Дискретне структуре 2

6. час

① Наћи коефицијент уз x^{15} у развоју $\frac{1}{(1-3x)(1-2x)}$.

Користимо $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$. Ова формула се не може директно применити на ф-ју из задатка, али се може применити на $\frac{1}{1-3x}$ и $\frac{1}{1-2x}$

$$\frac{1}{1-3x} = (1+(-3x))^{-1} \underset{\alpha=-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\binom{-1}{k}} (3x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^k \binom{1+k-1}{k}} (-3x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k$$

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

Ово смо могли да добијемо и на 2. начин:

$$\frac{1}{1-3x} = \{3x = t\} = \frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+t^3+\dots = \sum_{k=0}^{\infty} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (3x)^k$$

Слично је: $\frac{1}{1-2x} = \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k$

Напишимо сада ф-ју $\frac{1}{(1-3x)(1-2x)}$ уз помоћ ф-ја $\frac{1}{1-2x}$ и $\frac{1}{1-3x}$, тј нађимо бројеве A и B т.д.

$$\frac{1}{(1-3x)(1-2x)} = A \cdot \frac{1}{1-2x} + B \frac{1}{1-3x} \quad / \ (1-3x)(1-2x)$$

$$1 = A(1-3x) + B(1-2x)$$

$$1 = A+B+(-3A-2B)x$$

Изједначимо коеф. уз одговарајуће степене x са леве и десне стране:

$$1 = A+B$$
$$0 = -3A-2B$$

Решимо систем: $A=-2$, $B=3$

Дакле, $\frac{1}{(1-3x)(1-2x)} = -2 \cdot \frac{1}{1-2x} + 3 \frac{1}{1-3x} = -2 \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k + 3 \sum_{k=0}^{\infty} (3x)^k$

Коначно: $\frac{1}{(1-3x)(1-2x)} = \sum_{k=0}^{\infty}(3^{k+1}-2^{k+1})\,x^k$

За $k=15$ тражени коефицијент је $3^{16}-2^{16}$.

2) Доказати: $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\dots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$.

Полазимо од једнакости: $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$ (*)

Примењујемо биномну ф-лу на сваки чинилац:

$$\underline{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \underline{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2 \dots \binom{n}{n}x^n}$$

$$\underline{(1+x)^{2n}} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k = \underline{\binom{2n}{0}+\binom{2n}{1}x+\dots+\binom{2n}{2n}x^{2n}}$$

Мењамо ово у једнакост (*):

$$\Big\{\underbrace{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\dots+\binom{n}{n}x^n}_{(1+x)^n}\Big\}\Big\{\underbrace{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\dots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}+\binom{n}{n}x^n}_{(1+x)^n}\Big\} =$$

$$= \binom{2n}{0}+\binom{2n}{1}x+\dots+\boxed{\binom{2n}{n}x^n}+\dots+\binom{2n}{2n}x^{2n}$$

Упоређујемо коефицијенте уз x^n са леве и десне стране једнакости. Нећемо срећивати израз са леве стране, већ само гледамо како добијамо степен x^n:

$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{n}x^n$
$\binom{n}{1}x$	$\binom{n}{n-1}x^{n-1}$
$\binom{n}{2}x^2$	$\binom{n}{n-2}x^{n-2}$
$\vdots$	
$\binom{n}{n}x^n$	$\binom{n}{0}$
лева заграда	десна заграда

Изједначујемо коефицијенте са леве и десне стране:

$$\binom{n}{0}\underset{\binom{n}{0}}{\underset{\parallel}{\binom{n}{n}}}+\binom{n}{1}\underset{\binom{n}{1}}{\underset{\parallel}{\binom{n}{n-1}}}+\dots+\binom{n}{n}\underset{\binom{n}{n}}{\underset{\parallel}{\binom{n}{0}}}=\binom{2n}{n}$$

Користимо симетричност биномних коефицијената $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$,

тј $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}$ и добијамо тражену једнакост.

$\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}$

$\vdots$

$\binom{n}{n}=\binom{n}{0}$

3. Одредити ф.г. за низове

1) $a=(1,1,0,0,1,1,0,0,\dots)$

2) $b=(0,0,4,4,0,0,4,4,\dots)$

3) $c=(0,0,1,0,0,1,\dots)$

4) $d=(3,3,0,3,3,0,\dots)$

Сетимо се: $1+x+x^2+x^3+\dots=\frac{1}{1-x}$

1) $a(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i=1+x+0x^2+0x^3+x^4+x^5+0x^6+0x^7+1x^8+1x^9+\dots$

$=1+x+x^4+x^5+x^8+x^9+\dots$

$=1+x+x^2+x^3+x^4+\dots-(x^2+x^3+x^6+x^7+\dots)$ (од свих смо одузели оне који фале)

$=\frac{1}{1-x}-x^2\left(1+x+x^4+x^5+\dots\right)$ → од овог израза смо кренули

$=\frac{1}{1-x}-x^2\cdot a(x)$

Сада повежемо почетак и крај: $a(x)=\frac{1}{1-x}-x^2a(x)$

$(1+x^2)\,a(x)=\frac{1}{1-x}$

$a(x)=\frac{1}{(1-x)(1+x^2)}$

2) $b(x)=4x^2+4x^3+4x^6+4x^7+\dots$

$=4x^2\underbrace{(1+x+x^4+x^5+\dots)}_{a(x)}=4x^2a(x)=\frac{4x^2}{(1-x)(1+x^2)}$

3) $c(x) = 0 + 0x + 1x^2 + 0x^3 + 0x^4 + x^5 + 0x^6 + 0x^7 + x^8 + \dots$

$= \underline{x^2 + x^5 + x^8 + x^{11} + \dots} = x^2(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots) = \{x^3 = t\}$

$= x^2(1 + t + t^2 + t^3 + \dots) = x^2 \frac{1}{1-t} = x^2 \frac{1}{1-x^3}$

4) $d(x) = 3 + 3x + 0x^2 + 3x^3 + 3x^4 + 0x^5 + 3x^6 + 3x^7 + \dots$

$= 3(1 + x + x^3 + x^4 + x^6 + x^7 + \dots) = 3\left[1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots - (\overbrace{\underline{x^2 + x^5 + x^8 + \dots}}^{c(x)})\right]$

од свих одузмемо оне који фале

$= 3\left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^3}\right)$

$= \frac{3(1+x)}{1-x^3}$

④ Одредити ф.г. за низове задате општим чланом:

1) $a_n = 6 \cdot 4^n - 5 \cdot 3^n$

$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (6 \cdot 4^n - 5 \cdot 3^n) x^n = 6 \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n - 5 \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = 6 \sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n - 5 \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n$

$= \left\{ \begin{matrix} 4x = t \\ 3x = z \end{matrix} \right\} = 6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} t^n - 5 \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 6(1 + t + t^2 + t^3 + \dots) - 5(1 + z + z^2 + \dots) = 6 \frac{1}{1-t} - 5 \frac{1}{1-z}$

$= \frac{6}{1-4x} - \frac{5}{1-3x}$

2) $a_n = 2020^n$

$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2020^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2020x)^n = \{t = 2020x\}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots = \frac{1}{1-t} = \frac{1}{1-2020x}$

3) $a_n = 5n + 6$

$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (5n+6) x^n = 5 \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + 6 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$= 5x \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} + 6 \frac{1}{1-x}$

$= 5x \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' + 6 \frac{1}{1-x} = 5x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' + \frac{6}{1-x}$

$= 5x \left(\frac{1}{1-x}\right)' + \frac{6}{1-x} = \frac{5x}{(1-x)^2} + \frac{6}{1-x} = \frac{6-x}{(1-x)^2}$

⑤ На колико начина се 24 јабуке могу поделити на 4 особе тако да свака особа добије бар три, а највише осам јабука?

Нека је J_1 - број јабука за 1. особу, $J_1 \in \{3,4,5,6,7,8\}$
J_2 - број јабука за 2. особу, $J_2 \in \{3, \dots 8\}$
J_3 - број јабука за 3. особу, $J_3 \in \{3, \dots 8\}$
J_4 - број јабука за 4. особу, $J_4 \in \{3, \dots, 8\}$

пошто свака особа мора да добије бар 3, а највише 8 јабука

Свакој особи придружујемо полином:

$J_1(x) = x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8$

$J_2(x) = x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8$

$J_3(x) = x^3+\dots+x^8$

$J_4(x) = x^3+\dots+x^8$

Број начина да се јабуке поделе, а да при том важи услов $3 \le J_i \le 8$, $i=1,2,3,4$ једнак је коефицијенту уз x^{24} у производу $J_1(x)J_2(x)J_3(x)J_4(x)$.

$$J_1(x)J_2(x)J_3(x)J_4(x) = (x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8)^4 = (x^3(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5))^4 =$$

$$= x^{12}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4 = x^{12}(1-x^6)^4(1-x)^{-4}$$

Паскалов троугао:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$\boxed{1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1} \rightarrow$ $(1-x^6)^4 = 1-4x^6+6x^{12}-4x^{18}+x^{24}$

$$(1-x)^{-4} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-4}{k}(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{4+k-1}{k}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k}{k}x^k$$

$$J_1(x)J_2(x)J_3(x)J_4(x) = x^{12}(1-4x^6+6x^{12}-4x^{18}+x^{24})\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k}{k}x^k$$

Треба нам коеф. уз x^{24}:

$k=12$ $\quad x^{12}\cdot 1\cdot\binom{3+12}{12}x^{12} = \binom{15}{12}x^{24}$

$k=6$ $\quad x^{12}(-4x^6)\binom{3+6}{6}x^{12} = -4\binom{9}{6}x^{24}$

$k=0$ $\quad x^{12}\cdot 6x^{12}\binom{3+0}{0}x^0 = 6$

Коначно: $\binom{15}{12}-4\binom{9}{6}+6 = 125$ начина

(6.) На колико начина Пера, Мика, Жика и Лаза могу поделити 12 јабука и 16 јагода т.д. Пера добије бар три јагоде и бар једну јабуку, а да остали дечаци добију бар по две јабуке и највише по 5 јагода сваки?

Прво делимо јабуке:

мора да добије бар једну

p - број јабука за Перу , $p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

m - број јабука за Мику, $m \in \{2, 3, \dots 7\}$

z - за Жику , $z \in \{2, 3, \dots 7\}$

l - за Лазу , $l \in \{2, 3, \dots, 7\}$

→ преостала тројица морају бар по 2, што је 6, тако да Пера може највише 6 јабука да добије

Сваком дечаку придружујемо полином:

Пера - $P(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$

Мика - $M(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7$

Жика - $Z(x) = x^2 + x^3 + \dots + x^7$

Лаза - $L(x) = x^2 + x^3 + \dots x^7$

Број начина да поделе 12 јабука једнак је коефицијенту уз x^{12} у производу: $P(x)M(x)Z(x)L(x)$:

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)^3 = x^7(1+x+\dots+x^5)(1+x+\dots+x^5)^3 =$$

$$= x^7(1+x+\dots+x^5)^4 = x^7\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4$$

$$P(x)M(x)Z(x)L(x) = x^7(1-x^6)^4(1-x)^{-4} = x^7(1-4x^6+6x^{12}-4x^{18}+x^{24})\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-4}{k}(-x)^k$$

$$= x^7(1-4x^6+6x^{12}-4x^{18}+x^{24})\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k}{k}x^k$$

Коеф. уз x^{12}: $x^7 \cdot 1 \cdot \binom{3+5}{5} x^5$ $(k=5)$

$\binom{8}{5} = 56$ начина да поделе јабуке

Сада делимо јагоде. Нека p, m, z, l означавају број јагода за сваког од детета.

$p \in \{3, 4, \dots, 16\}$

$m, l, z \in \{0, 1, 2, \dots, 5\}$

Придружујемо полиноме:

$P(x) = x^3 + x^4 + \dots + x^{16}$

$M(x) = L(x) = Z(x) = 1 + x + \dots + x^5$

Број начина да поделе 16 јагода је коеф уз x^{16} у производу $P(x)M(x)L(x)Z(x)$

$$P(x)M(x)L(x)Z(x) = (x^3 + x^4 + \dots + x^{16})(1 + x + \dots + x^5)^3$$

$$= x^3(1 + x + \dots + x^{13})\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^3 = x^3(1-x^6)^3(1-x^{14})(1-x)^{-1}(1-x)^{-3}$$

$$= x^3(1 - 3x^6 + 3x^{12} - x^{18})(1-x^{14})(1-x)^{-4}$$

$$= x^3(1 - 3x^6 + 3x^{12} - x^{18})(1-x^{14})\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-4}{k}(-x)^k$$

$$= x^3(1-x^{14})(1 - 3x^6 + 3x^{12} - x)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k}{k}x^k$$

Како све добијамо x^{16}:

$$\underbrace{x^3 \cdot 1 \cdot 1}_{3} \cdot \binom{3+13}{13} x^{13}$$

$$\underbrace{x^3 \cdot 1 \cdot (-3x^6)}_{9} \binom{3+7}{7} x^7$$

$$\underbrace{x^3 \, 1 \cdot 3x^{12}}_{15} \binom{3+1}{1} x$$

Коначно: $\binom{16}{13} - 3\binom{10}{7} + 3\binom{4}{1} = 212$ начина да поделе јагоде.

Укупан број начина да поделе воће: $56 \cdot 212$