Неуређени избори елемената

3.1. Комбинације без понављања

Нека је X коначан скуп, $|X|=n$.

Комбинација k-те класе од n елемената је било који $\boxed{\text{подскуп}}$ од k елемената скупа X.

Број избора: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ C_n^k

• $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$

• $\binom{n}{k} = 0$, $k<0$ или $k>n$

C

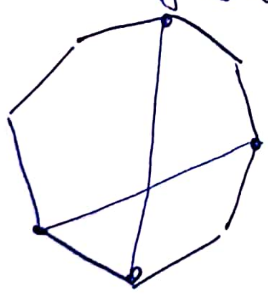
- није битан редослед елемената
- не бирају се сви елементи

(12) На колико начина се може саставити тим од 8 чланова, ако се на располагању има 20 кандидата?

Бирамо подскуп (сви чланови су равноправни, нема функција)

$\Rightarrow \binom{20}{8} = \frac{20!}{8!\,12!}$

(15) Нека је конвексан n-тоугао такав да се никоје две дијагонале не секу у једној тачки. Колико има пресечних тачака дијагонала?



Пресечна тачка ← две дијагонале ← 4 темена

$\binom{n}{4} = \frac{n!}{(n-4)!\,4!}$

Дискретне структуре 2

4. час

① Од 7 жена и 4 мушкарца треба изабрати делегацију.
На колико начина се то може урадити ако се делегација састоји од:
1) 3 жене и 2 мушкарца
2) било који број људи, али мора бити једнако жена и мушкараца
3) петоро људи, али бар 2 жене
4) петоро људи, при чему је једна жена већ одабрана.

1) $\overset{\text{Ж}}{\binom{7}{3}} \cdot \overset{\text{М}}{\binom{4}{2}}$

2) $\overset{\text{Ж}}{\binom{7}{1}}\overset{\text{М}}{\binom{4}{1}} + \overset{\text{Ж}}{\binom{7}{2}}\overset{\text{М}}{\binom{4}{2}} + \overset{\text{Ж}}{\binom{7}{3}}\overset{\text{М}}{\binom{4}{3}} + \overset{\text{Ж}}{\binom{7}{4}}\overset{\text{М}}{\binom{4}{4}}$

3) $\overset{\text{Ж}}{\binom{7}{2}}\overset{\text{М}}{\binom{4}{3}} + \overset{\text{Ж}}{\binom{7}{3}}\overset{\text{М}}{\binom{4}{2}} + \overset{\text{Ж}}{\binom{7}{4}}\overset{\text{М}}{\binom{4}{1}} + \overset{\text{Ж}}{\binom{7}{5}}$

4) $\binom{10}{4}$

② На колико начина се од 6 особа може саставити 5 различитих трочланих комисија, ако се свакој комисији даје различито задужење?

$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20$ – број могућих трочланих комисија $\quad C_3^6$

$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16$ – број начина да се одабере 5 са различитим задужењем $\quad V_5^{20}$

③ Кошаркашки тренер треба да одабере прву петорку. На располагању има 5 бекова, 4 центра и 3 крила. На колико начина то може да уради, ако мора да игра бар један центар и бар 2 бека?

Могуће формације: 1ц2б2к, 2ц2б1к, 2ц3б, 3ц2б, 1ц3б1к, 1ц4б

Број избора: $4\cdot\binom{5}{2}\binom{3}{2}+\binom{4}{2}\binom{5}{2}3+\binom{4}{2}\binom{5}{3}+\binom{4}{3}\binom{5}{2}+\binom{4}{1}\binom{5}{3}\binom{3}{1}+\binom{4}{1}\binom{5}{4}$

$=540$

Неуређени избори са понављањем (комбинације)

пример: На колико начина се могу одабрати два новчића из касе која садржи новчиће од 1, 2 и 5 динара?

Решење: 11, 12, 15, 25, 22, 55 – 6 начина

Сваки од ових избора можемо представити уз помоћ 2 маркера и 2 преграде

1 2 5

$\cdot\cdot\,|\quad|$ – избор 11

$|\;\cdot\,|\;\cdot$ – избор 25

Имамо 4 симбола и треба да одаберемо на којим позицијама се налази маркер (или преграда):

$\binom{4}{2}=6$ број начина

Тма) Број неуређених избора к-елемената са понављањима скупа X је: $\binom{|X|+k-1}{k}$.

Сваки избор се може приказати уз помоћ к маркера и $|X|-1$ преграде, тј. уз помоћ ниске дужине $k+|X|-1$. Бирамо позиције за маркере, њих к, на преосталим су преграде (може и обрнуто).

4) Колико има начина да се одабере 5 новчаница из касе која садржи новчанице од 10, 20, 50, 100, 200, 500 и 1000 дин?

$$\underset{\bullet\bullet\bullet}{10} \;\Big|\; 20 \;\Big|\; 50 \;\Big|\; 100 \;\Big|\; \underset{\bullet\bullet}{200} \;\Big|\; 500 \;\Big|\; 1000$$

5 маркера
6 преграда } 11 симбола

Број ниски (начина): $\binom{11}{5} = \binom{11}{6}$

$\boxed{k = 5, \ |X| = 7}$

5.) На колико начина 4 особе могу поделити 10 истих предмета?

Нека се особе зову A, B, C, D

$$\underset{\bullet\bullet\bullet}{A} \;\Big|\; \underset{\bullet\bullet\bullet}{B} \;\Big|\; \underset{\bullet\bullet\bullet}{C} \;\Big|\; \underset{\bullet}{D}$$

10 маркера
3 преграде } 13 симбола

Број начина: $\binom{13}{3} = \binom{13}{10}$

$\boxed{k = 10, \ |X| = 4}$

БИТАН ЗАДАТАК!

6.) Колико решења има једначина $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ у скупу целих позитивних бројева?

Уведимо скуп $X = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Ако x_i представља број колико је пута биран елемент i из скупа X, онда свако решење ј-не представља комбинацију од n елемената скупа X са понављањима.

Такође, свака комбинација одређује једно решење, па их има једнако:

Број решења је: $\binom{n+k-1}{n}$

$$\underset{\bullet\bullet}{1} \;\Big|\; \underset{\bullet}{2} \;\Big|\; \underset{\bullet\bullet}{3} \;\Big|\; 4 \;\Big|\; \ldots \;\Big|\; \underset{\bullet}{k}$$

$x_1 = 2$ $x_2 = 1$ $x_3 = 2$ $x_4 = 0$ $x_k = 1$

$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$

Напомена:

Број решења ј-не: $x_1+x_2+\dots+x_k=n$, $x_i \in \mathbb{Z}^+$, $i=\overline{1,k}$ је $\binom{n+k-1}{n}$

КОРИСТИМО У ЗАДАЦИМА !

(7) Колико има уређених четворки: $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in N^4$ т.д. $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=9000$?

$$9000=9\cdot 10^3=2^3\cdot 3^2 5^3$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1=2^{\alpha_1}3^{\beta_1}5^{\gamma_1}\\ x_2=2^{\alpha_2}3^{\beta_2}5^{\gamma_2}\\ x_3=2^{\alpha_3}3^{\beta_3}5^{\gamma_3}\\ x_4=2^{\alpha_4}3^{\beta_4}5^{\gamma_4}\end{array}\right\}\quad x_1x_2x_3x_4=2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}\cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4}\cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4}=2^3\cdot 3^2\cdot 5^3$$

$$\Rightarrow \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=3 \qquad \text{број решења: } \binom{4+3-1}{3}$$

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4=2 \qquad \binom{4+2-1}{2}$$

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4=3 \qquad \binom{3+4-1}{3}$$

Укупно: $\binom{6}{3}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{6}{3}$

Сваки избор $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ са сваким $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ и сваким избором $(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$ даје један избор (x_1,x_2,x_3,x_4).

Пермутације са понављањем

Број пермутација од n елемената где се први елемент појављује n_1 пута, други елемент n_2 пута, …, k-ти елемент n_k пута, $n_1+n_2+\dots+n_k=n$, је

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}.$$

8. Колико се 1) осмоцифрених 2) петоцифрених бројева може написати уз помоћ цифара $\underbrace{2,2,4,6,7,7,7,7}_{8 \text{ цифара}}$.

1) $n=8$

$n_1=2$ (цифра 2 се 2 пута појављује)

$n_2=1$, $n_3=1$ > цифре 4 и 6 се једном јављају

$n_4=4$ (цифра 7 се појављује 4 пута)

Број осмоцифрених бројева: $\dfrac{8!}{2!1!1!4!}$

2) Могући избори цифара које ће чинити запис траженог петоцифреног броја:

2,7,7,7,7
4,7,7,7,7
6,7,7,7,7

$3\cdot\dfrac{5!}{4!}$ ⊕

2,4,7,7,7
2,6,7,7,7
4,6,7,7,7
2,2,7,7,7

$\left(3\cdot\dfrac{5!}{3!}+\dfrac{5!}{3!2!}\right)$ ⊕

2,2,4,7,7
2,2,6,7,7
2,4,6,7,7

$\left(2\cdot\dfrac{5!}{2!2!}+\dfrac{5!}{2!}\right)$ ⊕

2,2,4,6,7

$\dfrac{5!}{2!}$

Укупно: 265

Генерисање пермутација

Деф. Пермутација $a_1a_2\dots a_n$ претходи пермутацији $b_1b_2\dots b_n$ у лексикографском поретку, ако за неко k важи:

$a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \dots,\ a_k<b_k$.

Пример: $N_5=\{1,2,3,4,5\}$. $\underline{345}12$ претходи $\underline{345}21$

* Прва пермутација скупа $\{1,2,\dots,n\}$ је $12\dots n$, а последња $n(n-1)\dots 1$.

Нека је задата пермутација $a_1a_2...a_n$. Желимо да нађемо $\boxed{\text{следећу}}$ у лексикографском поретку.

1) Претражујемо дату пермутацију од краја и тражимо индекс j т.д. $a_j < a_{j+1}$.

2) На позицију j стављамо најмањи од бројева $a_{j+1}, a_{j+2}, ..., a_n$, који је већи од a_j и преостале елементе на позицијама $j+1 ... n$ поређамо растуће.

пример: $4 \ \underset{a_j}{2} < \underbrace{6 > 5 > 3 > 1}_{\text{најмањи већи од 2 је } 3}$ → иде на место j

$4 \ 3 \ \underbrace{1 \ 2 \ 5 \ 6}_{\text{остали поређани растуће}}$

Генерисање $\boxed{k\text{-те}}$ пермутације скупа од n елемената

- k-та пермутација $\boxed{\text{почиње}}$ бројем $a_1 = \left\lceil \frac{k}{(n-1)!} \right\rceil$

  $\lceil x \rceil$ - најмањи цео број већи или једнак x

- остатак тражене пермутације је $k' = k - (n-1)!(a_1-1)$-та пермутација преосталих елемената, тј.

- $\boxed{\text{други}}$ елемент k-те пермутације је $a_2 = \left\lceil \frac{k'}{(n-2)!} \right\rceil$-ти елемент по реду из растућег поретка преосталих елемената

- $\boxed{\text{трећи}}$ елемент k-те пермутације је $a_3 = \left\lceil \frac{k''}{(n-3)!} \right\rceil$-ти елемент по реду из растућег поретка преосталих, при чему је: $k'' = k' - (n-2)!\,(a_2-1)$

i-ти елемент је $a_i = \left\lceil \frac{k^{(i-1)}}{(n-i)!} \right\rceil$-ти по реду из растућег поретка преосталих, $k^{(i-1)} = k^{(i-2)} - (a_{i-1}-1)(n-i+1)!$

(9) Наћи 17. пермутацију у лексикографском поретку скупа $\{1,2,3,4\}$.

$k=17,\ n=4.$

$a_1 = \left\lceil \frac{17}{3!} \right\rceil = \lceil 2.833.. \rceil = 3$ 1. елемент је 3

3 _ _ _

$k' = k - (a_1-1)(n-1)! = 17 - (3-1)3! = 5$

$a_2 = \left\lceil \frac{5}{2!} \right\rceil = \lceil 2.5 \rceil = 3$ 2. елемент је 3. из растућег поретка преосталих $\{1,2,4\}$, дакле 4.

3 4 _ _

$k'' = k' - (a_2-1)(n-2)! = 5 - (3-1)2! = 1$

$a_3 = \left\lceil \frac{1}{1!} \right\rceil = 1$ 3. елемент је 1. из растућег поретка преосталих $\{1,2\}$, дакле 1 → 3 4 1 _

⇒ 4. елемент је: <u>3412</u>

(3 4 _ _)

→ Остатак тражене пермутације је 1. пер. у лексикографском поретку преосталих тј. 12.

За вежбање: Наћи 22. пермутацију у лексикографском поретку скупа $\{A, E, P, R\}$. Решење: REPA.