Дискретне структуре 2

8. час

Решавање рекурентних ј-на помоћу фја генератриса

- Нека је $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ фја генератриса низа $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

Како изгледа фја генератриса низа $\{a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$?

По дефиницији што је степени ред:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n = \left\{ \begin{matrix} n+1=k \\ n=0 : k=1 \\ n=\infty : k=\infty \end{matrix} \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

$$= \frac{1}{x}(A(x) - a_0)$$

- Дакле, фја генератриса низа $\{a_{n+1}\}$ је $\frac{A(x)-a_0}{x}$.
- Слично се показује да је фја генератриса низа $\{a_{n+2}\}$ баш $\frac{A(x)-a_0-a_1 x}{x^2}$
- Уопштено, фја генератриса низа $\{a_{n+k}\}$ је $\frac{A(x)-a_0-a_1x-\ldots-a_{k-1}x^{k-1}}{x^k}$

① Нека је низ a_n задат рекурентно: $a_0=0$, $a_{n+1}=2a_n+1$, $n\geq 0$.
Наћи општи члан овог низа користећи фју генератрису.

Задатак нам је да решимо рекурентну ј-ну:

$a_{n+1} = 2a_n + 1$

$a_0 = 0$

уз помоћ фје генератрисе

Нека је $A(x)$ ф-ја генератриса низа $\{a_n\}$, тј.

$$\boxed{A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.}$$

Помножимо рекурентну ј-ну $a_{n+1} = 2a_n + 1$ са x^n:

$$a_{n+1} x^n = 2a_n x^n + x^n \quad , n \geq 0 \;/\; \sum_{n=0}^{\infty}$$

Ова једнакост важи за свако $n \geq 0$, па сабирањем одговарајућих ј-на за $n = 0, 1, 2, \dots$ добијамо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n = 2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{A(x)} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

ф-ја генератриса низа $\{a_{n+1}\}$

Одавде добијамо:

$$\frac{A(x) - a_0}{x} = 2A(x) + \frac{1}{1-x}$$

Заменом $a_0 = 0$ добија се ј-на по $A(x)$:

$$\frac{A(x)}{x} = 2A(x) + \frac{1}{1-x}$$

$$A(x)\left(\frac{1-2x}{x}\right) = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow \boxed{A(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}}$$ – ово је ф-ја генератриса низа $\{a_n\}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} \qquad a_n = ?$$

Општи члан низа $\{a_n\}$, тј. решење рекурентне ј-не, налазимо као коеф. уз x^n у развоју $\frac{x}{(1-x)(1-2x)}$.

$$\frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x}$$, за неко A и B које морамо наћи

$$x = A(1-2x) + B(1-x)$$

x: $-2A - B = 1$

Слободни члан: $A + B = 0$

$A = -1$

$B = 1$

$$A(x) = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-2x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{1-t} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

$2x = t$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) x^n$$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$\Rightarrow a_n = 2^n - 1$

② Наћи ф-ју генератрису низа задатог рекурентно:

$$a_{n+1} = 2a_n + n, \quad a_0 = 1,$$

а затим и општи члан низа.

Нека је $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Множимо рекурентну ј-ну $a_{n+1} = 2a_n + n$ са x^n:

$$a_{n+1} x^n = 2 a_n x^n + n x^n \quad / \sum_{n=0}$$

Сумирамо:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n}_{\text{ф-ја ген. низа за } a_{n+1}} = 2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{A(x)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n x^n}_{\frac{x}{(1-x)^2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Добијамо:

$$\frac{A(x) - a_0}{x} = 2A(x) + \frac{x}{(1-x)^2}$$

Заменимо $a_0 = 1$:

$$\frac{A(x) - 1}{x} = 2A(x) + \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$A(x)\left(\frac{1}{x}-2\right)=\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{1}{x}$$

$$\boxed{A(x)=\frac{1-2x+2x^2}{(1-2x)(1-x)^2}}$$ – ф-ја генератриса низа $\{a_n\}$

Општи члан низа $\{a_n\}$, тј. решење ј-не, налазимо као коеф. уз x^n у развоју $\frac{1-2x+2x^2}{(1-2x)(1-x)^2}$

$$\frac{1-2x+2x^2}{(1-2x)(1-x)^2}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{(1-x)^2}+\frac{C}{1-2x}$$ за неко A, B, C

Тражимо A, B, C:

$$1-2x+2x^2=A(1-2x)(1-x)+B(1-2x)+C(1-x)^2$$

x^2: $2=2A+C$

x: $-2=-3A-2B-2C$

Слободни чланови: $1=A+B+C$

Решимо систем: $A=0,\ B=-1,\ C=2$

$$A(x)=-\frac{1}{(1-x)^2}+2\cdot\frac{1}{1-2x}\underset{2x=t}{=}-\left(\frac{1}{1-x}\right)'+2\,\frac{1}{1-t}=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'+2\sum_{n=0}^{\infty}t^n=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}2^nx^n=\{\text{I сума: } n-1=k\}$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k+\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}x^n=\{\text{I сума } k=n\}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-n-1\right)x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$\Rightarrow a_n=2^{n+1}-n-1$$

③ Решити рекурентну ј-ну коришћењем ф-је генератрисе:

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

Множимо ј-ну са x^n, а затим сумирамо:

$$a_{n+2}x^n = 2a_{n+1}x^n - a_n x^n \;\Big/ \sum_{n=0}^{\infty}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Нека је $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n$ је ф-ја генератриса низа $\{a_{n+1}\}$ тј. $\frac{A(x)-\overset{0}{\overset{\shortparallel}{a_0}}}{x}$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^n$ је ф-ја генератриса низа $\{a_{n+2}\}$ тј. $\frac{A(x)-\overset{0}{\overset{\shortparallel}{a_0}}-\overset{1}{\overset{\shortparallel}{a_1}}x}{x^2}$

Добијамо:

$$\frac{A(x)-x}{x^2} = 2\frac{A(x)}{x} - A(x)$$

Одавде: $A(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. Развијамо $A(x)$ и решење ј-не налазимо као коеф. уз x^n.

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} \;\Big/ (1-x)^2$$

$$x = A(1-x) + B$$

x: $\quad 1 = -A \qquad A = -1$

Слободни чланови: $0 = A + B \qquad B = 1$

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} = -\frac{1}{1-x} + \left(\frac{1}{1-x}\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n\, x^{n-1}$$

за $n=0$: $0 \cdot x^{0-1} = 0$, па може да се изостави

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}$$

$n-1=k$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$$

$k=n$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1+n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\, x^n \Rightarrow a_n = n$$

④ Решити систем:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} + 4b_{n-1} & ① \\ b_n = -5a_{n-1} + 7b_{n-1} & ② \\ a_1 = 4,\ b_1 = 1 \end{cases}$$

Из ①: $b_{n-1} = \dfrac{a_n + 2a_{n-1}}{4} \Rightarrow b_n = \dfrac{a_{n+1} + 2a_n}{4}$

Мењамо ово у ②:

$$\frac{a_{n+1} + 2a_n}{4} = -5a_{n-1} + 7\,\frac{a_n + 2a_{n-1}}{4} \quad / \cdot 4$$

$$a_{n+1} - 5a_n + 6a_{n-1} = 0$$

Хомогена р.ј реда 2 са конст. коеф.

Карактеристична ј-на: $t^2 - 5t + 6 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

$$t_1 = 2,\ t_2 = 3$$

$a_n = C_1 2^n + C_2 3^n$ Тражимо C_1, C_2

Из ①, за $n=2$: $a_2 = -2a_1 + 4b_1 = -2\,4 + 4\,1 = -4$

$a_1 = C_1 2^1 + C_2\ 3^1 = 4$ $\qquad 2C_1 + 3C_2 = 4$

$a_2 = C_1 2^2 + C_2\ 3^2 = -4$ $\qquad 4C_1 + 9C_2 = -4$

Решимо систем:

$C_1 = 8,\ C_2 = -4$

$\Rightarrow a_n = 8 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n$

$$b_n = \frac{a_{n+1} + 2a_n}{4} = \frac{8\ 2^{n+1} - 4\ 3^{n+1} + 16\ 2^n - 8 \cdot 3^n}{4}$$

$b_n = 8 \cdot 2^n - 5\ 3^n$

Нелинеарне рекурентне једначине

① Решити ј-ну: $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^3}{a_n^2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$

Смена: $b_n = \log_2 a_n$ (Покажите $a_n > 0$ $\forall n \in N$)

$\log_2 a_{n+2} = \log_2 \frac{a_{n+1}^3}{a_n^2}$

$b_0 = \log_2 a_0 = \log_2 1 = 0$

$b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 2 = 1$

$b_{n+2} = 3b_{n+1} - 2b_n$

$b_{n+2} - 3b_{n+1} + 2b_n = 0$

Карактеристична ј-на:

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$(t-1)(t-2) = 0$

$b_n = C_1 1^n + C_2 2^n$

$$\left.\begin{aligned} b_0 &= C_1 + C_2 = 0 \\ b_1 &= C_1 + 2C_2 = 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} C_2 &= 1 \\ C_1 &= -1 \end{aligned}$$

$b_n = 2^n - 1$

$a_n = 2^{2^n - 1}$

Ј-не облика: $f(n)a_n = A_{n-1}f(n-1)a_{n-1} + A_{n-2}f(n-2)a_{n-2} + \dots + A_{n-d}f(n-d)a_{n-d} + p(n)$

се сменом $f(n)a_n = b_n$ своде на лин. ј-не са конст. коеф.

② Решити ј-ну $n a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} a_{n-1} + (2n)^{1-n}$, $a_0 = 0$

Помножимо ј-ну са n^{n-1}: $n^n a_n = (n-1)^{n-1} a_{n-1} + 2^{1-n}$

Уводимо смену: $b_n = n^n a_n$

После увођења смене:

$b_n = b_{n-1} + 2^{1-n}$

$b_n - b_{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad , \quad b_0 = 0 \qquad (*)$

$b_n = h_n + p_n$

Тражимо h_n:

$b_n - b_{n-1} = 0$

$t - 1 = 0$

$t = 1$

$h_n = C_1 \cdot 1^n$

Тражимо p_n:

ф-ја десне стране: $f(n) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (Облик: $k \cdot b^n$; $k = 2$, $b = 1/2$)

Да ли је $b = 1/2$ решење карακт. ј-не? Није!

Партикуларно решење тражимо у облику:

$p_n = A \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Треба наћи A:

Мењамо p_n у ј-ну $(*)$:

$p_n - p_{n-1} = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$A \left(\frac{1}{2}\right)^n - A \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad / \cdot 2^{n-1}$

$\frac{1}{2} A - A = 1$

$A = -2$

$p_n = -2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow b_n = h_n + p_n = C_1 - 2^{1-n}$

Тражимо C_1: $b_0 = C_1 - 2 = 0 \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow b_n = 2 - 2^{1-n}$

Враћамо смену: $a_n = \frac{2 - 2^{1-n}}{n^n}$