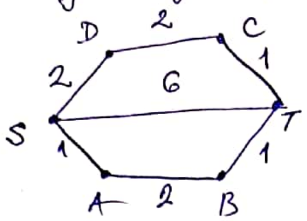
Алгоритми најкраћег пута

- Посматрамо повезан тежински граф $G=(V,E)$. Желимо да нађемо најкраћи пут од чвора S до чвора T.



$S - A - B - T$

$d(S,T) = 5$

Дајкстрин алгоритам

K1 $I(S)=0$, $I(v)=\infty$ за $v \neq S$, $i=0$, $z=S$, $S_0=\{S\}$

K2 $\forall v \in \overline{S_i}$ рачунамо нову вредност $I(v)$: $I(v)=\min\{I(v), I(z)+d(z,v)\}$.
Затим нађемо $\min\{I(v) \mid v \in \overline{S_i}\}$ и чвор u_{i+1} у коме се постиже та вредност. $S_{i+1}=S_i \cup \{u_{i+1}\}$, $z=u_{i+1}$

K3 Ако $i=|V|-1$: стоп

Ако $i<|V|-1$: $i=i+1$ и иди на K2.

Кораке алгоритма таблично записујемо.

1. корак

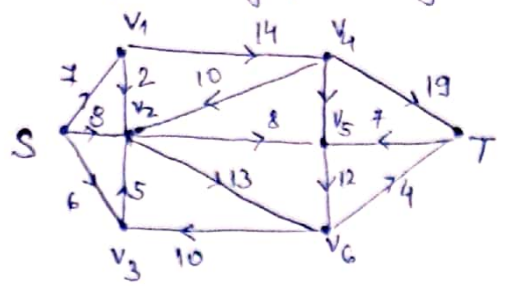
S	A	B	C	. . .	T
0*	∞	∞	∞	. .	∞

$z=S$

У сваком кораку рачунамо нове индексе $I(v)$ за оне чворове који нису фиксирани (тј. који нису у скупу S_i)
Када чвор фиксирамо писаћемо □ (ово се дешава након *)
СТОП када T^*

пример

Одредити најкраћи пут од чвора S до чвора T:



S	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	T
0^*	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$\boxed{0}$	7	8	6^*	∞	∞	∞	∞
$\boxed{0}$	7^*	8	$\boxed{6}$	∞	∞	∞	∞
$\boxed{0}$	$\boxed{7}$	8^*	$\boxed{6}$	21	∞	∞	∞
$\boxed{0}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{6}$	21	16^*	21	∞
$\boxed{0}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{6}$	21^*	$\boxed{16}$	21	∞
$\boxed{0}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{6}$	$\boxed{21}$	$\boxed{16}$	21^*	40
$\boxed{0}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{6}$	$\boxed{21}$	$\boxed{16}$	$\boxed{21}$	25^*

Дужина најкраћег пута од S
до T је 25
до v_6 је 21
до v_5 је 16
до v_4 је 21
итд.

Како одредити пут?
Пратимо * уназад

$$d(S,T)=25$$

$$S - v_2 - v_6 - T$$

Најкраћи пут од S до v_5:

$$d(S,v_5)=16$$

$$S - v_2 - v_5$$

$\boxed{z=S}$

директно растојање тј. тежина гране од z до v_1 ако она постоји

$I(v_1)=\min\{I(v_1),\ I(z)+d(z,v_1)\}$
$=\min\{\infty,\ 0+7\}=7$

$I(v_2)=\min\{I(v_2),\ I(z)+d(z,v_2)\}=\min\{\infty,0+8\}=8$

$I(v_3)=\min\{I(v_3), I(z)+d(z,v_3)\}=\min\{\infty, 0+6\}=6$

$I(v_4)=\min\{I(v_4), I(z)+d(z,v_4)\}=\min\{\infty, 0+\infty\}=\infty$

$I(v_5)$, $I(v_6)$, $I(T)$ – слично

$\boxed{z=v_3}$ фиксирана растојања прескачемо

$I(v_1)=\min\{I(v_1),\ I(z)+d(z,v_3)\}$
$=\min\{7,\ 6+\infty\}=7$

$I(v_2)=\min\{I(v_2),\ I(z)+d(z,v_2)\}$
$=\min\{8,\ 6+5\}=8$

$I(v_4), I(v_5), I(v_6), I(T)$ се не могу поправити из v_3

$\boxed{z=v_1}$ прескачемо фиксирана растојања

$I(v_2)=\min\{I(v_2), I(v_1)+d(v_1,v_2)\}=$
$=\min\{8,\ 7+2\}=8$

$I(v_4)=\min\{I(v_4),\ I(v_1)+d(v_1,v_4)\}=$
$=\min\{\infty,\ 7+14\}=21$

$\boxed{z=v_2}$ прескачемо фиксирана растојања

$I(v_5)=\min\{I(v_5), I(v_2)+d(v_2,v_5)\}=\min\{\infty, 8+8\}=16$

$I(v_6)=\min\{I(v_6), I(v_2)+d(v_2,v_6)\}=\min\{\infty, 8+13\}=21$

$\boxed{z=v_5}$ прескачемо фиксирана растојања

$I(v_6)=\min\{I(v_6), I(v_5)+d(v_5,v_6)\}=\min\{21, 16+12\}=21$

$\boxed{z=v_4}$ – (могло је и v_6)

$I(T)=\min\{I(T), I(v_4)+d(v_4,T)\}=\min\{\infty, 21+19\}=40$

$\boxed{z=v_6}$

$I(T)=\min\{I(T), I(v_6)+d(v_6,T)\}=\min\{40, 21+4\}=25$

$z=T$ стоп

Флојдов алгоритам
(Флојд-Воршалов)

- Налази најкраћи пут између свака два чвора повезаног тежинског графа G

- Формирамо две матрице у сваком кораку:

$D = (d_{ij})_{|V| \times |V|}$, $E = (e_{ij})_{|V| \times |V|}$

К1: $k = 0$ d_{ij}^{0} = тежина гране од v_i до v_j ако она постоји, ∞ иначе
$i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$

К2: $k = k+1$ $d_{ij}^{k} = \min\{d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}\}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$

К3: Да ли је $k < n$? Ако јесте иди на К2, иначе стоп.

d_{ij}^{n} - дужина најкраћег пута од v_i до v_j

Како реконструисати путеве? За то нам треба матрица E:

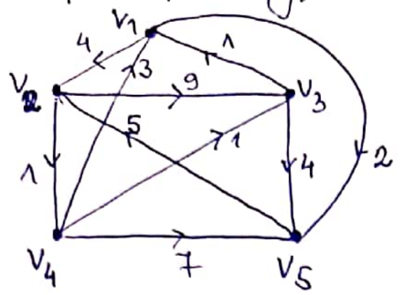
К1: $E^{0} = [0]_{|V| \times |V|}$

К2: $e_{ij}^{(k)} = \begin{cases} k, & \text{ако се десила промена у матрици D на том пољу} \\ e_{ij}^{k-1}, & \text{ако се није десила промена у матрици D на том пољу} \end{cases}$

e_{ij}^{k} - највећи индекс чвора на најкраћем путу од v_i до v_j преко међучворова са индексом који није већи од k.

пример :)

Пример: Примењујемо описани алгоритам на граф са слике:



$k=0$

$$D^{(0)} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 4 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 9 & 1 & \infty \\ 1 & \infty & \infty & \infty & 4 \\ 3 & \infty & 1 & \infty & 7 \\ \infty & 5 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \end{array}, \quad E^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$k=1$ $\quad d_{ij}^{1} = \min\{d_{ij}^{0},\ d_{i1}^{0} + d_{1j}^{0}\}$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 9 & 1 & \infty \\ 1 & \underline{5} & \infty & \infty & \underline{3} \\ 3 & \underline{7} & 1 & \infty & \underline{5} \\ \infty & 5 & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}, \quad E^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$k=2$ $\quad d_{ij}^{2} = \min\{d_{ij}^{1},\ d_{i2}^{1} + d_{2j}^{1}\}$

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} \infty & 4 & \underline{3} & \underline{5} & 2 \\ \infty & \infty & 9 & 1 & \infty \\ 1 & 5 & \underline{4} & \underline{6} & 3 \\ 3 & 7 & 1 & \underline{8} & 5 \\ \infty & 5 & \underline{14} & \underline{6} & \infty \end{pmatrix}, \quad E^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$k=3$ $\quad d_{ij}^{3} = \min\{d_{ij}^{2},\ d_{i3}^{2} + d_{3j}^{2}\}$

$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} \underline{14} & 4 & 13 & 5 & 2 \\ \underline{10} & \underline{14} & 9 & 1 & \underline{12} \\ 1 & 5 & 14 & 6 & 3 \\ \underline{2} & \underline{6} & 1 & \underline{7} & \underline{4} \\ \underline{15} & 5 & 14 & 6 & \underline{17} \end{pmatrix}, \quad E^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$k=4$ $\quad d_{ij}^{4} = \min\{d_{ij}^{3},\ d_{i4}^{3} + d_{4j}^{3}\}$

$$D^{(4)} = \begin{pmatrix} \underline{7} & 4 & \underline{6} & 5 & 2 \\ \underline{3} & \underline{7} & \underline{2} & 1 & \underline{5} \\ 1 & 5 & \underline{7} & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 7 & 4 \\ \underline{8} & 5 & \underline{7} & 6 & \underline{10} \end{pmatrix}, \quad E^{(4)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$k=5 \quad d_{ij}^5 = \min\{d_{ij}^4,\ d_{i5}^4 + d_{5j}^4\}$

$$D^{(5)} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 6 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 7 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 7 & 4 \\ 8 & 5 & 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}, \quad E^{(5)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Рецимо да нас занима најкраћи пут од v_5 до v_1.
Дужина тог пута се налази у матрици D^5 на месту $(5,1)$ и износи 8.

Како реконструисати пут?

$V5 \qquad V1$

Гледамо матрицу $E^{(5)}$, место $(5,1)$: 4

Значи пролазимо кроз V_4 на најкраћем путу: $V5 \quad V4 \quad V1$

Даље, на пољу $(5,4)$ је број 2 што значи да из V_5 до V_4 идемо преко V_2: $V5 \quad V2 \quad V4 \quad V1$

место $(5,2)$: 0 дакле из $V_5 \to V_2$

место $(2,4)$: 0 дакле из $V_2 \to V_4$

За сада смо нашли део пута $V_5 \to V_2 \to V_4 \quad V_1$

Како из V_4 долазимо у V_1?

Место $(4,1)$: 3 $\quad V_4 \quad V_3 \quad V_1$

место $(4,3)$: 0 што значи да из V_4 идемо у V_3

место $(3,1)$: 0 што значи да из V_3 идемо у V_1

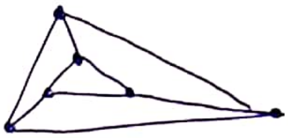
Коначно пут изгледа: $V_5 \to V_2 \to V_4 \to V_3 \to V_1$

Планарни графови

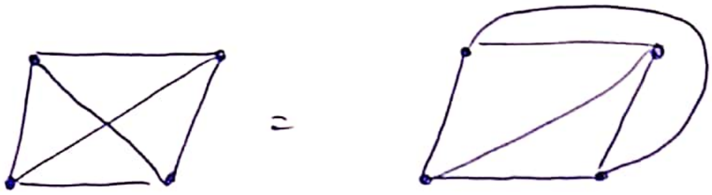
<u>Деф</u> За граф кажемо да је планаран ако се може нацртати у равни т.д. му се гране не секу, осим у чворовима.

↓

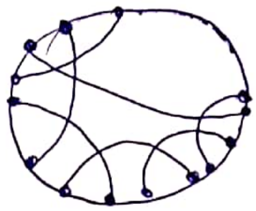
на папиру



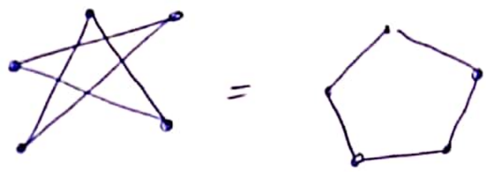
планаран



планаран



- није планаран



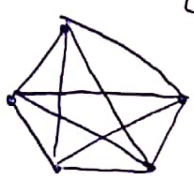
планаран

<u>Лема</u>: За сваки повезан, прост и планаран граф G са $n \geq 3$ чворова важи: $3|V|-|E| \geq 6$.

(Како ово користимо за испитивање планарности?
Ако за повезан и прост граф важи $3|V|-|E|<6$ он није планаран)

пример: K_5 није планаран граф

↳ потпуни граф са 5 чворова. Он је прост и повезан.

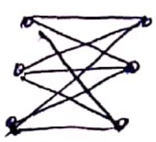


$|V|=5$

$|E|=\binom{5}{2}=10$ $\quad 3|V|-|E| = 3\cdot 5-10=5<6$

лема: није планаран

Лема2 Граф G је планаран ако и само ако не садржи као подграф ни K_5 ни $K_{3,3}$.

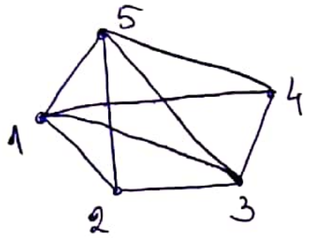
($K_{3,3}$: )

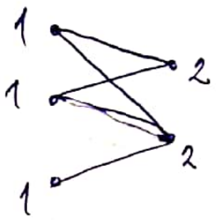
Бојење графова

* Обојити граф значи сваком чвору доделити (број) боју т.д. никоја два суседна чвора нису обојена истом бојом.

* Хроматски број графа = најмањи број боја којима се може обојити граф
Ознака: $\chi(G)$

* Ако је граф бипартитан његов хроматски број је 2
* $\chi(K_n)=n$



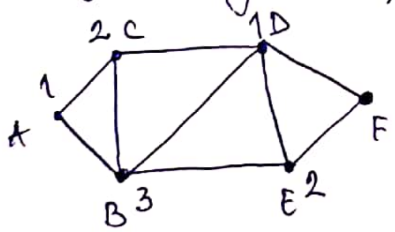


Алгоритам за бојење графа (похлепан)

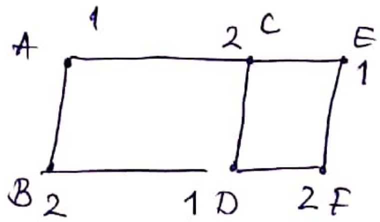
К1: произвољном чвору v_0 доделити боју 1

К2: Сваком чвору доделити боју k, где је k најмањи број боје која није додељена суседном обојеном чвору.

Обојити дате графове:

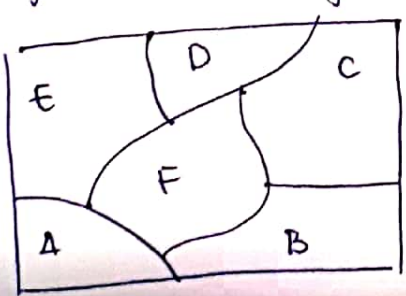


A :	1
C :	2
B :	3
D :	1
E :	2
F :	3

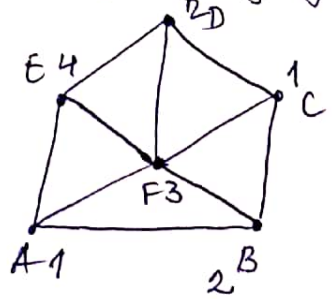


A :	1
B :	2
C :	2
D :	1
E :	1
F :	2

Обојити карту т.д. никоје две земље које су суседне нису обојене истом бојом.



Придружимо граф



A :	1
B :	2
F :	3
C :	1
D :	2
E :	4