Дискретне структуре 2

12. час

Краскалов алгоритам

G - повезан тежински граф

* Тражимо (једно) минимално разапињуће стабло T

K1: $T=(V,\emptyset)$

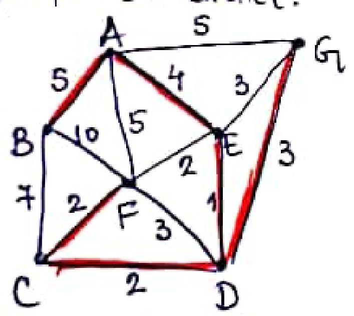
K2: Сортирамо гране графа G у неопадајући низ према њиховим тежинама

K3: Нека је e наредна грана низа. Ако таква не постоји иди на K5

K4: Ако се додавањем гране e текућем стаблу T не формира циклус, додати e у стабло T и иди на K3. Иначе иди на K3.

K5: Крај

① Краскаловим алгоритмом наћи минимално разапињуће стабло графа са слике.



K1: $T=(V,\emptyset)$, $V=\{A,B,C,D,E,F,G\}$

K2: Сортирамо гране:

1	2	2	2	3	3	3	4	5	5	5	7	10
ED	DC	CF	FE	FD	DG	EG	AE	AG	AF	AB	BC	BF

K3: e=ED K4: $e \to T$

K3: e=DC K4: $e \to T$

K3: e=CF K4: $e \to T$

K3: e=FE K4: $e \not\to T$ (циклус EDCFE)

K3: e=FD K4: $e \not\to T$ (циклус FDCF)

K3: e=DG K4: $e \to T$

K3: e=EG K4: $e \not\to T$ (циклус EGDE)

K3: e=AE K4: $e \to T$

K3: e=AG K4: $e \not\to T$ (циклус AGDEA)

K3: e=AF K4: $e \not\to T$ (циклус AFCDEA)

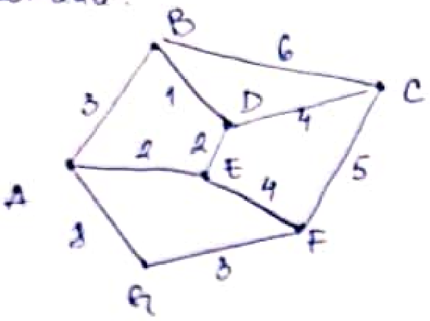
K3: e=AB K4: $e \to T$

K3: e=BC K4: $e \not\to T$ (циклус BCDEA) k3: eBF   k4: e ∉ T (циклус BFCDEAB)

k5: КРАЈ

$\omega(T) = 1+2+2+3+4+5 = 17$

Домаћи:



Примов алгоритам

G - тежински граф

T - (једна) минимално разапињућа шума

Ако је G повезан полази минимално разапињуће стабло

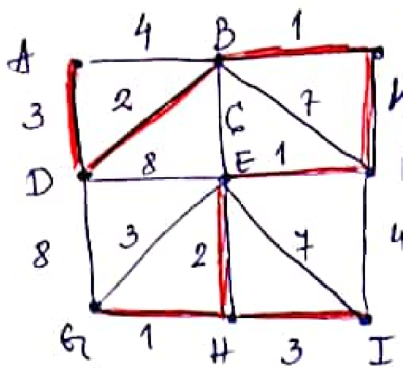
K1: $T = (\emptyset, \emptyset)$

K2: Додати произвољан чвор графа G текућем графу T. Ако такав чвор не постоји, прећи на K4.

K3: Графу T додати грану најмање тежине такву да јој је један крај у T, а други ван T, као и други чвор. Понављати K3 док год је то могуће и прећи на K2.

K4: КРАЈ

② Примовим алгоритмом наћи минимално разапињуће стабло графа са слике.



К1: T = (∅, ∅)

К2: Чвор D додајемо у T

К3: DB → T

К3: BC → T

К3: DA → T

К3: CF → T

К3: FE → T

К3: EH → T

К3: GH → T

К3: HI → T

К4: КРАЈ

Домаћи: Граф из задатка ①

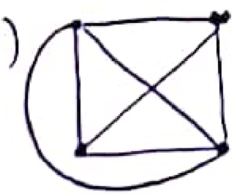
Ојлерови графови

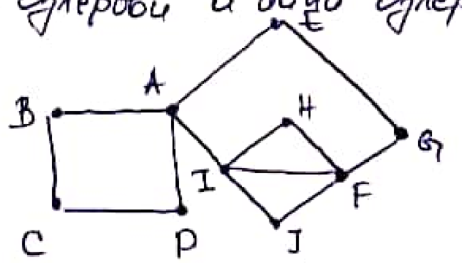
* Граф је Ојлеров ако садржи Ојлеров циклус.
* Ојлеров циклус = затворена стаза која садржи све гране (тачно једном)

ТВА Повезан граф је Ојлеров ако и само ако не садржи чвор непарног степена.

① Испитати да ли су графови Ојлерови и наћи Ојлерове циклусе.

1)



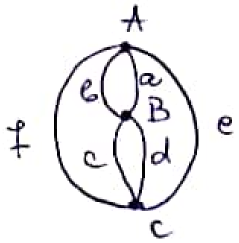


Граф садржи чвор(ове) непарног степена ⇒ није Ојлеров

Сви чворови су парног степена → Ојлеров је

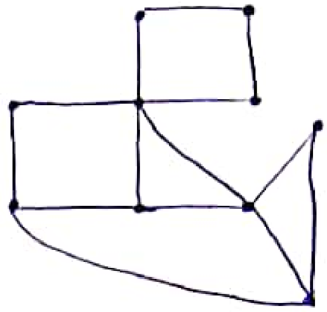
циклус: ABCDAEGFHIFJIA

3)



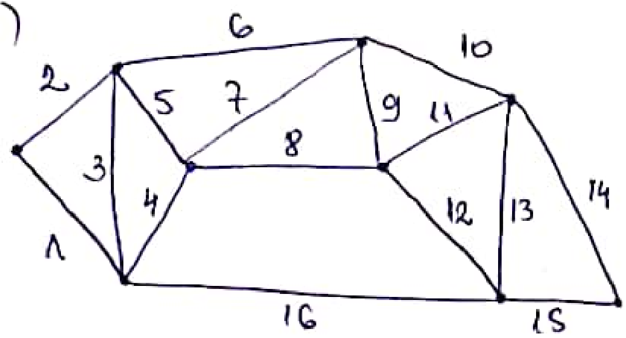
Сви чворови су парног степена
⇒ Ојлеров граф
циклус: acdbef

4)



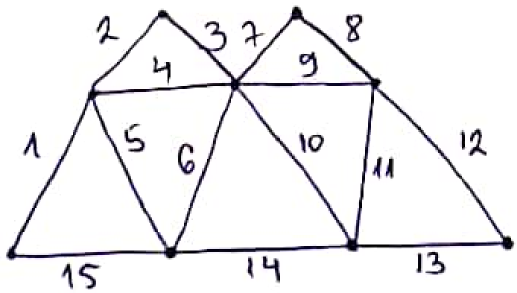
Садржи чворове непарног степена ⇒ није Ојлеров

4)



Сви чворови су парног степена
⇒ Ојлеров граф
циклус: 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15-16 :)

5)

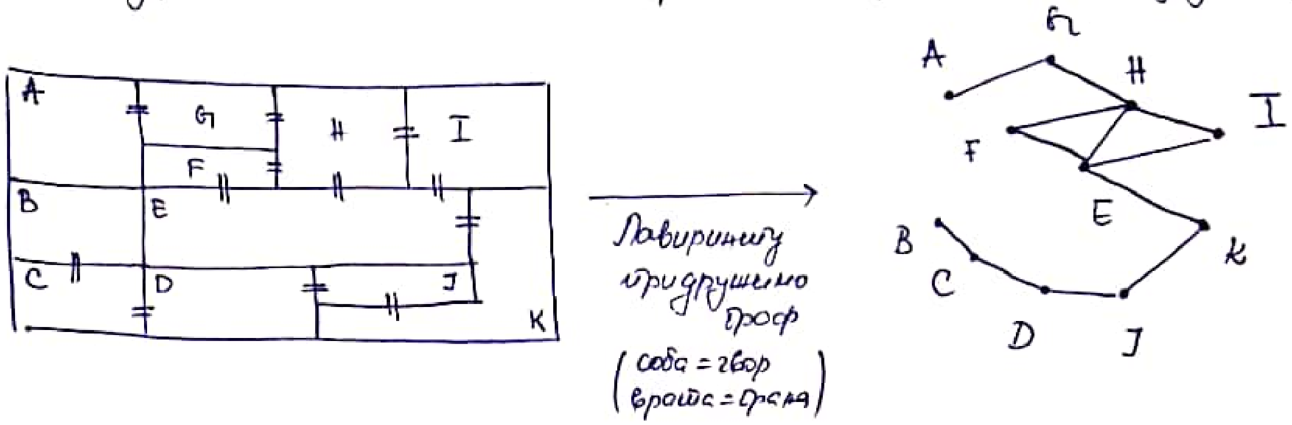


Сви чворови су парног степена ⇒ Ојлеров граф
циклус: 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15

* Граф је полуојлеров ако садржи Ојлеров пут (= Ојлерова стаза)
* Ојлеров пут = стаза која садржи све гране (тачно једном)

Тһм Повезан граф је полуојлеров ако и само ако има 0 или 2 чвора непарног степена

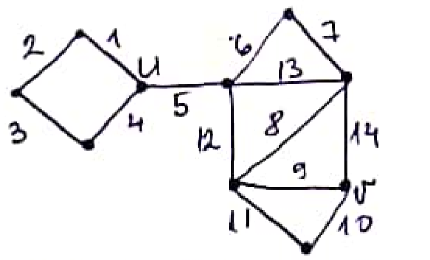
① Да ли је могуће кренути из собе A и доћи у собу B у датом лавиринту, при томе пролазећи кроз свака врата тачно једном?



Сада се питамо да ли постоји Ојлеров пут од A до B
Што су једино два чвора непарног степена ⇒ постоји
Пут: AGHFEHIEKJDCB

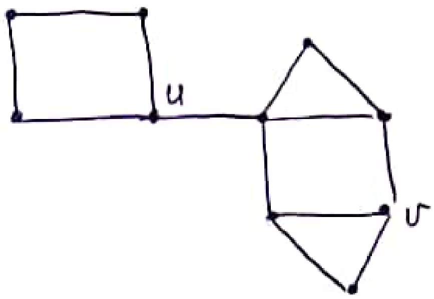
② Наћи Ојлеров пут од чвора u до чвора v ако он постоји

1)



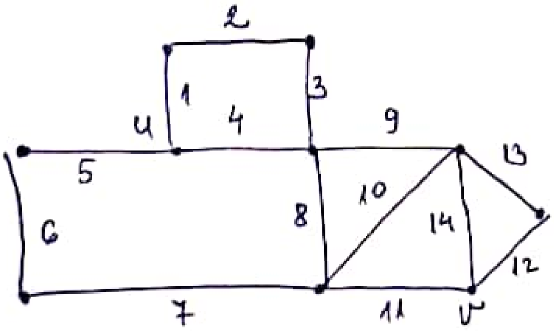
1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14

2)



Граф има више од 2 чвора непарног степена ⇒ није полуојлеров

3)



Флеријев алгоритам

- налази Ојлеров циклус (Ојлеров пут) ω

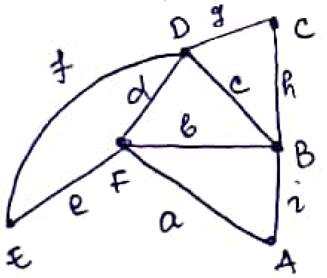
К1: Изабрати произвољан чвор v_0, $\omega = v_0$
(ако тражимо Ојлеров пут v_0 мора бити један од два чвора непарног степена)

К2: Нека је одабрана стаза $\omega = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_i v_i$ наредну грану e_{i+1} одабрати из скупа $E \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ т.д. је e_{i+1} инцидентна са v_i и при томе није мост графа $G_i = G - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ осим ако нема друге могућности

К3: КРАЈ када К2 не може да се извршава

Идеја: мостови су последње гране којима пролазимо

① Флеријевим алгоритмом нађи Ојлеров циклус:



К1: $\omega = F$

К2: $\omega = FeE$

К2: $\omega = FeEfD$ (f је мост, али је то једина опција)

К2: $\omega = FeEfDdF$

К2: $\omega = FeEfDdFbB$

К2: $\omega = FeEfDdFbBcD$

К2: $\omega = FeEfDdFbBcDgC$ (g мост)

К2: $\omega = FeEfDdFbBcDgChB$

К2: $\omega = FeEfDdFbBcDgChBiA$

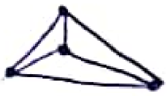
К2: $\omega = FeEfDdFbBcDgChBiAaF$

Хамилтонови графови

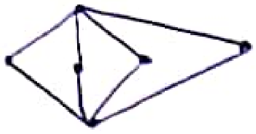
* Граф је Хамилтонов ако садржи Хамилтонов циклус.
* Хамилтонов циклус = циклус који садржи сваки чвор (тачно једном)
* Хамилтонов пут = пут који садржи сваки чвор (тачно једном)

Примери:

Ојлеров и Хамилтонов граф

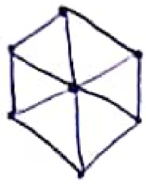


Хамилтонов граф (није Ојлеров)



Ојлеров граф (није Хамилтонов)

Ни Ојлеров, ни Хамилтонов граф



Хамилтонов граф

ТМА 1 Нека је $G=(V,E)$ повезан граф са $n\geq 3$ чворова и нека за свака два несуседна чвора u,v важи $d(u)+d(v)\geq n$. Тада је G Хамилтонов граф.

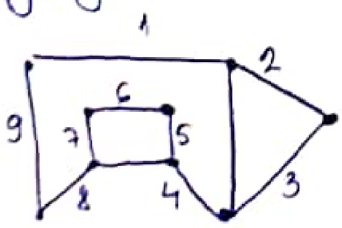
ТМА 2 Нека је $G=(V,E)$ повезан граф са $n\geq 3$ чворова и нека важи $d(v)\geq \frac{n}{2}$, за сваки чвор $v\in V$. Тада је G Хамилтонов граф

* Ако граф G има мост онда он не може бити Хамилтонов, али може бити полухамилтонов. Исто важи и за везивни чвор.

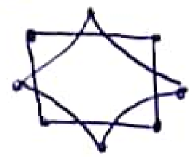
Лема Нека је $G=(V,E)$ Хамилтонов и бипартитни граф, $V=X\sqcup Y$. Тада мора бити $|X|=|Y|$. (Ако за бипартитни граф важи $|X|\neq|Y|$ он не може бити Хамилтонов)

① Одредити Хамилтонов циклус, ако постоји:

1)

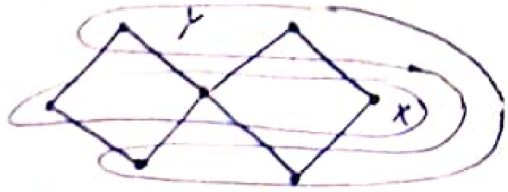


2)



Граф није повезан ⇒ не постоји Хамилтонов циклус

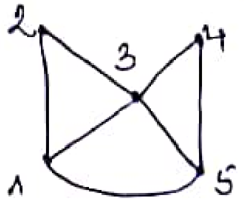
3)



Граф има везивни чвор ⇒ није Хамилтонов

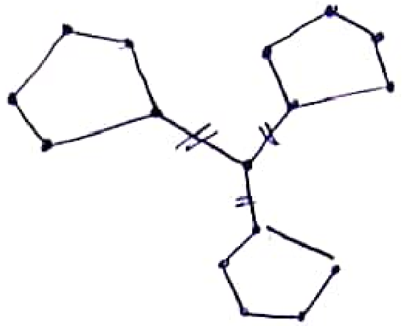
2. решење: Приметимо да је граф бипартитан, али $|X|=3$, $|Y|=4$
лема: није Хамилтонов

4)



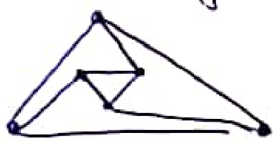
1-2-3-4-5-1

5)



Има мост
$\Rightarrow$ није Хамилтонов

② Да ли је граф Хамилтонов?



Јесте! ТМА2: $d(v) = 3 \quad \forall v \in V$

$n = 6$

$d(v) \geq \frac{n}{2}$

$3 \geq \frac{6}{2}$ ✓

③ Нацртати граф со 6 чворова који има Ојлеров, али не и Хамилтонов циклус.