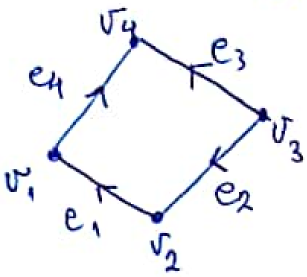
Дискретне структуре 2

11. двочас

Усмерени графови

- свака грана има усмерење, тј. почетак и крај
  $e = (u, v)$ - уређени пар



Матрице суседства

$A(G) = [a_{ij}]$, $|V| \times |V|$ димензија

I Неусмерени графови

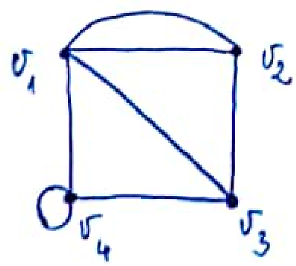
* a_{ij} - број грана које спајају чворове v_i и v_j
* матрица је у овом случају симетрична

II Усмерени графови

* a_{ij} - број грана које излазе из чвора v_i и улазе у чвор v_j

пример

G

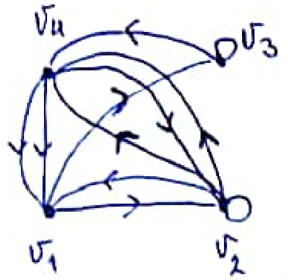


$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

① Нацртати граф матрицом суседства

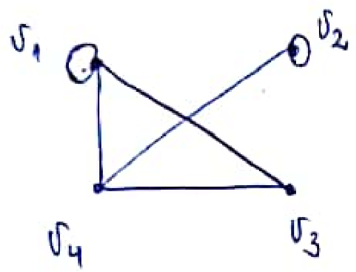
а) $A(G) = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_4 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$

Матрица није симетрична ⇒ граф је усмерен



б) $A(G) = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$

Матрица је симетрична ⇒ граф није усмерен



Матрица инциденције

$$M(G) = [m_{ij}]_{|V| \times |E|}$$

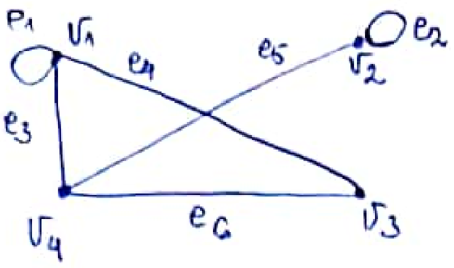
I Неусмерени графови

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако грана } j \text{ садржи чвор } i \\ 0, & \text{ако грана } j \text{ не садржи чвор } i \\ 2, & \text{ако је } j \text{ петља око чвора } i \end{cases}$$

II Усмерени графови

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако грана } j \text{ излази из чвора } i \\ -1, & \text{ако грана } j \text{ улази у чвор } i \\ 0, & \text{ако грана } j \text{ не садржи чвор } i \\ 2, & \text{ако је } j \text{ петља око чвора } i \end{cases}$$

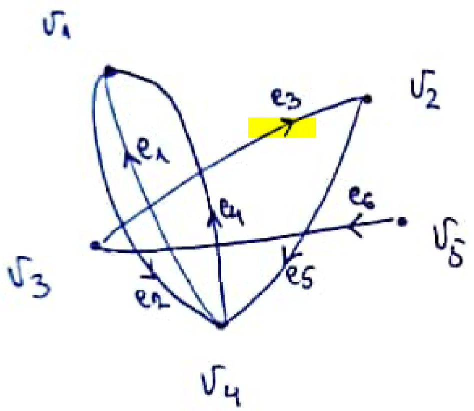
(2) Наћи матрицу инциденције за дати граф:



$$M(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(3) За дату матрицу инциденције наћи матрицу суседства

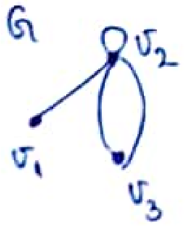
$$M(G) = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \end{array}$$



$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

<u>Став</u>. Нека је $A(G)$ матрица суседства графа G. Тада је елемент на позицији (i,j) у матрици A^k једнак броју свих шетњи од чвора v_i до чвора v_j у графу G.

Пример: За дати граф G наћи матрицу суседства и број свих шетњи дужине 2 између било која два чвора.



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$(1,2)$

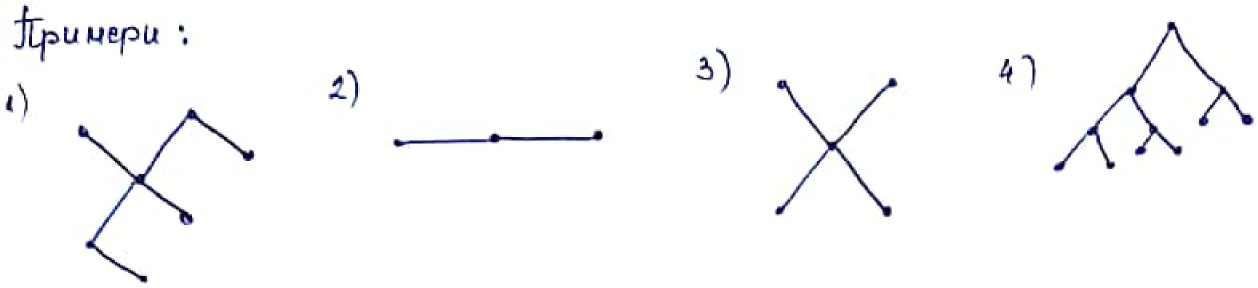
пр: бр. шетњи дужине 2 од v_1 до v_2 је $\underline{\underline{1}}$

Број свих шетњи: $1+1+2+1+6+2+2+2+4=21$

Стабла

* Стабло је повезан граф који не садржи циклусе.

Примери:



ТМА 1) Нека граф G има n чворова. Граф G је стабло ако и само ако је повезан и има $n-1$ грану.

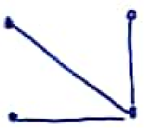
ТМА 2) Свако стабло има бар два чвора степена 1.

① Наћи сва неизоморфна стабла са 4 чвора.

ТМА 1: имамо 3 гране, $d(G) = 2 \cdot |E| = 6$

ТМА 2: бар два чвора су степена 1 $\Rightarrow$ друга два су или степена: 2, 2 или 1, 3

1) 1, 1, 1, 3

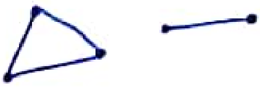


Једини такав

2) 1, 1, 2, 2

Једини такав

② Нацртати граф са 5 чворова и 4 гране који није стабло.



3. Да ли постоје следећи графови?

- Дрво са 9 чворова и 9 грана

  НЕ! ТМА 1

- Дрво са 6 чворова, укупног степена 14

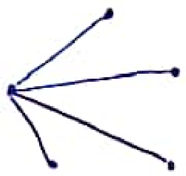
  6 чворова $\xRightarrow{\text{ТМА 1}}$ 5 грана $\Rightarrow d(G) = 2 \cdot 5 = 10 \neq 14$

  НЕ ПОСТОЈИ!

- Дрво са 5 чворова, укупног степена 8

  5 чворова $\xRightarrow{\text{ТМА 1}}$ 4 гране $\Rightarrow d(G) = 2 \cdot 4 = 8$ ✓

  (ОВО ЈЕ ПРОВЕРА, НИЈЕ ДОВОЉНО ЗА ЗАКЉУЧАК, ДА ГРАФ ПОСТОЈИ)



ЕВО ГА, ЗНАЧИ ДА ПОСТОЈИ :)

- Граф са два чвора, једном граном, а да није дрво

Постоји

- Граф са 6 чворова и 5 грана, а да није дрво

Тежински графови:

$G = (V, E, w)$

w - тежинска ф-ја

$w: E \to \mathbb{R}$

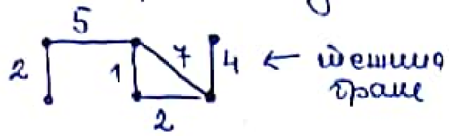
- Свакој грани додељујемо реалан број (најчешће позитиван)
  (дужина, цена, време...)
- Тежина графа G: $w(G) = \sum_{e \in E} w(e)$

Разапињуће стабло

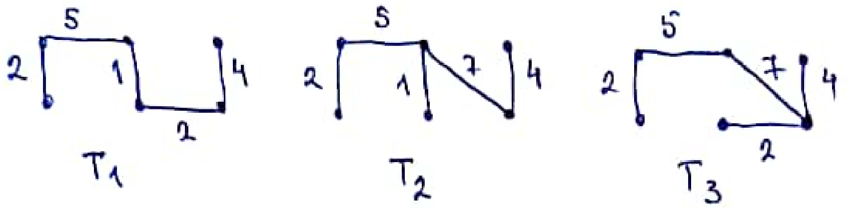
- Разапињуће стабло је подграф графа G који садржи све чворове графа G и уз то је стабло (повезан и без циклуса)

① Наћи сва разапињућа стабла датог графа

G:



Стабла:



$\omega(T_1) = 2+5+1+2+4 = 14$ $\quad \omega(T_2) = 19$ $\quad \omega(T_3) = 20$

Разапињуће стабло T_1 је најмање могуће тежине и назива се минимално разапињуће стабло графа G.

Нови проблем којим се бавимо: Из датог тежинског графа $G=(V,E,\omega)$ наћи разапињуће стабло минималне тежине.

Прошли задатак: нашли смо сва стабла и одабрали оно најмање тежине.

Ово није ефикасно!

Два алгоритма користимо за решавање проблема:

1) Крускалов алгоритам
2) Примов алгоритам