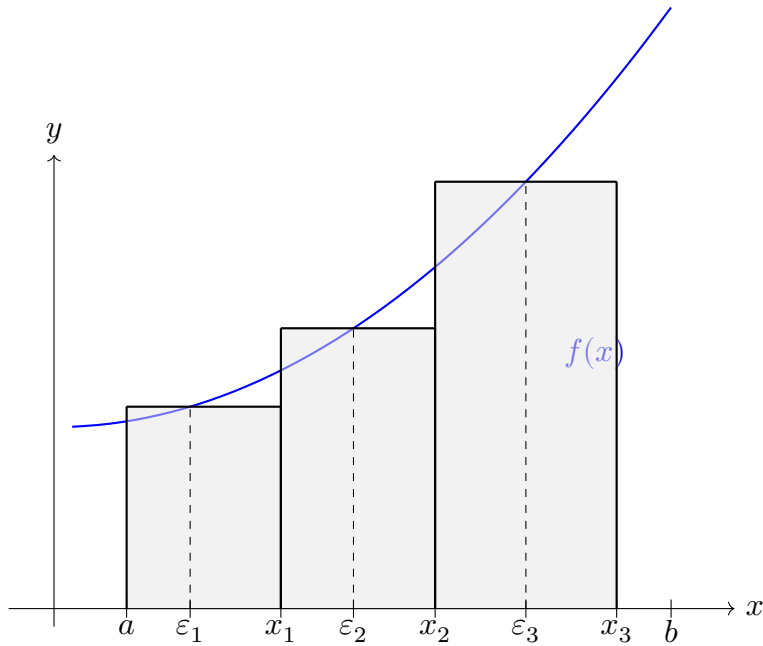
Нека имамо неку поделу $\mathcal{P}$ сегмента $[a, b]$.

Изаберимо тачке $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ тако да свака тачка припада сегменту

$$\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

На тај начин добијамо поделу $\mathcal{P}$ са изабраним тачкама ε у ознаци $(\mathcal{P}, \varepsilon)$.

Дефиниција 2.1.1. Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $(\mathcal{P}, \varepsilon)$ је нека подела сегмента $[a, b]$ са изабраним тачкама ε . Збир $\sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i$ називамо **интегралном** (Римановом) **сумом** функције f која одговара подели $(\mathcal{P}, \varepsilon)$ (у ознаци $\delta(f, \mathcal{P}, \varepsilon)$).



Лева интегрална сума

$$\varepsilon_i = x_{i-1}, \text{ т.ј. } \delta_2(f, \mathcal{P}, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n f(x_{i-1}) \Delta x_i$$

Десна интегрална сума

$$\varepsilon_i = x_i, \text{ т.ј. } \delta_2(f, \mathcal{P}, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x_i$$

Дефиниција 2.1.2. За функцију $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ кажемо да је **интеграбилна** (у Римановом¹ смислу) ако постоји коначна гранична вредност I

$$\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \delta(f, \mathcal{P}, \varepsilon) = I$$

У том случају, записаћемо

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Коментар. Подсетник Анализа 1:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f) (0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$



Одавде следи

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \delta(f, \mathcal{P}, \varepsilon) \iff \\ &\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (\mathcal{P}, \varepsilon)) \lambda(\mathcal{P}) < \delta \Rightarrow |\delta(f, \mathcal{P}, \varepsilon) - I| < \varepsilon \end{aligned}$$

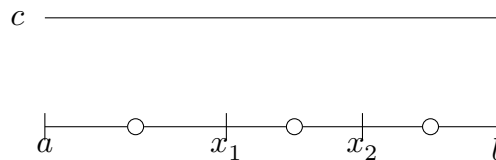
¹У наставку текста, када кажемо да је функција интеграбилна, подразумеваћемо да је у Римановом смислу.

Пример 2.1.1. $f(x) = c$ на $[a, b]$.

Решење. Нека је $(\mathcal{P}, \varepsilon)$ произвољна подела са изабраним тачкама. Тада је:

$$\delta(f, \mathcal{P}, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \underbrace{f(\varepsilon_i)}_{=c} \Delta x_i = c \sum_{i=1}^n \Delta x_i = c(b-a)$$

Дакле: $\int_a^b c dx = c(b-a)$

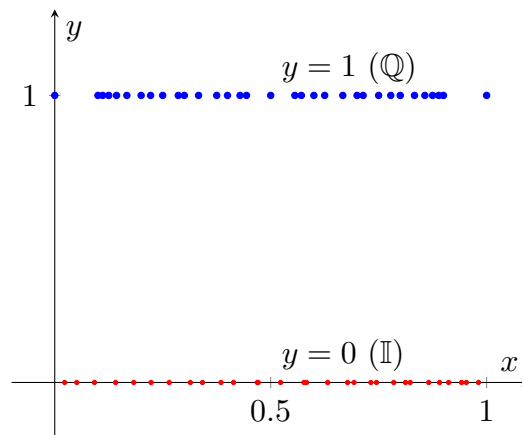


Слика 2.1.2: Константна функција

□

Пример 2.1.2. Дирихлеова функција на $[0, 1]$:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & x \in \mathbb{I} \cap [0, 1] \end{cases}$$



Слика 2.1.3: Дирихлеова функција

Решење. Нека је $\mathcal{P}$ произвољна подела сегмента $[0, 1]$. Можемо изабрати тачке $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ тако да је

$$\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \text{и} \quad \varepsilon_i \in \mathbb{Q}$$

одакле је

$$\delta(\chi, \mathcal{P}, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\chi(\varepsilon_i)}_1 \Delta x_i = 1$$

Можемо изабрати тачке $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n$ тако да је

$$\varepsilon'_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \text{и} \quad \varepsilon'_i \in \mathbb{I}$$

одакле је

$$\delta(\chi, \mathcal{P}, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\chi(\varepsilon_i)}_0 \Delta x_i = 0$$

Одавде, не постоји $\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \delta(\chi, \mathcal{P}, \varepsilon)$.

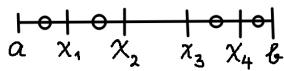
□

Скуп свих интеграбилних функција на $[a, b]$ означићемо са $R[a, b]$.

Став 2.1.1. Ако је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интеграбилна, онда је f ограничена на $[a, b]$.

Доказ. Контрапозиција ($p \Rightarrow q \iff \neg q \Rightarrow \neg p$).

Претпоставимо да f није ограничена на $[a, b]$. Нека је $M > 0$ произвољан број. Нека је $\mathcal{P}$ произвољна подела сегмента $[a, b]$.



Постоји неки сегмент $[x_{j-1}, x_j]$ на којем f није ограничена.

Изаберимо произвољне тачке

$$\varepsilon_1 \in [x_0, x_1], \dots, \varepsilon_{j-1}, \varepsilon_{j+1}, \dots, \varepsilon_n$$

$$\delta(f, \mathcal{P}, \varepsilon) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i + f(\varepsilon_j) \Delta x_j$$

Можемо изабрати ε_j тако да

$$|\sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i| > |f(\varepsilon_j) \Delta x_j| > M + |\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i|$$

За произвољно M можемо наћи поделу са произвољним тачкама, такву да је апсолутна вредност интегралне суме већа од M .

■

2.2 Дарбуове суме

Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена функција. Нека је $\mathcal{P}$ произвољна подела сегмента $[a, b]$. Тада постоје

$$\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{и} \quad \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Горња Дарбуова сума функције f за поделу $\mathcal{P}$ је

$$\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \Delta x_i$$

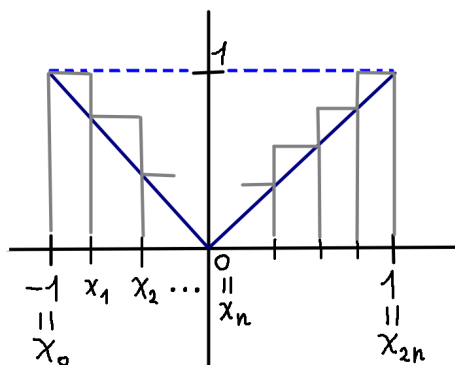
а доња Дарбуова сума је

$$\mathcal{s}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \Delta x_i$$

Важи $\mathcal{s}(f, \mathcal{P}) \leq \mathcal{S}(f, \mathcal{P})$.

Пример 2.2.1. $f(x) = |x|$ на $[-1, 1]$.

Решење.



Поделитемо сегмент $[-1, 1]$ на $2n$ једнаких делова.

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -1 + \frac{1}{n}, \quad x_2 = -1 + \frac{2}{n}, \quad \dots, \quad x_i = -1 + \frac{i}{n}, \quad \dots, \quad x_{2n} = 1$$

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= \frac{1}{n} \\ \mathcal{S}(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{2n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)}_{f(x_{i-1})} \cdot \underbrace{\Delta x_i}_{\frac{1}{n}} + \sum_{i=n+1}^{2n} \underbrace{\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)}_{f(x_i)} \cdot \underbrace{\Delta x_i}_{\frac{1}{n}} \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{f(x_{i-1})}_{-x_{i-1}} \frac{1}{n} + \sum_{i=n+1}^{2n} \underbrace{f(x_i)}_{x_i} \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n -x_{i-1} + \frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(-1 + \frac{i-1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{2n} \left(-1 + \frac{i}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) + \sum_{i=n+1}^{2n} \left(-1 + \frac{i}{n}\right) \right] \\
&= \frac{1}{n} \left[\cancel{n} - \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n} - \cancel{n} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{i}{n} \right] \\
&= \frac{1}{n} \left[-\frac{1}{n} \frac{(n-1)n}{2} + \frac{1}{n} \frac{n}{2} (3n+1) \right] \\
&= \frac{1}{n} \left[-\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} (3n+1) \right] \\
&= \frac{1}{n} \left[-\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2} \right] = 1 + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Коментар. Сума аритметичког низа

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \dots + a_n &= \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \\
&= \frac{n}{2} [a_1 + a_n]
\end{aligned}$$



Доња Дарбуова сума се рачуна слично и износи:

$$s(f, \mathcal{P}) = 1 - \frac{1}{n}$$

