Дискретне структуре 2

$\boxed{\text{2. час}}$

Биномни коефицијенти, биномни идентитети

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, \quad k\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{R}$$

$$\binom{n}{0} := 1$$

Специјално, ако $n\in\mathbb{N}, k\le n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ПАМТИМО!

Особине:

1) Симетричност: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $n,k\in\mathbb{N}, k\le n$
2) Паскалова формула: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, $k\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{R}$
3) Биномна формула: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$

Паскалов троугао:

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = 1a + 1b$

$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

...

1

1 + 1

1 + 2 + 1

1 + 3 + 3 + 1

1 4 6 4 1

...

① Одредити коефицијент уз $a^{10}b^3$ у развоју $(a-b)^{13}$.

$$(a-b)^{13} = \sum_{k=0}^{13}\binom{13}{k}a^k(-b)^{13-k}$$

Биномна ф-ла; $(a-b)^{13} = (\underset{x}{a} + \underset{y}{(-b)})^{13}$

За $k=10$ сабирак је облика: $\binom{13}{10}a^{10}(-b)^3$, па је

тражени коефицијент: $-\frac{13!}{10!\,3!} = -\frac{13\cdot 12\cdot 11}{6} = -286$

(2) Други, трећи и четврти коефицијент у развоју $(x+y)^n$ образују аритметички низ. Наћи n.

Коефицијенти у развоју $(x+y)^n$: $\binom{n}{0}, \underbrace{\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}}_{\text{образују аритметички низ}}, \dots, \binom{n}{n}$.

$\binom{n}{2} = \binom{n}{1} + a$ (1)

$\binom{n}{3} = \binom{n}{2} + a = \binom{n}{1} + 2a$ (2)

Систем са 2 ј-не и две непознате (n и a). Нама треба n!

$2\cdot(1)-(2)$: $2\binom{n}{2} - \binom{n}{3} = 2\binom{n}{1} + 2a - \binom{n}{1} - 2a$

$$2\binom{n}{2} - \binom{n}{3} = \binom{n}{1}$$

$$\binom{n}{3} - 2\binom{n}{2} + \binom{n}{1} = 0$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - 2\,\frac{n(n-1)}{2} + n = 0 \quad \Big|\, 6$$

$$n(n-1)(n-2) - 6n(n-1) + 6n = 0$$

$$n\left[n^2 - 3n + 2 - 6n + 6 + 6\right] = 0$$

$$n\left[n^2 - 9n + 14\right] = 0$$

$$n(n-2)(n-7) = 0$$

$$\cancel{n=0} \lor \cancel{n=2} \lor \boxed{n=7}$$

$n^2 - 9n + 14 = 0$

$n_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2}$

$n_{1,2} = \frac{9 \pm 5}{2}$

$n_1 = 2, \; n_2 = 7$

Једино решење, јер само у развоју $(x+y)^7$ постоје чланови из услова задатка.

③ Одредити коефицијент уз x^5 у развоју $\left(3\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{20}$.

$$\left(3x^{1/2} + \tfrac{1}{2}x^{-1/3}\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} \left(3x^{1/2}\right)^{k} \left(\tfrac{1}{2}x^{-1/3}\right)^{20-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} 3^{k} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{20-k} \underbrace{x^{k/2}\, x^{-\frac{(20-k)}{3}}}_{x^{\frac{k}{2} - \frac{20-k}{3}}}$$

Тражимо k т.д. $\frac{k}{2} - \frac{20-k}{3} = 5 \quad | \cdot 6$

$$3k - 40 + 2k = 30$$
$$5k = 70$$
$$k = 14$$

Коефицијент уз x^5 је: $\binom{20}{14} 3^{14} \left(\frac{1}{2}\right)^{6}$

Из биномне формуле, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, за $x = y = 1$

добијамо:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} \quad \text{т.ј.}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Битно!

Слично, за $x = -1$, $y = 1$, добија се:

$$(-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k}, \quad \text{т.ј.}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0}$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

4. Доказати:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}$$

$$\left[\ k! = \underbrace{k(k-1)(k-2)\dots 1}_{} = k(k-1)!\ \right]$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} =$$

$$= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = \left\{\begin{matrix} k-1=j & \\ k=1 & j=0 \\ k=n & j=n-1\end{matrix}\right\} = n\boxed{\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}} = n\cdot 2^{n-1}$$

$$\underset{j=0}{\binom{n-1}{0}} + \underset{j=1}{\binom{n-1}{1}} + \dots \underset{j=n-1}{\binom{n-1}{n-1}} = 2^{n-1}$$

5. Доказати:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k+1) = (n+2)2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k+1) = \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}k+\binom{n}{k}\right] = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k}_{} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}}_{=2^n}$$

Ово је сума из прошлог задатка! За $k=0$: $\binom{n}{0}\cdot 0 = 0$, па и ова сума може да крене од $k=1$!

$$= n\cdot 2^{n-1} + 2^n = 2^{n-1}(n+2).$$

6. Доказати:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)\binom{n}{k} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^k k\binom{n}{k} + (-1)^k\binom{n}{k}\right] = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}}_{=0}$$

За $k=0$: $(-1)^0\cdot 0\cdot\binom{n}{0} = 0$

Бројач може да крене од 1!

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \cdot \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} = n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} k-1=j & \\ k=1 & j=0 \\ k=n & j=n-1 \end{matrix} \right\} = n \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} \binom{n-1}{j} = n(-1) \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j}}_{=0} = 0$$

⑦ Доказати:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}$$

Показали смо:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \quad (1)$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \quad (2)$$

(1)+(2)

$$2\binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + \dots = 2^n \quad /:2$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1}$$

(1)−(2):

$$2\binom{n}{1} + 2\binom{n}{3} + \dots = 2^n \quad /:2$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots = 2^{n-1}$$

⑧ Доказати:

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Другачије написано: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overset{(n+1)!}{n!}}{\underbrace{(k+1)k!}_{(k+1)!}(n-k)!} \cdot \frac{(n+1)}{(n+1)} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} k+1=j & \\ k=0 & j=1 \\ k=n & j=n+1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} = \frac{1}{n+1} \left(\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \dots + \binom{n+1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \left(\underbrace{\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \dots + \binom{n+1}{n+1}} - \binom{n+1}{0} \right) = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right)$$

9. Доказати:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{k}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{-1}{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{k}{k+1}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{k+1-1}{k+1}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[1-\frac{1}{k+1}\right]\binom{n}{k}=$$

$$=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}}_{=0}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k+1}\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot\frac{(n+1)}{(n+1)}$$

$$=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k+1}=\left\{\begin{array}{ll} k+1=j & \\ k=0 & j=1\\ k=n & j=n+1\end{array}\right\}$$

$$=\frac{-1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1}\binom{n+1}{j}=\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j}\binom{n+1}{j}=$$

$$=\frac{1}{n+1}\left((-1)\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}-\binom{n+1}{3}+\ldots(-1)^{n+1}\binom{n+1}{n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(\underbrace{\binom{n+1}{0}-\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\ldots(-1)^{n+1}\binom{n+1}{n+1}}_{\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}=0}-\underbrace{\binom{n+1}{0}}_{=1}\right)=-\frac{1}{n+1}$$

10. Израчунати:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2+3k+2}\binom{n}{k}=?$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2+3k+2}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+2)(k+1)}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+2)(k+1)}\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot\frac{(n+2)(n+1)}{(n+2)(n+1)}$$

$(n+2)!$

$$=\frac{1}{(n+2)(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+2}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}\left(\overset{k=0}{\binom{n+2}{2}}+\overset{k=1}{\binom{n+2}{3}}+\ldots+\overset{k=n}{\binom{n+2}{n+2}}\right)$$

$$=\frac{1}{(n+2)(n+1)}\left(\underbrace{\binom{n+2}{0}+\binom{n+2}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+2}{n+2}}_{2^{n+2}}-\underbrace{\binom{n+2}{0}}_{1}-\underbrace{\binom{n+2}{1}}_{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{(n+2)(n+1)}\left(2^{n+2}-1-n-2\right)$$

Још једна корисна особина:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} = \binom{0}{m}+\binom{1}{m}+\ldots+\binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}}$$

Пажња: Сада је доњи параметар m фиксиран, а бројач иде по горњем параметру k.

За вежбање: Доказати ово. (индукција по n + Паскалова ф-ла)

(11.) Израчунати: $\sum_{k=0}^{n} k^2$

Рачунамо уз помоћ ф-ле изнад.
Желимо да k^2 напишемо преко биномних коефицијената:

$$\binom{k}{0}=1,\quad \binom{k}{1}=k,\quad \binom{k}{2}=\frac{k(k-1)}{2}=\frac{k^2-k}{2}$$

$$2\binom{k}{2}=k^2-k \Rightarrow k^2=2\binom{k}{2}+k$$

$$k^2=2\binom{k}{2}+\binom{k}{1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(2\binom{k}{2}+\binom{k}{1}\right) = 2\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{2}}_{=\binom{n+1}{2+1}}+\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{1}}_{=\binom{n+1}{2}} = 2\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}=$$

$$=\frac{2(n+1)n(n-1)}{6}+\frac{(n+1)n}{2}$$

$$=\frac{(n+1)n(2n+1)}{6}$$

Горња ф-ла за $m=2$ и $m=1$