Дискретне структуре 2

1. час

Математичка индукција

ТМА Нека је $T(n)$ исказ такав да важи:

① $T(1)$ је тачно

② Ако је $T(k)$ тачно, онда је и $T(k+1)$ тачно

Онда је $T(n)$ тачно за свако $n \in N$.

Примери:

① Доказати: $1+2+4+8+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$.

Проверавамо да ли је $T(1)$ тачно: $1 = 2^1-1$ ✓

$T(1)$ је тачно.

Претпоставимо да је $T(k)$ тачно, тј. $1+2+\ldots+2^{k-1}=2^k-1$.

Покажимо да је $T(k+1)$ тачно, тј да важи $1+2+\ldots+2^{k-1}+2^k=2^{k+1}-1$.

$$\underbrace{1+2+4+\ldots+2^{k-1}}_{2^k-1}+2^k = \underline{2^k-1}+2^k = 2\cdot 2^k-1 = 2^{k+1}-1$$

$\Rightarrow$ $T(k+1)$ је тачно.

Према принципу математичке индукције $T(n)$ је тачно за свако $n\in N$, тј. $1+2+4+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$.

② Доказати: $3 \mid (n^3-n)$, $n \in Z^+$.

$a \mid b$ читамо као „a дели b" што значи да је број b дељив бројем a, тј можемо писати $b = a\cdot k$, $k \in Z$

Проверавамо да ли је $T(1)$ тачно, т.ј. да ли $3 \mid (1^3-1)$?

Да ли је број 0 дељив бројем 3? Јесте! $T(1)$ је тачно!

Претпоставимо да је $T(k)$ тачно, т.ј. $3 \mid (k^3-k)$.

Ово значи да можемо писати:

$$k^3-k=3\cdot l, \text{ за неко } l\in \mathbb{Z}$$

Покажимо да је $T(k+1)$ тачно, т.ј. да $3 \mid [(k+1)^3-(k+1)]$:

$$(k+1)^3-(k+1) = k^3+3k^2+3k+1-k-1 = \underbrace{k^3-k}_{3l}+3k^2+3k = 3(l+k^2+k)$$

$\Rightarrow$ Број $(k+1)^3-(k+1)$ је дељив бројем 3, $T(k+1)$ је тачно.

Према принципу математичке индукције $T(n)$ је тачно за $n\in N$.

3. Доказати: $5 \mid (7^n-2^n)$, $n\in N$.

$T(1)$: $5 \mid 7^1-2^1$?

$5 \mid 5$ ✓ $T(1)$ је тачно!

Претпоставимо да је $T(k)$ тачно: $5 \mid (7^k-2^k)$, што значи да можемо писати: $7^k-2^k=5\cdot l$, $l\in N$.

Покажимо да је $T(k+1)$ тачно:

$$7^{k+1}-2^{k+1} = 7^{k+1}-2^{k+1}+7\cdot 2^k-7\cdot 2^k = 7(7^k-2^k)+2^k(7-2) = 7\cdot 5l-5\cdot 2^k$$

додали смо и одузели исту вредност; могло је и $2\cdot 7^k$

$$=5(7l-2^k)$$

$\rightarrow$ $5 \mid (7^{k+1}-2^{k+1})$, т.ј. $T(k+1)$ је тачно!

$T(n)$ је тачно за свако $n\in N$!

④ Колико има позитивних целих бројева мањих од 1001 дељивих са

а) 3 ?

б) 5 ?

в) 15 ?

[x] - цео део од x = највећи цео број мањи или једнак x

[2.5] = 3, [-2.5] = -3

Позитивни цели бројеви мањи од 1001:

1, 2, 3, 4, 5, 6, ... , 999, 1000.

а) Сваки трећи је дељив са 3, па их има $\left[\frac{1000}{3}\right] = 333$.

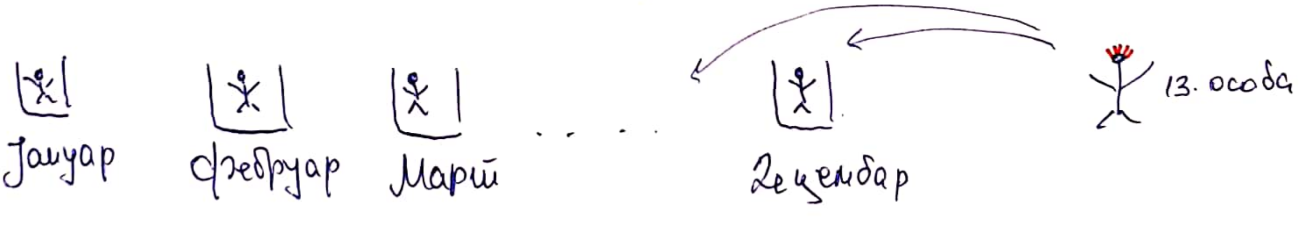
б) Сваки пети је дељив са 5, па их има $\left[\frac{1000}{5}\right] = 200$.

в) Сваки петнаести је дељив са 15, па их има $\left[\frac{1000}{15}\right] = 66$

Дирихлеов принцип

ТМА 1 Ако је $n+1$ објекат распоређен у n кутија, бар 1 кутија садржи бар 2 објекта.

пример: Међу 13 особа бар 2 су рођене истог месеца.



Најгори случај: Првих 12 особа је рођено различитог месеца, али и особа број 13. мора да упадне негде.

ТМА 2

Ако је m објеката распоређено у n кутија, $m > n \cdot r$, тада се бар у једној кутији налази бар $r+1$ објекат.

$$r = \left[\frac{m-1}{n}\right].$$

r	r	r	. . .	r
1. кутија	2.	3.		n. кутија

← распоређено $r \cdot n$ објеката, али $m > n \cdot r$, па имамо бар још један који моро убацити негде.

⑤ Доказати су у групи од 44 особе бар 4 особе рођене истог месеца.

Распоређујемо $m=44$ особе у $n=12$ кутија :)

јануар фебруар . . . децембар

← 36 распоређено

Најгори случај: у сваком месецу су рођене по 3 особе, што је $12 \cdot 3 = 36$ особа, остаје још њих 8 које морају бити распоређене, па сигурно постоји месец у коме су рођене бар 4 особе.

⑥ Показати да на забави од 30 особа бар 2 особе имају исти број познаника.

Фиксирајмо једну особу на забави:

← Пера

Пера може да има:

0 познаника (не бројимо познанство са самим собом)
1 познаника
⋮
29 познаника

30 могућности (кутија)
30 особа на забави

Желимо да особе распоређујемо према броју познаника, али имамо једнако кутија и предмета :(

Показаћемо да кутије 0 и 29 не могу бити пуне у исто време, тј да заправо имамо 29 опција, а 30 особа

Ако се Пера налази у кутији 0, то значи да он не познаје никога, али то значи и да нико од осталих гостију не познаје Перу. Зато у кутији 29 нема никога.
Слично, ако Пера познаје све остале госте и налази се у кутији 29, то значи да свако зна бар Перу, па у кутији 0 нема никога.

Имамо 29 могућности за број познаника и 30 гостију, па према Дирихлеовом принципу бар 2 госта имају исти број познаника.

7 Међу 8 произвољно одабраних природних бројева постоје бар два чија је разлика дељива са 7.

Могући остаци при дељењу са 7 су: $\underbrace{0,1,2,3,4,5,6}_{7 \text{ опција}}$.

Према Дирихлеовом принципу бар два од одабраних 8 бројева имају исти остатак при дељењу са 7.

Њихова разлика је дељива са 7.

$a = 7 \cdot k + r$
$b = 7l + r$ > исти остатак r

$a - b = 7(k-l)$ ← разлика дељива са 7

Комбинаторика

Принцип једнакости

Нека су S и T коначни скупови. Ако постоји бијекција међу њима, онда је $|S| = |T|$.

Принцип збира

Нека су $S_1, S_2, \ldots, S_n$ коначни и дисјунктни скупови.
Тада је $|S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n| = |S_1| + |S_2| + \ldots + |S_n|$.

Принцип производа

Нека су $S_1, S_2, \dots, S_n$ коначни скупови. Тада је $|S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n| = |S_1||S_2| \cdots |S_n|$.

$\lceil S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n = \{(s_1, s_2, \dots, s_n) \mid s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, \dots, s_n \in S_n\} \rfloor$

⑧ Колико се четвороцифрених бројева може написати уз помоћ цифара из скупа $\{1,2,3,4,5\}$, ако

а) цифре могу да се понављају

б) цифре не могу да се понављају

в) цифре се не понављају, а тражимо само непарне бројеве?

а) $\underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}$ укупно: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$

број могућности за 1. позицију

$\lceil S_1 = \{1,2,3,4,5\} = S_2 = S_3 = S_4$

$|S_1 \times S_2 \times S_3 \times S_4| = |S_1||S_2||S_3| \cdot |S_4| = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \rfloor$

б) $\underline{5} \cdot \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}$ укупно: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

в) $\underline{4} \cdot \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{3}$ укупно: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$

1,3 или 5

⑨ Колико делилаца има број 420 000?

Сваки природан број n се може написати у облику:

$$n = \boxed{p_1^{\alpha_1}} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

где су $p_1, \dots, p_k$ прости бројеви, а $\alpha_1, \dots \alpha_k \in \mathbb{N}$

Делиоци броја $p_1^{\alpha_1}$: $1, p_1, p_1^2, \dots, p_1^{\alpha_1}$ (има их $\alpha_1 + 1$).

Слично, број делилаца за $p_2^{\alpha_2}$ је α_2+1, итд.

Број n има: $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$ различитих делилаца.

$n=420\,000=2^5\cdot 3\cdot 5^4\cdot 7$

$\alpha_1=5,\ \alpha_2=1,\ \alpha_3=4,\ \alpha_4=1$

Број делилаца је: $(5+1)(1+1)(4+1)(1+1)=120.$

(10) Колико има природних бројева мањих од 10^5 у чијем запису никоје две суседне цифре нису исте?

Посматрамо бројеве $1,2,3,\ldots 99999$ и посебно разматрамо петоцифрене, четвороцифрене итд.

Тражених петоцифрених има $\underline{9}\ \underline{9}\ \underline{9}\ \underline{9}\ \underline{9}\ :\ 9^5$

9 могућности $\{1,2,\ldots 9\}$

опет 9, јер овде може бити 0, али не може оно цифра која је на позицији испред.

Тражених четвороцифрених ће бити: 9^4, троцифрених 9^3, двоцифрених 9^2, једноцифрених 9.

Укупно: $9+9^2+9^3+9^4+9^5=9\,(1+9+9^2+9^3+9^4)=9\cdot\frac{9^5-1}{9-1}$

$$\left[\,1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\,\right]$$

(11) Колико има природних бројева мањих од 10^{11} који садрже цифру 2?

• Лакше ћемо избројати колико има бројева који НЕ садрже цифру 2, па ћемо од тај број одузети од укупног и преостаће они који садрже цифру 2 :)

•• Укупно: $\underline{\underline{10^{11}-1}}$ (сви од 1 до 10^{11}, али без 10^{11})

••• једноцифрени који не садрже 2: 8 их има $\{1,3,4,5,6,7,8,9\}$

двоцифрени који не садрже 2: $\underline{8}\ \underline{9}$: $8\cdot 9$ их има

било која цифра која није 0 и није 2

може 0, не може 2

троцифрени који не садрже 2: $\underline{8}\ \underline{9}\ \underline{9}$: $8\cdot 9^2$

четвороцифрени који не садрже 2: $\underline{8}\ \underline{9}\ \underline{9}\ \underline{9}$: $8\cdot 9^3$

⋮

једанаестоцифрени који не садрже 2: $8\cdot 9^{10}$

Укупно бројева мањих од 10^{11} који не садрже 2:

$$8+8\cdot 9+8\cdot 9^2+\ldots+8\cdot 9^{10} = 8\cdot(1+9+9^2+\ldots+9^{10})$$

$$= 8\cdot\frac{9^{11}-1}{9-1} = \underline{\underline{9^{11}-1}}$$

Коначно: $\underbrace{10^{11}-1}-(9^{11}-1) = 10^{11}-9^{11}$

Сви мањи од 10^{11}

Мањи од 10^{11} без цифре 2

Мањи од 10^{11} са цифром 2