JUL, 27.6.2019

GRUPA 1

① a) M ŠOLJA, N PREDAVAČA, $M > N$

$$\underset{P1}{\underline{1}} \quad \underset{P2}{\underline{1}} \quad \dots \quad \underset{Pn}{\underline{1}} \leftarrow N \text{ ŠOLJA}$$

PREOSTAJE RASPOREDITI JOŠ M−N ŠOLJA
(KOMBINACIJE SA PONAVLJANJEM)

Rešenje: $\binom{M-N+N-1}{M-N} = \binom{M-1}{M-N}$

---

b) 26 SLOVA ENGL. ABECEDE
SVAKO SLOVO BAR JEDNOM

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \dots\ \_}_{26}\ \underbrace{\_\ \_}_{2}$$

PRVO REZERVIŠEMO MESTA ZA PO JEDNO SLOVO ABECEDE ($\binom{28}{26}$ JE BROJ NAČINA ~~ZA~~ TAKVIH „REZERVACIJA") I JOŠ POMNOŽIMO SA NJIHOVIM PERMUTACIJAMA. PREOSTALA 2 MESTA MOGU SADRŽATI ISTO SLOVO ILI 2 RAZLIČITA.

REŠENJE $\binom{28}{26} \cdot 26! \cdot \left(\binom{26}{1} + \binom{26}{2} \cdot 2! \right)$

BIRAMO 1 SLOVO KOJE ĆE SE POJAVITI NA OBA PREOSTALA MESTA

BIRAMO 2 SLOVA I POMNOŽIMO SA PERMUT.

c) 16. PERMUTACIJA , $\{a, b, c, d\}$

$a_1 = \left\lceil \frac{16}{3!} \right\rceil = 3.$ po redu , a to je c

$K = 16 - (3-1) \cdot 3! = 4$

$a_2 = \left\lceil \frac{4}{2!} \right\rceil = 2.$ po redu $\Rightarrow$ b

$K = 4 - (2-1) \cdot 2! = 2$

$a_3 = \left\lceil \frac{2}{1!} \right\rceil = 2.$ po redu od preostalih $\Rightarrow$ d

$\boxed{\text{Rešenje: } c\,b\,d\,a}$

2

$a_{n+1} = 4b_{n+1} + 3a_n$ I

$4b_{n+1} = \frac{32}{3} b_n + \frac{1}{3} a_n$ II , $a_0 = 12, b_0 = 0$

$a_{n+1} = \frac{32}{3} b_n + \frac{1}{3} a_n + 3a_n$ (III)

iz I: $4b_n = a_n - 3a_{n-1}$ (*)

(*) $\rightsquigarrow$ III : $a_{n+1} = \frac{32}{12} \cdot (a_n - 3a_{n-1}) + \frac{1}{3} a_n + 3a_n \;/\cdot 12$

$12 a_{n+1} = 72 a_n - 96 a_{n-1} \;/: 12$

$a_{n+1} - 6a_n + 8a_{n-1} = 0$

$t^2 - 6t + 8 = 0$ $\to 2$, $\to 4$

OPŠTE REŠENJE: $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2\, 4^n, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

$$a_0 = 12 \quad , b_0 = 0$$

$$a_1 \overset{III}{=} \frac{32}{3} \cdot b_0 + \frac{1}{3} a_0 + 3a_0 = 40$$

$$a_0 = 12 = c_1 \cdot 2^0 + c_2 \cdot 4^0$$

$$a_1 = 40 = c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot 4^1$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 12 \\ 2c_1 + 4c_2 &= 40 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} c_1 &= 4 \\ c_2 &= 8 \end{aligned}$$

$$a_n = 4 \cdot 2^n + 8 \cdot 4^n = 2^{n+2} + 2 \cdot 4^{n+1}$$

$$\underline{a_n = 2^{n+2} + 2^{2n+3}}$$

$$b_n \overset{(*)}{=} \frac{1}{4}\left(2^{n+2} + 2^{2n+3} - 3\left(2^{n+1} + 2^{2n+1}\right)\right)$$

---

(3) a) TRAŽI SE „NAJKRAĆI" PUT OD <u>INSTITUTA</u> DO <u>MUZEJA</u>.

	I	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	M
~~I~~	$\boxed{0}^*$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
I:	$\boxed{0}$	∞	∞	3^*	4	∞	∞	∞	∞
T3:	$\boxed{0}$	3+7=10	3+10=13	$\boxed{3}$	4^*	∞	∞	∞	∞
T4:	$\boxed{0}$	10	13	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	4+5=9	4+6=10	∞	∞
T5:	$\boxed{0}$	10	13	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$	10^*	∞	∞
T6:	$\boxed{0}$	10^*	13	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$	10+2=12	10+6=16
T1:	$\boxed{0}$	$\boxed{10}$	13	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$	12^*	16
T7:	$\boxed{0}$	$\boxed{10}$	13^*	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$	$\boxed{12}$	16
T2:	$\boxed{0}$	$\boxed{10}$	$\boxed{13}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$	$\boxed{12}$	$\boxed{16}$

DVE VREDNOSTI 10, I SVEJEDNO JE KOJU ODABEREMO

NAJKRAĆI PUT JE DUŽINE 16
KOJI JE TO PUT?
IZ TABLICE, IDUĆI UNAZAD:

$$I \to T4 \to T6 \to M.$$

NAPOMENA: NA ISPITU JE NEOPHODNO ISPISATI NEKOLIKO KORAKA POPUNJAVANJA TABLICE KAKO BI SE BODOVALO MAKSIMALNIM BROJEM POENA.

b) $T2 - T3$

(4) a) MORA VAŽITI ~~[illegible]~~, S OBZIROM NA TO DA JE KOMPLETAN BIPARTITAN GRAF, ~~SVAKI~~ SVI ČVOROVI IZ SKUPA OD m ČVOROVA SU ~~[illegible]~~ ISTOG STEPENA (ANALOGNO VAŽI I ZA DRUGI SKUP ČVOROVA). KAKO JE GRAF REGULARAN, ONDA SU SVI ISTOG STEPENA, ODAKLE MORA DA VAŽI DA JE $m = n$.

b) IZ a) $\Rightarrow K_{m,n} = K_{m,m}$

GRAF JE OJLEROV $\Leftrightarrow$ POVEZAN I SVI ČVOROVI SU PARNOG STEPENA

$K_{m,m}$ REGULARAN $\Rightarrow$ SVI SU ISTOG STEPENA

PRETP. SUPROTNO, DA SU SVI NEPARNOG STEPENA
SVAKI ČVOR JE POVEZAN SA SVIH m ČVOROVIMA IZ DRUGOG SKUPA, A m JE PARAN BROJ. ↯

Scanned with CamScanner

c) G 4-REGULARAN, PROST GRAF.

$3|V|-|E|<6 \Rightarrow$ G NIJE PLANARAN

$\vee$ NIJE POVEZAN $\vee$ NIJE PROST

HANDSHAKE LEMA : $\sum_{v \in V} dg(v) = 2|E|$

4 REGULARAN $\Rightarrow$ $4 \cdot |V| = 2 \cdot |E|$

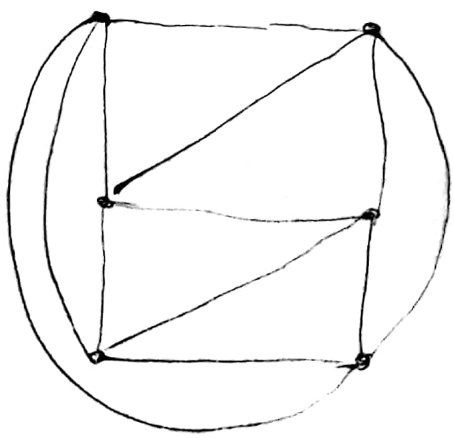
$2 \cdot |V| = |E|$

$3|V| - 2 \cdot |V| < 6 \Rightarrow$ G NIJE PLANARAN

$|V| < 6 \Rightarrow$ — || —

$|V| \geq 6 \Rightarrow$ MOŽDA JE PLANARAN

(NISMO SIGURNI, MORAMO DA PROBAMO DA NACRTAMO!)



|V| = 6, PLANARAN
MOŽE SE NACRTATI