

Дискретне структуре 2

1. Пребројавање. Основни принципи пребројавања. (Уопштени) Дирихлеов принцип.

Комбинаторика (енумерација) бави се одређивањем кардиналности неког скупа.

~~При основна принципа~~

Уколико је скуп непразан и коначан, одређивање кардиналности своди се на проналажење природног броја n који је једнак броју елемената тог скупа.

$$X - \text{скуп}, |X| = n$$

При основна принципа пребројавања су:

1) Принцип једнакости

Ако за скупове A и B постоји бијективно преликовање $f: A \rightarrow B$, скупови су једнаке кардиналности.

$$f: A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} B \Rightarrow |A| = |B|$$

Пример: $f: \mathbb{N} \rightarrow S$, $f(n) = 2n$, $S = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \mid x\}$

2) Принцип збира

Ако су коначни скупови $A_1, A_2, \dots, A_n$ дисјунктни, важи $|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|$

3) Принцип производа

Нека су A и B коначни скупови и $A \times B$ њихов Декартов производ
Тогда важи: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Оштрије:

$$\left. \begin{aligned} S &\subseteq A \times B \\ \nu_a &= \{(a, b) \in S \mid b \in B\} \\ k_b &= \{(a, b) \in S \mid a \in A\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |S| = \sum_{a \in A} |\nu_a| = \sum_{b \in B} |k_b|$$

Пример: $|\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots \times \{0,1\}}_n|$
 $= |\{0,1\}| \cdot |\{0,1\}| \cdot \dots \cdot |\{0,1\}| = 2^n$

Дирхлеов принцип

Ако је k објеката распоређено у n кутија,
при чему важи $k > n$, постојаће кутија
у којој се налазе барем два објекта

Уоштриени Дирхлеов принцип

Ако је k објеката распоређено у
 n кутија, при чему важи $k > cn$ ($c \in \mathbb{N}$),
тада постоји кутија таква да број
објеката распоређених у њу није мањи
од $c+1$.

2. Биноми́ни коефицијенти. Основна својства. Биномна и полиномна формула.

Биноми́ни коефицијенти (коефицијенти у развоју бинома) дефинише се:

$$k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{R} \quad \binom{n}{k} := \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n}{0} := 1$$

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$n \in \mathbb{N}^*, k \leq n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Пример: $\binom{-5,3}{3} = \frac{(-5,3)(-6,3)(-7,3)}{3!}$

Основна својства биноми́них коефицијента

1) Услов симетричности

$$k, n \in \mathbb{N}, k \leq n \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Доказ: $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$

2) Идентификација горњег индекса

$$k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{R} \quad \binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

Доказ: $\binom{-n}{k} = \frac{-n(-n-1) \cdot \dots \cdot (-n-k+1)}{k!}$
 $= \frac{(-1)^k \cdot n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)}{k!}$
 $= (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$

Координатне елементи:

горе-лево: $n-1, k-1$

горе-десно: $n-1, k$

По адитивној формули важи $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

Биномна формула

$$n \in \mathbb{N}^*, x, y \in \mathbb{R}, (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Доказ: Индукцијом по n

$$\text{БН } n=0: (x+y)^0 = x^0 \cdot y^{0-0} \\ 1 = 1$$

$$\text{ИХ } n-1: (x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k}$$

$$\text{ИК: } (x+y)^n = (x+y)(x+y)^{n-1} \\ \stackrel{\text{ИХ}}{=} (x+y) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k}$$

$$= x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k} + y \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-(k+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k+1}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} l=k+1 \\ k=0 \rightarrow l=1 \\ k=n-1 \rightarrow l=n \end{array} \right\} = \sum_{l=1}^n \binom{n-1}{l-1} x^l y^{n-l} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k}$$

$$= \binom{n-1}{n-1} x^n y^{n-n} + \sum_{l=1}^{n-1} \binom{n-1}{l-1} x^l y^{n-l} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} + \binom{n-1}{0} x^0 y^{n-0}$$

$$= x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right) x^k y^{n-k} + y^n$$

$$= x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Коефіцієнти біномної розвоя се
могу прочитати из Паскалової трикутника.

Неки спеціальни случаи:

$$x=y=1 \quad 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

$$y=1 \quad (x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

$$x=1 \quad (1+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^{n-k}$$

$$x=1 \quad y=-1 \quad 0 = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k$$

Полномна формула

$$n \in \mathbb{N}^* \quad x_1, x_2, \dots, x_r \in \mathbb{R}$$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \dots + k_r = n \\ k_1, k_2, \dots, k_r \geq 0}} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r}$$

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$$

3. Биномилни идентитети

Два метода доказивања биномних идентитета

1) алгебарски - алгебарским računом
(примена математичке индукције или ~~тврђења~~ свођење на раније познате идентитете)

2) комбинаторни (избором)

Неки биномни идентитети:

1) Извлачење изред заграда

$$k, n \in \mathbb{N}: \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \quad \text{и} \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{n-k} \binom{n-1}{k}$$

Доказ: $k > n$

$$\begin{aligned} \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} &= \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-1-(k-1)+1)}{(k-1)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n}{n-k} \cdot \binom{n-1}{k} &= \frac{n}{n-k} \cdot \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-1-k+2)(n-1-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

$k \leq n$

$$\frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$$\frac{n}{n-k} \cdot \binom{n-1}{k} = \frac{n}{n-k} \cdot \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \binom{n}{k}$$

2) Поједностављивање производа

$$k, n, r \in \mathbb{N}^* \quad \binom{n}{k+r} \binom{k+r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r}$$

Довољно је $k+r \leq n$

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \binom{n-k}{r} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{r!(n-k-r)!} \cdot \frac{(k+r)!}{(k+r)!} \\ &= \frac{n!}{(k+r)!(n-k-r)!} \cdot \frac{(k+r)!}{k!r!} \\ &= \binom{n}{k+r} \binom{n-k}{r} \end{aligned}$$

3) Сумационе формуле

$$r, n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} = \binom{n+r+1}{n}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

Доказ: индукцијом по n

$$\text{БИ } n=0 : \binom{r+0}{0} = \binom{0+r+1}{0} \quad 1=1$$

$$\text{ИХ } n-1 : \sum_{k=0}^{n-1} \binom{r+k}{k} = \binom{n-1+r+1}{n-1}$$

$$\text{ИК: } \sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{r+k}{k} + \binom{r+n}{n}$$

$$\stackrel{\text{ИХ}}{=} \binom{n+r}{n-1} + \binom{n+r}{n}$$

$$\stackrel{\text{АДИЦИОНА}}{=} \binom{n+r+1}{n}$$

$$\text{БН } n=0: \binom{0}{r} = \binom{0+1}{n+1} \quad \text{јер } r+1 \neq 0 \text{ ако } r \in \mathbb{N}^*$$

$$\binom{1}{r+1} = \binom{0}{r+1-1} + \binom{0}{r+1} = \binom{0}{r}$$

$$\text{ИХ } n-1: \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{r} = \binom{n-1+1}{r+1}$$

$$\text{ИК: } \sum_{k=0}^n \binom{k}{r} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{r} + \binom{n}{r}$$

$$\stackrel{\text{ИХ}}{=} \binom{n}{r+1} + \binom{n}{r} \stackrel{\text{адитивна}}{=} \binom{n+1}{r+1}$$

4) Сума квадрата

$$n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$\text{Доказ: } (x+1)^n (x+1)^n = (x+1)^{2n}$$

$$\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \right) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

пошто су оба полинома једнаки,
важи и да су коефицијенти уз
степен x једнаки

$$\binom{n}{0}\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{n} = \binom{2n}{n}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

4. Принцип укључења-искључења

Представља допунствено принципа збира.

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq N_n} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

за коначне скупове $A_1, A_2, \dots, A_n$

Доказ: Ако неки елемент x припада унији $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, тада x припада неком од тих скупова.

Претпоставимо да k скупова садржи елемент x и нека су то (без губљења на општости) $A_1, A_2, \dots, A_k$

Тада важи $x \in \bigcap_{i=1}^k A_i$

С обзиром да припада унији, x доприноси да се вредности са леве стране повећа за 1.

Приликом сабирања $|A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|$, x доприноси да се десна страна повећа за k .

Приликом одузимања двојланих пресека,

x доприноси да се десна страна повећа за $\binom{k}{2}$.

$\vdots$

$$\begin{aligned}
 & 1 - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k} \\
 &= \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k} - \binom{k}{0} + \binom{k}{0} \\
 &= \binom{k}{0} - \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i = 1 - 0 = 1
 \end{aligned}$$

5. Уређени избори елемената са и без понављања. Пермутације.

Код уређених избора елемената важан је редослед у којем бирамо елементе.

Број уређених избора k елемената СА ПОНАВЉАЊЕМ скупа од n елемената једнак је броју преликавања $f: \mathbb{N}_k \rightarrow \mathbb{N}_n$

Ако скуп од n елемената идентификујемо са скупом $\mathbb{N}_n$, онда сваком преликавању f једнозначно одговара један избор елемената тако да је i -ти елемент једнак $f(i)$, $i \in \mathbb{N}_k$

Број преликавања $f: \mathbb{N}_k \rightarrow \mathbb{N}_n$ је n^k

Доказ: индукцијом по k

За $k=1$ постоји n преликавања којима се јединствени елемент скупа $\mathbb{N}_1$ преликава у неки елемент скупа $\mathbb{N}_n$ (база је задовољена).

ИХ: Тврђење Вани за $k-1$

ИК: На основу индуктивне хипотезе $k-1$ елемената скупа N_k можемо пресликати у N_n на n^{k-1} начина, а преостали, k -ти елементи може се на n начина пресликати у неки елементи скупа N_n
 $n \cdot n^{k-1} = n^k$

$A \subseteq X$ $\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$ КАРАКТЕРИСТИЧНА ФУНКЦИЈА

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Нека је X неки скуп од n елемената Вани $|P(X)| = 2^n$

Доказ: Сваком подскупу скупа X одговара $\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$, и обрнуто.

По претходној теорем, оваквих функција (та и подскупова) има 2^n

Број уређених избора k елемената ~~од~~ скупа од n елемената без понављања једнак је броју инјективних преликавања $f: N_k \xrightarrow{1-1} N_n$, и њихов број је $\prod_{i=0}^{k-1} (n-i)$

($k \leq n$ јер у супротном не можемо одабрати k елемената из мањег скупа (без понављања))

Доказ: Индукцијом по k

База: постоји n инјективних
пресликавања $f: \mathbb{N}_1 \rightarrow \mathbb{N}_n$

ИХ: твђење важи за $k-1$

пј. $\mathbb{N}_{k-1}$ може се пресликати
у $\mathbb{N}_n$ на $n(n-1) \cdots (n-k+2)$

ИК: преостали, k -ти елементи се
инјективно може пресликати у
 $\mathbb{N}_n$ на $(n-k+1)$ начин
(јер смо покрили $k-1$ елемената)

$$\Rightarrow \text{резултат } \prod_{i=0}^{k-1} (n-i) \quad \left(= \frac{n!}{(n-k)!} \right)$$

за $k > n = 0$

Пермутације (скупа од n елемената)
су специјалан случај уређених
избора елемената код којих важи $k=n$.

$\Rightarrow$ број пермутација $n!$
размештање елемената скупа

6. Неуређени избори елемената са и без понављања. Пермутације са понављањем

Код неуређених избора елемената није важан редослед бирања елемената ($12=21$)

$$k, n \in \mathbb{N} \quad k \leq n$$

Број неуређених избора k елемената
скупа од n елемената: $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ ($= \binom{n}{k}$)
без понављања

Доказ:

Број уређених избора са понављањем
је $\frac{n!}{(n-k)!}$. Треба елиминисати
све пермутације истог избора
(којих има $k!$). Делимо са $k!$
што је наше решење.

Комбинаторни метод доказивања
биномних идентитета $n, r, s \in \mathbb{N}$

$$1) \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n} \quad \text{ВАНДЕРМОНДОВ ИДЕНТИТЕТ}$$

Доказ: Хоћемо да из два дисјунктна
скупа кардитетности r и s одберемо
 n елемената. То можемо урадити
тако што бирамо n елемената
из њихове уније: $\binom{r+s}{n}$

или из првог можемо одабрати k елемената, а из другог $n-k$ елемената ($r \leq s$) и сабрати за све могуће вр k

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \binom{s}{n-k}$$

$$2) \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \binom{s}{n+k} = \binom{r+s}{r+n}$$

Доказ: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \binom{s}{n+k} = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \binom{s}{s-(n+k)}$$

$$\stackrel{1)}{=} \binom{r+s}{k+s-n-k}$$

$$= \binom{r+s}{r+s-(s-n)} = \binom{r+s}{r+n}$$

Број неуређених избора k елемената скупа од n елемената уз дозвољено понављање је:

$$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

Доказ: Представљамо k елемената које бирамо као k маркера на правој

Линију праву делимо на n делова коришћењем $n-1$ преграда.

Број позиција за k маркера је $n-1+k$,
(без понављања)

то је решење $\binom{n+k-1}{k}$

Пермутације са понављањем су пермутације мултиплицитетна (неки елементи се јављају више пута) од n елемената.

Број пермутација са понављањем где се први елементи појављује n_1 пута, други n_2 пута, ... k -ти елементи n_k пута, при чему важи $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ једнак је

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad (= (n, n_1, n_2, \dots, n_k))$$

Доказ: За први елементи бирамо n_1 позиција од n кутија, што је $\binom{n}{n_1}$. За други бирамо n_2 позиција од преосталих $n - n_1$ позиција што је $\binom{n - n_1}{n_2}$ и тако даље

$$\Rightarrow \binom{n}{n_1} \binom{n - n_1}{n_2} \binom{n - n_1 - n_2}{n_3} \dots \binom{n - (n_1 + \dots + n_{k-1})}{n_k}$$

$$= \frac{n!}{n_1! (n - n_1)!} \cdot \frac{(n - n_1)!}{n_2! (n - n_1 - n_2)!} \cdot \dots \cdot \frac{(n - n_1 - \dots - n_{k-1})!}{n_k! (n - n_1 - \dots - n_{k-1} - n_k)!}$$

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_k!} = (n, n_1, n_2, \dots, n_k)$$

Вредности не зависе од реда у коме бирамо елементи

$$n! \geq (n, n_1, n_2, \dots, n_k)$$

Број начина да се n објеката распореди у k кутија тако да се у i -тој распореди n_i елемената је $(n, n_1, n_2, \dots, n_k)$

7. Генерисање пермутација и комбинација

Пермутација

Генерисање је одређивање свих пермутација скупа од n елемената у складу са неким правилом које одређује редослед.

То правило је истовремено и једно уређење скупа.

Нека су A и B две пермутације скупа $\mathbb{N}_n$

$$A = a_1 a_2 \dots a_n, \quad a_i \in \mathbb{N}_n$$

$$B = b_1 b_2 \dots b_n, \quad b_i \in \mathbb{N}_n$$

при чему $a_i \neq a_j$ за $i \neq j$
 $b_i \neq b_j$ за $i \neq j$

У лексикографском уређењу,
пермутација A је испред B ако важи:
 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}, a_n < b_n$

Важи:

1) прва пермутација $\mathbb{N}_n$ је $123 \dots n$

2) друга је $12 \dots n(n-1)$

3) последња пермутација $\mathbb{N}_n$ је $n(n-1)(n-2) \dots 321$

Алгоритам одређивања наредне пермутације

Прихвата пермутацију $A = a_1 a_2 \dots a_n$,
а враћа наредну у складу са
лексикографским уређењем.

K1: Ако је A уређена опадајући
 $a_i > a_{i+1}$ ~~сва~~ $(\forall i \in \mathbb{N}_{n-1})$,

онда је A последња та наредна
не постоји. У супротном, иди на K2

K2: Пронаћи први елемент здесна за
који важи $a_i < a_{i+1}$
(пошто није последња, елемент постоји)

K3: Одредити најмањи број a_j који
је већи од a_i , и $i < j$

K4: Заменити места a_i и a_j ,
а елементе након a_i сортирати
распуће

K5: Крај

k -ту пермутацију можемо генерисати
тако што генеришемо све, и изражавамо
 k -ту по реду, или специјалним
алгоритмом

Случајну пермутацију генеришемо тако
што за први елемент постављамо неки
елемент из $\mathbb{N}_n$, за други из $\mathbb{N}_n \setminus \{n_1\}$ итд.

Комбинације

Генерисање подразумева одређивање свих комбинација у неком поретку.

Овде ~~користе~~ разматрамо лексикографско и с обзиром да ^{ЈЕДНУ} комбинацију од k елемената можемо представити на $k!$ начина, бирамо ону у којој су елементи уређени растуће

За лексикографско уређење комбинација k елемената скупа X_n ($k \leq n$) важи:

- прва комбинација је $12 \dots k$ (првих k елем.)
- друга је $12 \dots (k-1)(k+1)$
- последња је $(n-k+1)(n-k+2) \dots (n-1)n$
(последњих k елемената)

$\square$ Уређена бинарна n -торка која садржи тачно k јединица једнозначно одређује једну комбинацију k елемената скупа X_n

$$n=5 \quad k=3 \quad (0, 1, 0, 1, 1) = 245$$

Лексикографско уређење комбинација (k елемената скупа X_n) своди се на пермутације са понављањем мултиплекта од n елемената од којих су k јединице, а остали нуле.

- прва комбинација одређена је перм. $\underbrace{11 \dots 1}_{k} 00 \dots 0$
- друга $\underbrace{11 \dots 1}_{k-1} 0 1 00 \dots 0$
- последња $00 \dots 0 \underbrace{11 \dots 1}_{k}$

Примећујемо да свака комбинација или последње има $(0,1)$ -репрезентацију облика:

$$\underbrace{a_1 a_2 \dots a_{i-1} 1}_{\text{ПРЕФИКС}} \underbrace{00 \dots 0}_{\text{НЕ МОРА ДА ПОСТОЈИ}} \underbrace{11 \dots 1}_{\text{НЕ МОРА ДА ПОСТОЈИ}}$$

Наредна комбинација је облика

$$a_1 a_2 \dots a_{i-1} 0 11 \dots 1 00 \dots 0$$

Префикс се преписује, јединица са његовог краја се замењује нулом, добијене потребан број јединица (до k) и комплетира нулама.

8. Функције генератрисе. Дефиниција и основна својства. Биномна формула за целобројне експоненте.

За сваком низу (реалних) бројева

$$(a_n) = (a_0, a_1, \dots, a_k, \dots)$$

можемо једнозначно придружити степенни ред $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ($x \in \mathbb{R}$)

У случају да овај ред конвертира (у неком интервалу) његову суму називамо функцијом генератрисом низа (a_n) A

Низу $(a_n) = (1, 1, \dots, 1)$ одговара степенни ред $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ који конвертира ка $\frac{1}{1-x}$ када $|x| < 1$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x} = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1$$

Функција генератриса садржи све податке о степенном реду. Ако диференцирамо функцију k пута у тачки $x=0$ и резултат помножимо са $\frac{1}{k!}$, добићемо коефицијент који се налази уз x^k (дефиниција Маклореновог развоја)

$$(a_n) \longleftrightarrow A$$

довољно је да низ конвертира у неком интервалу да би важило

$$a \in \text{Int} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{(k)}(a)}{k!} (x-a)$$

Биномна формула за целобројне експоненте

За $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$ коефицијент уз x^k у развоју израза $(1+x+x^2+\dots)^n$ је

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Доказ: Коефицијент уз x^k у производу $\underbrace{(x^0+x^1+\dots)(x^0+x^1+\dots)\dots(x^0+x^1+\dots)}_n$

једнак је броју избора по једној сабирка из фактора тако да је сума њихових степена k (учествују само $x^0, x^1, \dots, x^k$)

Описани избор еквивалентан је избору k јединица из низа $\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_n$

тако да се i -та јединица бира онолико пута колики је степен сабирка изабраног из i -тог фактора. То је неуређени избор k елемената низа од n елемената (са дозвољеним понављањем) што је $\binom{n+k-1}{k}$.

За $n \in \mathbb{N}$ и $|x| < 1$ коефицијент уз x^k у развоју израза $(1-x)^{-n}$ једнак је

$$\binom{n+k-1}{k}$$

$(1-x)^{-n} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n \stackrel{\text{Ф.Г.}}{=} (1+x+x^2+\dots)^n$
што је $\binom{n+k-1}{k}$ по претходној леми

За $n \in \mathbb{N}$ и $|x| < 1$ коефицијент уз x^k у развоју $(x+1)^{-n}$ је $\binom{-n}{k}$

Доказ: $\left(\frac{1}{x+1}\right)^n = (1-x+x^2-x^3+\dots)^n$

та је коефицијент једнак $(-1)^k \binom{n+k-1}{k}$

што је $\binom{-n}{k}$ по дефиницији горњег индекса.

Биномна формула за цео бројне коефицијенте
(уопштена биномна формула)

$$n \in \mathbb{Z} \quad |x| < 1 \quad (x+1)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$$

Доказ: • За $n \in \mathbb{N}^*$ тврдње следи на основу биномне формуле јер

$$\text{за } k > n \quad \binom{n}{k} = 0$$

• За $n < 0$ тврдње следи на основу претходне леме.

9. Визначення функції генератора

Позначає обчислення суми
відповідаючої степенної ряду

$$(a_n) = (a_0, a_1, \dots, a_k, \dots)$$

$$(b_n) = (b_0, b_1, \dots, b_k, \dots)$$

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

Додавання рядів

$$(a_n) + (b_n) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = A(x) + B(x)$$

Множення ряду на скаляр

$$c \in \mathbb{R} \quad c(a_n) = (ca_0, ca_1, \dots)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (ca_k) x^k = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = c \cdot A(x)$$

Відкидання ряду за k місця зліва

$$(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{i+k} x^i = \frac{A(x) - (a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1})}{x^k}$$

Відкидання ряду за k місця зліва

$$(0, 0, \dots, 0, a_0, a_1, \dots, a_k, \dots)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{k+i} = x^k A(x)$$

Заміна x на cx у функції генератора

$$A(cx) = a_0 + a_1 cx + a_2 c^2 x^2 + \dots + a_k c^k x^k$$

$$(a_0, ca_1, \dots, c^k a_k, \dots)$$

$$c = -1 \quad (a_0, -a_1, a_2, -a_3, \dots)$$

Замена x са x^k у функцији генератрисе

$$A(x^k) = a_0 + a_1 x^k + a_2 x^{2k} + \dots + a_k x^{k^2} + \dots$$

$$(a_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, a_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, a_2, \dots)$$

Диференцирање функције генератрисе

$$A'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + k a_k x^{k-1} + \dots$$

$$(a_1, 2a_2, \dots, k a_k, \dots)$$

Интеграција функције генератрисе

$$\int A(x) dx = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \dots$$

$$(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \dots, \frac{a_k}{k+1}, \dots)$$

10. Композиције и партиције бројева. Основна својства.

- Композиција природног броја n на k сабирака је уређена k -торка $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ ($a_i \in \mathbb{N}$) таква да важи
$$n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_k}_{\text{сабирци композиције}}$$
 уређене партиције
уређена разлагања бр. бр.

- Број композиција $n \in \mathbb{N}$ на k сабирака је
$$\binom{n-1}{k-1}$$

Доказ: $n = 1 - 1 - 1 - \dots - 1$

На $n-1$ партиција треба распоредити
 k знакова $+$ (неуређени избор
елемената)

Након распоређивања тилдеса,
јединице без тилдеса између
у збору дају један сабирак,
па имамо k сабирака.

- Број композиција природног броја n је 2^{n-1}
$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$$

• Партицизија природног броја n на k сабирака је мултиплекси $[a_1, a_2, \dots, a_k]$

природних бројева, такав да важи

$$n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_k}_{\text{САБИРАЦИ ПАРТИЦИЈЕ}}$$

$p(n)$ - број партиција броја n

$p_k(n)$ - број партиција броја n на k сабирака

$[1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n}]$ - запис партиције броја n

$m_i \in \mathbb{N}^*$ - број појављивања сабирка i
у мултиплексу

• За разлику од композиције, код партиције поредак елемената није важан.

• Формула за одређивање броја партиција не постоји, и он се одређује коришћењем рекурентних формула или функције генератрисе низа $p(n)$

(за мале бројеве може да се рачуна директно)

$$p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-k) + \dots + p_1(n-k)$$

Доказ: $n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$

$$n-k = (a_1-1) + (a_2-1) + \dots + (a_k-1)$$

• Зодим смо партицију броја $n-k$ (ако је $a_i=1$ биће 0)

• Ова једнакост је бијекција између скупа партиција n на k и скупа партиција $n-k$ на k , те тврђење важи.

Функција генератриса низа $(p(n))$ је

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}$$

Доказујемо разлагањем свих
партиципа броја n на оне које
садрже један фиксирани сабирак и
на оне које га не садрже,
та налазимо њихове ф-је генератрисе

11. Ферерсови дијаграми. Конјуговане
партиције броја. Идентитети
са партицијама.

Партиција неког броја се Ферерсовим
дијаграмом представља распоређивањем
маркера у врсте и колоне (свака
врста одговара сабирку партиције).
(уређени су нерастуће (скроз горе је највећи))

Пример

$$17 = 5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1$$

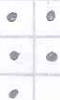


Две партиције броја n су (међусобно)
конјуговане ако се Ферерсов дијаграм
једне добија транспоновањем друге.

$$5 = 3 + 2$$



$$5 = 2 + 2 + 1$$



- Партиципа је самоконјугована ако је њен ферерсов дијаграм инваријантан у односу на трансформације (симетрична матрица).

- Идентитети:

1) Број партиција n на највише k сабирака једнак је броју ~~$n+k$~~ партиција $n+k$ на k сабирака

партиција броја $n+k$ на k сабирака $\left. \begin{matrix} k \\ \text{врста} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \circ \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{matrix} \dots$

Ако уклонимо прву колону, преостале n тачака, k највише k редова, ме је успостављена бијекција између скупова Ферерсових дијаграма који представљају партиције $n+k$ на k сабирака и партиције n на највише k сабирака.

2) Број партиција n на највише k сабирака једнак је броју партиција броја n на сабирке из $\mathbb{N}_k$

Ферерсов дијаграм партиције n на највише k сабирака је конјугована ферерсовом дијаграму партиције n на сабирке који припадају $\mathbb{N}_k$.
(бијекција)

$$\left(\begin{array}{c} \underbrace{\quad}_{2n} \\ \underbrace{\quad}_{2n} \end{array} \right)^T = \dots$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

12. Рекурентне једначине. Дефиниција и решења. Линеарна рекурентна једначина и њено опште решење.

$$n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1} \in \mathbb{R}$$

$$\phi: \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R} \quad a_{n+k} = \phi(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1})$$

рекурентна једначина k -тог реда

пример: Низ факторијела бројева скупа $\mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} a_{n+1} = (n+1) a_n \\ a_0 = 1 \end{cases} \leftarrow \text{почетни услов}$$

- Рекурентном једначином се рекурзивно дефинише неки низ бројева.
- Решење рекурентне једначине је било који низ (a_n) такав да, за свако $n \in \mathbb{N}^*$, његови чланови задовољавају ту једначину.
- ~~Опште решење рекурентне једначине зависи од почетних услова, тј. првих k чланова низа, који једнозначно одређују остале чланове.~~
- Опште решење рекурентне једначине зависи од k константи (првих k чланова низа). Различита решења добијају се из општег избора вредности константи. Услови који једнозначно одређују вредности свих константи се зову почетни услови.

Једно издвојено решење, које је одређено неким почетним условима називамо партикуларно решење.

- За произвољну вредност n , n -ти члан низа (a_n) називамо општи члан низа. Одређивање општег решења рекурентне једначине у пракси се своди на одређивање општег члана низа који једначину задовољава у функцији од n и константи које су одређене почетним условима.

Линеарна рекурентна једначина k -тог реда

$$f_0(n) a_n + f_1(n) a_{n+1} + \dots + f_k(n) a_{n+k} = f(n)$$

Две врсте:

- са константним коефицијентима
 $\forall n \quad f_i(n) = c$
- са функционалним коефицијентима

Хомогена је ако важи $f(n) = 0$. У супротном је ~~нехомогена~~ нехомогена.

- У нормализованом облику линеарне рекурентне једначине важи ~~$f_k(n) = 1$~~ $f_k(n) = 1$
- Решења $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), \dots, (a_n^{(r)})$ су зависна ако се неко од њих може представити као линеарна комбинација осталих. У супротном су независна.

- Решења $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), \dots, (a_n^{(r)})$ хомогене једначине су независна ако $\det(A) \neq 0$

Доказ:

$$\begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & \dots & a_1^{(r)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & \dots & a_2^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_r^{(1)} & a_r^{(2)} & \dots & a_r^{(r)} \end{vmatrix}$$

- Независност решења $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), \dots, (a_n^{(r)})$ даје и независност колона-вектора матрице A , па је ранг матрице r , и $\det(A) \neq 0$
- С друге стране, ако важи $\det(A) \neq 0$, онда је ранг матрице једнак r , па су колоне (и решења) линеарно независне.
- Уколико су $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), \dots, (a_n^{(k)})$ независна решења хомогене једначине, тада је опште решење:

$$a_n = C_1 a_n^{(1)} + C_2 a_n^{(2)} + \dots + C_k a_n^{(k)}$$
 при чему су $C_1, C_2, \dots, C_k$ константе
- Опште решење нехомогене линеарне рекурентне једначине је облика: $a_n = h_n + p_n$
 h_n - опште решење одговарајуће хомогене ј-не
 p_n - партикуларно решење даје нехомогене ј-не

13. Линеарна рекурентна једначина са константним коефицијентима

• Облика је:

$$f_0 a_n + f_1 a_{n+1} + \dots + f_k a_{n+k} = f(n)$$

при чему су $f_0, f_1, \dots, f_k$ реалне константе

• Решење је одређено њеном карактеристичном једначином: $f_0 + f_1 x + \dots + f_k x^k = 0$

• Одређивање општег решења хомогене ј-не

• Ако су нуле карактеристичне једначине

$x_1, x_2, \dots, x_k$ једноструке:

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + \dots + c_k x_k^n$$

НЕ МОРАЈУ
БИТИ РЕАЛНЕ

• Ако постоји нула x_i мултиплитетом m :

~~$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + \dots + c_{i-1} x_{i-1}^n$~~

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + \dots + c_{i-1} x_{i-1}^n$$

$$+ c_i x_i^n + c_{i+1} n x_i^n + c_{i+2} n^2 x_i^n + \dots$$

$$\dots + c_{i+m-1} n^{m-1} x_i^n$$

Фали 94-98
у питањима

Одређивање партикуларног решења нехомогене једначине (с константним коеф.)

- разликујемо већи број случајева у зависности од облика функције f

- Ако важи $f(n) = P_d(n) b^n$ P_d - полином степена d
 b - реална константа

• $x = b$ није нула

$$P_n = (A_0 + A_1 n + \dots + A_d n^d) b^n$$

• $x = b$ јесте нула мултипликитета m

$$P_n = n^m (A_0 + A_1 n + \dots + A_d n^d) b^n$$

- Партикуларно решење биће одређено када се одреде непознати коефицијенти $A_0, A_1, \dots, A_d$ које израчунавамо заменом добијеног облика у првобитној једначини.

- Два подслучаја која следе:

1) Ф-ја f је полином степена не већег од d

- $x = 1$ није нула карактеристичне ј-не

$$P_n = A_0 + A_1 n + \dots + A_d n^d$$

- $x = 1$ јесте нула мултипликитета m

$$P_n = n^m (A_0 + A_1 n + \dots + A_d n^d)$$

2) $f(n) = c b^n$

- $x = b$ није нула карактеристичне ј-не

$$P_n = A b^n$$

- $x = b$ јесте нула мултипликитета m

$$P_n = n^m A b^n$$

14. Функције генератрисе и решавање рекурентних једначина

Нека је линеарна рекурентна једначина са константним коефицијентима, уз почетне услове, задата на следећи начин:

$$\begin{cases} f_0 a_n + f_1 a_{n+1} + \dots + a_{n+k} = 0 \\ a_0 = c_0, a_1 = c_1, \dots, a_{k-1} = c_{k-1} \end{cases}$$

Функција генератрисе низа (a_n) одређеног рекурентном једначином облика је:

$$A(x) = \frac{P(x)}{f_0 x^k + f_1 x^{k-1} + \dots + 1}$$

$P(x)$ ← полином степена строго мањег од k

Доказ: Јасно је да се f -ја генератриса низа (a_n) (сума неког конвергентног степеног реда) може записати у датом облику (P је такође сума неког степеног реда). Треба доказати да је P полином степена мањег од k .

$$P(x) = A(x)(f_0 x^k + f_1 x^{k-1} + \dots + 1)$$

$$P(x) = (a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k + \dots)(f_0 x^k + f_1 x^{k-1} + \dots + 1)$$

Коефицијенти уз x^{n+k} са десне стране ове једнакости (за $n \geq 0$) је

$$f_0 a_n + f_1 a_{n+1} + \dots + a_{n+k}$$

Међутим, пошто низ (a_n) задовољава почетну једначину, ова вредност је једнака нули за свако $n \geq 0$

Функција генератриса из претходне теореме се може одредити израчунавањем коефицијената полинома P на основу почетних услова.

Ако у именуицу ^{Ф-ЈЕ ГЕНЕРАТРИСЕ} заменимо x са $\frac{1}{x}$,
и помножимо именуицу са x^k ,
добит ćemo израз из карактеристичне j -не
$$f_0 + f_1 x + \dots + f_n x^k = 0$$

По томе значи да функција генератриса садржи комплетну информацију о карактеристичној једначини.

Пример:
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{A(x) - a_0}{x} = 2A(x) + \frac{1}{1-x}$$

Ф-ЈА ГЕНЕРАТРИСА
ПОМЕРЕНА ЗА ЈЕДНО
МЕСТО УЛЕВО

1 је n -ти члан
НИЗА $(1, 1, \dots, 1, \dots)$

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$

$$A(x) = \frac{P_1}{1-x} + \frac{P_2}{1-2x}$$

$$\Rightarrow A(x) = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-2x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(2^n - 1)}_{\text{ОПШТИ ЧЛАН}} x^n$$

ОПШТИ ЧЛАН

15. Партиције скупова. Стирмингови бројеви
2. врсте и Белови бројеви.

- Партиција скупа N_n на k подскупова је скуп његових непразних дисјунктних подскупова $S_1, S_2, \dots, S_k$ таквих да важи
$$N_n = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$$
- Једина партиција празног скупа је празан скуп.
- Стирмингов број друге врсте, у ознаци $S(n, k)$, једнак је броју партиција скупа од n елемената на k подскупова.

одређивање броја пермутација
које задовољавају специфичне услове

- Белов број, у ознаци $B(n)$, једнак је броју партиција скупа од n елемената

$$B(n) = \sum_{k=0}^n S(n, k)$$

$k=0$ јер укључујемо и празан скуп

- Стирмингови бројеви друге врсте задовољавају следећу рекурентну једначицу

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + k \cdot S(n, k)$$

Доказ: Све партиције скупа N_{n+1} на k подскупова можемо добити:

- бирањем $k-1$ подскупова из N_n и додавањем једночланог скупа $\{n+1\}$

- Бирањем k подскупова из N_n и придодавањем $\{n+1\}$ на неки од њихова (за то имамо k начина)

На ову рекурентну једначину додајемо и почетне услове

$$S(n, 1) = 1$$

$$S(n, n) = 1$$

- Белови бројеви одређени су рекурентном ј-ном

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(k)$$

16. Фибоначијеви бројеви. Златни пресек.
Општи мани и функција генератриса
Фибоначијевог низа.

• Фибоначи је до низа дошао савети се
проблемом броја зечева унутар једне колоквије.

• Фибоначијева низ је одређен једначином

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\ F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases}$$

• Фибоначијеви бројеви су манови
Фибоначијевог низа.

• Златна подела (златни пресек)
је подела дужи таква да важи
да је однос целе дужи и дужег дела
једнак односу дужица дужег и краћег дела.

$$\frac{d+k}{d} = \frac{d}{k} \quad d > k$$

• Без губљења на општост, можемо
претпоставити да је $k=1$:

$$\frac{d+1}{d} = d \quad | \cdot d$$

$$d^2 - d - 1 = 0$$

$$d_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

дужина
МОРА БИТИ
ПОЗИТИВНА

$$d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

• Општи мат Фибоначијевој низ је

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Доказ: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

КАРАКТЕРИСТИЧНА.

ЈЕДНАЧИНА: $x^2 - x - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$F_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$n=0$ $0 = c_1 + c_2$ $c_1 = -c_2$

$n=1$ $1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$$1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

• Општи мат Фибоначијевој низ је

$$F_n = \left\lfloor \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \right\rfloor$$

$[X] \leftarrow$ ЗАОКРУЊИВАЊЕ НА НАЈБЛИЖИ ЦЕЛО БРОЈ

Доказ: Оценимо разлику између F_n и $\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

$$\left| F_n - \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} - \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \right|$$

Пошто је апсолутна разлика реалних бројева

F_n и $\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$ мања од $\frac{1}{2}$, важи једнакост.

• Функција генератора Фибоначијевог низа одређена је са:

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

Доказ: $\frac{F(x) - F_1 x - F_0}{x^2} = \frac{F(x) - F_0}{x} + F(x)$

$$F(x) \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 1 \right) = \frac{1}{x}$$

$$F(x) \frac{1-x-x^2}{x^2} = \frac{1}{x}$$

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

17. Својства Фибоначијевих бројева

$$1) \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}_n, \quad \text{за } n \geq 1$$

БН $\frac{F_2}{F_1} = 1 \quad 1 = 1$

ИХ: ВАЖИ за $n-1$

$$\begin{aligned} \text{ИК: } \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} \stackrel{\text{ИХ}}{=} 1 + \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}_{n-1}}_n \end{aligned}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$1 < \frac{F_{n+1}}{F_n} < 2 \leftarrow$ низ је ограничен
 непарни чланови монотонно расту
 парни чланови монотонно опадају

$\Rightarrow$ Оба низа конвертирају ка $x \in (1, 2)$

тј. $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ који је, на основу

преходне теореме $x = 1 + \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$3) \sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^n F_i = (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3) + \dots + (F_{n+2} - F_{n+1})$$

$$= F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$$

$$4) n \geq 1, \quad F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

$$\text{БЧ } n=1: F_2 F_0 - F_1^2 = (-1)^1$$

$$1 \cdot 0 - 1 = -1 \quad -1 \equiv -1 \checkmark$$

$$\text{ИХ } n-1: F_n F_{n-2} - F_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \text{ИХ } n: F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= (F_n + F_{n-1})F_{n-1} - F_n^2 \\ &= F_n F_{n-1} + F_{n-1}^2 - F_n^2 = F_n(F_{n-1} - F_n) + F_{n-1}^2 \end{aligned}$$

$$= -F_n F_{n-2} + F_{n-1}^2 \stackrel{\text{ИХ}}{=} -(-1)^{n-1} = (-1)^n$$

18. Лукасови и Кашаланови бројеви

• Лукасов низ је одређен следом рек. ј-ном

$$\begin{cases} L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \\ L_0 = 2, L_1 = 1 \end{cases}$$

Лукасови и Фибоначијеви бројеви задовољавају исту рекурентну једначину, уз различите почетне услове.

• Општи члан Лукасовог низа је

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Доказ: карактеристична једначина је иста као и код Фибоначијевог низа, па је и опште решење иста

$$L_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$n=0 \quad 2 = C_1 + C_2 \quad C_2 = 2 - C_1$$

$$n=1 \quad 1 = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \quad | \cdot 2$$

$$2 = C_1(1+\sqrt{5}) + (2-C_1)(1-\sqrt{5})$$

$$2 = C_1 + \sqrt{5} C_1 + 2 - 2\sqrt{5} - C_1 + \sqrt{5} C_1$$

$$2\sqrt{5} = 2\sqrt{5} C_1 \quad \begin{matrix} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{matrix}$$

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

• Функция генератора Лукасової нумера

$$L(x) = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

Доказ: $\frac{L(x) - L_1 x - L_0}{x^2} = \frac{L(x) - L_0}{x} + L(x)$

$$\frac{L(x) - x - 2}{x^2} = \frac{L(x) - 2}{x} + L(x) \quad | \cdot x^2$$

$$L(x) - x - 2 = x \cdot L(x) - 2x + x^2 L(x)$$

$$L(x) - x L(x) - x^2 L(x) = -2x + x + 2$$

$$L(x)(1 - x - x^2) = -x + 2$$

$$L(x) = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

• $n \geq 1 \quad L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$

БН: $L_1 = F_2 + F_0 \quad 1 = 1 + 0 \quad \checkmark$
 $n=1$

ИХ: $L_{n-1} = F_n + F_{n-2}$

ИК: $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$

$$\stackrel{ИХ}{=} (F_n + F_{n-2}) + (F_{n-1} + F_{n-3})$$

$$= (F_n + F_{n-1}) + (F_{n-2} + F_{n-3})$$

$$= F_{n+1} + F_{n-1}$$

- Каталанов низ одређен је следећом рекурентном једначином

$$\begin{cases} C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \\ C_0 = 1 \end{cases}$$

- Општи члан $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

- Низ заграда је коректан ако се заграде у рачуну могу поставити на тај начин

- Општи случај $(\underset{\uparrow}{Z_1}) \underset{\uparrow}{Z_2}$
КОРЕКТНИ НИЗОВИ ЗАГРАДА

- Број коректних ~~заграда~~ распореда n парова заграда једнак је Каталановом броју C_n

МЕНХЕТН ПРОБЛЕМ $2C_n$

МОНОТОНИ ПУТ: од A до B
БЕЗ ПРЕСЕЋАЊА ДИЈАГОНАЛЕ
И БЕЗ СКРЕТАЊА УЛЕВО И
НАНИЗНЕ

- Нека је дати коначан скуп објеката које називамо мјорови и релација поретка наследник. Тонда се потпуно коренско стабло састоји од:

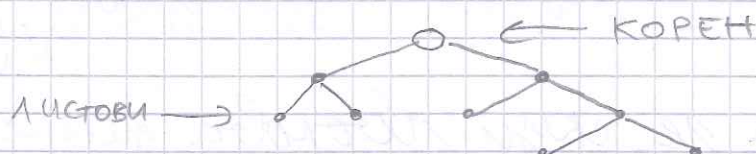
- једног мјора (корен)

или

- два ~~корен~~ потпуна коренска стабла и додатног мјора који су наследници ~~корен~~ коренови ових стабала (мишле он постаје јединствени корен, а стабла постају подстабла НОВОГ СТАБЛА)

- Свако коренско стабло има јединствен корен
- Чворови без наследника су листови
- Чвор који није лист има тачно два ~~наследника~~ наследника (леви и десни)

(Позиционо потпуно коренско бинарно стабло)
 - лево и десно позиционо потпуно коренско бинарно подстабло



- Дефиниција потпуног коренског бинарног стабла може се уопштити на произвољно потпуно k -арно стабло. Сваки чвор који није лист има k наследника.
 Непотпуно - не мора да има k наследника

- Број позиционих потпуних коренских бинарних стабала чији број листова износи $n+1$ је једнак C_n
- То је зато што коректне низове заграда можемо дефинисати рекурзивно

- празан низ заграда је коректан
- ако су z_1 и z_2 коректни, онда је и $(z_1)z_2$

- Бијекција са стаблима

- празан низ заграда $\leftrightarrow$ стабло с једним чвором
- ако се коректни низови заграда z_1 и z_2 пресликавају у стабла T_1 и T_2 , онда се $(z_1)z_2$ пресликава у



19. Типови граfova, основни појмови, својства и инваријанте. Шетње, путеве и путевци. Матричне репрезентације графа.

• Прост граф или само граф је уређени пар $G = (V, E)$

- V - скуи чворова $V(G)$

- E - скуи грана (двоичани подскуиови V) $V(E)$

• Сматрамо да је скуи чворова непразан и коначан

- n - број чворова $\in \mathbb{N}$

- m - број грана $\in \mathbb{N}^*$

• грана спаја два чвора којима је одређена

• такви чворови су суседни

• грана која спаја два чвора је инцидентна са свакии од њих, а ти чворови су крајеви гране

• степеи чворова (d_u) - број грана инцидентних са тим чвором

• околина чвора ($N(u)$) - скуи свих њему суседних чворова

• минимални степеи чвора у графу δ

• максимални степеи чвора у графу Δ

• u - произвољан чвор, e - произвољна грана графа G

- $G - u$ граф добијен уклањањем чвора u и њему инцидентних грана

- $G - e$ граф добијен уклањањем гране e

- ако e није грана графа G , $G + e$ је граф добијен додавањем e у G

- Плинови графова (можемо их комбиновати)
- граф са петљама - допушта постојање иста иста му оба краја исти чвор
- мултиграф - допушта више иста иста између два чвора
- тежински граф - свакој иста иста је придржана нека ~~у~~ ^{нумеричка} вредност (тежина иста иста)
 прост граф је специјалан случај тежинског графа где су све тежине 1
- умерени граф (оријентисани граф, диграф) - свака иста иста може поседовати умерење од једног чвора ка другом (УЛОГА ЗАВИСИ ОД КОНТЕКСТА)
 ГРАФ СА УМЕРЕЊЕМ РАЗМАТРАМО КАО УРЕЂЕНИ ГРАФ

- Сума степена чворова једнака је двојном броју иста иста $\sum_{i=1}^n d_{u_i} = 2m$
 С обзиром да су иста иста инцидентне са по два чвора, Ђиће предложене двапут
- Број чворова непарног степена није непаран
 Када би био, сума степена чворова би била непарна, што је у контрадикцији са претходном теоремом.
- Претходне две теореме важе за све графове изузев оних са петљама.

- Графови G и H су изоморфни ако постоји бијекција $f: V(G) \rightarrow V(H)$ која мува суседство између чворова (ако се разликују само у означавању чворова)

- Инваријанта графа је функција дефинисана на скупу свих графова, и има исту вредност за изоморфне графове

ПРИМЕР: број чворова, број ивица, δ , Δ , ...

- Подграф графа $G=(V, E)$ је граф $G'=(V', E')$ за који важи $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ (G садржи G')

- Индуковани подграф графа G добија се уклањањем произвољног скупа чворова из G (и њима инцидентних ивица)
СВАКИ ИНДУКОВАНИ ПОДГРАФ ЈЕ ИСТОВРЕМЕНО ПОДГРАФ (ОБРНУТО НЕ ВАЖИ)

- Комплемент графа $G=(V, E)$ је $\bar{G}=(V, \bar{E})$ с истим скупом чворова, који су суседни ако нису суседни у графу G .

- Граф је самокомплементаран ако је изоморфан свом комплементу.



- Шетња у графу је низ облика $(V_1, e_1, V_2, e_2, \dots, e_{k-1}, V_k)$ чији су чланови наизменично чворови и иране тог графа такви да је ирана e_i инцидентна с чворовима V_i и V_{i+1}
- шетња повезује (сјаја) чворове V_1 и V_k
- шетња је затворена ако $V_1 = V_k$, у супротном ~~отворена~~ је отворена
- дужина шетње – број ирана које садржи
- шетња пролази чворовима и иранама које садржи (неформално)
- стаза – шетња која сваком ираном пролази највише једанпут
- пут – шетња која сваким чвором (и ираном) пролази највише једанпут
- пут у усмереном графу (усмерени пут) – одређен је низом различитих чворова $(V_1, V_2, \dots, V_k)$ таквих да за $i \in [1, k-1]$ усмерени граф садржи иране (V_i, V_{i+1})
- два чвора су повезана уколико постоји пут који их повезује (у супротном су ^{НЕПОВЕЗАНИ})
- граф је повезан ако су сви чворови међусобно ^{ПОВЕЗАНИ} (у супротном је неповезан)
- повезаност чворова је једна релација еквиваленције
- класе еквиваленције у односу на њу су компоненте ^{ПОВЕЗАНОСТИ}

- Везивни мвор графа је мвор који се уклањањем број компоненти повезаности повећава
 - мост (везивна грана) графа је грана чијим уклањањем број компоненти повезаности расте (за 1)
 - уклањањем везивног мвора / моста граф постаје неповезан
 - растојање између два мвора u и v $dist(u, v)$ је дужина најкраће пута који их повезује (растојање између неповезаних мворова је бесконачно)
 - ексцентрицитет мвора u ($ecc(u)$) – растојање између тог мвора и мвора на максималном растојању од њега
 - ~~радијус~~ радијус графа G је минимални ексцентрицитет $v(G)$
 - центар графа су сви мворови чији је $ecc = v(G)$
 - дијаметар графа $diam(G)$ максимални ексцентрицитет
- ПОВЕЗАНОСТ, РАДИЈУС И ДИЈАМЕТАР СУ ИНВАРИЈАНТЕ

• Неки графови

- ПРАЗАН граф – нема гране (тривијалан – 1 мвор)
- КОМПЛЕТАН (ПОТПУН) граф K_n – свака два мвора су спојена граном
- РЕГУЛАРАН граф – сви мворови имају ЈЕДНАКЕ СТЕПЕНЕ

- Бипартиитан граф је им:
- тривијалан граф
- граф чији скуп чворова може поделити на два дисјунктна подскупа тако да свака ивица спаја чвор из једног са чвором из другог (празан граф је бипартиитан)

- Комплетан бипартиитан граф је бипартиитан граф код којег је сваки чвор из једне партиције повезан са свима из друге (степен сваког чвора је број чворова из другог скупа)

K_{n_1, n_2}

$n_1, n_2 \in \text{КАРДИНАЛНОСТИ ПАРТИЦИЈА}$

- звезда је комплетан бипартиитан граф за који важи $n_1 = 1$
- циклус – повезан граф код којег је степен сваког чвора 2 (C_n)
- пут је граф дефинисан као:
 - $n \leq 2$ једини повезан граф
 - $n \geq 3$ граф добијен уклањањем једне ивице циклуса C_n
- дужина циклуса / пута су једнаке броју њихових ивица
- пут u графу одређује индуговани подграф

ОЗНАКА P_n

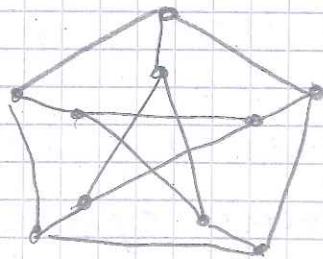
- Граф је бипартитан ако не садржи циклус непарне дужине (као подграф)

Доказ:

$\Rightarrow$ Ако би бипартитан граф садржао циклус непарне дужине, онда би свака два узедна чвора тог циклуса припадала различитим скуповима партиције, што је немогуће јер циклус садржи непаран број чворова.

$\Rightarrow$ издвојити чвор v и ставити га у први скуп. Све чворове на парном растојању од њега стављамо у први скуп, а остале непарном у други.

Ако постоји циклус непарне дужине, два чвора ће бити на истом растојању од v и биће повезани



Петерсенов граф

Матричне репрезентације графова

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \leftarrow \text{чворови}$

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\} \leftarrow \text{гране}$

- Матрица суседства $A(G)$ $n \times n$

$$-(i, j) = \begin{cases} 1, & v_i, v_j \text{ суседни} \\ 0, & v_i, v_j \text{ нису суседни} \end{cases}$$

- симетрична код неусмерених графова
- није инваријантна али је слична

- Матрица инциденције $R(G)$ $n \times m$

$$-(i, j) = \begin{cases} 1, & v_i \text{ инцидентан са } e_j \\ 0, & v_i \text{ није инцидентан са } e_j \end{cases}$$

- свака колона садржи тачно две јединице

- матрична репрезентација је корисна јер садржи информације о структури и инваријантима графа, и неке трансформације које могу бити извршене над графом се могу подузети операцијама над матрицама
 - спектрална теорија
 - спектар графа

20. Штабло. Коренска и разайикута штабла. Претраге графова.

- Штабло је повезан граф који не садржи подграф изоморфан циклусу.
- Неповезан граф мија је свака компонента повезаности штабла се зове шума.
- Шедета тврђења су еквивалентна

(1) T је штабло.

(2) T је повезан граф код којег је број ирана за 1 мањи од броја чворова

$$m = n - 1$$

(3) T је максимални граф без циклуса (додавањем било које иране настаје циклус)

(4) T је минимални повезан граф (уклањањем било које иране постаје неповезан)

(5) За свака два чвора графа T постоји тачно један пут који их повезује.

• Коренско штабло је штабло мији је један чвор (корен) издвојен од осталих

- T коренско штабло мији је корен r
 - ако важи $\text{dist}(u, r) = i$, чвор u припада i -том нивоу штабла T
 - ако u припада i -том, а v $i+1$ -вом нивоу и ако су суседи, u је претходник чвора v , а v наследник чвора u

- лист - чвор који нема наследника
- унутрашњи чвор - није ни корен ни лист
- Коренско k -арно стабло је коренско стабло чији сваки чвор има највише k наследника.
- Потпуно коренско ~~стабло~~ k -арно стабло - сваки чвор који није лист има тачно k наследника.
- Разайињути граф графа G је граф који има исте чворове као G , а скуп ~~чворова~~ _{грана} му је подскуп $E(G)$
- Разайињуте стабло је разайињути граф који је стабло.
- Разайињута шума нејовезаног графа се састоји од разайињутих стабала компонената повезаности.
- Ако је T разайињуте стабло повезаног графа G , онда се додавањем произвољне гране из $E(G) \setminus E(T)$ добија тачно један циклус. (елементарни циклус графа G у односу на стабло T)
- Број елементарних циклуса не зависи од избора разайињуте стабла.

- У случају повезаног графа, број елементарних циклуса је $m - n + 1$
- Број елементарних циклуса графа је $\nu = m - n + p$
 - m - број грана
 - n - број чворова
 - p - број компоненти повезаности
 - ν - циклолатички број графа

└ једна инваријанта

• Претграфа графа

- састоји се од селековања једног по једног чвора графа (обилажење чворова) тако да сваки буде, селекован тачно једанпут, у складу са неким редоследом.
- код свих претграфа, наредни чвор у обиласку суседни је неком чвору који је већ обилажен.
- Граф чији су чворови чворови графа који се претгражује, а гране одређене претграфом је једно раздвајање (умерено) стабло претграженог графа, и зове се стабло претграфе.

- Код претраге у дубину и ширину полази се од произвољног чвора
- нису јединствене, тј. пружају могућности избора пута током претраге
- решење: нумерација чворова и бирање најмањег
- Претрага у дубину (Depth first search)
 - наредни чвор суседни је претходно обиђеном, ако је могуће
 - ако није, суседни је претходном од претходно обиђеног, и тако даље
- Претрага у ширину (Breadth first search)
 - прво обиђемо све суседе првог чвора, потом све необиђене суседе другог, и тако даље

21. Минимално разайињуте стабло тежинског графа. Краскалов и Примов алгоритам.

- разматрамо графове којима су све тежине ^{ПОЗИТИВНЕ}
- тежина гране e - $w(e)$
- тежина графа G - $w(G) = \sum_{e \in E(G)} w(e)$
- минимално разайињуте стабло ~~је~~ повезаног тежинског графа је разайињуте стабло минималне тежине (уvek постоји и не мора бити јединствено)
- Краскалов алгоритам
 - „најпре грана најмање тежине“
 - ~~као~~ похлепни (грозиви) алгоритам
 - алгоритам прихвата повезан тежински граф G , а враћа једно његово минимално разайињуте стабло

K1: Текући граф $T = (V(G), \emptyset)$

K2: Уредити гране G у неопседајући низ у складу са њиховим тежинама.

K3: Нека је e наредна грана низа.
Ако не постоји, прети у K5

K4: Ако додавањем e текућем графу T настаје циклус, прети у K3.

Иначе, додати e графу T и прети у K3

K5: KPAJ

Доказ:

Алгоритам не може резултовати
неповезаним графом, нити графом
који садржи циклус (K_4), што
значи да је он стабло.

T - стабло добијено Краскаловим
алгоритмом

$(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ - гране стабла уређене
у складу са редоследом додавања

ППС теорема T није минимална
пошто је стабло мање тежине

• за свако такво стабло S је деф.

функција $f(S) = \min \{i / e_i \notin E(S)\}$

• S' - стабло за које је вр. ф-је максимална

Ако важи $f(S') = k$, онда су гране
 $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ и гране S' .

• $S' + e_k \in$ садржи циклус

• Ако је e_k' грана тог циклуса која
припада S' а не припада T

(пошто јер $T \neq S'$) размотримо

$S'' = S' - e_k' + e_k$ и он је разминуте
стабло

• $w(S'') = w(S') + w(e_k) - w(e_k')$

• стабла T и S'' садрже гране $e_1, e_2, \dots, e_k$

• Пошто је e_k била изабрана за додавање,

важи $w(e_k) \leq w(e_k') \Rightarrow w(S'') \leq w(S')$

затрава $w(S'') = w(S')$ јер је S' МРС

$\Rightarrow S''$ једно МРС

али $e_1, e_2, \dots, e_k \in S''$

$\Rightarrow f(S'') > k$ $\downarrow$

- $G = (V, E)$ повезан тежњински граф
 $U \subset V$, e - ирана минималне тежине
која спаја чвор из U са чвором
из $V \setminus U$

Тада постоји минимално раздвојено
стабло теж. графа G које садржи e .

Доказ: S МРС које не садржи e
 $S + e$ садржи циклус

њему припада нека ирана e' која
спаја чвор из U са чвором из $V \setminus U$

Пошто важи $w(e) \leq w(e')$, уклањањем
 e' из $S + e$ добијамо МРС

• Примов алгоритам

- „најпре најближни сусед“

- одређивање минималне раздвојене иране

K1: $T = (\emptyset, \emptyset)$

K2: Произвољан чвор из $V(G) \setminus V(T)$ додати у T
Ако такав чвор не постоји, прети у K4

K3: Додати ирану најмање тежине која
спаја чвор из T са чвором из $G \setminus T$

Понављати док је могуће па прети у K2

K4: Крај

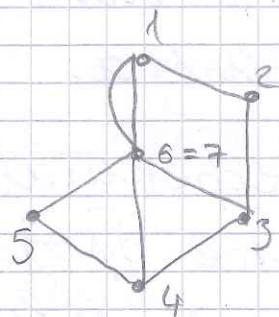
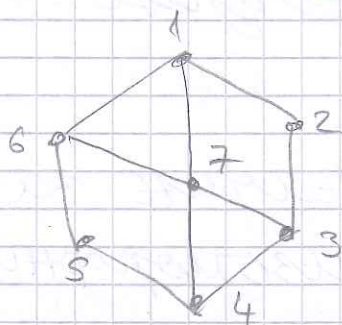
23. Различити степенovi означених графова. Трифорови низи.

- Означени графови су графови код којих су чворови означени неким нумеричким вредностима како би се разликовали од својих изоморфизама.
- Не постоји ефективни начин за израчунавање броја неизоморфних графова са n чворова.
(исто важи и за стабала)
- (Кејлијева теорема) Број означених стабала са n чворова је n^{n-2}
- Број различитих стабала означеног комплетног графа K_n једнак је броју означених стабала која имају n чворова (n^{n-2}).
- повезани граф који садржи тачно један елементарни циклус је унициклички
- Број различитих стабала сваког означеног уницикличког графа једнак је дужици његовог јединственог циклуса

Број различитих стабала означених графова. Кејлијева теорема.
Унициклички број графа

- e - грана мултиграфа G (може садржати петље)

Контракција мултиграфа G у односу на грану e ($G \cdot e$) је мултиграф који се добија од G -е идентификовањем чворова са којима је e била инцидентна



- $t(G)$ - број разацикљаних стабала ^{означеног} графа G
- За сваки означени мултиграф G важи:

$$t(G) = t(G - e) + t(G \cdot e)$$

Доказ: Свако разацикљано стабло графа G које не садржи e је и разацикљано стабло графа $G - e$, и обрнуто.

Свако разацикљано стабло мултиграфа G које садржи грану e једнозначно одређује разацикљано стабло мултиграфа $G \cdot e$, и обрнуто.

- Цикломатички број графа (γ) једнак је броју елементарних циклуса графа.

$$\gamma = m - n + p$$

22. Различита стабла означених графа. Триферов низ.

(Кејлијева теорема) Број означених стабала са n чворова је n^{n-2}

- Триферов низ $S_{(n)} = (S_1, S_2, \dots, S_{n-2})$ је било који низ који се састоји од $n-2$ (не нурно различита) броја скупа N_n
- Триферов низ $S_{(n)}$ одређује једно означено стабло које има n чворова и обротно.
- Триферово кодирање
 - прихвата нетривијално означено стабло, а враћа јединствени код тог стабла

BEGIN

INPUT $T = \{1, 2, 3, \dots, n\}, E\}$ - стабло T

$S = ()$ - иницијализација

WHILE $|V(T)| > 2$

u - чвор степена 1 минималне ознаке

v - сусед од u

$T := T - u$

$S := S + v$

RETURN S

END

• Трифеново декодирање

- алгоритам прихвата код, а
врати јединствено означено
стабло које је њиме одређено

BEGIN

INPUT $S = (S(1), S(2), \dots, S(n-2))$ - ПРИФЕРОВ
НИЗ

$T = (\{1, 2, 3, \dots, n\}, \emptyset)$ - иницијализација

$\ell = (1, 2, \dots, n)$ - помоћни низ

WHILE $S \neq ()$

V - МИНИМАЛНА ВРЕДНОСТ КОЈА ПРИПАДА ℓ ,
а не припада S

$W := S(1)$

$T := T + VW$

$\ell := \ell - V$

$S := S - S(1)$ ← ПОМЕРИТИ НИЗ ЗА ЈЕДНО МЕСТО УЛЕВО

СЛОЈИТИ ГРАНОМ ДВА ЧВОРА ОДРЕЂЕНА ПРЕСТАЛИМ
ЕЛЕМЕНТИМА НИЗА ℓ

RETURN T

END

24. Ејлерови мултиграфови. Ејлеров алгоритам. Проблема кинеског поштарца.

- Мултиграф је Ејлеров ако садржи затворену стазу која сваком граном пролази тачно једанпут (Ејлерова стаза).
- Мултиграф је Полу-Ејлеров ако садржи стазу која сваком граном пролази једанпут (Сваки Ејлеров граф је и Полу-Ејлеров).
- Проблема 7 кенингсберских мостова
- За неупривљиван повезан мултиграф важи да је Ејлеров ако су сви чворови парног степена.

Доказ: (Ејлерова теорема)

=> Када у неки чвор уђемо, мора постојати друга грана постоју које из њега излазимо.

≡ Индукцијом по броју грана

Ба:  ✓

ИХ: шврћење важи за све графове са мање од n грана

ИК: $\forall$ има n грана (сви чворови су парног степена)

G није стабло јер су два мвора
парног степена

$\Rightarrow G$ садржи циклус C

C обзиром да су два мвора
који припадају циклусу степена 2,
ако уклонимо све његове гране
остаје нам (монда нејавезан)
граф који свака компонента
повезаности задовољава
индуктивну хипотезу.

Граф G добијамо тако што,
кад поједн обилазак циклуса
добијемо до мвора необијене
компоненте повезаности, обилазимо
је и настављамо даље кроз циклус.

- Непривујалан повезан мултиграф
је полужлеров акко садржи 0 или 2
мвора парног степена.

Доказ следи из дефиниције полужлеровог
графа

- Флеријева алгоритам
 - прихвата Ејлеров мултиграф,
 - а враћа једну Ејлерову стазу

BEGIN

INPUT G - Ејлеров мултиграф

v_0 - произвољан чвор

$S = (v_0)$ - иницијализација стазе

$H = G$ - помоћни мултиграф

WHILE $|E(H)| > 0$

изабрати грану $e = uv \in E(H)$ такву да:

- u је последњи чвор стазе S
- e није мост H , осим ако нема другог избора

$S := S + e, v$

$H := H - e$

RETURN S

END

- Проблема кинеског поштарца

- поштар крета од поште, треба да достави све поштыке и да се врати у пошту ~~прош~~ трошећи што мање времена
- тежински Ејлеров мултиграф

25. Хамилтонови графови.

Проблем трговачког путника.

3 - хеуристика. (ТРИ - хеуристика)

- Граф је Хамилтонов ако садржи циклус који пролази сваким чвором тог графа (Хамилтонов циклус)
- Граф је полухамилтонов ако садржи пут који пролази сваким чвором тог графа (Хамилтонов пут)
(сваки Хамилтонов је истовремено полухамилтонов)
- (Диракова теорема) Граф који има барем три чвора и чији минимални степени чворови задовољава неједнакост $\delta \geq \frac{n}{2}$ је Хамилтонов
- Проблем трговачког путника
 - нека је дат скуп градова повезаних путевима одређене дужине
 - путник мора да обиђе сваки град тачно једанпут и врати се у онај ~~из~~ из којег је кренуо, и да при том пређе пут најмање дужине
 - одређивање Хамилтоновог циклуса минималне тежине
 - проблем је NP-тежак

- једно решење било би проналажење свих Хамилтонових Циклуса и одређивање оног најмање тежине (неефикасно)
- коришћење хеуристичких алгоритама
 - у општем случају не дају оптимално решење, већ блиско оптималном (подоптимално)
- 3 - хеуристика
 - ради када су сви градови повезани
 - полази се од произвољног Хамилтоновог Циклуса
 - уклањамо три несуседне граде
 - спајањем новодођених путева добијамо 8 нових Хамилтонових циклуса
 - бирамо циклус најмање тежине и постављамо к њим

26. Плaнaрни гpaфoви

- Гpaф je плaнaрни aкo ce мoгнe прeдстaвити у рaвни тaкo дa му ce гpaнe нe прeсeцaју
- cвaки пoвeзaн плaнaрни гpaф кoји je прeдстaвљeн тaкo дa му ce гpaнe нe прeсeцaју дeм рaвaн нa нeки бpoј oблaсти, oд кoјих je тaчнo јeднa бeскoнaчнa
- (Oјлeрoвa тeopeмa зa плaнaрнe гpaфoвe)

Зa cвaки пoвeзaн плaнaрни гpaф кoји je прeдстaвљeн у рaвни тaкo дa му ce гpaнe нe прeсeцaју вaжи

$$n - m + f = 2$$

n - бpoј чвoрoвa

m - бpoј гpaнa

f - бpoј oблaсти

Доказ: Индукцијом по m

Бн: Најмање m је $n-1$

СТАБЛО је ПЛАНАРНИ ГРАФ

$$n - (n-1) + 1 = 2 \quad \checkmark$$

ИХ: шврђење важи за све графове са мање од n грана

Ик: пошто граф има више од n грана, има макар један циклус

е страна тог циклуса

G -е је повезан и величине равна
на једну област мање од G

$$n - (m-1) + (f-1) = 2 \quad \checkmark$$

- Поступком графа добија се замисао
сваке стране неинваријантни путем
производне дужине

(узастопно додавање производног
броја чворова свакој страни)

- Граф је планарни ~~ако~~ ако не
садржи K_5 или $K_{3,3}$ као подграф



27. Старивање у графовима

- подужи скупа графа такав да никоје две нису инцидентне
- максимално старивање је старивање којем се не може додати графа тако да оно остане старивање
- највеће старивање садржи највећи број графа (свако највеће је исцрпљено и максимално)
- код савршеног старивања, сваки чвор је инцидентан са ~~сваком~~ ^{једном} графом старивања
- ако граф има непаран број чворова, не може имати савршено старивање
- свако савршено старивање је и највеће
- ако постоји савршено старивање, важи и обрнуто
- пут парне дужине нема савршено старивање, а пут непарне има јединствено
- циклус парне дужине има два савршена старивања
- комплетан бипартитан граф $K_{n,n}$ има $n!$ савршених старивања

• Максимумални граф K_{2n} има $\frac{(2n)!}{n! 2^n}$ лавершених старивања

• M произвољно старивање у G
- мвор и тој графа који није ~~инцидентал~~ инцидентал ни са једном граном M је слободан у односу на M

- пут $P = (V_1, E_1, V_2, E_2, \dots, E_{k-1}, V_k)$ је M -алтернирајући ако све гране или парној или непарној индекса пута P припадају старивању M

- M -увешани пут је M -алтернирајући пут код којег су само крајњи мворови слободни у односу на M (не мора да постоји)

• (Бернова теорема) Старивање M у графу G је највеће ако G не садржи M -увешани пут.

Доказ $\Rightarrow$ пп да постоји M -увешани пут
 P - један од M -увешаних путева
 $M' = M \Delta E(P)$ је веће старивање $\Leftarrow$

$\Leftarrow$ контрапозиција

пп да M није највеће старивање
 $\Rightarrow$ постоји M увешани пут

M није највеће $\Rightarrow$ постоји највеће M'

Подграф G са скупом грана $M \cup M'$
таква да свако ребро таквог
подграфа није веће од 2
(свако ребро је инцидентно са
највише 2 гране из различитих
стабала)

- сваке компоненте повезаности су
или путеви или циклуси

- сваки циклус садржи исти број
грана из M и M' и стабло M
садржи више грана

$\Rightarrow$ постоји компонента пут која
садржи једну више грану из M'

$\Rightarrow$ такав пут највише
садржи гране из M' и M и
почиње и завршава се у M' ,
па је он изражен M -увешаним
путем

- проблем распореда послова

(проблем запошљавања или асигнације)

- дати је скуп послова и скуп радника
(за сваког радника се зна који посао
ће да ради)

- ако је за посао довољан један
радник, то је бипартитни граф

- тражилимо највеће стабало

МАЂАРСКИ
АЛГОРИТАМ

28. Бојење графа. Проблема 4 боје.

- Бојење чворова графа је функција која сваком чвору пресликава у неку боју из скупа боја.
- Бојење је тачно ако су суседни чворови обојени различитом бојом.
- Бојење ивица графа је функција која сваку ивицу пресликава у неку боју из скупа боја.
- Бојење ивица је тачно ако су суседне ивице обојене различитом бојом.
- Бојење ивица своди се на проблем бојења чворова линијског графа.
- Линијски граф графа G , $L(G)$, је граф који се добија:
 - скупу чворова $L(G)$ одговара скупу ивица G
 - чворови $L(G)$ су суседни ако ~~и~~ су њима одговарајуће ивице из G суседне
- G је коренски граф свог линијског графа
- сваки граф (до на изоморфизам) има тачно један линијски граф и бојење ивица једнозначно одређује бојење чворова линијског графа
- сваком линијском графу који није изоморфан K_3 одговара тачно један коренски граф

- граф је k -обојив ако се може правилно обојити са k боја
- хроматски број графа $\chi(G)$ је ~~мин~~ минимална вредност k за коју је граф k -обојив
- хроматски број нејовезаног графа једнак максималном хроматском броју његових компоненти
- $\chi(K_n) = n$
- $n \geq 2 \quad \chi(P_n) = 2$ пут
- χ бипаритичног графа са макар једном ивицом је 2 (би-хроматски графови)

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n = 2k \\ 3, & n = 2k-1 \end{cases} \quad k \geq 2$$

- граф је χ -критичан ако је његов хроматски број χ и ~~ако~~ ако је хроматски број сваког његовог правог подграфа мањи од χ (МОРА БИТИ ПОВЕЗАН)
- Хроматски број и максимални степен мора сваког повезаног графа задовољавати неједнакост

$$\chi \leq \Delta + 1$$

• Једнакост $\chi = \Delta + 1$ важи ако је разматрани граф изоморфан комплетном графу или циклусу непарне дужине.

• Хеуристика за оптимално бојење чворова
- показује од произвољног чвора
- наредни бојимо „најмањом“ бојом која није којом нису обојени његови суседи

• (Проблем распореда испита)

За сваки испит постоји један термин.

Треба је минимални број термина тако да сваки студент може појавити све испите које жели?

Испите представљамо чворовима.

Они су суседни ако исти студент жели да појави оба.

Минимални број термина је хроматски број овог графа.

• Проблем бојења мапа

- мапу треба обојити минималним бројем боја тако да свака територија буде обојена, а територије које се додирују обојене различитом бојом
- своди се на одређивање хроматског броја планарног графа
- сваки планарни граф може се правилно обојити коришћењем 4 боје (х није већи од 4)
- провера да ли је граф 3-обојив је NP-комплетан