Дискретне структуре 2

7. час

Рекурентне једначине

Деф. Рекурентна једначина реда k је једначина облика

$$a_{n+k} = F(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}), \quad (*)$$

где је $n \in N$, а $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k}$ су узастопни чланови низа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Решење ј-не $(*)$ је сваки низ који ту ј-ну преводи у идентитет.

Опште решење ј-не $(*)$ зависи од k константи. Ако су нам уз ј-ну $(*)$ дати и почетни услови онда можемо одредити партикуларно решење које задовољава и услове и ј-ну $(*)$.

Линеарна хомогена рекурентна ј-на са константним коеф

Општи облик: $f_k a_{n+k} + f_{k-1} a_{n+k-1} + \dots + f_0 a_n = 0 \quad (**)$

$f_0, f_1, \dots, f_k \in R$

Како је решавамо?

1) Придружимо јој одговарајућу карактеристичну ј-ну:

$$f_k t^k + f_{k-1} t^{k-1} + \dots + f_0 = 0$$

2) Одредимо решења карактеристичне ј-не: $t_1, t_2, \dots, t_k$

Имамо два случаја:

1. $t_1 \neq t_2 \neq t_3 \neq \dots \neq t_k \in R$ (сва решења međусобно различита)

Опште решење ј-не $(**)$ је облика: $a_n = C_1 t_1^n + C_2 t_2^n + \dots + C_k t_k^n$

$C_1, C_2, \dots, C_k \in R$

2. Међу решењима карактеристичне ј-не постоје нека која су вишеструка. Нека је t_m решење вишеструкости S. Тада је опште решење ј-не (**) облика:

$$a_n = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n + \dots + \underbrace{C_m t_m^n + C_{m+1} n\, t_m^n + C_{m+2} n^2 t_m^n + \dots + C_{m+s-1} n^{s-1} t_m^n}_{S \text{ сабирака}}$$

НАПОМЕНА: Међу решењима карактеристичне ј-не се може појавити конјуговано комплексни пар:

$$t_i = \alpha + i\beta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$t_{i+1} = \alpha - i\beta = \rho(\cos\theta - i\sin\theta)$$

Део општег решења који одговара t_i и t_{i+1} је облика:

$$C_i(\alpha + i\beta)^n + C_{i+1}(\alpha - i\beta)^n = \rho^n (D_i \cos n\theta + D_{i+1} \sin n\theta).$$

Ово се неће појављивати у вашим примерима :)

① Решити рекурентну ј-ну:

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \quad , \quad a_0 = 0, \ a_1 = 2$$

Најпре да приметимо да ово јесте ј-на облика (**)

$k=2$ - ј-на је реда 2 (за налажење неког елемента низа потребна су нам његова 2 претходника)

$f_2 = 1, \ f_1 = -5, \ f_0 = 6$

Одговарајућа карактеристична ј-на: $t^2 - 5t + 6 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

$$t_1 = 2, \ t_2 = 3$$ 1. случај

Како је $t_1 \neq t_2$, опште решење наше ј-не је облика:

$$a_n = c_1 2^n + c_2 3^n$$

Партикуларно решење добијамо када одредимо c_1 и c_2.
За шта користимо почетне услове: $a_0 = 0$ и $a_1 = 2$

$a_0 = c_1 \cdot 2^0 + c_2 \cdot 3^0 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$

↑ из општег решења за $n=0$, $n=1$ ↑ из почетних услова

$a_1 = c_1 2^1 + c_2 3^1 = 2 \Rightarrow 2c_1 + 3c_2 = 2$

Решимо систем:

$c_1 = -2$

$c_2 = 2$

Мењамо нађене константе у опште решење:

$a_n = 2 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n$ – партикуларно решење (задовољава и ј-ну и почетне услове)

2. $a_{n+3} - 4a_{n+2} + a_{n+1} + 6a_n = 0$, $a_0 = -1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$

Ово је такође ј-на облика (**), али је реда 3.

Одговарајућа карактеристична ј-на: $t^3 - 4t^2 + t + 6 = 0$

$(t+1)(t-2)(t-3) = 0$

$t_1 = -1,\ t_2 = 2,\ t_3 = 3$

$t_1 \neq t_2 \neq t_3$ 1. случај

Опште решење је: $a_n = c_1 (-1)^n + c_2 2^n + c_3 3^n$

Тражимо c_1, c_2, c_3 из услова: $a_0 = -1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$

$a_0 = c_1 (-1)^0 + c_2 2^0 + c_3 \cdot 3^0 = -1$

$a_1 = c_1 (-1)^1 + c_2 2^1 + c_3 3^1 = 2$

$a_2 = c_1 (-1)^2 + c_2 2^2 + c_3 3^2 = 4$

Добијамо систем 3×3:

$c_1 + c_2 + c_3 = -1$ (1)

$-c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 2$ (2)

$c_1 + 4c_2 + 9c_3 = 4$ (3)

(2)+(1): $3c_2 + 4c_3 = 1$

(3)+(1): $6c_2 + 12c_3 = 6$ $\cdot(-2)$

$4c_3 = 4$

$\boxed{c_3 = 1}$, $\boxed{c_2 = -1}$, $\boxed{c_1 = -1}$ Партикуларно решење:

$a_n = 3^n - 2^n - (-1)^n$

(3) $a_{n+3} - 5a_{n+2} + 8a_{n+1} - 4a_n = 0$, $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$

Одговарајућа карактеристична ј-на: $t^3 - 5t^2 + 8t - 4 = 0$

$(t-2)^2(t-1) = 0$

$t_1 = t_2 = 2$ - ово је двоструко решење $(s=2)$ 2. случај

$t_3 = 1$

Опште решење: $a_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n + c_3 1^n$

Тражимо константе c_1, c_2, c_3 из почетних услова

$a_0 = c_1 2^0 + c_2 0 2^0 + c_3 1^0 = 0$

$a_1 = c_1 2^1 + c_2 1 2^1 + c_3 1^1 = 2$

$a_2 = c_1 2^2 + c_2 2 2^2 + c_3 1^2 = 3$

Добијамо систем:

$c_1 + c_3 = 0$

$2c_1 + 2c_2 + c_3 = 2$

$4c_1 + 8c_2 + c_3 = 3$

Решење: $c_1 = 5$, $c_2 = -3/2$, $c_3 = -5$

Партикуларно решење: $a_n = 5 2^n - \frac{3}{2} n 2^n - 5$

(4) $a_{n+4} - 5a_{n+3} + 6a_{n+2} + 4a_{n+1} - 8a_n$ - За вежбање

$a_0 = 1$, $a_1 = 8$, $a_2 = 12$, $a_3 = 38$

Решење: $a_n = -2(-1)^n + 3 \cdot 2^n - \frac{1}{4} n \cdot 2^n + \frac{1}{4} n^2 2^n$

Нехомогена рекурентна линеарна ј-на со конст. коеф.

Општи облик: $f_k a_{n+k} + f_{k-1} a_{n+k-1} + \dots + f_0 a_n = f(n)$ ⓐ

Опште решење ове ј-не је: $\boxed{a_n = h_n + p_n}$, где је:

h_n - опште решење одговарајуће хомогене ј-не
(ово сада умемо да решимо)

p_n - једно партикуларно решење ј-не ⓐ

Како наћи p_n? Облик партикуларног решења зависи од десне стране ј-не ⓐ, тј. од ф-је $f(n)$.

Ево рецепта за неке ф-је $f(n)$:

① $\boxed{f(n) = P_d(n)}$ (полином ст. d) пример: n^2+1, $n-5$, n^3+n ...

- Ако $t=1$ није решење карактеристичне ј-не, p_n тражимо у облику: $p_n = A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \dots + A_d n^d$
- Ако $t=1$ јесте решење многострукости s каракт. ј-не, онда p_n тражимо у облику: $p_n = n^s (A_0 + A_1 n + \dots + A_d n^d)$.

② $\boxed{f(n) = k \cdot b^n, k \in R}$ пример: $2 \cdot 5^n$, 2^n, -3^n, ...

- Ако $t=b$ није решење каракт. ј-не, p_n тражимо у облику: $p_n = A \cdot b^n$
- Ако $t=b$ јесте решење многострукости s каракт. ј-не, p_n тражимо у облику: $p_n = A n^s b^n$

③ $\boxed{f(n) = b^n \, P_d(n)}$ пример: $2^n \cdot n$, $5^n(n-1)$, $3^n n^2$, ...

- Ако $t=b$ није решење каракт. ј-не, p_n тражимо у облику: $p_n = b^n (A_0 + A_1 n + \dots + A_d n^d)$
- Ако $t=b$ јесте решење многострукости s каракт. ј-не, онда p_n тражимо у облику: $p_n = b^n n^s (A_0 + A_1 n + \dots + A_d n^d)$

(1.) $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 2^n$, $a_0 = 3,\ a_1 = 8$

Опште решење је: $a_n = h_n + p_n$

Тражимо h_n: Хомогена ј-на која одговара ј-ни из задатка:

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$$

h_n је опште решење ове ј-не.

Карактеристична ј-на: $t^2 - 3t + 2 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$t_1 = 2,\ t_2 = 1$, $t_1 \neq t_2 \Rightarrow h_n = c_1 2^n + c_2$

Тражимо p_n: Посматрамо ф-ју десне стране $f(n) = 2^n$

Ово је ф-ја облика: $k \cdot b^n$ за $k = 1,\ b = 2$

Сада се питамо да ли је $\boxed{t = 2}$ решење карakт. ј-не? Јесте! Вишеструкост тог решења је $S = 1$, па партикуларно решење тражимо у облику:

$\boxed{p_n = A n^1 2^n}$ Следеће нам је налажење вредности A.

p_n, као партикуларно решење полазне ј-не, мора да њу преводи у идентитет, тј. мора да важи:

$p_{n+2} - 3p_{n+1} + 2p_n = 2^n$ Убацимо израз за p_n

$A(n+2)2^{n+2} - 3 \cdot A(n+1)2^{n+1} + 2An2^n = 2^n \quad / : 2^n$

$4A(n+2) - 6A(n+1) + 2An = 1$

Уз n: $4A - 6A + 2A = 0$

Слободни чланови: $8A - 6A = 1$

$A = 1/2 \Rightarrow \boxed{p_n = \frac{1}{2} n 2^n}$

Опште решење ј-не из задатка: $a_n = h_n + p_n = c_1 2^n + c_2 + \frac{1}{2} n 2^n$.

Константе c_1, c_2 налазимо из почетних услова: $a_0 = 3,\ a_1 = 8$

$a_0 = c_1 2^0 + c_2 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 2^0 = 3$

$a_1 = c_1 2^1 + c_2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^1 = 8$

Систем: $c_1 + c_2 = 3$

$2c_1 + c_2 = 7$

$\Rightarrow c_1 = 4, \; c_2 = -1$

Партикуларно решење ј-не из задатка: $a_n = 4 \cdot 2^n - 1 + \frac{1}{2} n 2^n$.

(2) $a_{n+1} - 5a_n = 4n^2 + 2n + 6 \quad , \; a_1 = 1$

Опште решење: $a_n = h_n + p_n$

Тражимо h_n:

Хомогена ј-на која одговара ј-ни из задатка: $a_{n+1} - 5a_n = 0$

Карактеристична ј-на: $t - 5 = 0 \Rightarrow t = 5$

$h_n = c_1 5^n$

Тражимо p_n:

Десна страна ј-не: $f(n) = 4n^2 + 2n + 6 \quad (= P_2(n))$

Питамо се да ли је $t = 1$ решење каракт. ј-не

Није! $\Rightarrow p_n = An^2 + Bn + C$.

Треба наћи A, B, C. p_n је парт. реш. ј-не из задатка, па мора да важи:

$p_{n+1} - 5p_n = 4n^2 + 2n + 6$

$A(n+1)^2 + B(n+1) + C - 5An^2 - 5Bn - 5C = 4n^2 + 2n + 6$

Уз n^2: $A - 5A = 4 \Rightarrow -4A = 4 \Rightarrow \boxed{A = -1}$

Уз n: $2A + B - 5B = 2 \Rightarrow \boxed{B = -1}$

Слободни чланови: $A + B + C - 5C = 6 \Rightarrow \boxed{C = -2}$ $\quad p_n = -n^2 - n - 2$

Нашли смо p_n. Опште решење ј-не из задатка:

$a_n = h_n + p_n = c_1 5^n + (-n^2 - n - 2)$

Још остаје да нађемо C_1 из услова $a_1 = 1$

$a_1 = C_1 \cdot 5^1 - 1 - 1 - 2 = 1 \Rightarrow C_1 = 1$

Партикуларно решење: $a_n = 5^n - n^2 - n - 2$

(3) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = n3^n$, $a_0 = 2, a_1 = 3$

Опште решење: $a_n = h_n + p_n$

Тражимо h_n

Хомогена ј-на: $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$

Каракт. ј-на: $t^2 - 6t + 9 = 0$

$(t-3)^2 = 0$

$t_1 = t_2 = 3$ 2. случај

$h_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n$

Тражимо p_n:

Десна страна: $f(n) = n \cdot 3^n$ ово је ф-ја облика $b^n P_1(n)$

$b = 3, \quad P_1(n) = n$

Питамо се да ли је $t = 3$ решење карakт. ј-не

Јесте и то вишеструкости 2, па парт. решење тражимо

у облику: $p_n = n^2 b^n P_1(n) = n^2 3^n (An + B)$.

Мора бити: $p_{n+2} - 6p_{n+1} + 9p_n = n3^n$

$(n+2)^2 3^{n+2} (A(n+2) + B) - 6(n+1)^2 3^{n+1} (A(n+1) + B) + 9n^2 3^n (An + B) = n3^n \quad /: 3^n$

$(n^2 + 4n + 4) 9 (An + 2A + B) - 18(n^2 + 2n + 1)(An + A + B) + 9n^2 (An + B) = n$

Уз n^3: $9A - 18A + 9A = 0 \qquad 0 = 0 \checkmark$

уз n^2: $9(2A+B) + 36A - 18(A+B) - 36A + 9B = 0 \qquad 0 = 0 \checkmark$

уз n: $36(2A+B) + 36A - 36(A+B) - 18A = 1 \Rightarrow 54A = 1 \Rightarrow A = 1/54$

Слободни чланови: $36(2A+B) - 18(A+B) = 0 \Rightarrow 54A + 18B = 0 \Rightarrow B = -1/18$

Намираме сто p_n:

$$p_n = n^2 3^n \left(\frac{n}{54} - \frac{1}{18}\right)$$

Общото решение: $a_n = h_n + p_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n + n^2 3^n \left(\frac{n-3}{54}\right)$

C_1 и C_2 намираме из началних условиа:

$$a_0 = C_1 3^0 + C_2 \cdot 0 \cdot 3^0 + 0\, 3^0 \left(\frac{0-3}{54}\right) = 2 \Rightarrow \boxed{C_1 = 2}$$

$$a_1 = C_1 3^1 + C_2 1 \cdot 3^1 + 1^2 3^1 \left(\frac{1-3}{54}\right) = 3 \rightarrow C_2 = \frac{-26}{27}$$

Партикуларно решење:

$$a_n = 2 \cdot 3^n - \frac{26}{27} n 3^n + n^2 3^n \frac{(n-3)}{54}$$

За вежбање:

1.
$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 5$$

$$a_0 = 1,\ a_1 = 2$$

Решење: $a_n = \frac{2}{3} 4^n - \frac{1}{2} \cdot 3^n + \frac{5}{6}$

2.
$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 3n + 2$$

$$a_0 = a_1 = 1$$

Решење: $a_n = \frac{3}{4} \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n + \frac{3}{2} n + \frac{13}{4}$