

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ У БЕОГРАДУ
- ИНФОРМАТИКА -

Дискретне Структуре 2

- НЕЗВАНИЧНИ ОДГОВОРИ НА ИСПИТНА ПИТАЊА -

Аутор

Никола Маринковић

52/2025

Предавач

др. Зоран Станић

Други семестар, 2026.

Садржај

1	Комбинаторика	5
1	Пребројавања. Основни принципи пребројавања. (Уопштени) Дирихлеов принцип.	5
2	Биномни коефицијенти. Основна својства. Биномна и полиномна формула.	6
3	Биномни идентитети	9
4	Принцип укључења-искључења.	12
5	Уређени избори елемената са и без понављања. Пермутације.	13
6	Неуређени избори елемената са и без понављања. Пермутације са понављањем.	14
7	Генерисања пермутација и комбинација.	16
8	Функције генератрисе. Дефиниција и основна својства. Биномна формула за целобројне експоненте.	18
9	Одређивање функција генератриса.	20
10	Композиције и партиције бројева. Основна својства.	21
11	Ферерсови дијаграми. Конјуговане партиције броја. Идентитети са партицијама.	23
12	Рекурентне једначине. Дефиниција и решења. Линеарна рекурентна једначина и њено опште решење.	24
13	Линеарна рекурентна једначина са константним коефицијентима.	26
14	Функције генератрисе и решавање рекурентних једначина.	27
15	Партиције скупова. Стирлингови бројеви 2. врсте и Белови бројеви.	28
16	Фибоначијеви бројеви. Златни пресек. Општи члан и функција генератриса Фибоначијевог низа.	29
17	Својства Фибоначијевих бројева.	31
18	Лукасови и Каталанови бројеви.	33
2	Теорија графова	37
19	Типови графова, основни појмови, својства и инваријанте. Шетње, стазе и путеви. Матричне репрезентације графа.	37
20	Стабла. Коренска и разапињућа стабла. Претраге графова.	41
21	Минимално разапињуће стабло тежинског графа. Краскалов и Примов алгоритам.	43
22	Разапињућа стабла означених графова. Приферов низ.	45
23	Број разапињућих стабала означених графова. Кејлијева теорема. Цикломатички број графа.	46
24	Ојлерови мултиграфови. Флеријев алгоритам. Проблем кинеског поштара.	47
25	Хамилтонови графови. Проблем трговачког путника. 3-хеуристика.	48
26	Планарни графови.	49

27	Спаривања у графовима.	50
28	Бојења графова. Проблем 4 боје.	51

Дефиниције симбола

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

$$\mathbb{N}_n = \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$$

I

Комбинаторика

1 Пребројавања. Основни принципи пребројавања. (Уопштени) Дирихлеов принцип.

Комбинаторика (енумерација) бави се одређивањем кардиналности неког скупа.

Уколико је скуп непразан и коначан, одређивање кардиналности своди се на проналажење природног броја n који је једнак броју елемената тог скупа.

$$X - \text{скуп}, |X| = n$$

Три основна принципа пребројавања су:

1. Принцип једнакости

Ако за скупове A и B постоји бијективно пресликавање $f : A \rightarrow B$, скупови су једнаке кардиналности.

$$f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} B \Rightarrow |A| = |B|$$

Пример 1.1. $f : \mathbb{N} \rightarrow S, f(n) = 2n, S = \{x \in \mathbb{N} \mid 2|x\}$

2. Принцип збира

Ако су коначни скупови $A_1, A_2, \dots, A_n$ дисјунктни, тада важи

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

3. Принцип производа

Нека су A и B коначни скупови и $A \times B$ њихов Декартов производ. Тада важи:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Важи и општије правило:

$$\left. \begin{array}{l} S \subseteq A \times B \\ \nu_a = \{(a, b) \in S \mid b \in B\} \\ k_b = \{(a, b) \in S \mid a \in A\} \end{array} \right\} \Rightarrow |S| = \sum_{a \in A} |\nu_a| = \sum_{b \in B} |k_b| \quad (1.1)$$

Пример 1.2.

$$\underbrace{|\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}|}_n = |\{0, 1\}| \cdot |\{0, 1\}| \cdot \dots \cdot |\{0, 1\}| = 2^n$$

Дирихлеов принцип

Ако је k објеката распоређено у n кутија, при чему важи $k > n$, постојаће кутија у којој се налазе барем два објекта.

Уопштени Дирихлеов принцип

Ако је k објеката распоређено у n кутија, при чему за неко $c \in \mathbb{N}$ важи $k > cn$, тада постоји кутија таква да број објеката распоређених у њу није мањи од $c + 1$.

2 Биномни коефицијенти. Основна својства. Биномна и полиномна формула.

Биномни коефицијент (коефицијент у развоју бинома) дефинише се:

$$\begin{aligned} k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{R} \quad \binom{n}{k} &:= \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \\ \binom{n}{0} &:= 1 \\ n \in \mathbb{N}^*, k \leq n \quad \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

Основна својства биномних коефицијената:

1. Услов симетричности

$$k, n \in \mathbb{N}, k \leq n, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Доказ.

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

■

2. Негација горњег индекса

$$k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{R}, \binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

Доказ.

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= \frac{-n(-n-1) \cdot \dots \cdot (-n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k \cdot n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \end{aligned}$$

■

3. Адициона формула

$$k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{R}, \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Доказ.

$$\begin{aligned}
 \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k)}{k!} \\
 &\quad + \frac{(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{(k-1)!} \cdot \frac{k}{k} \\
 &= \frac{(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot (n-k+1) \\
 &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}
 \end{aligned}$$

■

4. Паскалов троугао

Схематски распоред природних бројева у виду бесконачног троугла, тако да се дуж бочних ивица налазе јединице, а остали бројеви су једнаки збиру два броја која се налазе горе-десно и горе-лево у односу на њих.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & & & n=0 \\
 & & 1 & & 1 & n=1 \\
 & 1 & & 2 & & 1 & n=2 \\
 1 & & 3 & & 3 & & 1 & n=3 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & n=4
 \end{array} \tag{1.2}$$

Тврђење 2.1. Ако са $n \in \mathbb{N}^*$ представимо врсте, а са $k \in \mathbb{N}^*$ позицију елемента у врсти, елемент на тим координатама биће $\binom{n}{k}$.

Доказ. Када је $k=0$ или $k=n$, пошто се налази на ивици троугла, биће једнако 1, што задовољава:

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$

Координате елемената су:

- горе-лево: $n-1, k-1$
- горе-десно: $n-1, k$

По адиционој формули важи:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

■

Теорема 2.1. (Биномна формула)

$$n \in \mathbb{N}^*, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Доказ. Индукцијом по n .

$$\begin{aligned}
\boxed{\text{БИ}}_{n=0} : (x+y)^0 &= \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} x^k y^{0-k} \\
&= \binom{0}{0} x^0 y^0 \\
&= 1 \\
\text{ИХ} : (x+y)^{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k} \\
\text{ИК} : (x+y)^n &= (x+y)^{n-1}(x+y) \\
&\stackrel{\text{ИХ}}{=} (x+y) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k} \\
&= x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k} + y \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k+1} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} k+1=j \\ k=0 \rightarrow j=1 \\ k=n-1 \rightarrow j=n \end{array} \right\} \\
&= \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{j-1} x^{j-1+1} y^{n-1-(j-1)} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{j-1} x^j y^{n-j} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \binom{n-1}{n-1} x^n y^{n-n} + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j-1} x^j y^{n-j} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} + \binom{n-1}{0} x^0 y^{n-0} \\
&= x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right) x^k y^{n-k} + y^n \\
&= x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}
\end{aligned}$$

■

Коефицијенти биномног развоја се могу прочитати из Паскаловог троугла.

Неки специјални случајеви:

$$x = y = 1 : \quad 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

$$y = 1 : \quad (x + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

$$x = 1 : \quad (1 + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^{n-k}$$

$$x = 1 \quad y = -1 : \quad 0 = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k$$

Теорема 2.2. (Полиномна формула)

$$n \in \mathbb{N}^* \quad x_1, x_2, \dots, x_r \in \mathbb{R}$$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_r=n \\ k_1, k_2, \dots, k_r \geq 0}} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_r^{k_r}$$

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$$

3 Биномни идентитети

Постоје два метода доказивања биномних идентитета:

1. алгебарски - алгебарским рачуном (примена математичке индукције или свођење на раније познате идентитете)
2. комбинаторни (избором)

Неки биномни идентитети:

1. Извлачење испред заграде

$$k, n \in \mathbb{N}^* : \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \quad \text{и} \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{n-k} \binom{n-1}{k}$$

Доказ. $k > n$:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} &= \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot \cancel{(n-1-k+1)} \cdot \cancel{1}}{(k-1)!} \\ &= \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} \\ \bullet \quad \frac{n}{n-k} \cdot \binom{n-1}{k} &= \frac{n}{\cancel{n-k}} \cdot \frac{(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-1-k+2) \cdot \cancel{(n-1-k+1)} \cdot \cancel{1}}{k!} \\ &= \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

$k \leq n$:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} &= \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \\ \bullet \frac{n}{n-k} \cdot \binom{n-1}{k} &= \frac{n}{n-k} \cdot \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

■

2. Поједностављење производа

$$k, n, r \in \mathbb{N}^* \quad \binom{n}{k+r} \binom{k+r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r}$$

Доказ. Довољно је претпоставити да важи $k+r \leq n$

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \binom{n-k}{r} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{r!(n-k-r)!} \cdot \frac{(k+r)!}{(k+r)!} \\ &= \frac{n!}{(k+r)!(n-k-r)!} \cdot \frac{(k+r)!}{k!r!} = \binom{n}{k+r} \binom{n-k}{r} \end{aligned}$$

■

3. Сумационе формуле

$$\begin{aligned} r, n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} &= \binom{n+r+1}{n} \\ \sum_{k=0}^n \binom{k}{r} &= \binom{n+1}{r+1} \end{aligned}$$

Доказ. Индукцијом по n .

$$\begin{aligned} \boxed{\text{БИ}}_{n=0} : \binom{r+0}{0} &= \binom{0+r+1}{0} \quad 1 \equiv 1 \\ \boxed{\text{ИХ}}_{n-1} : \sum_{k=0}^{n-1} \binom{r+k}{k} &= \binom{n-1+r+1}{n-1} \\ \underline{\text{ИК}} : \sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{r+k}{k} + \binom{r+n}{n} \\ &\stackrel{\text{ИХ}}{=} \binom{n+r}{n-1} + \binom{n+r}{n} \stackrel{\text{АДИЦИОНА}}{=} \binom{n+r+1}{n} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{БИ}}_{n=0} : \binom{0}{r} = \binom{0+1}{r+1} \quad (\text{jer } r+1 \neq 0 \text{ ако } r \in \mathbb{N}^*)$$

$$\binom{1}{r+1} = \binom{0}{r+1-1} + \binom{0}{r+1} = \binom{0}{r}$$

$$\boxed{\text{ИХ}}_{n-1} : \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{r} = \binom{n-1+1}{r+1}$$

$$\begin{aligned} \text{ИК} : \sum_{k=0}^n \binom{k}{r} &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{r} + \binom{n}{r} \\ &\stackrel{\text{ИХ}}{=} \binom{n}{r+1} + \binom{n}{r} \stackrel{\text{АДИЦИОНА}}{=} \binom{n+1}{r+1} \end{aligned}$$

■

4. Сума квадрата

$$n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \quad (1.3)$$

Доказ.

$$(x+1)^n (x+1)^n = (x+1)^{2n}$$

$$\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \right) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

Пошто су ови полиноми једнаки, важи и да су коефицијенти уз степене x једнаки:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} \binom{n}{n} &= \binom{2n}{n} \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 &= \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

■

Коментар. Што се тиче комбинаторног метода доказивања биномних идентитета, у уџбенику професора Зорана Станића, они се не налазе на овом месту, већ у питању 6. Уколико не дођете до неких нових информација, у случају да извучете ово питање на испиту, допишите и тај део.



4 Принцип укључења-искључења.

Представља уопштење принципа збира.

За коначне скупове $A_1, A_2, \dots, A_n$ важи:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}_n} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \quad (1.4)$$

Доказ. Ако неки елемент x припада унији $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, тада x припада неком од тих скупова. Претпоставимо да k скупова садржи елемент x и нека су то (без умањења општости) $A_1, A_2, \dots, A_k$. Тада важи:

$$x \in \bigcap_{i=1}^k A_i$$

С обзиром да припада унији, x доприноси да се вредност са леве стране повећа за 1.

Приликом сабирања $|A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|$, x доприноси да се вредност са десне стране увећа за k .

Приликом одузимања двочланих пресека, x доприноси да се десна страна увећа за $\binom{k}{2}$.

•
•
•

$$\begin{aligned} & k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k} \\ &= \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k} - \binom{k}{0} + \binom{k}{0} \\ &= \binom{k}{0} - \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

■

5 Уређени избори елемената са и без понављања. Пермутације.

Код уређених избора елемената важан је редослед у којем бирамо елементе.

Број уређених избора k елемената са понављањем скупа од n елемената једнак је броју пресликавања $f : \mathbb{N}_k \rightarrow \mathbb{N}_n$.

Ако скуп од n елемената идентификујемо са скупом $\mathbb{N}_n$, онда сваком пресликавању f једнозначно одговара један избор елемената тако да је i -ти елемент једнак $f(i)$, $i \in \mathbb{N}_k$.

Тврђење 5.1. Број пресликавања $f : \mathbb{N}_k \rightarrow \mathbb{N}_n$ је n^k .

Доказ. Индукцијом по k .

За $k = 1$ постоји n пресликавања којима се јединствени елемент скупа $\mathbb{N}_1 = \{1\}$ пресликава у неки елемент скупа $\mathbb{N}_n$, те је база индукције задовољена.

ИХ: Тврђење важи за $k - 1$.

ИК: На основу индуктивне хипотезе, $k - 1$ елемената скупа $\mathbb{N}_k$ можемо пресликати у скуп $\mathbb{N}_n$ на n^{k-1} начина, а преостали, k -ти елемент се на n начина може пресликати у неки елемент скупа $\mathbb{N}_n$.

$$n \cdot n^{k-1} = n^k \quad (1.5)$$

■

Дефиниција 5.1. (Карактеристична функција)

$$\begin{aligned} A \subseteq X \quad \chi_A : X &\rightarrow \{0, 1\} \\ \chi_A(x) &= \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Тврђење 5.2. Нека је X неки скуп од n елемената. Важи $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$

Доказ. Сваком подскупу скупа X одговара једна карактеристична функција, и обрнуто. Према тврђењу 5.1, оваквих функција (па и подскупова) има 2^n .

■

Тврђење 5.3. Број уређених избора k елемената скупа од n елемената без понављања једнак је броју инјективних пресликавања $f : \mathbb{N}_k \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}_n$, и њихов број једнак је:

$$\prod_{i=0}^{k-1} (n - i)$$

(Важи да је $k \leq n$, јер у супротном не можемо без понављања одабрати k елемената из мањег скупа)

Доказ. Индукцијом по k .

БИ: постоји n инјективних пресликавања $f : \mathbb{N}_1 \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}_n$.

ИХ: тврђење важи за $k - 1$, тј. скуп $\mathbb{N}_{k-1}$ се може пресликати у $\mathbb{N}_n$ на $n(n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 2)$ начина.

ИК: преостали, k -ти елемент се инјективно може пресликати у $\mathbb{N}_n$ на $(n-k+1)$ начин (јер смо покрили $k-1$ чланова).

$$\Rightarrow \text{резултат је } \prod_{i=0}^{k-1} (n-i) \quad \left(= \frac{n!}{(n-k)!} \right) \quad (\text{за } k > n = 0)$$

Пермутације (скупа од n елемената) су специјалан случај уређених избора елемената без понављања за које важи $k = n$, што значи да је број пермутација $n!$. Пермутације се могу интерпретирати као сва могућа размештања елемената скупа. ■

6 Неуређени избори елемената са и без понављања. Пермутације са понављањем.

Код неуређених избора елемената није важан редослед бирања елемената ($12 = 21$).

Тврђење 6.1. За неко $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, број неуређених избора k елемената скупа од n елемената без понављања једнак је:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \left(= \binom{n}{k} \right)$$

Доказ. Број уређених избора са понављањем једнак је $\frac{n!}{(n-k)!}$. Треба елиминисати све пермутације истог избора (којих има $k!$). Стога, делимо са $k!$ што је наше решење. ■

Комбинаторни метод доказивања биномних идентитета

За неке $(n, r, s \in \mathbb{N})$ важи:

Тврђење 6.2. (Вандермондов идентитет)

$$\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

Доказ. Хоћемо да из два дисјунктна скупа кардиналности r и s одаберемо n елемената. То можемо урадити на два начина:

1. Избором n елемената из уније ова два скупа: $\binom{r+s}{n}$
2. Када је $r \leq s$, из првог можемо одабрати k , а из другог $n-k$ елемената, и сабрати за све могуће вредности k :

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \binom{s}{n-k}$$

■

Тврђење 6.3.

$$\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \binom{s}{n+k} = \binom{r+s}{r+n}$$

Доказ. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \binom{s}{n+k} &= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \binom{s}{s-(n-k)} \\ &\stackrel{\text{Вандермонд}}{=} \binom{r+s}{r+s-n-k} \\ &= \binom{r+s}{r+s-(s-n)} = \binom{r+s}{r+n} \end{aligned}$$

■

Тврђење 6.4. Број неуређених избора k елемената скупа од n елемената са понављањем је једнак:

$$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

Доказ. Представимо k елемената које бирамо као k маркера на правој. Исту праву делимо на n делова коришћењем $n-1$ преграда.

Број позиција за k маркера је $n-1+k$ (без понављања), те је решење $\binom{n+k-1}{k}$.

■

Пермутације са понављањем су пермутације мултискупа (неки елементи се јављају више пута) од n елемената.

Тврђење 6.5. Број пермутација са понављањем где се први елемент појављује n_1 пута, други n_2 пута, $\dots$, k -ти елемент n_k пута, при чему важи $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ једнак је:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} \left(= \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} \right)$$

Доказ. За први елемент бирамо n_1 позиција од n укупних, што је $\binom{n}{n_1}$. За други бирамо n_2 позиција од преосталих $n - n_1$ позиција, што је $\binom{n-n_1}{n_2}$ и тако даље.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \dots \binom{n-(n_1+n_2+\dots+n_{k-1})}{n_k} \\ &= \frac{n!}{n_1!(\cancel{n-n_1})!} \cdot \frac{\cancel{n-n_1}!}{n_2!(\cancel{n-n_1-n_2})!} \cdot \dots \cdot \frac{(\cancel{n-n_1-\dots-n_{k-1}})!}{n_k! \underbrace{(\cancel{n-n_1-\dots-n_{k-1}-n_k})!}_{0!}} \\ &= \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} \end{aligned}$$

■

$$n! \geq \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

Вредност не зависи од редоследа бирања елемената.

Пример 6.1. Број начина да се n објеката распореди у k кутија тако да се у i -ту распоређује n_i елемената једнак је:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

7 Генерисања пермутација и комбинација.

Пермутација

Генерисање је одређивање свих пермутација скупа од n елемената у складу са неким правилом које одређује редослед. То правило је истовремено и једно **уређење** скупа.

Дефиниција 7.1. (Лексикографско уређење) Нека су A и B две пермутације скупа $\mathbb{N}_n$:

$$\begin{aligned} A &= a_1 a_2 \dots a_n, & a_i &\in \mathbb{N}_n \\ B &= b_1 b_2 \dots b_n, & b_i &\in \mathbb{N}_n \\ \text{при чему} && a_i &\neq a_j \text{ за } i \neq j \\ && b_i &\neq b_j \text{ за } i \neq j \end{aligned}$$

У лексикографском уређењу, пермутација A је испред B ако важи:

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}, a_k < b_k$$

Важи:

1. прва пермутација $\mathbb{N}_n$ је $123 \dots n$
2. друга пермутација $\mathbb{N}_n$ је $123 \dots n(n-1)$

⋮

т. последња пермутација $\mathbb{N}_n$ је $n(n-1)(n-2) \dots 321$

Алгоритам 7.1. (Наредна пермутација) Прихвата пермутацију $A = a_1 a_2 \dots a_n$, а враћа наредну пермутацију у складу са лексикографским уређењем.

- K1** Ако су бројеви a_i ($1 \leq i \leq n$) уређени у опадајући низ, онда је A последња пермутација у лексикографском уређењу, па наредна не постоји. У супротном, прећи на следећи корак.
- K2** Пронаћи први елемент здесна за који важи да је мањи од свог следбеника (пошто пермутација није последња, елемент постоји).
- K3** Одредити најмањи елемент a_j који је већи од a_i , и налази се након њега у пермутацији.
- K4** Заменили места a_i и a_j , а елементе након a_i сортирати растуће.
- K5** **КРАЈ**

Коментар. k -ту пермутацију можемо генерисати тако што их генеришемо све, и тражимо k -ту по реду, или специјалним алгоритмом.



Коментар. Случајну пермутацију генеришемо тако што за први елемент поставимо неки елемент скупа $\mathbb{N}_n$, за други из $\mathbb{N}_n \setminus \{n_1\}$ и тако даље.



Комбинације

Генерисање подразумева одређивање свих комбинација у неком поретку.

Поново разматрамо лексикографско уређење, и с обзиром да једну комбинацију од k елемената можемо представити на $k!$ начина, бирамо ону у којој су чланови уређени растуће.

За лексикографско уређење комбинација k елемената скупа $\mathbb{N}_n$ ($k \leq n$) важи:

1. прва пермутација је $123 \dots k$ (првих k елемената)

2. друга пермутација је $123 \dots (k-1)(k+1)$

⋮

m. последња пермутација је $(n-k+1)(n-k+2) \dots (n-1)n$ (последњих k елемената)

Лема 7.1. Уређена бинарна n -торка која садржи тачно k јединица једнозначно одређује једну комбинацију k елемената скупа $\mathbb{N}_n$.

Пример: $n = 5$ $k = 3$ $(0, 1, 0, 1, 1) = 245$

Лексикографско уређење комбинација (k елемената скупа $\mathbb{N}_n$) своди се на пермутације са понављањем мултискупа од n елемената од којих су k јединице, а остатак нуле.

1. прва комбинација одређена је пермутацијом $\underbrace{11 \dots 1}_k 00 \dots 0$

2. друга $\underbrace{11 \dots 1}_{k-1} 0100 \dots 0$

⋮

m. последња $00 \dots 0 \underbrace{11 \dots 1}_k$

Примећујемо да свака комбинација сем последње има $(0, 1)$ -репрезентацију облика:

$$\underbrace{a_1 a_2 \dots a_{i-1}}_{\text{префикс}} 1 00 \dots 0 \underbrace{11 \dots 1}_{\text{не мора да постоји}}$$

Наредна комбинација је облика:

$$a_1 a_2 \dots a_{i-1} 011 \dots 100 \dots 0$$

Префикс се преписује, јединица са његовог краја се замењује нулом, дописује се потребан број јединица (до k) и преостали простор комплетира нулама.

8 Функције генератрисе. Дефиниција и основна својства. Биномна формула за целобројне експоненте.

Сваком низу (реалних) бројева $(a_n) = (a_0, a_1, \dots, a_k, \dots)$ можемо једнозначно придружити степени ред $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ($x \in \mathbb{R}$)

У случају да овај ред конвергира (у неком интервалу), његову суму називамо функцијом генератрисом низа (a_n) A .

Низу $(a_n) = (1, 1, \dots, 1, \dots)$ одговара степени ред $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ који конвергира ка $\frac{1}{1-x}$ када $|x| < 1$.

Коментар. Сума геометријског низа: $1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1-x}$



Коментар. Функција генератриса садржи све информације о степеном реду. Ако диференцирамо функцију k пута у тачки $x = 0$ и резултат помножимо са $\frac{1}{k!}$, добићемо коефицијент који се налази уз x^k .

$$(a_n) \longleftrightarrow A$$

Довољно је да степени ред конвергира у било ком интервалу и да се сви његови коефицијенти могу одредити диференцирањем добијене суме у некој тачки тог интервала.



Лема 8.1. За $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$ коефицијент који се налази уз x^k у развоју израза $(1 + x + x^2 + \dots)^n$ једнак је

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Доказ. Коефицијент уз x^k у производу

$$\underbrace{(x^0 + x^1 + \dots +) \cdot (x^0 + x^1 + \dots +) \cdot \dots \cdot (x^0 + x^1 + \dots +)}_n$$

једнак је броју избора по једног сабирка из сваког од фактора, уз услов да је сума степена изабраних сабирака једнака k (учествују само $x^0, x^1, \dots, x^k$).

Описани избор једнак је избору k јединица из низа $\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_n$ тако да се i -та јединица бира онолико пута колики је степен сабирка изабраног из i -тог фактора.

То је неуређени избор k елемената низа од n елемената (са дозвољеним

понављањем) што је:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

■

Лема 8.2. За $n \in \mathbb{N}$ и $|x| < 1$ коефицијент који се налази уз x^k у развоју $(1-x)^{-n}$ једнак је:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Доказ.

$$(1-x)^{-1} = \left(\frac{1}{1-x} \right)^n \stackrel{\text{Ф.Г}}{=} (1+x+x^2+\dots)^n$$

што је $\binom{n+k-1}{k}$ по претходној леми.

■

Лема 8.3. За $n \in \mathbb{N}$ и $|x| < 1$ коефицијент који се налази уз x^k у развоју $(x+1)^{-n}$ је $\binom{-n}{k}$

Доказ.

$$\frac{1}{x+1} = (1-x+x^2-x^3+\dots)^n$$

па је коефицијент једнак $(-1)^k \binom{n+k-1}{k}$ што је $\binom{-n}{k}$ по негацији горњег индекса.

■

Теорема 8.1. (Биномна теорема за целобројне експоненте (уопштена биномна формула))

$$n \in \mathbb{Z} \quad |x| < 1 \quad (x+1)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$$

Доказ.

- За $n \in \mathbb{N}^*$ тврђење следи на основу биномне формуле јер за $k > n$ важи $\binom{n}{k} = 0$
- За $n < 0$ тврђење следи на основу претходне леме 8.3.

■

9 Одређивање функција генератриса.

Подразумева израчунавање суме одговарајућег степеног реда.

$$\begin{aligned}(a_n) &= (a_0, a_1, \dots, a_k, \dots) \\ (b_n) &= (b_0, b_1, \dots, b_k, \dots) \\ A(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\end{aligned}$$

Сабирање низова

$$\begin{aligned}(a_n) + (b_n) &= (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots) \\ \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = A(x) + B(x)\end{aligned}$$

Множење низа скаларом

$$\begin{aligned}c \in \mathbb{R} \quad c(a_n) &= (ca_0, ca_1, \dots) \\ \sum_{k=0}^{\infty} (ca_k) x^k &= c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = c \cdot A(x)\end{aligned}$$

Померање низа за k места улево

$$\begin{aligned}(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots) \\ \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+k} x^i &= \frac{A(x) - (a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1})}{x^k}\end{aligned}$$

Померање низа за k места удесно

$$\begin{aligned}(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, a_0, a_1, \dots, a_k, \dots) \\ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{k+1} &= x^k A(x)\end{aligned}$$

Замена x са cx у функцији генератрисе

$$\begin{aligned}A(cx) &= a_0 + a_1 cx + a_2 c^2 x^2 + \dots + a_k c^k x^k \\ &\quad (a_0, ca_1, \dots, c^k a_k, \dots) \\ c = -1 \quad &(a_0, -a_1, a_2, -a_3, \dots)\end{aligned}$$

Замена x са x^k у функцији генератрисе

$$A(x^k) = a_0 + a_1x^k + a_2x^{2k} + \dots + a_kx^{k^2} + \dots$$

$$(a_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, \underbrace{a_1, 0, \dots, 0}_{k-1}, a_2, \dots)$$

Диференцирање функције генератрисе

$$A'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + ka_kx^{k-1} + \dots$$

$$(a_1, 2a_2, \dots, ka_k, \dots)$$

Интеграција функције генератрисе

$$\int A(x)dx = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots + \frac{a_k}{k+1}x^{k+1} + \dots$$

$$(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \dots, \frac{a_k}{k+1}, \dots)$$

10 Композиције и партиције бројева. Основна својства.

Композиција природног броја n на k сабирака је уређена k -торка $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ ($a_i \in \mathbb{N}$) таква да важи:

$$n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_k}_{\text{сабирци композиције}}$$

Коментар. Други називи: уређене партиције, уређена разлагања природног броја.



Теорема 10.1. Број композиција природног броја n на k сабирака једнак је $\binom{n-1}{k-1}$.

Доказ.

$$n = 1_1_1_ \dots _1$$

на $n - 1$ пртица је потребно распоредити k знакова $+$ (неуређени избор елемената).

Након распоређивања плусева, јединице без плусева између у збиру дају један сабирак, те имамо k сабирака.



Теорема 10.2. Број композиција природног броја n је 2^{n-1} .

$$\text{Доказ. } \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \stackrel{\text{Б.Ф.}}{=} 2^{n-1}$$

■

Партиција природног броја n на k сабирака је мултискуп $[a_1, a_2, \dots, a_k]$ природних бројева, такав да важи $n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_k}_{\text{сабирци партиције}}$

- $p(n)$ - број партиција броја n
- $p_k(n)$ - број партиција броја n на k сабирака
- $[1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n}]$ - запис партиције броја n
- $m_i \in \mathbb{N}^*$ - број појављивања сабирака i у мултискупу

За разлику од композиције, код партиције поредак елемената није важан.

Формула за одређивање броја партиција не постоји, и он се одређује коришћењем рекурентних формула или функције генератрисе низа $p(n)$ (за мале бројеве може да се рачуна директно).

Теорема 10.3. $p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-k) + \dots + p_1(n-k)$

Доказ.

$$\begin{aligned} n &= a_1 + a_2 + \dots + a_k \\ n - k &= (a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \dots + (a_k - 1) \end{aligned}$$

Добили смо партицију броја $n - k$ (ако је $a_i = 1$ биће 0).

Ова једнакост је бијекција између скупа партиција n на k у скупа партиција $n - k$ на k , те тврђење важи.

■

Теорема 10.4. Функција генератриса низа $p(n)$ одређена је са

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^i}$$

Доказ. Доказујемо разлагањем свих партиција броја n на оне које садрже један фиксиран сабирак на оне које га не садрже, па налазимо њихове функције генератрисе.

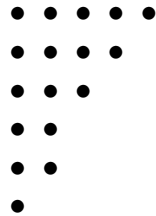
■

11 Ферерсови дијаграми. Конјуговане партиције броја. Идентитети са партицијама.

Партиција неког броја се Ферерсовим дијаграмом представља распоређивањем маркера у врсте и колоне (свака врста одговара сабирку партиције).

Маркери су уређени нерастуће (скроз горе је највећи).

Пример 11.1. $17 = 5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1$



Две партиције броја n су (међусобно) конјуговане ако се Ферерсов дијаграм једне добија транспоновањем Ферерсовог дијаграма друге.

$$5 = 3 + 2$$

$$5 = 2 + 2 + 1$$



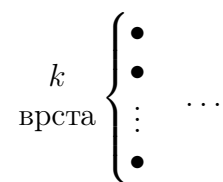
Партиција је *самоконјугована* ако је њен Ферерсов дијаграм инваријантан у односу на транспоновање (ако је симетрична матрица).

Идентитети

1) Број партиција n на највише k сабирака једнак је броју партиција $n + k$ на k сабирака

Доказ.

партиција броја $n + k$ на k сабирака



Ако уклонимо прву колону, преостаће n тачака, и највише k редова, те је успостављена бијекција између скупова Ферерсових дијаграма који представљају партиције $n + k$ на k сабирака и партиције n на највише k сабирака.



2) Број партиција n на највише k сабирака једнак је броју партиција броја n на сабирке $\mathbb{N}_k$.

Доказ. Ферерсов дијаграм партиције n на највише k сабирака је конјугована Ферерсовом дијаграму партиције n на сабирке који припадају скупу $\mathbb{N}_k$. (бијекција)



3) Број партиција броја n на парне сабирке једнак је броју партиција броја n у којима се сваки сабирак појављује паран број пута.

Доказ.

$$\left(\begin{matrix} \overbrace{\cdot \cdot \cdot \cdot}^{2n} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \underbrace{\cdot \cdot \cdot \cdot}_{2k} \end{matrix} \right)^T = \cdot \cdot \cdot$$



4) Број самоконјугованих партиција броја n једнак је броју партиција n у којима су сабирци различити и непарни.

12 Рекурентне једначине. Дефиниција и решења. Линеарна рекурентна једначина и њено опште решење.

$$n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1} \in \mathbb{R}$$

$$\phi: \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \quad a_{n+k} = \phi(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1})$$

рекурентна једначина k -тог реда

Пример 12.1. Низ факторијела бројева скупа $\mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} a_{n+1} = (n+1)a_n \\ a_0 = 1 \end{cases} \leftarrow \text{почетни услов}$$

Рекурентном једначином се рекурзивно дефинише неки низ бројева.

Решење рекурентне једначине је било који низ (a_n) такав да, за свако $n \in \mathbb{N}^*$, његови чланови задовољавају ту једначину.

Опште решење рекурентне једначине зависи од k константни (првих k чланова низа). Различита решења добијају се из општег изборима вредности константни. Услови који једнозначно одређују вредности ових константи зову се почетни услови. Једно издвојено решење, које је одређено неким почетним условима називамо партикуларно решење.

За произвољну вредност n , n -ти члан низа (a_n) називамо општи члан низа.

Коментар. Одређивање општег решења једначине у пракси се своди на одређивање општег члана низа који задовољава ту једначину у функцији од n и константи које се потом могу одредити на основу почетних услова.



Линеарна рекурентна једначина k -тог реда

$$f_0(n)a_n + f_1(n)a_{n+1} + \dots + f_k(n)a_{n+k} = f(n)$$

Две врсте:

- са константним коефицијентима $(\forall n \ f_i(n) = c)$
- са функционалним коефицијентима

Једначина је хомогена ако важи да је $f(n) = 0$. У супротном, једначина је нехомогена.

У нормализованом облику линеарне рекурентне једначине важи $f_k(n) = 1$.

Решења $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), \dots, (a_n^{(r)})$ су зависна ако се једно од њих може представити као линеарна комбинација осталих. У супротном су независна.

Теорема 12.1. Решења $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), \dots, (a_n^{(r)})$ хомогене једначине су независна ако и само ако важи:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & \dots & a_1^{(r)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & \dots & a_2^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_r^{(1)} & a_r^{(2)} & \dots & a_r^{(r)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Доказ.

$\Rightarrow$ Независност решења $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), \dots, (a_n^{(r)})$ даје и независност колона-вектора матрице A , па је ранг матрице једнак r , и $\det(A) \neq 0$.

$\Leftarrow$ Ако важи $\det(A) \neq 0$, онда је ранг матрице једнак r , па су колоне (и решења) линеарно независне. ■

Коментар. Приметимо да су два решења $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)})$ зависна уколико су одговарајући чланови низова пропорционални, то јест уколико за свако $n \in \mathbb{N}^*$ важи једнакост $a_n^{(1)} = c a_n^{(2)}$, при чему је c нека фиксирана константа. ☞

Теорема 12.2. Уколико су $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), \dots, (a_n^{(k)})$ независна решења хомогене једначине, тада је опште решење:

$$a_n = c_1 a_n^{(1)} + c_2 a_n^{(2)} + \dots + c_k a_n^{(k)}$$

при чему су $c_1, c_2, \dots, c_k$ константе.

Опште решење нехомогене линеарне рекурентне једначине облика је:

$$a_n = h_n + p_n$$

h_n - опште решење одговарајуће хомогене једначине

p_n - партикуларно решење дате нехомогене једначине

13 Линеарна рекурентна једначина са константним коефицијентима.

Облика је:

$$f_0 a_n + f_1 a_{n+1} + \dots + f_k a_{n+k} = f(n)$$

при чему су $f_0, f_1, \dots, f_k$ реалне константе.

Решење је одређено њеном карактеристичном једначином:

$$f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots + f_k x^k = 0$$

Одређивање општег решења хомогене једначине:

- Ако су нуле карактеристичне једначине $x_1, x_2, \dots, x_k$ једноструке:

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + \dots + c_k x_k^n \quad (\text{не морају бити реалне})$$

- Ако постоји нула x_i мултиплицитета m :

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + \dots + c_{i-1} x_{i-1}^n + c_i x_i^n + c_{i+1} n x_i^n + c_{i+2} n^2 x_i^n + \dots c_{i+m-1} n^{m-1} x_i^n$$

Одређивање партикуларног решења нехомогене једначине (са константним коефицијентима)

- разликујемо већи број случајева у зависности од облика функције f
- Ако важи $f(n) = P_d(n)b^n$, где је P_d полином степена d , а b реална константа
 - $x = b$ није нула

$$p_n = (A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \dots + A_d n^d) b^n$$

- $x = b$ јесте нула мултиплицитета m

$$p_n = n^m (A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \dots + A_d n^d) b^n$$

- Партикуларно решење биће одређено када се одреде непознати коефицијенти $A_0, A_1, \dots, A_d$ које израчунавамо заменом добијеног облика у првобитној једначини.

Коментар. Два подслучаја која следе:

1. функција f је полином степена не већег од d

- $x = 1$ није нула карактеристичне једначине:

$$p_n = A_0 + A_1 n + \dots + A_d n^d$$

- $x = 1$ јесте нула мултиплицитета m :

$$p_n = n^m (A_0 + A_1 n + \dots + A_d n^d)$$

2. $f(n) = cb^n$

- $x = b$ није нула карактеристичне једначине

$$p_n = Ab^n$$

- $x = b$ јесте нула мултиплицитета m

$$p_n = n^m Ab^n$$



14 Функције генератрисе и решавање рекурентних једначина.

Нека је линеарна рекурентна једначина са константним коефицијентима, уз почетне услове, задата на следећи начин:

$$\begin{cases} f_0 a_n + f_1 a_{n+1} + \dots + a_{n+k} = 0 \\ a_0 = c_0, a_1 = c_1, \dots, a_{k-1} = c_{k-1} \end{cases}$$

Теорема 14.1. Функција генератриса низа (a_n) одређеног рекурентном једначином облика је:

$$A(x) = \frac{P(x)}{f_0 x^k + f_1 x^{k-1} + \dots + 1}$$

($P(x)$ - полином степена строго мањег од k)

Доказ. Јасно је да се функција генератриса низа (a_n) (сума неког конвергентног степеног реда) може записати у датом облику (P је такође сума неког степеног реда). Потребно је доказати да је P полином степена мањег од k .

$$\begin{aligned} P(x) &= A(x)(f_0 x^k + f_1 x^{k-1} + \dots + 1) \\ P(x) &= (a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k + \dots)(f_0 x^k + f_1 x^{k-1} + \dots + 1) \end{aligned}$$

Коефицијент уз x^{n+k} са десне стране ове једнакости (за $n \geq 0$) је:

$$f_0 a_n + f_1 a_{n+1} + \dots + a_{n+k}$$

Међутим, пошто низ (a_n) задовољава почетну једначину, ова вредност је једнака нули за свако $n \geq 0$. ■

Функција генератриса из претходне теореме се може одредити израчунавањем коефицијената полинома P на основу почетних услова.

Ако у имениоцу функције генератрисе заменимо x са $\frac{1}{x}$, и помножимо именилац са x^k , добићемо израз из карактеристичне једначине

$$f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots + f_k x^k = 0$$

То значи да функција генератриса садржи комплетну информацију о карактеристичној једначини.

Пример 14.1.

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

Решење.

$$\underbrace{\frac{A(x) - a_0}{x}}_{\text{функција генератриса померена за једно место улево}} = \underbrace{2A(x) + \frac{1}{1-x}}_{1 \text{ је } n\text{-ти члан низа } (1, 1, \dots, 1, \dots)}$$

⋮

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{P_1}{1-x} + \frac{P_2}{1-2x} \\ \Rightarrow A(x) &= -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-2x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(2^n - 1)}_{\text{општи члан}} x^n \end{aligned}$$

□

15 Партиције скупова. Стирлингови бројеви 2. врсте и Белови бројеви.

Партиција скупа $\mathbb{N}_n$ на k подскупова је скуп његових непразних дисјунктних подскупова $S_1, S_2, \dots, S_k$ таквих да важи:

$$\mathbb{N}_n = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$$

Једина партиција празног скупа је празан скуп.

Стирлингов број друге врсте, у ознаци $S(n, k)$, једнак је броју партиција скупа од n елемената на k подскупова.

Белов број, у ознаци $B(n)$, једнак је броју партиција скупа од n елемената

$$B(n) = \sum_{k=0}^n S(n, k)$$

$k = 0$ јер укључујемо и празан скуп

Теорема 15.1. Стирлингови бројеви друге врсте задовољавају рекурентну једначину:

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k)$$

Доказ. Све партиције скупа $\mathbb{N}_{n+1}$ на k подскупова можемо добити:

- бирањем $k-1$ подскупова из скупа $\mathbb{N}_n$ и додавањем једночланог скупа $\{n+1\}$
- бирањем k подскупова из скупа $\mathbb{N}_n$ и придодавањем $\{n+1\}$ на неки од чланова (за то имамо k начина)

■

На ову рекурентну једначину додајемо и почетне услове:

$$\begin{aligned} S(n, 1) &= 1 \\ S(n, n) &= 1 \end{aligned}$$

Теорема 15.2. Белови бројеви одређени су рекурентном једначином

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(k)$$

16 Фибоначијеви бројеви. Златни пресек. Општи члан и функција генератриса Фибоначијевог низа.

Фибоначи је до низа дошао бавећи проблемом броја зечева унутар једне колоније.

Тврђење 16.1. Фибоначијев низ је одређен рекурентном једначином:

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\ F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases}$$

Фибоначијеви бројеви су чланови Фибоначијевог низа.

Златна подела (златни пресек) је подела дужи таква да важи да је однос целе дужи и дужег дела једнак односу дужина дужег и краћег дела.

$$\frac{d+k}{d} = \frac{d}{k} \quad d > k$$

Без губљења на општости, можемо претпоставити да је $k = 1$:

$$\frac{d+1}{d} = d \quad / \cdot d$$

$$d^2 - d - 1 = 0$$

$$d_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \quad (\text{дужина мора бити позитивна})$$

Теорема 16.1. Општи члан Фибоначијевог низа је:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Доказ.

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad - \text{ карактеристична једначина}$$

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\
F_n &= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \\
n = 0 : \quad 0 &= c_1 + c_2 \quad c_1 = -c_2 \\
n = 1 : \quad 1 &= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\
1 &= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}}{2} \right) \\
c_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\
F_n &= \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

■

Теорема 16.2. Општи члан Фибоначијевог низа је:

$$F(n) = \left[\frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n}{\sqrt{5}} \right]$$

Коментар. $[x]$ - заокруживање на најближи цео број



Доказ. Оценимо разлику између F_n и оваквог општег члана.

$$\left| F_n - \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n}{\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{\cancel{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n}}{\sqrt{5}} - \frac{\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n}{\sqrt{5}} - \frac{\cancel{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n}}{\sqrt{5}} \right|$$

С обзиром да је њихова апсолутна разлика мања од $\frac{1}{2}$, важи једнакост.

■

Теорема 16.3. Функција генератриса Фибоначијевог низа одређена је са:

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Доказ.

$$\begin{aligned}\frac{F(x) - F_1(x) - F_0}{x^2} &= \frac{F(x) - F_0}{x} + F(x) \\ F(x) \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 1 \right) &= \frac{1}{x} \\ F(x) \frac{1 - x - x^2}{x^2} &= \frac{1}{x} \\ F(x) &= \frac{x}{1 - x - x^2}\end{aligned}$$

■

17 Својства Фибоначијевих бројева.

Теорема 17.1. $\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}}_n$, за $n \geq 1$

Доказ. Индукцијом по n .

$$\text{БИ } (n = 1) : \frac{F_2}{F_1} = 1 \quad 1 = 1$$

ИХ: Важи за $n - 1$

$$\text{ИК: } \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} \stackrel{\text{ИХ}}{=} 1 + \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}}_n$$

■

Теорема 17.2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Доказ. $1 < \frac{F_{n+1}}{F_n} < 2 \leftarrow$ низ је ограничен.

Непарни чланови монотono расту, док парни чланови монотono опадају.

$\Rightarrow$ Оба низа конвергирају ка $x \in (1, 2)$ то јест $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ који је, на основу претходне теореме једнак:

$$\begin{aligned}x &= 1 + \frac{1}{x} \\ \Rightarrow x^2 - x - 1 &= 0 \\ x &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

■

Теорема 17.3. $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$

Доказ.

$$\begin{aligned} F_n &= F_{n+2} - F_{n+1} \\ \sum_{i=1}^n F_i &= (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3) + \dots + (F_{n+2} - F_{n+1}) \\ &= F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1 \end{aligned}$$

■

Теорема 17.4. $n \geq 1, \quad F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$

Доказ. Индукцијом по n .

$$\begin{array}{l} \boxed{\text{БИ}} \\ n = 1 \end{array} : \quad F_2F_0 - F_1^2 = (-1)^1$$

$$1 \cdot 0 - 1 = -1 \quad -1 \equiv -1$$

$$\boxed{\text{ИХ}} : \quad F_nF_{n-2} - F_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}$$

$$\begin{array}{l} \boxed{\text{ИК}} \\ n \end{array} : \quad \begin{aligned} F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= (F_n + F_{n-1})F_{n-1} - F_n^2 \\ &= F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2 - F_n^2 = F_n(F_{n-1} - F_n) + F_{n-1}^2 \\ &= -F_nF_{n-2} + F_{n-1}^2 \stackrel{\text{ИХ}}{=} -(-1)^{n-1} = (-1)^n \end{aligned}$$

■

18 Лукасови и Каталанови бројеви.

Тврђење 18.1. Лукасов низ је одређен следећом рекурентном једначином:

$$\begin{cases} L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \\ L_0 = 2, L_1 = 1 \end{cases}$$

Коментар. Лукасови и Фибоначијеви бројеви задовољавају исту рекурентну једначину, уз различите почетне услове.



Теорема 18.1. Општи члан Лукасовог низа одређен је са:

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Доказ. Карактеристична једначина је иста као и код Фибоначијевог низа, па је и опште решење исто.

$$L_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$n = 0 \quad 2 = c_1 + c_2 \quad c_2 = 2 - c_1$$

$$n = 1 \quad 1 = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \quad / \cdot 2$$

$$2 = c_1(1 + \sqrt{5}) + (2 - c_1)(1 - \sqrt{5})$$

$$2 = c_1 + \sqrt{5}c_1 + 2 - 2\sqrt{5} + c_1 + \sqrt{5}c_1$$

$$0 = 2\sqrt{5}c_1 - 2\sqrt{5}$$

$$c_1 = 1 \quad c_2 = 1$$

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$



Теорема 18.2. Функција генератриса Лукасовог низа одређена је са:

$$L(x) = \frac{2 - x}{1 - x - x^2}$$

Доказ.

$$\frac{L(x) - L_1x - L_0}{x^2} = \frac{L(x) - L_0}{x} + L(x)$$

$$\frac{L(x) - x - 2}{x^2} = \frac{L(x) - 2}{x} + L(x) \quad / \cdot x^2$$

$$\begin{aligned}
L(x) - x - 2 &= x \cdot L(x) - 2x + x^2 L(x) \\
L(x) - xL(x) - x^2 L(x) &= -2x + x + 2 \\
L(x) (1 - x - x^2) &= -x + 2 \\
L(x) &= \frac{2 - x}{1 - x - x^2}
\end{aligned}$$

■

Теорема 18.3. $n \geq 1 \quad L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$

Доказ. Индукцијом по n .

$$\boxed{\text{БИ}}_{n=1} : \quad L_1 = F_2 + F_0 \quad 1 = 1 + 0$$

$$\boxed{\text{ИХ}}_{n-1} : \quad L_{n-1} = F_n + F_{n-2}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{\text{ИК}}_n : \quad L_n &= L_{n-1} + L_{n-2} \stackrel{\text{ИХ}}{=} (F_n + F_{n-2}) + (F_{n-1} + F_{n-3}) \\
&= (F_n + F_{n-1}) + (F_{n-2} + F_{n-3}) = F_{n+1} + F_{n-1}
\end{aligned}$$

■

Тврђење 18.2. Каталанов низ је одређен следећом рекурентном једначином:

$$\begin{cases} C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot C_{n-i-1} \\ C_0 = 1 \end{cases}$$

Општи члан Каталановог низа је:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Низ заграда је коректан ако се отворене и затворене заграде у формули могу поставити у том распореду.

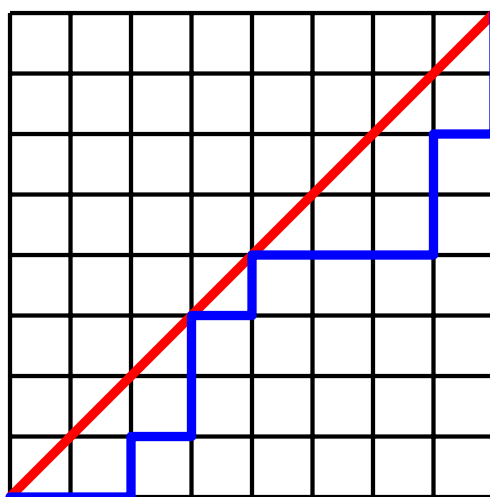
Општи случај коректног низа заграда је:

$$\begin{array}{c} (z_1)z_2 \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{коректни низови заграда} \end{array}$$

Број коректних распореда n парова заграда једнак је Каталановом броју C_n .

Пример 18.1. Менхетн проблем.

Нека је дата квадратна табла формата $n \times n$.



Монотони пут је пут који полази из доњег левог угла табле, завршава у горњем десном, а креће се по ивицама поља без пресецања дијагонале.

Број монотоних путева једнак је двострукој вредности Каталановог броја C_n .

Илустровани пут даје распоред заграда $((()))((()))()$.

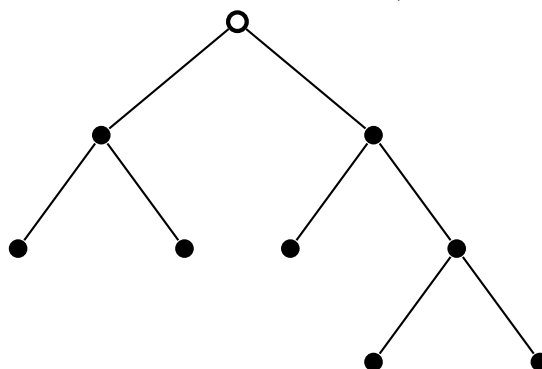
Дефиниција 18.1. Дат је коначан скуп објеката које називамо чворови, и релација поретка **наследник** дефинисана на том скупу. Тада се **потпуно коренско бинарно стабло** састоји од:

- једног чвора (који називамо корен) *или*
- два потпуна коренска бинарна стабла и једног додатног чвора таквих да су по дефиницији оба корена два стабла наследници новог чвора (који тиме постаје јединствени корен, док два стабла постају подстабла новог стабла)

Свако коренско стабло има јединствени корен.

Чворове који немају наследнике називамо листови.

Чвор који није лист има тачно два наследника (леви и десни).



Позиционо потпуно коренско бинарно стабло прави дистинкцију између левог и десног чвора наследника (тима и левог и десног подстабла).

Коментар. Дефиниција потпуног коренског бинарног стабла се може уопштити на произвољно потпуно k -арно стабло. У њему, сваки чвор који није лист има тачно k наследника.

Чворови непотпуног стабла могу имати мање од k наследника.



За $n \geq 0$, број позиционих потпуних коренских бинарних стабала чији број листова

износи $n + 1$ је једнак Каталановом броју C_n .

Доказ. Коректне низове заграда можемо дефинисати рекурзивно:

- празан низ заграда је коректан
- ако су Z_1 и Z_2 коректни низови заграда, онда је и низ $(Z_1)Z_2$ такође коректан.

Између скупа коректних низова n заграда и скупа позиционих потпуних коренских бинарних стабала чији је број листова $n + 1$ постоји бијективно пресликавање:

- празан низ заграда пресликава се у стабло које се састоји од једног чвора
- ако се коректни низови заграда Z_1 и Z_2 пресликавају у стабла T_1 и T_2 , онда се низ $(Z_1)Z_2$ пресликава у стабло које се добија увођењем новог чвора (корена) чији су леви и десни наследник редом корени стабала T_1 и T_2 .



II

Теорија графова

19 Типови графова, основни појмови, својства и инваријанте. Шетње, стазе и путеви. Матричне репрезентације графа.

- Прост граф (или само граф) је уређени пар $G = (V, E)$
 - V - скуп чворова ($V(G)$)
 - E - скуп грана (двочлани подскупови скупа V) ($V(E)$)
- Сматрамо да је скуп чворова непразан и коначан.
 - n - број чворова ($\in \mathbb{N}$)
 - m - број грана ($\in \mathbb{N}^*$)
- Грана спаја два чвора којима је одређена (такви чворови су суседни).
- Грана која спаја два чвора је инцидентна са сваким од њих, а ти чворови су крајеви гране
- степен чворова (d_u) - број грана инцидентних са тим чвором
- околина чвора ($N(u)$) - скуп свих њему суседних чворова
- минимални степен чвора у графу - δ
- максимални степен чвора у графу - Δ
- u - произвољан чвор, e - произвољна грана графа G
 - $G - u$ - граф добијен уклањањем чвора u и њему инцидентних грана
 - $G - e$ - граф добијен уклањањем гране e
 - Ако e није грана графа G , $G + e$ је граф добијен додавањем e у G

Типови графова (могу се комбиновати)

- граф са петљама - допушта постојање грана чија су оба краја исти чвор
- мултиграф - допушта постојање више грана између два чвора
- тежински граф - свакој грани је придружена нека нумеричка вредност (тежина гране)
- усмерени граф (оријентисани граф, диграф) - свака грана може поседовати усмерење од једног чвора ка другом
 - Улога зависи од контекста
 - Грану са усмерењем, уместо као скуп, разматрамо као уређени пар

Коментар. Прост граф је специјалан случај тежинског графа где су све гране тежине 1.



Теорема 19.1. Сума степена чворова једнака је двоструком броју грана.

$$\sum_{i=1}^n d_{u_i} = 2m$$

Доказ. С обзиром да су гране инцидентне са по два чвора, биће пребројане двапут.



Теорема 19.2. Број чворова непарног степена није непаран.

Доказ. Када би био, сума степена чворова би била непарна, што је у контрадикцији са претходном теоремом.



Коментар. Претходне две теореме важе за све графове, изузев графова са петљама.



- Графови G и H су изоморфни ако постоји бијекција $f : V(G) \xrightarrow[\text{на}]{1-1} V(H)$ која чува суседство између чворова (тј. ако се разликују само у означавању чворова и грана).
- Инваријанта графа је функција дефинисана на скупу свих графова, и има исту вредност за изоморфне графове. (пример: број чворова, број грана, δ , Δ , ...)
- Подграф графа $G = (V, E)$ је граф $G' = (V', E')$ за коју важи $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ (G садржи G').
- Индуковани подграф графа G добија се уклањањем произвољног скупа чворова из графа G (и са њима инцидентним гранама).
- Сваки индуковани подграф је истовремено и подграф, док обрнуто не важи.
- Комплемент графа $G = (V, E)$ је граф $\bar{G} = (V, \bar{E})$ с истим скупом чворова, који су суседни ако и само ако нису суседни у графу G .
- Граф је самокомплементаран ако је изоморфан свом комплементу.



Слика 2.1: Пример изоморфних графова

Шетње, стазе и путеви

- Шетња у графу је низ облика $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{k-1}, v_k)$ чији чланови наизменично чворови и гране тог графа такви да је грана e_i инцидентна с чворовима v_i и v_{i+1} .

- Шетња повезује (спаја) чворове v_1 и v_k .
- Шетња је затворена ако важи да је $v_1 = v_k$, у супротном је отворена.
- Дужина шетње је број грана које садржи.
- Неформално: Шетња пролази чворовима и гранама које садржи.
- Стаза је шетња која сваком граном пролази највише једанпут
- Пут је шетња која сваким чвором (а тиме и граном) пролази највише једанпут.
- Пут у усмереном графу (усмерени пут) одређен је низом различитих чворова $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ таквим да за $i \in [1, k-1]$ усмерени граф садржи гране (v_i, v_{i+1}) .
- Два чвора су повезана уколико постоји пут који их повезује. У супротном су неповезани.
- Граф је повезан ако су сви чворови међусобно повезани (у супротном је неповезан).
- Повезаност чворова је једна релација еквиваленције, док су њене класе еквиваленције компоненте повезаности.
- Везивни чвор графа је чвор чијим се уклањањем број компоненти повезаности увећава.
- Мост (везивна грана) графа је грана чијим се уклањањем број компонената повезаности увећава (за 1).
- У повезаном графу, клањањем везивног чвора или моста граф постаје неповезан.
- Растојање између два чвора u и v ($dist(u, v)$) представља дужину најкраћег пута који их повезује (растојање између неповезаних чворова је бесконачно).
- Ексцентрицитет чвора u ($ecc(u)$) представља растојање између тог чвора и чвора на максималном растојању од њега.
- Радијус графа G ($r(G)$) једнак је минималном ексцентрицитету чвора тог графа.
- Центар графа чине сви чворови чији је ексцентрицитет једнак радијусу графа.
- Дијаметар графа g ($diam(G)$) једнак је максималном ексцентрицитету чвора тог графа.
- Повезаност, радијус и дијаметар су инваријанте графа.

Неки графови

- Празан граф нема ниједну грану (тривијалан граф има само један чвор).
- Комплетан (потпун) граф K_n - свака два чвора су спојена граном.
- Регуларан граф - сви чворови имају једнаке степене.
- Бипартитан граф је *или*
 - тривијалан граф *или*
 - граф чији се скуп чворова може поделити на два дисјунктна подскупа тако да свака грана спаја чвор из једног са чвором из другог подскупа (празан граф је бипартитан).
- Комплетан бипартитан граф је бипартитан граф код којег је сваки чвор повезан са свим чворовима из друге партиције (степен сваког чвора је број чворова из другог скупа).
Симбол: K_{n_1, n_2} , где су n_1 и n_2 кардиналности партиција.
- Звезда је комплетан бипартитан граф за који важи $n_1 = 1$.
- Циклус (C_n) је повезан граф код којег је степен сваког чвора 2.

- Пут (P_n) је граф дефинисан као:
 - $n \leq 2$ једини повезан граф $(\bullet, \bullet - \bullet)$.
 - $n \geq 3$ граф добијен уклањањем једне гране циклуса C_n
- Дужина циклуса / пута једнака је броју њихових грана.
- Пут у графу одређује један индуковани подграф.

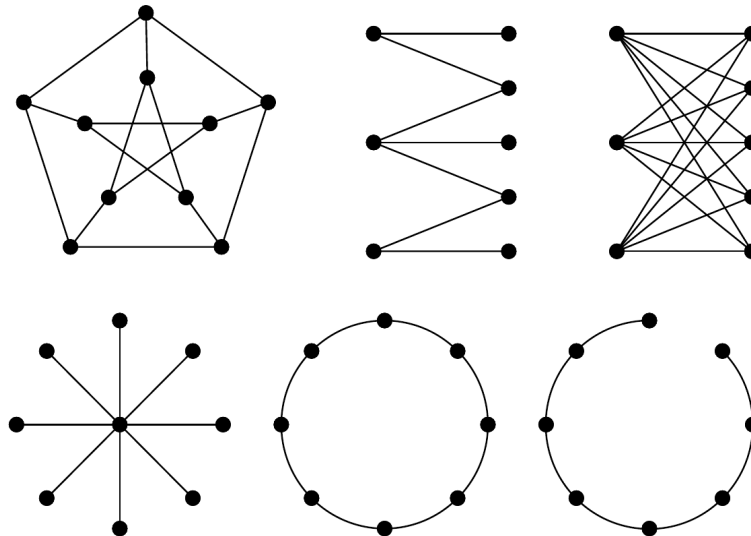
Теорема 19.3. Граф је бипартитан ако и само ако не садржи циклус непарне дужине (као подграф).

Доказ.

$\Rightarrow$ Ако би бипартитан граф садржао циклус непарне дужине, онда би свака два суседна чвора тог циклуса припадала различитим партицијама, што је немогуће јер циклус садржи непаран број чворова.

$\Leftarrow$ Издвојићемо чвор v и ставити га у први скуп. Све чворове на парном растојању од њега стављамо у први скуп, а чворове на непарном у други. Ако постоји циклус непарне дужине, два чвора ће се налазити на истом растојању од v и биће повезани, што у бипартитном графу није могуће. ■

Коментар. На слици се редом налазе један регуларан граф чији су сви чворови степена 3 (овај граф познат је као Петерсенов граф), пример бипартитног графа, комплетан бипартитан граф $K_{3,5}$, звезда $K_{1,8}$, циклус C_8 и пут P_8 .



Слика 2.2: Примери графова



Матричне репрезентације графова

$V = v_1, v_2, \dots, v_n \leftarrow$ чворови

$E = e_1, e_2, \dots, e_m \leftarrow$ гране

- Матрица суседства $A(G)$ $n \times n$
 - $(i, j) = \begin{cases} 1, & v_i, v_j \text{ суседни} \\ 0, & v_i, v_j \text{ нису суседни} \end{cases}$

- Матрица је симетрична код неусмерених графова.
- Матрица инциденције $R(G)$ $n \times m$
 - $(i, j) = \begin{cases} 1, & v_i \text{ инцидентан са } e_j \\ 0, & v_i \text{ није инцидентан са } e_j \end{cases}$
 - Свака колона садржи тачно две јединице.
- Матрична репрезентација не представља инваријанту графа, али са њом има неке сличности које се могу користити.
- Корисна је зато што садржи информације о структури и инваријантама графа, и неке трансформације графа се могу подузети операцијама над матрицама

Коментар. Практична примена (у књизи је споменуто успут):

- спектрална теорија
- спектар графа



20 Стабла. Коренска и разапињућа стабла. Претраге графова.

Стабло је повезан граф који не садржи подграф изоморфан циклусу.

Шума је неповезан граф чија је свака компонента повезаности стабло.

Теорема 20.1. Следећа тврђења су еквивалентна.

1. T је стабло.
2. T је повезан граф код којег је број грана за један мањи од броја чворова, тј. важи $m = n - 1$.
3. T је максимални граф без циклуса (додавањем било које гране настаје циклус).
4. T је минимални повезан граф (уклањањем било које гране постаје неповезан).
5. За свака два чвора графа T постоји тачно један пут који их повезује.

Коренско стабло је стабло чији је један чвор (корен) издвојен од осталих.

Нека је T коренско стабло чији је корен чвор r .

- Ако важи да је $dist(u, r) = i$, чвор u припада i -том нивоу стабла T .
- Ако u припада i -том, а v $i + 1$ -вом нивоу и ако су суседни, u је претходник чвора v , а v наследник чвора u
- Лист је чвор који нема наследника.
- Унутрашњи чвор није ни корен, ни лист.

- Коренско k -арно стабло је коренско стабло чији сваки чвор има највише k наследника.
- За потпуно коренско стабло k -арно стабло важи да сваки чвор који није лист има тачно k наследника.
- Разапињући граф графа G је граф који има исте чворове као G , а његов скуп грана је подскуп скупа $E(G)$.
- Разапињуће стабло је разапињући граф који је стабло.
- Разапињућа шума неповезаног графа се састоји из разапињућих стабала

компонената повезаности.

- Ако је T разапињуће стабло повезаног графа G , онда се додавањем произвољне гране из скупа $E(G) \setminus E(T)$ добија тачно један циклус. (елементарни циклус графа G у односу на стабло T)
- Број елементарних циклуса не зависи од избора разапињућег стабла.
- У случају повезаног графа, број елементарних циклуса износи $m - n + 1$.
- Број елементарних циклуса графа износи $\nu = m - n + p$.
 - m - број грана
 - n - број чворова
 - p - број компонената повезаности
 - ν - цикломатички број графа (једна инваријанта)

Претрага графа

- Састоји се од бирања једног по једног чвора графа (обилажење чворова) тако да сваки буде одабран тачно једанпут, у складу са неким редоследом.
- Код свих претрага, наредни чвор у обиласку је суседни неком чвору који је већ обиђен.
- Граф чији су чворови чворови графа који се претражује, а гране одређене претрагом је једно разапињуће (усмерено) стабло претраженог графа, и назива се стабло претраге.
- Код претраге у дубину и ширину полази се од произвољног чвора.
- Претраге нису јединствене, тј. пружају могућност избора пута током претраге.
- Решење: Нумерација чворова и одабир најмањег.
- Претрага у дубину (енг. Depth first search)
 - Наредни чвор суседни је претходно обиђеном, ако је то могуће.
 - Ако није, суседни је претходнику претходно обиђеног, и тако даље.
- Претрага у ширину (енг. Breadth first search)
 - Прво обилазимо све суседе првог чвора, потом све необиђене суседе другог, и тако даље.

21 Минимално разапињуће стабло тежинског графа. Краскалов и Примов алгоритам.

- Разматрамо графове којима су све тежине позитивне.
- тежина гране e - $\omega(e)$
- тежина графа G - $\omega(G) = \sum_{e \in E(G)} \omega(e)$
- Минимално разапињуће стабло повезаног тежинског графа је разапињуће стабло минималне тежине. Постоји увек и не мора бити јединствено.
- Краскалов алгоритам
 - „најпре грана најмање тежине“
 - похлепни (грамзиви) алгоритам
 - Алгоритам прихвата повезан тежински граф G , а враћа једно његово минимално разапињуће стабло.
- K1** Текући граф $T = (V(G), \emptyset)$
- K2** Уредити гране графа G у неоппадајући низ у складу са њиховим тежинама.
- K3** Нека је e наредна грана низа. Ако не постоји, прећи у K5.
- K4** Ако додавањем гране e текућем графу T настаје циклус, прећи у K3. Иначе, додати e графу T и прећи у K3.
- K5** КРАЈ

Докажимо да Краскалов алгоритам резултује минималним разапињућим стаблом повезаног тежинског графа.

Доказ. Алгоритам не може резултовати неповезаним графом, нити графом који садржи циклус (K4), што значи да је он стабло.

T - стабло добијемо Краскаловим алгоритмом.

$(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ - гране стабла уређене у складу са редоследом додавања.

ППС тежина графа T није минимална, тј. постоје стабла мање тежине.

- за свако такво стабло S је дефинисана функција

$$f(S) = \min\{i \mid e_i \notin E(S)\}$$

- S' - стабло за које је вредност функције максимална.
- Ако важи $f(S') = k$, онда су гране $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ и гране S' .
- $S' + e_k \leftarrow$ садржи циклус.
- Ако је e'_k грана тог циклуса која припада S' а не припада T (постоји јер $T \neq S'$), разматрамо $S'' = S' - e'_k + e_k$ (који је разапињуће стабло).
- $\omega(S'') = \omega(S') + \omega(e_k) - \omega(e'_k)$
- Стабла T и S'' садрже гране $e_1, e_2, \dots, e_k$.
- Пошто је e_k била следећа за додавање, важи

$$\omega(e_k) \leq \omega(e'_k) \Rightarrow \omega(S'') \leq \omega(S')$$

(заправо важи једнакост јер је S' MPC)

- $\Rightarrow S''$ је једно MPC
- али $e_1, e_2, \dots, e_k \in S''$

$$\bullet \Rightarrow f(s'') > k \quad \text{⚡}$$



Теорема 21.1. Нека је $G = (V, E)$ повезан тежински граф, $U \subset V$ и e грана минималне тежине која спаја чвор из скупа U са чвором из скупа $V \setminus U$.

Тада постоји минимално разапињуће стабло графа G које садржи грану e .

Доказ. S - МРС које не садржи грану e . Из дефиниције стабла, $S + e$ садржи циклус.

Поред гране e , том циклусу припада и нека грана e' која спаја чвор из скупа U са чвором из скупа $V \setminus U$.

Пошто важи $\omega(e) \leq \omega(e')$, уклањањем гране e' из графа $S + e$ добијамо тражено МРС.



Примов алгоритам

- „најпре најближи сусед“
 - одређивање минималне разапињуће шуме
- К1** $T = (\emptyset, \emptyset)$
- К2** Произвољан чвор из $V(G) \setminus V(T)$ додати у T . Ако такав чвор не постоји, прећи у К4.
- К3** Додати грану најмање тежине спаја чвор из T са чвором из $V(G) \setminus V(T)$. Понављати докле год је могуће и потом прећи у К2.
- К4** КРАЈ

22 Разапињућа стабла означених графова. Приферов низ.¹

Графови су изоморфни уколико се разликују само по означавању чворова. То значи да, суштински, графове са различитим означавањима третирамо као један исти граф.

Код означених графова, ознаке чворова се уважавају и тако нам омогућавају да разликујемо изоморфне графове (они остају изоморфни).

За $n \geq 2$, **Приферов низ** је било који се састоји од $n - 2$ (не нужно различита) броја скупа $\mathbb{N}_n$.

$$s_{(n)} = (s_1, s_2, \dots, s_{n-2})$$

Приферов низ $s_{(n)}$ одређује једно означено стабло које има n чворова и обратно.

Приферово кодирање

Алгоритам прихвата нетривијално² означено стабло, а враћа јединствени код тог стабла.

```

1 BEGIN
2   INPUT T = {{1, 2, 3, ..., n}, E} - стабло T
3
4   s = () - иницијализација
5
6   WHILE |V(T)| > 2
7
8     u - чвор степена 1 минималне ознаке
9     v - сусед од u
10    T := T - u
11    s := s + v - дописати члан v на крај низа s
12
13  RETURN s
14 END
```

Приферово декодирање

Алгоритам прихвата код, а враћа јединствено означено стабло је њиме одређено.

```

1 BEGIN
2   INPUT s = (s(1), s(2), ..., s(n-2)) - Приферов низ
3
4   T = ({1, 2, ..., n}, ∅) - иницијализација
5   l = (1, 2, ..., n) - помоћни низ
6
7   WHILE s ≠ ()
8     v - минимална вредност која припада l, а не припада s
9     w = s(1)
10    T := T + vw
11    l := l - v; - уклонити v из l
12    s := s - s(1); - уклонити s(1) из s, тј. померити низ s за једно место улево
13
14  спојити граном два чвора која су одређена преосталим елементима низа l
15  RETURN T
16 END
```

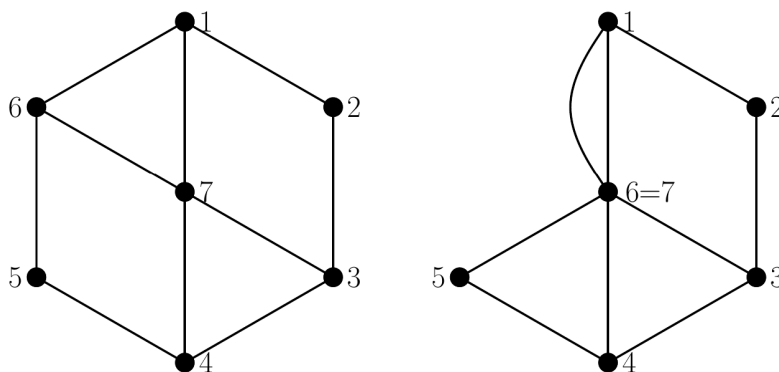
¹У уџбенику не постоји јасна дистинкција између овог и следећег питања.

²Тривијални граф има тачно један чвор и ниједну грану

23 Број разапињућих стабала означених графова. Кејлијева теорема. Цикломатички број графа.

- Означени графови су графови код којих су чворови означени неким нумеричким вредностима како би се разликовали од својих изоморфизама.
- Не постоји ефективни начин за израчунавање броја неизоморфних графова са n чланова. (исто важи и за стабла)
- (Кејлијева теорема) Број означених стабала са n чворова је n^{n-2} .
- Број разапињућих стабала означеног комплетног графа K_n једнак је броју означених стабала која имају n чворова (n^{n-2}).
- Повезани граф који садржи тачно један елементарни циклус је унициклички.
- Број разапињућих стабала сваког означеног уницикличког графа једнак је дужини његовог јединственог циклуса.
- e - грана мултиграфа G (може садржати петље).
- Контракција мултиграфа G у односу на грану e ($G \cdot e$) је мултиграф који се добија од графа $G - e$ идентификовањем чворова са којима је e била инцидентна.

Пример 23.1. На слици је илустрован граф и његова контракција у односу на грану 67.



- $t(G)$ - број разапињућих стабала означеног графа G
- За сваки означени мултиграф G важи:

$$t(G) = t(G - e) + t(G \cdot e)$$

Доказ. Свако разапињуће стабло графа G које не садржи грану e је и разапињуће стабло графа $G - e$, и обрнуто.

Свако разапињуће стабло мултиграфа G које садржи грану e једнозначно одређује разапињуће стабло мултиграфа $G \cdot e$, и обрнуто.

■

Цикломатички број графа (ν) једнак је броју елементарних циклуса графа.

$$\nu = m - n + p$$

24 Ојлерови мултиграфови. Флеријев алгоритам. Проблем кинеског поштара.

- Мултиграф је Ојлеров ако садржи затворену стазу која сваком граном пролази тачно једанпут (Ојлерова стаза).
- Мултиграф је Полу-Ојлеров ако садржи стазу која сваком граном пролази тачно једанпут (Сваки Ојлеров граф је Полу-Ојлеров).
- Проблем седам кенинсбершких мостова
- (Ојлерова теорема) За нетривијалан повезан мултиграф важи да је Ојлеров ако и само ако су му сви чворови парног степена.

Доказ.

⇒ Када у неки чвор уђемо, мора постојати друга грана помоћу које из њега излазимо.

⇐ Индукцијом по броју грана.

БИ: 

ИХ: Тврђење важи за све графове са мање од m грана.

ИК: G има m грана (сви чворови су парног степена).

G није стабло јер су сви чворови парног степена, што значи да G садржи циклус C .

С обзиром да су сви чворови који припадају циклусу степена 2, ако уклонимо све његове остаје нам (можда неповезан) граф ком свака компонента повезаности задовољава индуктивну хипотезу.

Граф G добијамо тако што, када током обиласка циклуса дођемо до чвора необиђене компоненте повезаности, обилазимо је (обилазак се завршава у чвору из којег смо кренули јер је подграф Ојлеров), и настављамо даљи обилазак циклуса.

■

Нетривијалан повезан мултиграф је Полу-Ојлеров ако и само ако садржи 0 или 2 чвора непарног степена.

Доказ. Следи из дефиниције Полу-Ојлеровог графа.

■

Флеријев алгоритам

Прихвата Ојлеров мултиграф, а враћа једну Ојлерову стазу.

```

1 BEGIN
2   INPUT G - Ојлеров мултиграф
3    $\nu_0$  - произвољан чвор
4    $s = (\nu_0)$  - иницијализација стазе
5    $H = G$  - помоћни мултиграф
6
7   WHILE  $|E(H)| > 0$ 
8     изабрати грану  $e = uv \in E(H)$  такву да:
9     (1)  $u$  је последњи чвор стазе  $s$  и
10    (2)  $e$  није мост мултиграфа  $H$ , осим ако нема другог избора

```

```

11
12   s := s + e, v;   - стази додајемо грану e и чвор v
13   H := H - e
14
15   RETURN s
16 END
17

```

Проблем кинеског поштара

- Поштар креће од поште, мора да разнесе све пошиљке и да се врати у пошту трошећи што мање времена (прелазећи што краћи пут).
- Његову путању можемо разматрати као тежински Ојлеров мултиграф.

25 Хамилтонови графови. Проблем трговачког путника. 3-хеуристика.

- Граф је Хамилтонов ако садржи циклус који пролази сваким чвором тог графа (Хамилтонов циклус).
- Граф је полухамилтонов ако садржи пут који пролази сваким чвором тог графа (Хамилтонов пут).
- Сваки Хамилтонов граф је истовремено и полухамилтонов.
- (Диракова теорема) Граф који има барем три чвора и чији минимални степен чворова задовољава неједнакост $\delta \geq \frac{n}{2}$ је Хамилтонов.

Проблем трговачког путника

- Нека је дат скуп градова повезаних путевима одређене дужине.
- Путник мора да обиђе сваки град тачно једанпут и да се врати у онај из којег је кренуо, а да притом пређе пут најмање дужине.
- Проблем се своди на одређивање Хамилтоновог циклуса минималне тежине.
- Проблем је NP-тежак.
- Једно решење било би проналажење свих Хамилтонових циклуса и одређивање оног најмање тежине (што је неефикасно).
- Коришћење хеуристичких алгоритама.
- Заједничка својства свих хеуристичких алгоритама су да је њихова примена једноставна (имају релативно једноставну имплементацију и не велику сложеност), и у општем случају не дају оптимално, већ решење блиско оптималном (подоптимално).
- 3-хеуристика³
 - Примењује над комплетним тежинским графовима (када су сви градови повезани).
 - Полази од произвољног Хамилтоновог циклуса.
 - Уклањамо три несуседне гране, и добијамо подграф који се састоји из три пута.
 - Спајањем њихових крајева на одговарајуће начине добијамо нове Хамилтонове циклусе.

³три

- Бирамо циклус најмање тежине и поступак понављамо произвољан број пута.

26 Планарни графови.

- Граф је планарни ако се може представити у равни тако да му се гране не пресецају.
- Сваки повезан планарни граф који је представљен тако да му се гране не пресецају дели раван на неки број области, од којих је тачно једна бесконачна.
- (Ојлерова теорема за планарне графове) За сваки повезан планарни граф који је представљен у равни тако да му се гране не пресецају важи:

$$n - m + f = 2$$

n - број чворова

m - број грана

f - број области

Доказ. Индукцијом по m .

БИ: Најмање m је $n - 1$, што би значило да је овај граф стабло, а стабло је планарни граф:

$$n - (n - 1) + 1 = 2 \quad \checkmark$$

ИХ: Тврђење важи за све графове са мање од m грана.

ИК: Пошто граф има више од n грана, има макар један циклус.

e је грана ток циклуса.

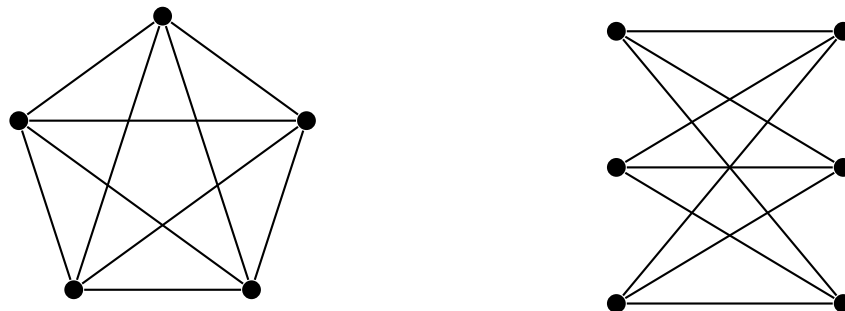
$G - e$ је повезан и дели раван на једну мање област него G . Према ИХ важи:

$$n - (m - 1) + (f - 1) = 2$$



Потподела графа добија се заменом сваке гране нетривијалним путем произвољне дужине. То можемо интерпретирати као узастопно додавање произвољног броја чворова свакој грани.

Граф је планарни ако и само ако не садржи подграф изоморфан K_5 или $K_{3,3}$.



Слика 2.3: Графови K_5 (лево) и $K_{3,3}$ (десно).

27 Спаривања у графовима.

- Спаривање је подскуп скупа грана такав да никоје две гране нису инцидентне.
- Максимално спаривање је спаривање којем се не може додати грана тако да оно остане спаривање.
- Највеће спаривање садржи највећи број грана (свако највеће је истовремено и максимално).
- Код савршеног спаривања, сваки чвор графа је инцидентан са једном граном спаривања.
- Ако граф има непаран број чворова, не може имати савршено спаривање.
- Свако савршено спаривање је и највеће.
- Ако постоји савршено спаривање, важи и обрнуто (да је свако највеће спаривање савршено).
- Пут парне дужине нема савршено спаривање, а пут непарне дужине има јединствено спаривање.
- Циклус парне дужине поседује два савршена спаривања.
- Комплетан бипартитан граф $K_{n,n}$ има $n!$ савршених спаривања.
- Комплетан граф K_{2n} има $\frac{(2n)!}{n!2^n}$ савршених спаривања.
- M је произвољно спаривање у графу G
 - Чвор u тог графа који није инцидентан ни са једном граном M је слободан у односу на спаривање M .
 - Пут $p = (v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{k-1}, v_k)$ је M -алтернирајући ако све гране или парног или непарног индекса пута p припадају спаривању M .
 - M -увећани пут је M -алтернирајући пут код којег су само крајњи чворови слободни у односу на M (не мора да постоји).

Теорема 27.1. (Бержеова теорема) Спаривање M у графу G је највеће ако и само ако граф G не садржи M -увећани пут.

Доказ.

$\Rightarrow$: Претпоставимо да постоји M -увећани пут.

P - један од увећаних путева.

$M' = M \triangle E(P)$ је веће спаривање ∇

$\Leftarrow$: Контрапозиција

Претпоставимо да M није највеће спаривање $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ постоји M -увећани пут

Ако M није највеће спаривање, значи да постоји највеће спаривање M' .

Подграф графа G са скупом грана $M \cup M'$.

Степен сваког чвора таквог подграфа није већи од 2 (сваки чвор је инцидентан са највише две гране из различитих спаривања), тј. важе да су све компоненте повезаности или путеви или циклуси.

Сваки циклус садржи исто број грана из M и M' и спаривање M садржи више грана.

$\Rightarrow$ постоји компонента пут која садржи једну више грану из M' .

$\Rightarrow$ такав пут наизменично садржи гране из M' и M а почиње и завршава се

с M' , те је он тражени M -увећани пут. ■

Проблем распореда послова (проблем запошљавања или асигнације)

- Дат је скуп послова и скуп радника (за сваког радника је познато који посао уме да обавља).
- Ако је за посао довољан један граф, проблем можемо представити као бипартитни граф.
- Тражимо највеће спаривање (Мађарски алгоритам).

28 Бојења графова. Проблем 4 боје.

- Бојење чворова графа је функција која сваки чвор пресликава у неку боју из скупа боја.
- Бојење чворова је правилно ако су суседни чворови обојени различитом бојом.
- Бојење грана графа је функција која сваку грану пресликава у неку боју из скупа боја.
- Бојење грана је правилно ако су суседне гране обојене различитом бојом.
- Бојење грана своди се на проблем бојења чворова **линијског** графа.
- Лিনিјски граф графа G , $L(G)$
 - Скуп чворова $L(G)$ одговара скупу грана графа G .
 - Чворови $L(G)$ су суседни ако и само ако су њима одговарајуће гране из графа G суседне.
- G је коренски граф свог линијског графа.
- Сваки граф (до на изоморфизам) има тачно један линијски граф и бојење грана једнозначно одређује бојење чворова линијског графа
- Сваком линијском графу који није изоморфан графу K_3 одговара тачно један коренски граф.
- Граф је k -обојив ако се може правилно обојити са k боја.
- Хроматски број графа $\chi(G)$ је минимална вредност k за коју је граф k -обојив.
- Хроматски број неповезаног графа једнак је максималном хроматском броју његових компоненти.
- $\chi(K_n) = n$
- $\chi(P_n) = 2$
- Хроматски број бипартитног графа са макар једном граном је 2 (бихроматски графови).
- $\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n = 2k \\ 3, & n = 2k - 1 \end{cases}$
- Повезан граф је χ -критичан ако је његов хроматски број χ и ако је хроматски број сваког његовог правог подграфа мањи од χ .
- Хроматски број и максимални степен чвора сваког графа задовољавају неједнакост:

$$\chi \leq \Delta + 1$$

- (Бруксова теорема) Једнакост $\chi = \Delta + 1$ важи ако и само ако је разматрани граф изоморфан комплетном графу или циклусу непарне дужине.
- Хеуристика за оптимално бојење чворова
 - Бијективно пресликавање између скупа боја и скупа $\mathbb{N}_n$.
 - Полазимо од произвољног чвора.
 - Наредни чвор бојимо „најмањом“ бојом којом нису обојени његови суседи.

Проблем распореда испита

За сваки испит постоји један термин. Који је минимални број термина тако да сваки студент може полагати све испите које жели?

Решење. Испите представљамо чворовима. Они су суседни ако исти студент жели да полаже оба испита. Минимални број термина је хроматски број овог графа.

□

Проблем бојења мапа

- Потребно је обојити мапу минималним бројем боја тако да свака територија буде обојена, а територије које се додирују буду обојене различитом бојом.
- Своди се на одређивање хроматског броја планарног графа.
- Сваки планарни граф се може правилно обојити коришћењем 4 боје (тј. χ није већи од 4).
- Провера да ли је граф 3-обојив је NP-комплетан.