Дискретне структуре 2

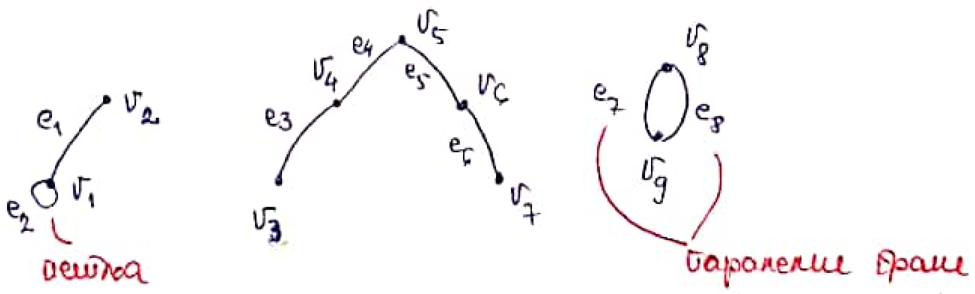
9 час

Графови

<u>Деф</u> Граф је уређени пар (V, E), где је V - скуп чворова, а E скуп грана.

- Граном називамо двочлани подскуп скупа V.
- За чворове u и v кажемо да су суседни ако $\{u, v\} \in E$, тј. ако постоји грана која их спаја.
- Чвор $v \in V$ и грана $e \in E$ су инцидентни, ако постоји чвор $u \in V$ т.д. је $e = \{v, u\}$ (v је један крај гране e)
- Две гране су суседне ако имају заједнички чвор

- пример:



$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

e_1	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_1\}$
e_3	$\{v_3, v_4\}$
e_4	$\{v_4, v_5\}$
e_5	$\{v_5, v_6\}$
e_6	$\{v_6, v_7\}$
e_7	$\{v_8, v_9\}$
e_8	$\{v_8, v_9\}$

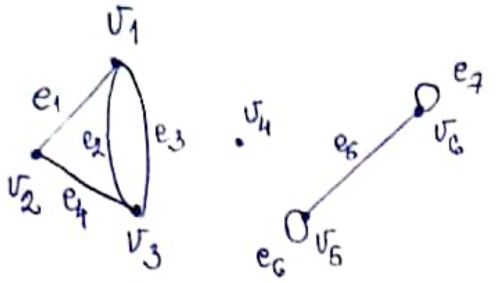
- петља = грана чија су оба краја један исти чвор

паралелне гране (спајају исти пар чворова)

један начин да представимо граф

① Наћи све:

гране инцидентне со v_1	e_1, e_2, e_3
чворове суседне со v_1	v_2, v_3
гране суседне со e_1	e_2, e_3, e_4
петље	e_6, e_7
паралелне гране	e_2, e_3
чворове суседне со самим собом	v_5, v_6
изоловане чворове	v_4



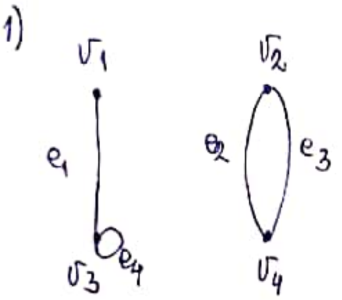
② Дати графички приказ графа G задатог са:

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

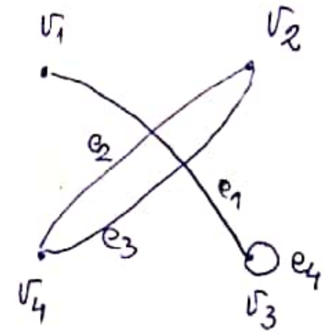
$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

e_1	$\{v_1, v_3\}$
e_2	$\{v_2, v_4\}$
e_3	$\{v_2, v_4\}$
e_4	$\{v_3\}$

1)



2)

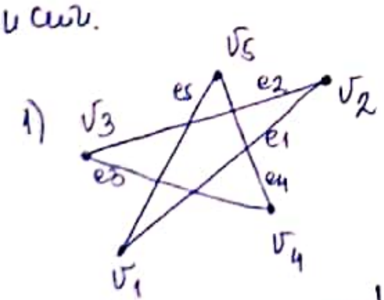


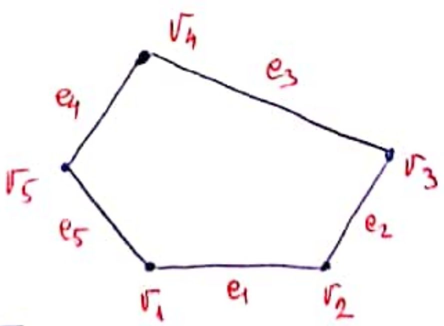
Приметимо да и граф на слици 1 и граф на слици 2 одговарају датом скупу V, скупу E и таблици.

Закључујемо да не постоји јединствен начин за цртање графа.

③ Обележавањем чворова и грана показати да су дати графови исти.

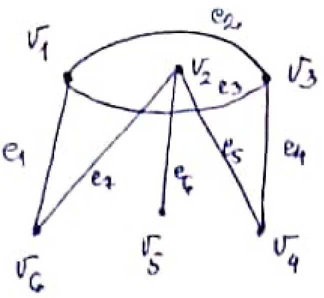
1)

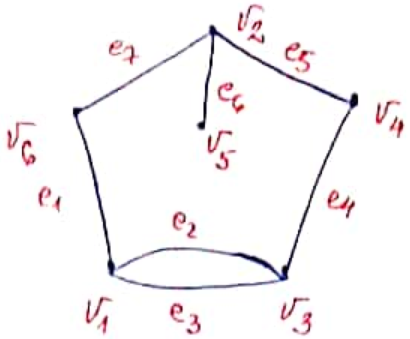




e_1	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_2, v_3\}$
e_3	$\{v_3, v_4\}$
e_4	$\{v_4, v_5\}$
e_5	$\{v_5, v_1\}$

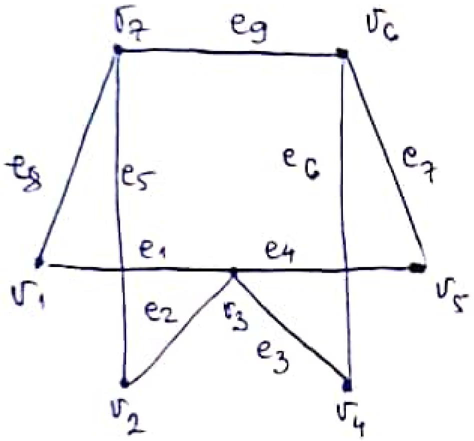
2)

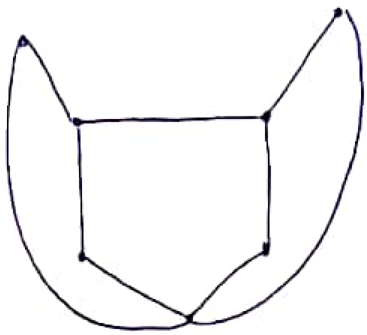




e_1	$\{v_1, v_6\}$
e_2	$\{v_1, v_3\}$
e_3	$\{v_1, v_3\}$
e_4	$\{v_3, v_4\}$
e_5	$\{v_2, v_4\}$
e_6	$\{v_2, v_5\}$
e_7	$\{v_2, v_6\}$

3) Домаћи:



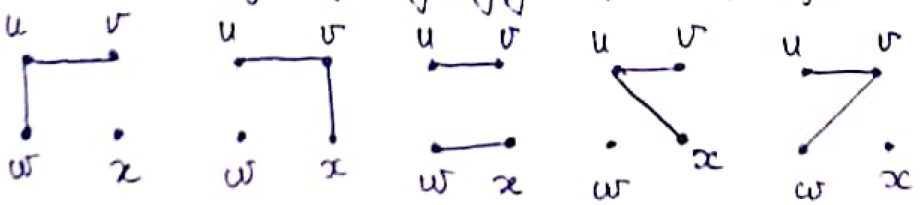


Неке врсте графова

Прост граф - не садржи петље, ни паралелне гране

Мултиграф - граф који није прост

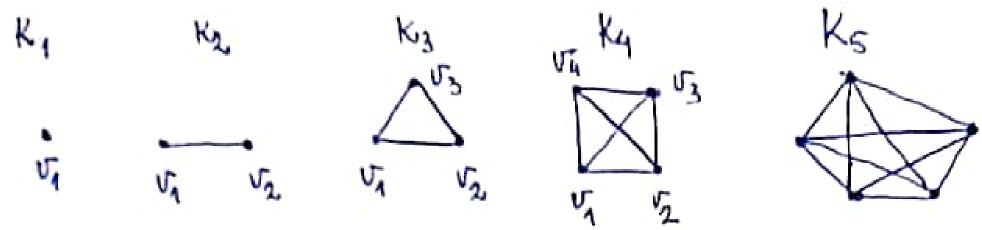
пример: Нацртати све просте графове са 4 чвора и 2 гране, $V = \{u, v, w, x\}$ од којих је једна грана $\{u, v\}$.



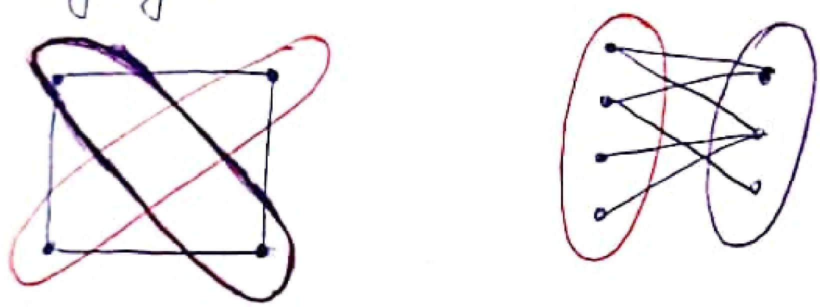
Комплетан граф - прост граф у коме је сваки пар чворова спојен (тачно једном) граном

- Ознака: K_n - комплетан граф са n чворова (потпун)

пример:



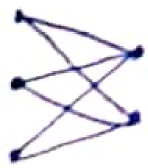
Бипартитни граф - прост граф чији се скуп чворова може поделити на два дисјунктна подскупа т.д. свака грана тог графа спаја један чвор из једног подскупа са чвором из другог подскупа.



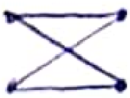
Потпун бипартитни граф - бипартитни граф такав да је сваки чвор једног скупа спојен граном са сваким чвором другог скупа

Ознака: $K_{n,m}$ $\quad$ n, m - број чворова у скуповима

$K_{3,2}$



$K_{2,2}$



- Подграф

Граф $G=(V_G, E_G)$ је подграф графа $H=(V_H, E_H)$ ако:

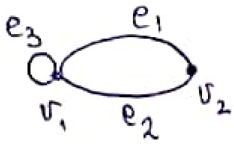
$V_G \subseteq V_H$, $E_G \subseteq E_H$.

Ако је $V_G = V_H$ онда кажемо да је G разапињући подграф графа H.

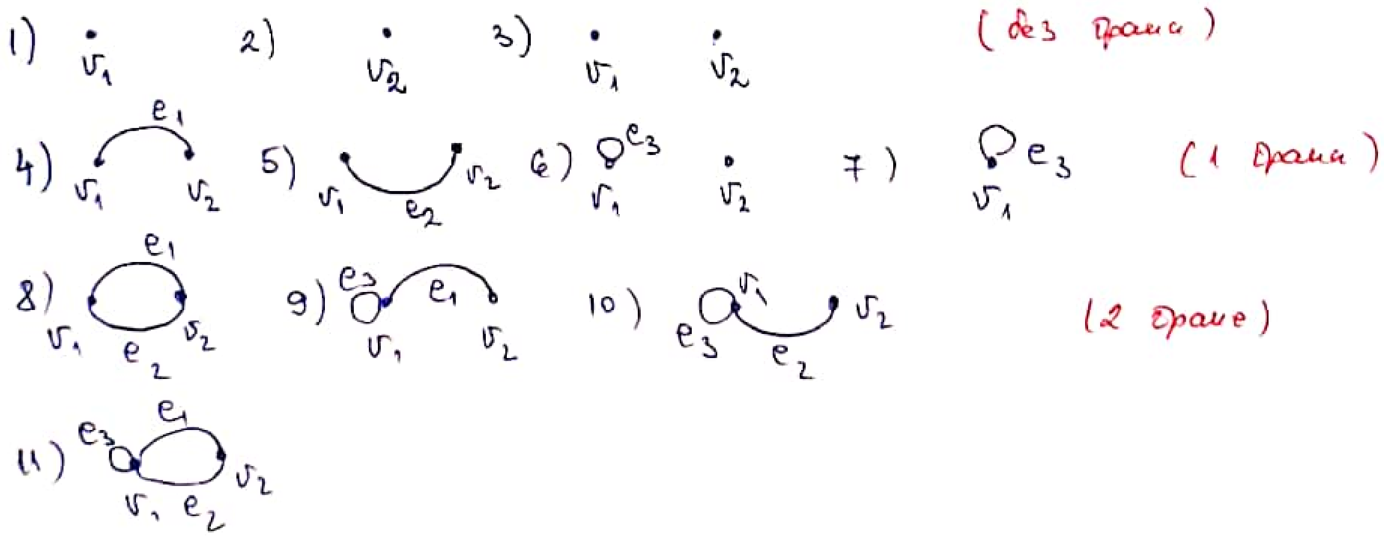
① Нацртати све подграфове графа $G=(V_G, E_G)$, ако је $V_G=\{v_1, v_2\}$, $E_G=\{e_1, e_2, e_3\}$

e_1	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_1, v_2\}$
e_3	$\{v_1\}$

G :



Подграфови:



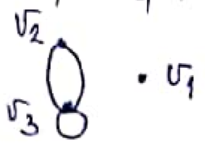
Степен чвора, тотални степен графа

Посматрамо граф $G=(V, E)$.

Степен чвора $v \in V$: $d_G(v)$ = број грана графа G инцидентних са v
(степен чвора око кога постоји петља узимамо да је 2)

Тотални степен графа: $d(G) = \sum_{v \in V} d_G(v)$

- пример: Наћи тотални степен графа



$d(v_1)=0$

$d(v_2)=2$

$d(v_3)=1+1+2=4$

$d(G)=0+2+4=6$

Тма У произвољном графу $G=(V,E)$ важи: $d(G)=2|E|$

Последица (лема о руковању): У произвољном графу $G=(V,E)$ број чворова непарног степена је паран.

Доказ:

$V = V_1 \cup V_2$, V_1 - чворови непарног степена, V_2 - чворови парног степена

$$\underbrace{2|E|}_{\text{паран број}} = d(G) = \sum_{v\in V} d_G(v) = \sum_{v\in V_1} d_G(v) + \underbrace{\sum_{v\in V_2} \overbrace{d_G(v)}^{\text{парни бројеви}}}_{\text{паран број}}$$

$\Rightarrow \sum_{v\in V_1} d_G(v)$ је паран број

Како је сваки сабирак у суми непаран, мора их имати паран број.
$|V_1|$ - паран бр. □

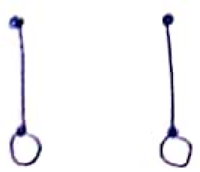
① Нацртати граф са следећим особинама, ако такав постоји:

- граф са 4 чвора, степена 1, 1, 2, 3

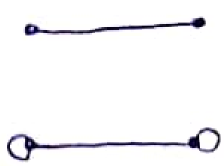
  $d(G) = 1+1+2+3 = 7$ - ово је немогуће

  $= 2|E|$ (3 чвора непарног степена)

- граф са 4 чвора, степена 1, 1, 3, 3

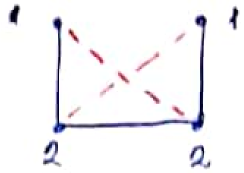


или



(довољно је један)

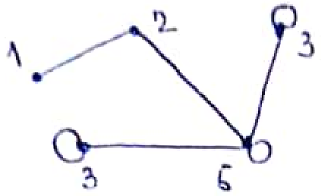
• прост граф са 4 чвора, степено 1, 1, 3, 3



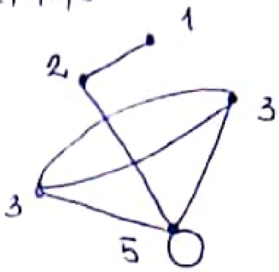
- ово је немогуће

• граф са 5 чворова степена 1,2,3,3,5

$d(G) = 14$ ✓



или

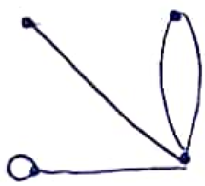


(један је довољан)

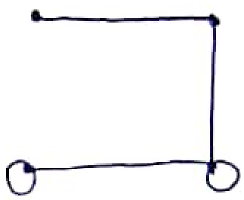
• граф са 4 чвора степена 1, 2, 3, 3

$d(G) = 1+2+3+3 = 9$ Немогуће!

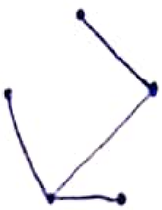
• граф са 4 чвора степена 1,2,3,4



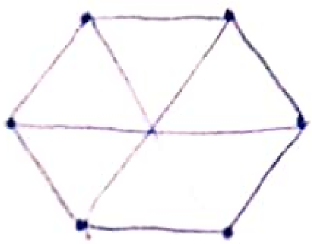
или



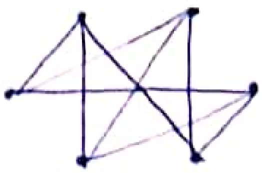
• прост граф са чворовима степена 1,1,1,2,3



• прост граф са 6 чворова, сваки степена 3



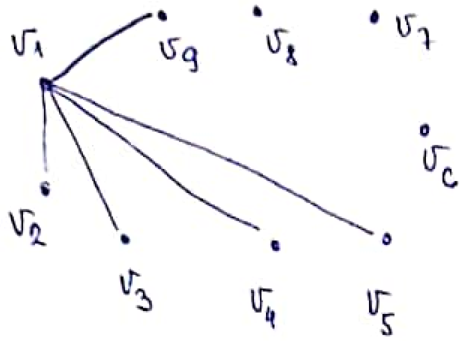
или



2. Да ли је могуће да у групи од 9 људи свако има тачно 5 познаника?

Особе представљамо чворовима

Особе које се познају спајамо граном



Ако би било могуће, сваки чвор би био степена 5, а $d(G) = 9 \cdot 5 = 45$ што није могуће.

<u>Шетња</u> од чвора v_0 до чвора v_k је коначан алтернирајући низ грана и чворова:

$$w = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k, \qquad e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$$

Ако је $v_0 = v_k$ кажемо да је шетња <u>затворена</u>.

Дужина шетње је k.

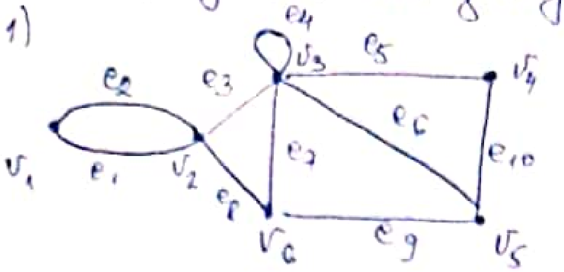
<u>Стаза</u> је шетња у којој се гране не понављају.

<u>Пут</u> је шетња у којој се чворови не понављају.

<u>Циклус</u> је затворена шетња у којој се не понављају чворови (а не гране), осим првог и последњег.

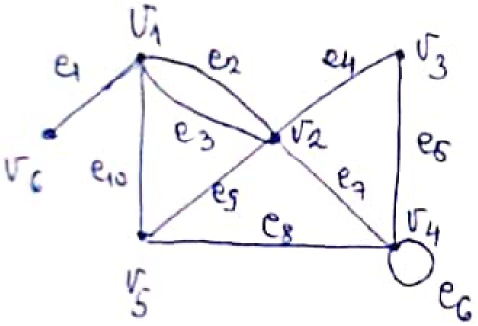
① У следећем графу одредити да ли су дате шетње стазе, путеви или циклуси

1)



1) $v_1 e_1 v_2 e_3 v_3 e_4 v_3 e_5 v_4$ - стаза
2) $v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_2$ - циклус
3) $e_1 e_3 e_5 e_5 e_6$ - шетња
4) $v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_3 v_2$ - затворена шетња
5) $v_2 v_3 v_4 v_5 v_3 v_6 v_2$ - затворена стаза

2) домаћи.



1) $v_6 e_1 v_1 e_{10} v_5 e_9 v_2 e_2 v_1$
2) $v_4 e_7 v_2 e_9 v_5 e_{10} v_1 e_3 v_2 e_9 v_5$
3) $v_5 v_2 v_3 v_4 v_4 v_5$
4) $v_2 v_3 v_4 v_5 v_2 v_4 v_3 v_2$
5) $e_5 e_8 e_{10} e_3$