Дискретне структуре 2

3. час

ТМА: За произвољне $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, важи:

$$(x_1+x_2+\dots+x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \binom{n}{n_1,\dots,n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}$$

① Наћи коефицијент уз x^4yz^7 у развоју $(3x-5y+2z)^{12}$.

$$(3x-5y+2z)^{12} = \sum_{n_1+n_2+n_3=12} \binom{12}{n_1,n_2,n_3} (3x)^{n_1}(-5y)^{n_2}(2z)^{n_3}$$

За $n_1=4$, $n_2=1$, $n_3=7$ $\quad (4+1+7=12)$

добија се сабирак: $\binom{12}{4,1,7}(3x)^4(-5y)^1(2z)^7$, па је

тражени коефицијент: $\frac{12!}{4!\,1!\,7!}\, 3^4 (-5)\, 2^7$.

② Наћи коефицијент уз x^{10} у развоју $(1-x^2+x^3)^{11}$.

$$(1-x^2+x^3)^{11} = \sum_{n_1+n_2+n_3=11} \binom{11}{n_1,n_2,n_3} 1^{n_1}(-x^2)^{n_2}(x^3)^{n_3}$$

За које n_1, n_2, n_3 се добија x^{10}?

Мора бити $2n_2+3n_3=10$, као и $n_1+n_2+n_3=11$.

$n_2=1$, $n_3=8/3$ ✗

$n_2=2$, $n_3=2$ ✓, $n_1=7$

$n_2=3$, $n_3=4/3$ ✗

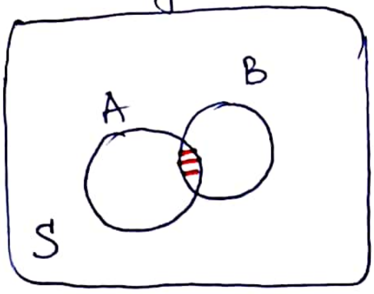
$n_2=4$, $n_3=2/3$ ✗

$n_2=5$, $n_3=0$ ✓, $n_1=6$

Тражени коефицијент је: $\binom{11}{7,2,2}1^7(-1)^2 + \binom{11}{6,5,0}1^6(-1)^5 = 1518$

Принцип укључивања и искључивања

Нека су A, B и S коначни скупови, $A,B \subseteq S$, $A\cap B \neq \emptyset$.



$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

$$\underset{\overline{A}\cap\overline{B}}{\overset{\|}{|\overline{A\cup B}|}} = |S\setminus(A\cup B)| = |S| - \underbrace{|A\cup B|}$$

$$= |S| - (|A| + |B| - |A\cap B|)$$

$$= |S| - |A| - |B| + |A\cap B|$$

Уопштено, нека је S коначан скуп и $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq S$.

Тада важи:

$$|A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n|$$

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\dots\cap\overline{A_n}| = |S| - \underbrace{|A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n|}$$

$$= |S| - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \dots + (-1)^{n}|A_1\cap\dots\cap A_n|$$

3. Колико има бројева између 1 и 1000 који нису дељиви ни са 2, ни са 3, ни са 5?

$S = \{1, 2, \dots, 1000\}$

A_2 - бројеви између 1 и 1000 дељиви са 2, $|A_2| = \left[\frac{1000}{2}\right] = 500$

A_3 - бројеви између 1 и 1000 дељиви са 3, $|A_3| = \left[\frac{1000}{3}\right] = 333$

A_5 - бројеви између 1 и 1000 дељиви са 5, $|A_5| = \left[\frac{1000}{5}\right] = 200$

Тражимо $|\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_5}|$.

$$|\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_5| = |S| - (|A_2| + |A_3| + |A_5|) + (|A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_5| + |A_3 \cap A_5|)$$
$$- |A_2 \cap A_3 \cap A_5|$$

$A_2 \cap A_3$ - бројеви дељиви са 2 и са 3, дакле дељиви са 6

$$|A_2 \cap A_3| = \left[\frac{1000}{6}\right] = 166$$

$A_2 \cap A_5$ - бројеви дељиви са 2 и са 5, дакле дељиви са 10

$$|A_2 \cap A_5| = \left[\frac{1000}{10}\right] = 100$$

$A_3 \cap A_5$ - бројеви дељиви са 3 и са 5, дакле дељиви са 15

$$|A_3 \cap A_5| = \left[\frac{1000}{15}\right] = 66$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = |A_{30}| = \left[\frac{1000}{30}\right] = 33$$

$$|\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_5| = 1000 - (500 + 333 + 200) + (166 + 100 + 66) - 33 = 266$$

4. У Монтреалу сваки грађанин говори француски или енглески. 80% говори француски, 70% говори енглески. Колико % говори оба језика?

E - становништво које говори енглески

$|E| = 0.7u$, u = укупан број становника

F - становништво које говори француски

$|F| = 0.8u$

$u = |E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|$

$\Rightarrow |E \cap F| = |E| + |F| - u = 0.7u + 0.8u - u = 0.5u$

$\Rightarrow$ 50% становништва говори оба језика

Уређени избори елемената < варијације, пермутације

1. Варијације

1.1. Варијација $\boxed{\text{са понављањем}}$ је пресликавање
$f: N_k \to N_n$, $N_k = \{1, 2, \dots, k\}$

$\underset{1}{\underline{n}}\ \underset{2}{\underline{n}}\ \underset{3}{\underline{n}}\ \underset{4}{\underline{n}} \quad \underset{k}{\underline{n}}$

$\overline{V}_n^k$

Број избора: n^k

1.2. Варијација $\boxed{\text{без понављања}}$ је $\boxed{1\text{-}1}$ пресликавање
$f: N_k \to N_n$

$\underset{1}{\underline{n}}\ \underset{2}{\underline{n-1}}\ \underset{3}{\underline{n-2}} \dots \underset{k}{\underline{n-k+1}}$

V_n^k

Број избора: $n(n-1)\dots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

$\underline{V}$
- битан поредак елемената
- не бирају се сви елементи

(5) Градски одбор од 10 чланова треба да одабере председника, секретара и благајника. На колико начина могу ово да уроде?
- битан је редослед (тј. битно је ко се за коју позицију бира $\Rightarrow$ уређен избор)
- бирамо 3 од 10 елемената (не све)
- нема понављања јер нећемо бирати исту особу за више позиција

Решење: $V_{10}^{3} = 10 \cdot 9 \cdot 8$

(6) Колико има шестоцифрених бројева у којима су бар 2 цифре исте?

Свих шестоцифрених бројева: $\underline{9}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10} = 9 \cdot 10^5$ $(9\overline{V}_{10}^{5})$

Шестоцифрених бројева у којима су све цифре различите: $\underline{9}\ \underline{9}\ \underline{8}\ \underline{7}\ \underline{6}\ \underline{5} = 9 \cdot V_9^5$

не сме 0

Коначно: $9 \cdot 10^5 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

(7) Колико има петоцифрених телефонских бројева који садрже само парне цифре?

- бирамо 5 елемената, дозвољена понављања
- битан редослед

$\overline{V}_5^5 = 5^5$.

2. Пермутације

Пермутација елемената скупа X је бијективно пресликавање тог скупа у самог себе.

Ако је $|X| = n$, број пермутација тог скупа је $n!$

$$\boxed{\begin{array}{l} \quad P \\ \hline \text{- битан поредак елемената} \\ \text{- бирају се сви елементи} \end{array}}$$

8. На колико начина 6 особа може стати у ред?

Битан редослед особа, све треба распоредити: $6!$

9. На колико начина 6 мушкараца и 5 жена може стати у ред, т.д. стоје наизменично?

Само жене се могу распоредити на $5!$ начина, а само мушкарци на $6!$ начина, укупно: $5! \cdot 6!$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & Ж_1 & & Ж_2 & & Ж_3 & & Ж_4 & & Ж_5 & \\ М_1 & \downarrow & М_2 & \downarrow & М_3 & \downarrow & М_4 & \downarrow & М_5 & \downarrow & М_6 \end{array}$$

Сваки распоред жена са сваким распоредом мушкараца даје један распоред свих.

А шта да је било 6 жена и 6 мушкараца?

$2 \cdot 6! \cdot 6!$

↳ број распореда за жене

↳ број распореда за мушкарце

↳ Сваки распоред жена са сваким распоредом мушкараца даје два распореда:

$$\begin{array}{cccccccccccc} Ж_1 & & Ж_2 & & Ж_3 & & Ж_4 & & Ж_5 & & Ж_6 & \\ \downarrow & М_1 & \searrow\downarrow & М_2 & \searrow\downarrow & М_3 & \searrow\downarrow & М_4 & \searrow\downarrow & М_5 & \searrow\downarrow & М_6 \searrow \end{array}$$

10. На колико начина n особа може сести за округли сто?

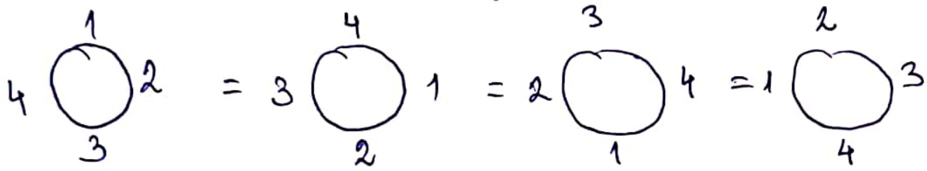
n особа може стати у ред на $n!$ начина.

Међутим неке од њих дају исти распоред за столом.

$$\left.\begin{array}{l} p_1\, p_2\, p_3 \cdots p_{n-1}\, p_n \\ p_n\, p_1\, p_2 \cdots p_{n-2}\, p_{n-1} \\ p_{n-1}\, p_n\, p_1 \cdots p_{n-3}\, p_{n-2} \\ \vdots \\ p_2\, p_3 \cdots p_n\, p_1 \end{array}\right\}$$ n пермутација које дају један распоред за столом

Коначно: $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

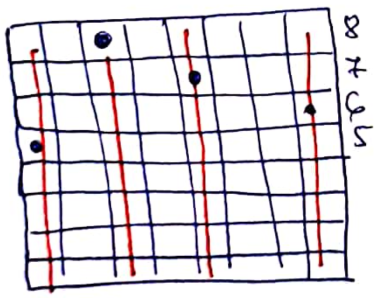
пример: $N_4 = \{1, 2, 3, 4\}$



Пермутације: 1234, 4123, 3412, 2341 дају исти распоред за столом. Уместо $4!$ имамо $\frac{4!}{4} = 3!$ начина.

11. На колико начина се 8 топова може сместити на шаховску таблу т.д. се никада 2 не нападају?

У свакој врсти (колони) се налази тачно један топ.



Попунимо таблу по врстама (може и по колонама).
У првој врсти имамо 8 могућих поља, у другој 7, трећој 6 итд.
Коначно: $8!$.