

Анализа 1 (истинна питања)

1. ~~Три~~ Трицијни математичке индукције

Нека је $P(n)$ исказ који
зависи од природног броја n .
Ако важи:

$$\underbrace{P(1)}_{\text{База индукције}} \wedge \underbrace{(\forall n \in \mathbb{N}) P(n) \Rightarrow P(n+1)}_{\text{Индуктивна хипотеза}}$$

Индуктивни корак

Тада је исказ $P(n)$ тачан
за све природне бројеве

Уколико уместо $P(1)$ стоји
 $P(n_0)$ за неко $n_0 \in \mathbb{N}$, то
значи да ће исказ бити
тачан за $\forall n \geq n_0$

Трицијна неједнакост
Неједнакост троугла
 $|x| + |y| \geq |x+y|$

2. Архимедово и Катанолово својство скупа $\mathbb{R}$

Архимедова аксиома

$$(\forall a > 0)(\forall b)(\exists n \in \mathbb{N}) \text{ и } a > b$$

Последице:

- Скуп $\mathbb{N}$ није одозго ограничен у $\mathbb{R}$
- Густина скупа $\mathbb{Q}$ у скупу $\mathbb{R}$
 $(\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}) (r_1 < r_2) (\exists q \in \mathbb{Q}) r_1 < q < r_2$
- $(\forall r \in \mathbb{R})(\exists z \in \mathbb{Z}) z \leq r < z+1$

Затим је низ непразних затворених интервала $I_n = [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$

Он се назива низом улећућих интервала ако важи

$$I_{n+1} \subseteq I_n$$

за свако $n \in \mathbb{N}$

Канторова аксиома

Сваки низ затворених
уметнутих интервала
има непразан пресек.

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x \in \mathbb{R} \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x \in I_n\}$$

Последица:

• Ако дужина оваквих
интервала тежи нули
када $n \rightarrow +\infty$, њихов
пресек је непразан и
садржи тачно један
реалан број x

3. Поље реалних бројева

Поље реалних бројева је уређена шесторка

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ која задовољава следеће аксиоме

(A1) асоцијативност сабирања
$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

(A2) елемент 0 је неутрал за сабирање
$$x + 0 = 0 + x = x$$

(A3) постојање инверзног елемента за сабирање (ознака $-x$)
$$(\forall x)(\exists y) \quad x + y = 0 \quad (y = -x)$$

(A4) комутативност сабирања
$$x + y = y + x$$

(A5) асоцијативност множења
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

(A6) елемент 1 је неутрал за множење
$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

(A7) дистрибутивності множення у відношенні до додавання

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

(A8) комутативності множення

$$x \cdot y = y \cdot x$$

(A9) кожен елемент ~~кв~~ різний від нуля має інверс у відношенні до множення (ознака x^{-1})

$$(\forall x \neq 0)(\exists y) x \cdot y = y \cdot x = 1$$

(A10) нейтривісності $0 \neq 1$

(A11) $x \leq x$ (рефлексивності)

(A12) $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (антисиметричності)

(A13) $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (транзитивності)

(A14) $x \leq y \vee y \leq x$ (тотально упорядкування)

(A15) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

(A16) $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$

(APX) $(\forall a > 0)(\forall b)(\exists n \in \mathbb{N}) n \cdot a > b$

(КАН) $\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x \in \mathbb{R} \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x \in I_n\}$

Група: $(G, +, 0)$ задовољава
(A1), (A2), (A3)

Комутативна (Абелова) група:
+ (A4)

Комутативни прстен са јединицом:

$(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ и задовољава
(A1)-(A8), (A10)

Поље + (A9)

Над $\mathbb{Q}$ не важи Канторов аксиома

Бернулијева неједнакост $n \in \mathbb{N}$ $\alpha > -1$

$$(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$$

Доказ: Индукцијом по n

БИ: $n=1$ $(1+\alpha)^1 \geq 1+\alpha$ ✓

ИК: $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$ $\cdot (1+\alpha)$
 ≥ 0

$$\begin{aligned} (1+\alpha)^{n+1} &\geq (1+n\alpha)(1+\alpha) = 1+\alpha+n\alpha+n\alpha^2 \\ &= 1+(n+1)\alpha + \underbrace{n\alpha^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)\alpha \quad \checkmark \end{aligned}$$

4. Супремум и инфимум скупа.
Аксиома супремума. Број e .

Из аксиома $(A11)$, $(A12)$ и $(A13)$
следи да је релација $\leq$ на скупу
реалних бројева рефлексивна,
антисиметрична и транзитивна

што значи да је она релација
уређења, а $\mathbb{R}$ уређен скуп.

$$S \subseteq \mathbb{R}$$

- $x \in \mathbb{R}$ је мајоранта (горње ограничење)
скупа S ако $(\forall s \in S) s \leq x$

- $S^{\leq}$ - скуп горњих ограничења

- S је ограничен одозго ако $S^{\leq} \neq \emptyset$

- x је максимум скупа S ако
 $x \in S^{\leq}$ и $x \in S$ ($x = \max S$)

- ако максимум постоји,
налази се у пресеку $S \cap S^{\leq}$

- $a \in \mathbb{R}$ је миноранта (доње ограничење) скупа S ако $(\forall s \in S) a \leq s$
- $S^{\geq}$ - скуп доњих ограничења
- S је ограничен одоздо ако $S^{\geq} \neq \emptyset$
- a је минимум скупа S ако $x \in S^{\geq}$ и $x \in S$ ($a = \min S$)
- ако минимум постоји, налази се у пресеку $S^{\geq} \cap S$

- Супремум је најмање горње ограничење скупа ($\sup S := \min S^{\leq}$)
- Инфимум је највеће доње ограничење скупа ($\inf S := \max S^{\leq}$)

- $\sup S \in S \Rightarrow \sup S = \max S$

- $\inf S \in S \Rightarrow \inf S = \min S$

(СУП) Аксиома супремума

Сваки непразан, одозго ограничен
подскупи има супремум

- Сваки непразан и одозго ораничен подскупи скупи реалних бројева има супремум

Доказ: Кажемо да из (АРХ) и (КАН)
следи (СУП), и обрнуто,

тако да структура поља $\mathbb{R}$ буде
(A1) - (A16) + (АРХ) + (КАН) (=)

(A1) - (A16) + (СУП)

$\Rightarrow$ ВАНЕ (АРХ) & (КАН)

$S \subseteq \mathbb{R}$ $S \neq \emptyset$ ораничен одозго

$a_1 \in S \wedge b_1 \in S^c \Rightarrow a_1 \leq b_1$

• $a_1 = b_1 \Rightarrow \sup S = a_1$ (КАН)

• $a_1 < b_1 \Rightarrow I_1 = [a_1, b_1]$

Конструирамо низ интервала $I_n = [a_n, b_n]$

нађемо средњу тачку $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$

• ако у $[c_n, b_n]$ постоји ел. из S , то је I_{n+1}

• и супротином $I_{n+1} = [a_n, c_n]$

• Конструкција постојећег генерисања
 низа затворених интервала:

- уједињеност: $c_n \in [a_n, b_n]$

$$\Rightarrow [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$$

- a_n није левна граница S

$$(\exists s \in S) \quad a_n \leq s$$

b_n јесте левна граница S

- дужина интервала се у сваком
 кораку полови

• (обзиром да је $[a_n, b_n]$ низ
 уједињених интервала, њихов
 пресек је непразан (КАН):

$$M \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \leq M \leq b_n$$

• Јединственост:

$$\text{ппс. } \exists M_1, M_2 \in \quad (M_1 < M_2)$$

$$= (\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < M_2 - M_1 \leq \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$

према (АРХ)

$$\left. \begin{aligned} &(\forall \varepsilon = M_2 - M_1 > 0) (\exists n \in \mathbb{N}) \quad \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} < \varepsilon \\ &M_2 - M_1 < M_2 - M_1 \end{aligned} \right\} \downarrow$$

$\Rightarrow M$ је јединствен

• Треба доказати да је $\sup S = M$

• M је горња граница за S

п.т.с M није горња граница S

$$(\exists x \in S) x > M \Rightarrow x - M > 0$$

$$(\forall x) (\exists n \in \mathbb{N}) a_n - b_n < x - M$$

$$M \leq b_n \Rightarrow$$

$$b_n \leq M + (b_n - a_n) < M + (x - M) = x$$

$$\Rightarrow b_n < x \quad \Downarrow \quad (b_n \text{ је горња тр. } S)$$

• M је најмања горња граница за S

M' произв. бр. $M' < M$

$$M - M' > 0$$

$$(\forall x) (\exists n \in \mathbb{N}) b_n - a_n < M - M'$$

$$a_n \leq M : M - a_n \leq b_n - a_n < M - M' \Rightarrow a_n > M'$$

a_n није горње ограничење S

$$\Rightarrow (\exists s \in S) s \geq a_n > M'$$

$\Rightarrow M'$ није горње ограничење

$$\Rightarrow M = \sup S$$

$\Rightarrow$ ВАНИИ (СУП)

(APX) ппс. не ВАНИИ $(\forall a > 0)(\forall b)(\exists n \in \mathbb{N}) na > b$

иј $(\exists a > 0)(\exists b \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) na \leq b$

$$S = \{na : n \in \mathbb{N}\}$$

$$a \in S$$

$$S \neq \emptyset$$

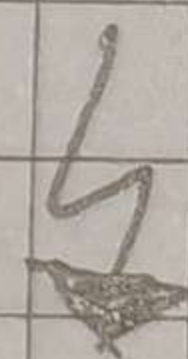
S ограничѐн одозго са b

$\Rightarrow$ прѐма (СУП) има супремум $M = \sup S$

$$M = \min S^{\leq} \text{ па } M - a_0 \notin S^{\leq}$$

$$\Rightarrow (\exists s \in S) M - a < s = n_0 a$$

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \underbrace{M}_{\in S^{\leq}} < \underbrace{(n_0 + 1) \cdot a}_{\in S}$$



$\square$ Сваки Ајѐразан, одозго ограничѐн
скизѐн има инфимум.

• МАКСИМУМ $S \subseteq \mathbb{R}$ је јединствен
ако постоји

нпс: $\exists M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ задовољавају gr max

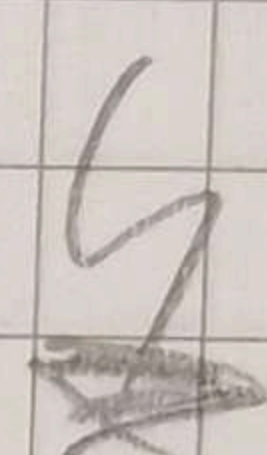
$$\Rightarrow M_1 \in S^{\leq} \text{ и } M_1 \in S$$

$$M_2 \in S^{\leq} \text{ и } M_2 \in S$$

$$\left. \begin{array}{l} M_1 \in S^{\leq} \\ M_2 \in S \end{array} \right\} \Rightarrow M_2 \leq M_1$$

$$\left. \begin{array}{l} M_2 \in S^{\leq} \\ M_1 \in S \end{array} \right\} \Rightarrow M_1 \leq M_2$$

$$M_1 = M_2$$



• МИНИМУМ $S \subseteq \mathbb{R}$ је јединствен ако
постоји

број e

$$E = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

E је непразан јер $2 \in E$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{\text{Б.Ф.}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

$$= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!}$$

$$\leq 2 + \sum_{k=2}^n 1 \cdot \frac{1}{k(k-1)} = 2 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{k(k+1)} \right)$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 + 1 - \frac{1}{n} < 3 \leftarrow \begin{array}{l} \text{ОДОВО ЈЕ} \\ \text{ОГРАНИЧЕН} \end{array}$$

$$\Rightarrow \exists \sup E =: e = 2, 71828 \dots$$

Елеров број је ирационалан и
трансцендентан

5. Проширени скупи реалних бројева

Проширење скупа $\mathbb{R}$ је скуп

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

Релација $\leq$ остаје релација
потпуне поретка на $\overline{\mathbb{R}}$ и
важи $-\infty < x < +\infty$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

Проширења операција:

$$\bullet x + (+\infty) = +\infty \quad -\infty < x \leq +\infty$$

$$\bullet x + (-\infty) = -\infty \quad -\infty \leq x < +\infty$$

$$\bullet \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \quad 0 < x \leq +\infty$$

$$\bullet x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \quad -\infty \leq x < 0$$

Неодређени: $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{1}{0}$,
 $(+\infty) - (+\infty)$, $+\infty + (-\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

На $\overline{\mathbb{R}}$ није поље

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$$

6. Дефиниција граничне вредности низa и примери.

Низ реалних бројева (x_n) има
граничну вредност (или лимес)
 x_∞ ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_\infty| < \varepsilon$$

$$x_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

Ако низ има граничну вредност
он је конвергентан. У супротном,
низ дивергира.

- Ваконстантанан низ $x_n = C, n \in \mathbb{N}$
је конвергентан и његова гр. вредност је C .

- Ако променимо коначно много чланова
низа, конвергенција и гранична
вредност се не мењају

- $a_n = \frac{1}{n} \quad \varepsilon \quad n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

• $a_n = (-1)^n$ гивертиса

пн. $n \geq 3$ конвертира ка a_∞

• $a_\infty = 1$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ $n = 2n_0 + 1$

$|(-1)^{2n_0+1} - 1| < \frac{1}{2}$

$|-1 - 1| < \frac{1}{2} \quad 2 < \frac{1}{2} \quad \downarrow$

• $a_\infty \neq 1$

$\varepsilon = \frac{|a_\infty - 1|}{2} > 0 \quad |a_n - a_\infty| < \varepsilon$

$|a_n - a_\infty| = |a_{2n_0} - a_\infty| = |(-1)^{2n_0} - a_\infty|$
 $= |1 - a_\infty| < \varepsilon$

$\Rightarrow |1 - a_\infty| < \frac{|a_\infty - 1|}{2} \quad \downarrow$

$\Rightarrow$ нпз $(-1)^n$ је гивертисан

• $x_n = n$ $\varepsilon = \frac{1}{5}$

$-\frac{1}{5} < x_{n_0} - x_\infty < \frac{1}{5}$

$-x_{n_0} < \frac{1}{5} - x_\infty$

$-\frac{1}{5} < x_{n_0+2} - x_\infty < \frac{1}{5}$

$x_{n_0+2} < \frac{1}{5} + x_\infty$

$\therefore x_{n_0+2} - x_{n_0} < \frac{2}{5}$

~~$n_0+2 - n_0 < \frac{2}{5}$~~

$2 < \frac{2}{5} \quad \downarrow$

нпз је гивертисан

Жанемо да $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ ако:

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) n \geq n_0 \Rightarrow x_n > M$$

• Низ одређено дивертира или
конвертира у проширеном смислу

~~#. Одредба конвергентности низа
како да се отера од себе~~

• Гранична вредност конвергентног
низа је јединствена.

п.п.с. $\exists C, L \in \mathbb{R} \quad C \neq L$

и C и L су граничне вредности
неког низа (x_n) :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - C| < \varepsilon$$
$$|x_n - L| < \varepsilon$$

$$\varepsilon := \frac{|L - C|}{3} > 0$$

$$\Rightarrow (\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_1) |x_n - C| < \varepsilon$$
$$(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_2) |x_n - L| < \varepsilon$$

$$n_0 := \max \{n_1, n_2\}$$

$$|x_{n_0} - C| < \varepsilon \Rightarrow x_{n_0} \in (C - \varepsilon, C + \varepsilon)$$

$$|x_{n_0} - L| < \varepsilon \Rightarrow x_{n_0} \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

јер $\cap = \emptyset$

7. Војатва конвергентних низова (алгебарске операције)

• Кажемо да је низ (x_n) ограничен ако постоји $M > 0$ такво да важи $(\forall n \in \mathbb{N}) |x_n| \leq M$

• Сваки конвергентан низ је ограничен

Доказ: (x_n) — конвергентан низ

$x_\infty \in \mathbb{R}$ — гранична вредност

$$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) |x_n - x_\infty| < \varepsilon$$

Сви ел. већеј индекса од n_0

припадају ε -окомини тачке x_∞

$$M := \max \{ |x_\infty - \varepsilon|, |x_\infty + \varepsilon|, \underbrace{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0}|}_{\text{коначан низ па има максимум}} \}$$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) |x_n| \leq M$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = 0$$

$$\text{Доказ: } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) |x_n - 0| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \dots |x_n| - 0 < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \dots ||x_n| - 0| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = 0$$

• (x_n) и (y_n) су конвергентни низови

- Линеарногит лимеса: $(\lambda x_n + \mu y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ је конвергентан за $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n + \mu \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$$

Доказ: $\lambda \neq 0$ $\mu \neq 0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_\infty$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y_\infty$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_1) |x_n - x_\infty| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}$$

$$(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_2) |y_n - y_\infty| < \frac{\varepsilon}{2|\mu|}$$

$$n_0 := \max \{n_1, n_2\}$$

$$|\lambda x_n + \mu y_n - (\lambda x_\infty + \mu y_\infty)| \leq |\lambda x_n - \lambda x_\infty| + |\mu y_n - \mu y_\infty|$$

$$= |\lambda| |x_n - x_\infty| + |\mu| |y_n - y_\infty| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} + |\mu| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\mu|} = \varepsilon$$

• $\lambda \neq 0$ $\mu = 0$

$$|\lambda x_n + \mu y_n - (\lambda x_\infty + \mu y_\infty)| = |\lambda x_n - \lambda x_\infty|$$

$$= |\lambda| |x_n - x_\infty| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

$$- \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y_\infty$$

$$(x_n) \text{ KOHBEPTET} \Rightarrow (\exists M > 0) (\forall n \in \mathbb{N}) |x_n| \leq M$$

$$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_1 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_1) |y_n - y_\infty| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$(\exists n_2 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_2) |x_n - x_\infty| < \frac{\varepsilon}{2(|y_\infty| + 1)}$$

$$n_0 := \max\{n_1, n_2\}$$

$$|x_n y_n - x_\infty y_\infty| = |x_n y_n - x_n y_\infty + x_n y_\infty - x_\infty y_\infty|$$

$$= |x_n (y_n - y_\infty) + y_\infty (x_n - x_\infty)|$$

$$\leq |x_n| |y_n - y_\infty| + |y_\infty| |x_n - x_\infty|$$

$$< |x_n| \frac{\varepsilon}{2M} + |y_\infty| \frac{\varepsilon}{2(|y_\infty| + 1)}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$- (y_n) \neq 0 \wedge \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n}$$

$$\text{Доказ: } \exists a \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{y_n}$$

• $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ КОНВЕРГЕНТНИ ИЗОВИ
 $x_n \leq y_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$

Доказ: прс. $x_\infty > y_\infty \quad \varepsilon = \frac{x_\infty - y_\infty}{3}$

$$(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_1) |x_n - x_\infty| < \varepsilon$$

$$(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_2) |y_n - y_\infty| < \varepsilon$$

$$n_0 := \max \{n_1, n_2\}$$

$$(\forall n \geq n_0) \quad \begin{aligned} x_\infty - \varepsilon &< x_n < x_\infty + \varepsilon \\ y_\infty - \varepsilon &< y_n < y_\infty + \varepsilon \end{aligned}$$

КОМБИНАЦИЈА: $y_n < y_\infty + \varepsilon < x_\infty - \varepsilon < x_n$



$$x_n \leq y_n$$

8. Теорема о три лимеса (за тризоре)

• Дати су низови $(a_n), (b_n), (c_n)$
и важи $a_n \leq b_n \leq c_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

Ако низови (a_n) и (c_n) конвертирају
ка истој граничној вредности C ,
тада је и (b_n) конвергентан и
конвертира ка истој вредности

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_1) |a_n - C| < \varepsilon$$

$$(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_2) |c_n - C| < \varepsilon$$

$$C - \varepsilon < a_n < C + \varepsilon \quad (\forall n \geq \max\{n_1, n_2\})$$

$$C - \varepsilon < c_n < C + \varepsilon$$

$$\Rightarrow C - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < C + \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = C$$

• (x_n) конвергентан $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

(y_n) ограничен

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n y_n) = 0$$

$$\begin{cases} |y_n| < M \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) |x_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x_n y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M}$$

• $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ одређено дивергентан
 $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентан

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) = \infty$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n y_n) = (\operatorname{sgn} y_\infty) \infty \quad (y_\infty \neq 0)$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0, & -1 < q < 1 \\ 1, & q = 1 \\ +\infty, & q > 1 \\ \text{не постоји} & q \leq -1 \end{cases}$

Низ је растући ако $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n \leq x_{n+1}$
 опадајући $x_n \geq x_{n+1}$

Монотон

9. Митомцова теорема и последице

Дати су низови (x_n) и (y_n) при чему је (y_n) растући низ који одређено дивергира.

Ако постоји $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \in \mathbb{R}$

тада важи $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) \left| \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - L \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow L - \varepsilon < \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} < L + \varepsilon \quad / \cdot y_{n+1} - y_n$$

$$(L - \varepsilon)(y_{n+1} - y_n) < x_{n+1} - x_n < (L + \varepsilon)(y_{n+1} - y_n) \quad / \sum_{i=n_0}^n$$

$$(L - \varepsilon) \sum_{i=n_0}^n (y_{i+1} - y_i) < \sum_{i=n_0}^n (x_{i+1} - x_i) < (L + \varepsilon) \sum_{i=n_0}^n (y_{i+1} - y_i)$$

$$\sum_{i=n_0}^n (x_{i+1} - x_i) = x_{n_0+1} - x_{n_0} + x_{n_0+2} - x_{n_0+1} + \dots = x_n - x_{n_0}$$

$$\Rightarrow (L - \varepsilon)(y_n - y_{n_0}) < x_n - x_{n_0} < (L + \varepsilon)(y_n - y_{n_0}) \quad / + x_{n_0}$$

$$x_{n_0} + (L - \varepsilon)(y_n - y_{n_0}) < x_n < x_{n_0} + (L + \varepsilon)(y_n - y_{n_0}) \quad / \cdot \frac{1}{y_n}$$

за довољно велико y_n важи > 0

$$\frac{x_{n_0}}{y_n} + (L - \varepsilon) \left(1 - \frac{y_{n_0}}{y_n}\right) < \frac{x_n}{y_n} < \frac{x_{n_0}}{y_{n_0}} + (L + \varepsilon) \left(1 - \frac{y_{n_0}}{y_n}\right)$$

$$(L - \varepsilon) < \frac{x_n}{y_n} < (L + \varepsilon)$$

• (Кошијева теорема за низове)

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентан низ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a_\infty$

Тада конвертира и низ ~~аритметичких~~ аритметичких средина

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

ка истој граничној вредности

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a_\infty$$

Доказ лежи када Мнџицову теорему применимо на низове

$$x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{и} \quad y_n = n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a_\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = a_\infty$$

$$H_n = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

• (a_n) конвергентан $a_n > 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

низ геометријских средина $G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$

је такође конвергентан $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n$

применимо Штолца на низ

$$\ln G_n = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n}$$

10. Монотонни низови, егзистенција лиме

- Низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ је :
- растући $(\forall n \in \mathbb{N}) x_n \leq x_{n+1}$
 - опадајући $(\forall n \in \mathbb{N}) x_n \geq x_{n+1}$
 - монотон ако је растући или опадајући

$\square$ Низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ је монотон.

Конвергентан је акко је ограничен
(ако је неограничен, онда је
одређено дивергентан)

$\Rightarrow$ Сваки конвергентан низ је ограничен

$\Leftarrow (x_n)$ је монотон и ограничен
(без умањена опшности кажемо
да је растући (ако није кажемо $-x_n$))

$$(\exists M > 0) (\forall n \in \mathbb{N}) |x_n| \leq M$$

$$X := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R} \quad X \neq \emptyset$$

ограничен је са M па по аксиоми

супремума има супремум $x_\infty := \sup X$

Дофинуција скупина каже
 $(\forall \varepsilon > 0)(\exists s \in X) s > x_\infty - \varepsilon \quad \text{и} \quad j.$

$$\left. \begin{aligned} &(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad x_\infty - \varepsilon < x_{n_0} \\ &(x_n) \text{ растући: } x_{n_0} \leq x_n \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad x_\infty - \varepsilon < x_n$$

а пошто је x_∞ скупина $x_n \leq x_\infty$

$$\Rightarrow |x_n - x_\infty| < \varepsilon \Rightarrow x_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

$$11. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e := \sup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

Докажем, что e — растянуто $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{(n+2)^{n+1} n^n}{(n+1)^{2n+1}} = \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= \left(\frac{n^2 + 2n(n+1-1)}{n^2 + 2n + 1} \right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

БЕРНУЛЛИ

$$\geq \left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} \right) \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{n} - \frac{\cancel{(n+1)}}{(n+1)n} = \frac{n+1-1}{n} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

12. Поднизови, тачке најомлавања низа

- Подниз низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ је низ $(x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ где је $k \mapsto n(k)$ неко строго растуће пресликавање скупа $\mathbb{N}$ на себе

ПРИМЕР: $x_n = (-1)^n$

ПОДНИЗОВИ: $x_{2n} = 1$ $x_{2n-1} = -1$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L \in \mathbb{R} \Rightarrow (\forall (x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}) L = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n(k)}$

Доказ: $(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) |x_n - L| < \varepsilon$

$(\exists k_0 \in \mathbb{N}) \underbrace{n(k_0) > n_0}_{\text{СТРОГО РАСТУЋЕ ПРЕСЛИКАВАЊЕ}} \Rightarrow (\forall k \geq k_0) n(k) > n(k_0) > n_0$

$\Rightarrow |x_{n(k)} - L| < \varepsilon$

- $C \in \mathbb{R}$ је тачка најомлавања низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ако постоји подниз $(x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ који конвертира ка C

— највећа тачка најомлавања се зове његов горњи ~~ниж~~ лимес или лимес супериор

$\lim x_n$ $\limsup x_n$

— најмања тачка најомлавања низа се зове његов доњи лимес или лимес инфериор

$\lim x_n$ $\liminf x_n$

13. Болцано-Вайерштрасова теорема

• Сваки ограничен низ реалних бројева има тачку најомнивања

M - једно ограничење низа (x_n)

$$-M \leq x_n \leq M \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

• ако је низ коначан постојате његов константни подниз

• ако је низ бесконачан, поделимо интервал $[-M, M]$ на два једнака дела.

У једном од њих мора постојати бесконачно много чланова низа (x_n)

Тај интервал I_1 делимо на два дела

и тако у бесконачности, ми

формирамо низ уметнутих

затворених интервала који

према Канторовој аксиоми,

имају непразан пресек.

$x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$ $(\forall \varepsilon > 0) (\exists n \in \mathbb{N}) \frac{2M}{2^n} < \varepsilon$

Ширина I_n је $\frac{2M}{2^n}$, а $x \in I_n$ па ће

$I_n \subseteq [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ што значи да се у

њој налази бесконачно много чланова x_n

$\Rightarrow x$ је тачка најомнивања $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

14. Кошијев ~~критеријум~~ критеријум
конвергенције низа

• Низ је Кошијев ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Пример: $x_n = (-1)^n$ није Кошијев низ

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, n_0 \in \mathbb{N} \quad |x_{n_0+1} - x_{n_0}| = 2 \geq \frac{1}{2} \quad (\times)$$

• У Кошијевом критеријуму не
фигурише сама гранична вредност

• Низ је конвергентан ако је Кошијев

$$\boxed{=} x_n \rightarrow x_\infty \stackrel{\text{def.}}{=} (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) |x_n - x_\infty| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(\forall m, n) \quad |x_m - x_n| = |x_m - x_\infty - x_n + x_\infty| \leq |x_m - x_\infty| + |x_n - x_\infty| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\boxed{=}$ Низ је Кошијев

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$$

$$\text{и} \quad m < n \quad x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Низ је ограничен и по Болцано-
Вайерштрасовој теорему има
тачку најомнијабња x_∞

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n(k)} = x_\infty$$

Покажемо да цео низ
конвертира ка x_∞

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Кошијев} \Rightarrow (\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_1) |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ конвертира} \Rightarrow (\exists n_{k_0} \in \mathbb{N})(\forall n_k \geq n_{k_0}) |x_{n_k} - x_\infty| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$n_0 := \max \{ n_1, n_{k_0} \}$$

$$n \geq n_0$$

$$(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ строго растући} \Rightarrow (\exists n_k \in \mathbb{N}) n_k > n$$

$$|x_n - x_\infty| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x_\infty|$$

$$\leq |x_n - x_{n_k}| + |x_\infty - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$|x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ због Кошијевог низа}$$

јер важи $n_k > n \geq n_0 \geq n_1$

15. Дефиниција граничне вредности реалне функције у тачки и једностраних лимеса

• $U_a = (a - \delta, a + \delta)$ ($\delta > 0$) - околна или δ -околна тачке $a \in \mathbb{R}$ ($U_a(\delta)$)

• $\dot{U}_a = U_a \setminus \{a\}$ - пробушена околна тачке a

• $(M, +\infty)$ - околна тачке $+\infty$ ($M \in \mathbb{R}$)

• пробушена околна тачке $+\infty$ је истој облика

• За $\bar{a}$ је скупи $A \subseteq \mathbb{R}$. Кажемо да је $a \in \mathbb{R}$ тачка нагомиланања ~~скопа~~ скупа A ако за сваку пробушену околину $\dot{U}_a$ важи $U_a \cap A \neq \emptyset$

• Скупи тачака нагомиланања скупа A обележавамо са A' .

- тачка нагомиланања не мора бити унутар скупа

• $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$ тачка нагомиланања $L \in \mathbb{R}$ је гранична вредност (лимес) функције f у тачки a ако

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A) (x \neq a \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$

$L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

- Ако $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ има лимес у тачки a , онда је тај лимес јединствен

Доказ: $\text{ppc} \quad \exists L_1 \neq L_2 \text{ т.г. } L_1 \text{ и } L_2$
задовољавају дефиницију лимеса

$$\varepsilon := \frac{|L_1 - L_2|}{2} > 0$$

$$\Rightarrow (\exists \delta_1 > 0) (\forall x \in A) 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

$$(\exists \delta_2 > 0) (\forall x \in A) 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon$$

$$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

$$\Rightarrow (\forall x \in A) 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \begin{matrix} |f(x) - L_1| < \varepsilon \\ |f(x) - L_2| < \varepsilon \end{matrix}$$

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow |L_1 - L_2| < 2 \cdot \frac{|L_1 - L_2|}{2} \quad \downarrow$$

- Функција је непрекидна у тачки a ако f има лимес у тачки a који је једнак вредности $f(a)$

$$f \text{ ca } (\Leftrightarrow) \underbrace{\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)}$$

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

• (Бесконечни лимеси) $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R}$ т. н. скупа A . Кажемо да f има:

• лимес ~~у тачки~~ $+\infty$ у тачки a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall M \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M)$$

• лимес $-\infty$ у тачки a и пишемо

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall m \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < m)$$

• (Лимес у бесконачности) $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

• $+\infty$ тачка нагомљавања скупа A

$\mathbb{R} \ni L$ је лимес ф-је f у бесконачности

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

• $-\infty$ тачка нагомљавања скупа A

$\ell \in \mathbb{R}$ је лимес ф-је f у бесконачности

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(x < m \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$$

• Ако је f дефинисана на некој околини бесконачности
и $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, тада ће $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = L$

• (Главна дефиниција) $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R}$ тачка најомиљавана домена A .

$L \in \mathbb{R}$ је гранична вредност функције f у тачки a ($L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$) ако

$$(\forall U_L)(\exists U_a) (\forall x \in U_a \cap A \Rightarrow f(x) \in U_L)$$

• $D = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ — десни лимес f у тачки a

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A) a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - D| < \varepsilon$$

• $L = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ — леви лимес f у тачки a

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A) a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

• $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$ т.н. скупа A

f има ~~лимит~~ лимес у a ако постоје леви и десни лимес у a и ако су једнаки.

• $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \pm \infty$ ($=$)

$$(\forall C \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in A) a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) \geq C$$

16. Својства граничне вредности реалне функције

- локална својства функције - особине које важе у некој околини т. н.
- гранична вр. ф-је, ако постоји, јединствена
- Функција која има коначну граничну вредност у тачки је ограничена у некој њеној пробушеној околини.

$$(\forall U_L)(\exists U_a)(\forall x \in A) x \in U_a \Rightarrow f(x) \in U_L$$

$$U_L = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

↑
доње ограничење ф-је f

- Ф-ја $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ има коначну граничну вредност $L \neq 0$ у тачки $a \in \mathbb{R}$ која је т. н. домена. Тада постоји U_a на којој је ф-ја различита од нуле у свакој тачки x и знак ф-је у тим ~~та~~ тачкама је исти као знак L .

$$(\forall U_L)(\exists U_a)(\forall x \in A) x \in U_a \Rightarrow f(x) \in U_L$$

$$U_L = (L - \frac{|L|}{\varepsilon}, L + \frac{|L|}{\varepsilon})$$

$$L \neq 0 \quad \frac{|L|}{\varepsilon} > 0$$

$$(\varepsilon > 1)$$

ТА ЋЕ ЦЕЛА
ОКОЛИНА БИТИ ИЗНАД
НУЛЕ

$$\Rightarrow (\exists \dot{U}_a) x \in \dot{U}_a \cap A \Rightarrow f(x) \in U_L$$

ПРОБУШЕНА ОКОЛИНА ЗА КОЈУ ВАЖИ

$$f(x) > 0 \quad \wedge \quad \operatorname{sgn}(f(x)) = \operatorname{sgn}(L)$$

$$\bullet f, g: A \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in \overline{\mathbb{R}} \text{ т.н. окрета } A$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2 \in \mathbb{R}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = L_1 + L_2$$

$$(\exists \dot{U}_a^f, \dot{U}_a^g) |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}, x \in \dot{U}_a^f \cap A$$

$$|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}, x \in \dot{U}_a^g \cap A$$

$$U_a = \dot{U}_a^f \cap \dot{U}_a^g \in$$

ТАКОЋЕ ПРОБУШЕНА
ОКОЛИНА

$$\Rightarrow |f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (x \in U_a \cap A)$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2$$

$(\varepsilon > 0)$ Нађемо U_a^1 та која је g ограничена

$$\Rightarrow |g(x)| \leq M \quad (x \in U_a^1 \cap A) \quad M > 0 \text{ const}$$

$$\Rightarrow (\exists U_a^2) (\forall x \in U_a^2 \cap A) |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$\Rightarrow L_2 \text{ тп. бр. } (\exists U_a^3) |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2(|L_1| + 1)}$$

$$U_a = U_a^1 \cap U_a^2 \cap U_a^3$$

$$(\forall x \in U_a \cap A) |f(x)g(x) - L_1L_2|$$

$$= |f(x)g(x) - L_1g(x) + L_1g(x) - L_1L_2|$$

$$\leq |g(x)||f(x) - L_1| + |L_1||g(x) - L_2|$$

$$< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + (|L_1| + 1) \cdot \frac{\varepsilon}{2(|L_1| + 1)} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$b) L_2 \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2} \quad (\text{u o H ga } \delta)$$

$$L_2 \neq 0 \Rightarrow (\exists U_a^1) (x \in A \cap U_a^1) |g(x) - L_2| < \frac{|L_2|}{3}$$

$$L_2 > 0: g(x) > L_2 - \frac{|L_2|}{3} = \frac{2L_2}{3} > 0$$

$$L_2 < 0: g(x) < L_2 + \frac{|L_2|}{3} = \frac{2L_2}{3} < 0$$

$$|g(x)| > \frac{2}{3}|L_2| \quad (\forall x \in A \cap U_a^1)$$

$$\Rightarrow |g(x) - L_2| < \frac{2}{3}|L_2|^2 \varepsilon \quad (\forall x \in A \cap U_a^2)$$

$$\Rightarrow (\forall x \in A \cap U_a^1 \cap U_a^2) \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2} \right|$$

$$= \frac{|g(x) - L_2|}{|g(x) \cdot L_2|} < \frac{|g(x) - L_2|}{\frac{2}{3}|L_2|^2}$$

$$< \frac{1}{\frac{2}{3}|L_2|^2} \cdot \frac{2}{3}|L_2|^2 \varepsilon = \varepsilon$$

$$2) (\exists \dot{U}_a) (\forall x \in \dot{U}_a \cap A) f(x) \leq g(x)$$

$$\Rightarrow L_1 \leq L_2$$

$$\text{nncc } L_1 > L_2 \quad \varepsilon = \frac{L_1 - L_2}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \Rightarrow (\exists \dot{U}_a^1) |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2 \Rightarrow (\exists \dot{U}_a^2) |g(x) - L_2| < \varepsilon$$

$$\dot{U}_a = \dot{U}_a^1 \cap \dot{U}_a^2$$

$$g(x) < L_2 + \varepsilon < L_1 - \varepsilon < f(x) \quad \downarrow$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \beta \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\bullet f, g: A \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in \overline{\mathbb{R}} \text{ т.н. } \text{окр. } a \text{ } A$$

$$a) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{\pm\infty\}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \pm\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) g(x)) = (\text{sgn } L)(\pm\infty)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

• $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ $a \in \bar{\mathbb{R}}$ т.н. скупа A

a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ и g је ограничена на некој U_a , тада је $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = 0$
 $(U_a(\delta_1)) (\forall x \in A \cap U_a(\delta_1)) |g(x)| \leq M$

$\delta_1 > 0$, $M > 0$ нека је не ограничено g

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Leftrightarrow (\exists \delta_2 > 0) (\forall x \in A \cap U_a(\delta_2)) |f(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$(\forall x \in A \cap U_a(\delta)) |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$, $|g(x)| \leq M$

$\Rightarrow |f(x)g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = 0$

b) $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = 0$, g о.р. на некој

десној околини тачке a , $(a, a+\delta)$

тада је $\lim_{x \rightarrow a+} (f(x)g(x)) = 0$

c) $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = 0$, g о.р. на некој левој

околини тачке a , $(a-\delta, a)$ тада

$\lim_{x \rightarrow a-} (f(x)g(x)) = 0$

$$\bullet f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists U_a)(\forall x \in A \cap U_a) |f(x) - 0| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists U_a)(\forall x \in A \cap U_a) |f(x)| - 0 < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$$

17. Теорема о тисм нммеца. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

$$\begin{aligned} & f, g, h: A \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x) \\ & a \text{ т.т. скупя } A \quad (\forall x \in A \cap U_a) \end{aligned}$$

$$(\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x)) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

$$\Rightarrow (\exists \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L)$$

$$L := \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \quad x \in U_a^f$$

$$|g(x) - L| < \varepsilon, \quad x \in U_a^g$$

$$(U_a = U_a^f \cap U_a^g) \quad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

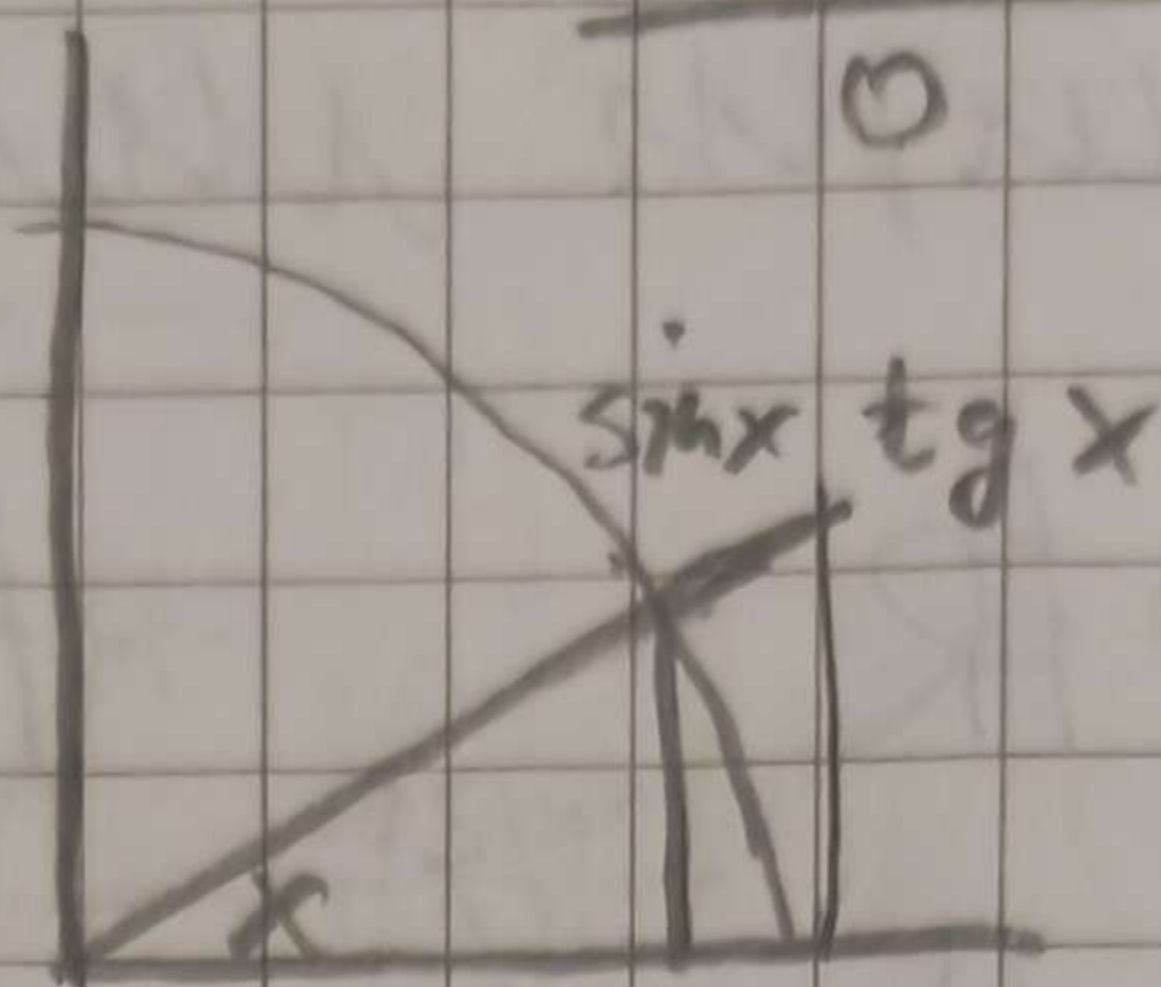
$$\Rightarrow \underline{L - \varepsilon} < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < \underline{L + \varepsilon}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$$

$$x \in (0, \frac{\pi}{2})$$



$$\sin x > 0 \\ x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \sin x \leq x \leq \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad / \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$\text{To 3L} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

18. Теорема о грани променљиве,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$ и последице.

• (Теорема о грани променљиве у лимесу)

Нека ф-ја $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ има граничну вредност у тачки $t_0 \in [a, b]$ и нека је $\psi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ непрекидно пресликавање које је бијекција и ψ^{-1} је инверз ψ^{-1} такође непрекидна функција. Тада је

$$\lim_{x \rightarrow t_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \psi^{-1}(t_0)} f(\psi(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow \psi^{-1}(t_0)} f(\psi(x)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$$

- (Теорема о замене предела предела и непрерывные функции)

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ т.н. скуча A

$$L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Ако је $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна у тачки L , тада $\varphi \circ f$ има предел у a

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(f(x)) = \varphi(L)$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u+1}$

$$= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u \left(1 + \frac{1}{u}\right) = e$$

- $\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u+1}\right)^u = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{u+1}\right)^{u+1} \cdot \frac{u+1}{u+2} \right] = e$

То значи пром. у $\lim$
 $\Rightarrow$

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

То значи
 $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Последующе:

$$\bullet e = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$\bullet e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\bullet 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\bullet \ln a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, \quad a > 0$$

$$\bullet \alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$$

19. Лимес монотонне функције.

- $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ~~и монотонна функција~~
- $f \nearrow$ или $f \searrow$ онда је f монотона
- $\sup f := \sup \{ f(x) : x \in X \}$ $X \subseteq (a, b)$
цело домен или део домена

- $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ растућа ф-ја

- ако је ф-ја ограничена одозго постоји коначан $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$ и важи

$$\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$$

- ако ф-ја није ограничена одозго

$$\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = +\infty$$

- ограничена ~~од~~ одоздо

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \inf_{x \in (a, b)} f(x)$$

- није ограничена одоздо

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty$$

a) f ограничена одозго константом M
 $(\forall x \in (a, b)) f(x) \leq M$

тада је $V = \{f(x) \mid x \in (a, b)\}$

непразан и има горње ограничење

$$\Rightarrow (C \cup D) \quad \sup V = L = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (b - \delta, b)) (0 < \delta \leq 1)(\exists x_0) (0 < x_0 < \delta)$$

$$L - \varepsilon < L \quad \text{и} \quad L \text{ најм. горње огр.} \Rightarrow L - \varepsilon \text{ није горње огр.}$$

$$\Rightarrow (\exists x_0 \in (a, b)) f(x_0) > L - \varepsilon$$

$$f \nearrow \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$$

$$f(x) \in V \Rightarrow f(x) \leq L$$

$$\delta = b - x_0$$

$$L - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq L$$

$$(\forall x \in (b - \delta, b) = (x_0, b)) \Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow b-} f(x)$$

$$\delta) \neg (\exists C \in \mathbb{R})(\forall x \in (a, b)) f(x) \leq C$$

$$\Rightarrow (\forall C \in \mathbb{R})(\exists x_0 \in (a, b)) f(x_0) > C$$

$$f \nearrow \Rightarrow (\forall x \geq x_0) f(x) \geq f(x_0) > C$$

$$\Rightarrow (\forall C \in \mathbb{R})(\exists \delta = b - x_0 > 0)(\forall x \in (b - \delta, b) = (x_0, b)) f(x) > C$$

$$\text{тј} \quad \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = +\infty$$

20. Асимптотическая оценка $\circ$

• $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$ т.ч. $A \cap B$

Важно $f = o(g)$ или $f \ll g$ когда $x \rightarrow a$

также $(\exists \alpha: U_a \rightarrow \mathbb{R})(\forall x \in U_a \cap A \cap B)$

$$f(x) = \alpha(x) g(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$$

• $f \ll g, x \rightarrow a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon |g(x)|)$

• ~~$g(x) \neq 0 (\forall x \in U_a)$~~

• $(\forall x \in U_a \cap B) g(x) \neq 0 \Rightarrow f \ll g, x \rightarrow a$
 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$

• $o(f) + o(f) = o(f)$

$$h_1(x) = \alpha_1(x) f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha_1(x) = 0$$

$$h_2(x) = \alpha_2(x) f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha_2(x) = 0$$

$$h_1(x) + h_2(x) = \underbrace{(\alpha_1(x) + \alpha_2(x))}_{\alpha(x)} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha_1(x) + \alpha_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \alpha_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} \alpha_2(x) = 0$$

✓

- $f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$

$$f(x) \cdot o_1(x) g(x) = o_1(x) (f(x) g(x)) \Rightarrow \checkmark$$

- $o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$

~~not correct~~

- $(\forall c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) c \cdot o(f) = o(f)$

- $f = o(1), x \rightarrow a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

$$f(x) = o(x) \cdot 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

21. Асимптотиска релација $\sim$

• $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ т.н. A и B

Важни $f \sim g, x \rightarrow a$ ако $\exists \beta: U_a \rightarrow \mathbb{R}$
таква да $(\forall x \in U_a \cap A \cap B) f(x) = \beta(x)g(x)$
и $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 1$

• релација $\sim$ је релација еквиваленције

• $g(x) \neq 0$ $f \sim g, x \rightarrow a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$$\sin x \sim x, x \rightarrow 0$$

$$\ln(1+x) \sim x, x \rightarrow 0$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, x \rightarrow 0$$

$$e^x - 1 \sim x, x \rightarrow 0$$

$$a^x - 1 \sim \ln a \cdot x, x \rightarrow 0 \quad (a > 0)$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax, x \rightarrow 0$$

$$a) f \sim g, x \rightarrow a \Rightarrow \sigma(f) = \sigma(g)$$

$$f(x) = \beta(x)g(x)$$

$$\alpha_1(x)f(x) = \alpha_2(x)g(x)$$

$$\alpha_1(x)\beta(x)g(x) = \alpha_2(x)g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha_1(x)\beta(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha_2(x) = 0$$

$$\delta) f \sim g, x \rightarrow a \Leftrightarrow f - g = o(g), x \rightarrow a$$

$$f(x) = \beta(x)g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = \alpha_1(x)g(x)$$

$$\underbrace{f(x) = \beta(x)g(x)}_{\rightarrow 1} \Leftrightarrow f(x) = \underbrace{(\alpha_1(x) + 1)}_{\rightarrow 1} g(x)$$

22. Асимптотска релација O

• $f: A \rightarrow \mathbb{R}, g: B \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}$ т.н. A и B

Важи $f = O(g)$ ~~ако~~ ако $(\exists M > 0)$ и $\exists U_a$
тако да важи $|f(x)| \leq M|g(x)|$ ($\forall x \in U_a \cap A \cap B$)

• $f = O(g)$ када $x \rightarrow a$ (тема лимеса)

$$\bullet O(f) + O(f) = O(f)$$

$$\bullet O(O(f)) = O(f)$$

$$\bullet \alpha f + O(f) = O(f)$$

$$\bullet f \cdot O(g) = O(f \cdot g)$$

$$\bullet (\forall c \neq 0) \quad c \cdot O(f) = O(f)$$

$$\bullet O(f) + o(f) = O(f)$$

$$\bullet o(O(f)) = o(f)$$

23. Дефиниција непрекидних реалних функција. Врсте тачака прекида.

- $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ је непрекидна у $a \in A$ акко важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

- Функција је непрекидна ако је непрекидна у свакој тачки свог домена.

- Тачка домена је тачка прекида ако у тој f -ја није непрекидна.

- $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$ тачка прекида

- f има откљонив прекид у a ако постоје леви и десни лимес у a и ако су једнаки (у супротном је неоткљонив)

- Неоткљонив прекид је прекид прве врсте ако у тој тачки има леви и десни лимес и ако су различити

- Неоткљонив прекид је прекид друге врсте ако ~~у~~ у тој тачки леви или десни лимес не постоје.

24. Локална својства непрекидних реалних функција

- Врне у околности тачака непрекидности
- $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна у $a \in A$. Тада постоји околина U_a тачке a на којој је f -ја ограничена.
- Ако је $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна у $a \in A$ и ако важи $f(a) \neq 0$, $\exists U_a$ на којој је f -ја различита од нуле и знак јој је исти као и знак броја $f(a)$
- $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидне у $a \in A$. Тада су $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ и $f \cdot g$ непрекидне у a ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)
Ако је $g(a) \neq 0$ онда је $\frac{f}{g}$ непрекидна у a .
- $f: A \rightarrow B$ непрекидна у $a \in A$ } $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$
 $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна у $b = f(a)$ } непрекидна у a
 $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall y \in B) |y - b| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - g(b)| < \varepsilon$
 $(\exists \delta > 0)(\forall x \in A) |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta_1$
 $\Rightarrow |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |y - b| < \delta_1$
 $\Rightarrow |g \circ f(x) - g \circ f(a)| = |g(y) - g(b)| < \varepsilon$

25. Глобална својства непрекидних реалних функција (Коши-Болцанова теорема и теорема о међувредности)

- важе на целом домену
- (Коши-Болцанова теорема)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција
 $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тада $f(c) = 0$ за неко $c \in (a, b)$

Посматрамо тачку $c = \frac{a+b}{2}$ на половини

интервала. Ако је $c = 0$, доказ је ЗАВРШЕН

у супротном, генеришемо нови

интервал који је један крај c ,

и крајеви су различитог знака.

Понављамо овај поступак у
бесkonaчности, генеришући низ
затворених уметнутих интервала.

Ако у било којој тачки $c = 0$,
доказ је ЗАВРШЕН.

$$(K A H) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n \neq \emptyset$$

Покажимо да садржи само један
елемент

Ако би се у пресеку налазиле c_1 и c_2 ($c_1 \neq c_2$) онда би на основу

$$(APX) \quad (\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad \frac{b-a}{2^{n_0}} < |c_2 - c_1|$$

те две тачке су на растојању већем

од ширине интервала $\nsubseteq$

$$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \{c\} \quad f(c) = 0$$

$$\text{нпр } f(c) \neq 0$$

f непр: $\exists J_\varepsilon = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ на којој је f -ја другог сталног знака

$$(APX) \quad (\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad \frac{b-a}{2^{n_0}} < \varepsilon \Rightarrow I_{n_0} \subseteq J_\varepsilon$$

КОНТРАДИКЦИЈА ЈЕР $\operatorname{sgn}(a) \neq \operatorname{sgn}(b)$

• (Теорема о међувредности)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна f -ја

$$f(a) = A, f(b) = B, (\forall C \text{ између } A \text{ и } B) (\exists c \in (a, b)) f(c) = C$$

Доказ из претходне теореме за $g(x) = f(x) - C$

• Последица: Непрекидна слика интервала је интервал

26. Војерштрасова теорема о непреривним функцијама

- Непреривна функција на затвореном и ограниченом интервалу је ограничена и достиже максимум и минимум.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непреривна ф-ја

нпс f није ограничена на $[a, b]$

тада није ограничена на левој
или десној половини интервала

I_1 - половина на којој није отр. ,

поделите га на два дела и

понављамо поступак.

На тај начин дефинишемо низ
опадajuћих улећућих интервала,
сваки ширине $\frac{b-a}{2^n}$ и f је
неограничена на сваком.

$$(CAN) \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n \neq \emptyset$$

Ако би се у пресеку налазиле
две различите тачке c_1 и c_2 ,

на основу (APX) $(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \frac{b-a}{2^{n_0}} < |c_2 - c_1|$

Шј c_1 и c_2 би се налазиле на
распојању већем од ширине
интервала I_{n_0} , што значи да
се не могу обе наћи унутар њега

$$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \{c\}$$

f је непрекидна на D_f па је и на $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \exists J_\varepsilon = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ f ограничена

$$(APX) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) \frac{b-a}{2^{n_0}} < \varepsilon \Rightarrow I_{n_0} \subseteq J_\varepsilon$$

$\Downarrow \Rightarrow f$ је ограничена на $[a, b]$

• Да ли f достиже минимум на $[a, b]$?

$$\text{нпс } m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \quad f(x) \neq m \quad (\forall x \in [a, b])$$

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - m} \quad \text{именилац, непрекидна}$$

$\neq 0 \Rightarrow g$ је непрекидна

$$g \text{ је ограничена} \Rightarrow (\exists C > 0) (\forall x \in [a, b]) g(x) \leq C$$

$$\Rightarrow f(x) \geq m + \frac{1}{C} \quad \Downarrow \text{ јер је онда}$$

$m + \frac{1}{C}$ једно доње ограничење

•
•
• (исто за максимум)

27. Непреривност монотонне и њој инверзне функције

- Монотонна ф-ја може имати само прекиде прве врсте.

$$f: X \rightarrow \mathbb{R} \quad f \nearrow$$

$x_0 \in X$ тачка прекида

$$A = \{f(x) \mid x < x_0\}$$

$$B = \{f(x) \mid x > x_0\}$$

$f \nearrow$ па је A о.г. одозго $f(x_0)$

B о.г. одоздо $f(x_0)$

$$(CUM) \Rightarrow a_0 = \sup A$$

$$b_0 = \inf B$$

Хоћемо да покажемо да $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a_0$

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists x_\varepsilon \in A) \quad a_0 - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq a_0$$

$$f \nearrow: (\forall x \in [x_\varepsilon, x_0)) \quad f(x_\varepsilon) \leq f(x)$$

$$\Rightarrow (\delta = x_0 - x_\varepsilon) \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow a_0 - \varepsilon < f(x) \leq a_0$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} a_0 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad (\text{аналогно } b_0 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x))$$

$\Rightarrow$ Монотонна ф-ја има леву и десну лимес у свакој тачки

Једно горње отп. A је $f(x_0)$ а његов $\sup$ је $a_0 \Rightarrow a_0 \leq f(x_0)$

Једно доње отп. B је $f(x_0)$ а његов $\inf$ је $b_0 \Rightarrow b_0 \geq f(x_0)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a_0 \leq f(x_0) \leq b_0 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

једна је ствота јер је x_0 тачка прекида f -је

• Монотона f -ја $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ је непрекидна акко је $f[(a, b)]$ интервал.

$\Rightarrow$ Непрекидна слика интервала је интервал.

$\Leftarrow f[(a, b)]$ интервал f монотона

$x_0 \in (a, b)$ тачка прекида

$$a_0 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = b_0, \quad a_0 \leq f(x_0) \leq b_0$$

$I_0 = (a_0, b_0)$ (ако је $f \nearrow$, у супротној обрнутој)

$a_0 \neq b_0$: I_0 је прави интервал

• Монотона може имати само прекиде прве врсте

$\Rightarrow a_0 \leq f(x) \leq b_0$ (једна нејед. је ствота)

може се десити $f(x) = a_0$ или $f(x) = b_0 \Rightarrow f(x) \notin (a_0, b_0)$

што значи да $f[(a,b)]$ има
 праву „ y “ I_0 у којој ће
 ле можда налазити $f(x_0)$ али
 ништа више, тј. $f[(a,b)]$ није интервал
 $\Rightarrow f$ је непр. ф-ја

• Ако је $f:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ строго монотона и
 непрекидна ф-ја тада је и f^{-1} (са
 одговарајућим доменом) непрекидна ф-ја.

$$f \text{ непр} \Rightarrow f[(a,b)] = (\alpha, \beta)$$

Како строго монотона ф-ја је
 инјективна $\Rightarrow \exists f^{-1}: (\alpha, \beta) \rightarrow (a,b)$

пп $f \nearrow$ (строго)

$$y_1, y_2 \in (\alpha, \beta) \quad y_1 < y_2 \leftarrow$$

$$(x_1, x_2 \in (a,b)) \quad y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2) \\ \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

$$x_1 > x_2 : f(x_1) > f(x_2) \quad f \nearrow$$

$$\text{тј} \quad y_1 > y_2 \quad \text{у супротности}$$

$$\Rightarrow \text{Важно} \quad x_1 < x_2$$

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \Leftrightarrow y_1 < y_2 \quad \text{тј} \quad f^{-1} \nearrow$$

$f^{-1}[(a,b)]$ је интервал, f^{-1} монотона
 $\Rightarrow f^{-1}$ је непрекидна

28. Непрерывности элементарных ф-я

• Элементарные функции являются непрерывными.

Сумма, произведение, частное и композиция непрерывных функций являются непрерывными функциями.

• Линеарная функция

$$f(x) = ax + b \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |a(x - x_0)| < \varepsilon$$

$$\delta = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{|a|}, & a \neq 0 \\ 1, & a = 0 \end{cases}$$

• Тригонометрические функции

$$|\sin x| \leq |x| \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \cdot \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2} \right|$$

$$\leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq |x - x_0|$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

$$|\cos x - \cos x_0| = \left| -2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \sin \frac{x + x_0}{2} \right|$$

$$\leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq |x - x_0|$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \cos(x) = \cos(x_0)$$

• експоненцијална

$$x=0 \quad \varepsilon > 0$$

$$e > 1 \quad e-1 > 0 \quad (APX) (\exists n \in \mathbb{N}) \text{ и } \varepsilon > e-1 \\ 1+n \cdot \varepsilon > e$$

БЕРНУЛИШЕВА
НЕЈЕДНАКОСТ

$$(1+\varepsilon)^n \geq 1+n \cdot \varepsilon > e$$

$$1+\varepsilon > e^{\frac{1}{n}} \quad \text{или} \quad e^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon \quad / \cdot e^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-\frac{1}{n}} < \underbrace{e^{-\frac{1}{n}} \cdot \varepsilon}_{0 < e^{-\frac{1}{n}} < 1} < \varepsilon$$

$$e^{-\frac{1}{n}} < e^x < e^{\frac{1}{n}}$$

$$-e < e^{-\frac{1}{n}} - 1 < e^x - 1 < e^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$$

$(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ околни тачке 0 важи

$$|e^x - 1| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 = e^0 \Rightarrow \text{експ. ф-ја непр. у 0}$$

$$(x_0 \in \mathbb{R}) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (e^x - e^{x_0}) = e^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (e^{x-x_0} - 1)$$

$$= e^{x_0} \lim_{h \rightarrow 0} (e^h - 1) = e^{x_0} \cdot 0 = 0$$

$$\text{или} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$$

• логаритамска је инверзна експоненцијалној, па је непрекидна

29. Хајнеова карактеризација постојања лимеса реалне функције

• $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in \overline{X}$ т.н. скупа X

Тада $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ ако за сваки

низ (x_n) у скупу ~~X~~ $X \setminus \{x_0\}$ важи

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$$

$\Rightarrow$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X \cap U_{x_0}(\delta))(0 < \delta \wedge)$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) |x_n - x_0| < \delta$$

$$x_n \neq x_0 \Rightarrow |f(x_n) - L| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$$

$\Leftarrow$: $\neg$ не важи $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

$$\neg (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in X)(0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \delta = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in X) 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - L| \geq \varepsilon$$

па не може бити $f(x_n) \rightarrow L$ кад $n \rightarrow +\infty$

• $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ је непрекидна у $x_0 \in X$ ако

за сваки низ $x_n \in X$ важи

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

30. Кошијев критеријум постојања конечне шимеса реалне функције

• $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ т.н. скупа A

Тада постоји гранична вредност
функције f у тачки a ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall s, t \in A) \quad 0 < |s - a| < \delta \wedge 0 < |t - a| < \delta$$

ПОКАЖИТЕ ДА ЈИ ЛИМИТЕС
ПОСТОЈИ

$$\Rightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow: \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow |f(s) - f(t)| = |f(s) - L + L - f(t)| \\ \leq |f(s) - L| + |f(t) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Leftarrow$: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ произвољан низ у $X \setminus \{x_0\}$

за који важи $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ тако да важи почетна J -на

$$\Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad |x_n - x_0| < \delta$$

$$\Rightarrow (\forall m, n \geq n_0) \quad 0 < |x_n - x_0| < \delta \wedge 0 < |x_m - x_0| < \delta$$

ПОЧЕТНА

$$\Rightarrow |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$$

$\rightarrow$ Низ је Кошијев, па је конвергентан

$$\text{тј } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \in \mathbb{R}$$

$$x_n \in X \setminus \{x_0\} \quad x_n \rightarrow x_0 \text{ када } n \rightarrow +\infty$$

$$y_n \in X \setminus \{x_0\} \quad y_n \rightarrow x_0 \text{ када } n \rightarrow +\infty$$

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$$

• $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ БАНУ ПОЧЕТНА

$$(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_1) |y_n - x_0| < \frac{\delta}{2}$$

$$(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_2) |x_n - x_0| < \frac{\delta}{2}$$

$$n_3 := \max\{n_1, n_2\}$$

$$(\forall n \geq n_3) |x_n - y_n| = |x_n - x_0 + x_0 - y_n|$$

$$\leq |x_n - x_0| + |y_n - x_0| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \Rightarrow (\exists n_4 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_4) |f(x_n) - L| < \varepsilon$$

$$n_0 := \max\{n_3, n_4\}$$

$$(\forall n \geq n_0) |f(y_n) - L| \leq |f(y_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - L| < \varepsilon + \varepsilon$$

$$\text{јер су } |x_n - y_n| < \delta$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = L$$

На основу Кошијевог критеријума.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \text{тај постоји}$$

31. Дефиниција извода у тачки, левој и десној извода реалне функције. Диференцијабилност.

• $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in (a, b)$ Ако постоји

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

кажемо да је f -је диференцијабилна
у тачки x_0 . Овај лимес назива
се изводом f -је f у тачки x_0

$$f'(x_0), \frac{df}{dx}(x_0), \frac{d}{dx} f(x_0)$$

• Функција је диференцијабилна ако је
дифф. у свакој тачки свој домена.

• Ако је $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифф. у $x_0 \in (a, b)$,
онда је она у тој тачки и непрекидна.

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(h \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

$$= 0 \cdot f'(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

f непрекидна у тачки x_0

(НЕ ВАЖИ ОФОРМУЛА АЛГЕБРА ИЛИ МНОЖЕЊА)

• $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in (a, b)$ Ако постоји:

~~• левни извод f -је f у тачки x_0
 $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$~~

• левни извод f -је f у тачки x_0

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

• десни извод f -је f у тачки x_0

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

• f -ја је дифф. у тачки x_0 ако постоје левни и десни лимес у тој тачки и једнаки су

• извод константне f -је једнак је нули

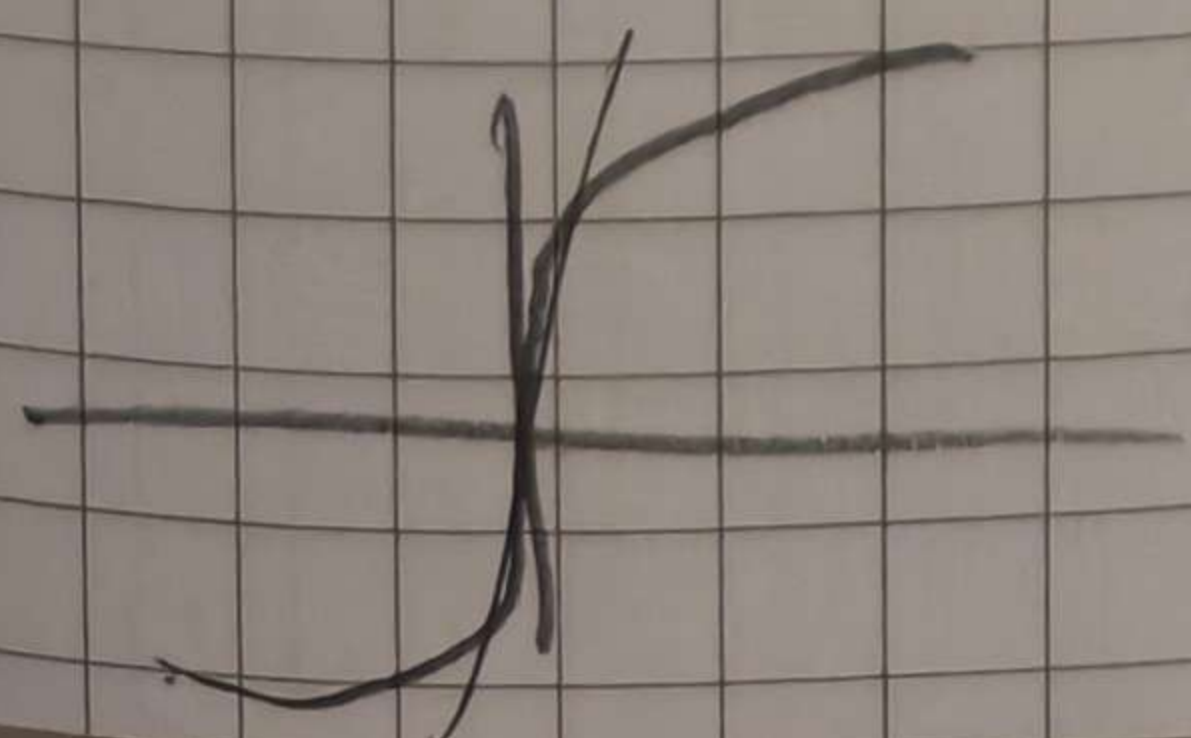
• f је дифф. у тачки x_0 ако постоји број A

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A \cdot h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

• једначина тангенте на график f -је

$$t: y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

• диференцијабилност у проширеном смислу
(лимес узима вредности из $\mathbb{R}$)



32. Војстива диференцијабилних функција (извод збира, производа и кошичка функција)

- (Линеарност извода) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифф у $x_0 \in (a, b)$

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\alpha f + \beta g)(x_0 + h) - (\alpha f + \beta g)(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha f(x_0 + h) + \beta g(x_0 + h) - \alpha f(x_0) - \beta g(x_0)}{h}$$

$$= \alpha \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \beta \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

$$= \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

- (Лајбницово правило) $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифф $x_0 \in (a, b)$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0 + h)g(x_0) - f(x_0 + h)g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x_0 + h) \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} + g(x_0) \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right]$$

$$= f(x_0)g'(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)$$

• $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diff. y $x_0 \in (a, b)$, $g(x_0) \neq 0$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \Rightarrow \frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g}(x_0+h) - \frac{1}{g}(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{\frac{h}{1}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{g(x_0+h)g(x_0)}}{\frac{h}{1}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{h \cdot g(x_0+h)g(x_0)}$$

$$= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \cdot \frac{1}{g(x_0+h)} \cdot \frac{1}{g(x_0)} = - \frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

33. Извод сложене и инверзне ф-је

• (Извод сложене функције)

$f: (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$ дифф. у $x_0 \in (a, b)$

$g: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ дифф. у тачки $y_0 = f(x_0)$

Тогда је $g \circ f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифф. у x_0 и важи

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h}$$

КОРИСТИМО АЛТЕРНАТИВНУ ДЕФ. ИЗВОДА

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0) \cdot h + o(h)}_t, \quad h \rightarrow 0$$

$t \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0$

$$g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) = g(y_0+t) - g(y_0)$$

$$= g'(y_0) \cdot t + o(t)$$

$$= g'(y_0)(f(x_0+h) - f(x_0)) + o(f(x_0+h) - f(x_0))$$

$$= g'(y_0)(f'(x_0) \cdot h + o(h)) + o(f'(x_0) \cdot h + o(h))$$

$$= g'(y_0) \cdot f'(x_0) \cdot h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$= g'(f(x_0)) f'(x_0)$$

• (ИЗВОД ИНВЕРЗНЕ ФУНКЦИЈЕ) $f'(x_0) \neq 0$
 $f: (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$ дифф. у тачки $x_0 \in (a, b)$

$\exists f^{-1}: (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ дифф. у тачки $y_0 = f(x_0)$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

$$f \circ f^{-1}: (\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha, \beta)$$

ИДЕНТИЧКО
ПРЕСЛИКАВАЊЕ

$$(f \circ f^{-1})'(y) = 1$$

ИЗВОД
СЛОЖЕЊЕ

$$f'(f^{-1}(y_0)) \cdot (f^{-1})'(y_0) = 1$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Довољно је претпоставити да је

f^{-1} напх. у y_0

34. Фермаова и Ролова теорема

• (Фермаова теорема)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ у $x_0 \in (a, b)$ има локални екстремум и ако је дифф. у тој тачки
тада је $f'(x_0) = 0$

Или x_0 ТАЧКА ЛОК. МАКСИМУМА $(-f)$

• $h > 0$ $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$ у некој десној околини тачке x_0

f дифф. у x_0 па $f'_+(x_0) \leq 0$

• $h < 0$ $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$ у некој левој околини тачке x_0

f дифф у x_0 па $f'_-(x_0) \geq 0$

• из дифф : $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

• (Ролова теорема) ~~$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$~~

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна на $[a, b]$ и
дифф. на (a, b) $f(a) = f(b)$

~~Тада~~ Тада ће постојати $x_0 \in (a, b)$ $f'(x_0) = 0$

постојаће тачка у којој је тангента на график
паралелна са x -осом а и правом која спаја
 a и b

Доказ: f непрекидна $\Rightarrow$ на основу
Вајерштрасове теореме ће достићи
свој максимум и минимум
на $[a, b]$ $M \in [a, b]$ $m \in [a, b]$

• Ако се екстремуми достигну у
тачкама a или b , тада је
 $m = M$ јер $f(a) = f(b)$
иј f је константна на целом
интервалу та је њен извод једнак 0.

• Ако је бар једна m или $M \in (a, b)$
тада ће она бити тачка лок.

екстремума и у њој је f дифф.
јер је дифф. свуда на (a, b) ,
та је на основу Фермаове теореме
могућа првог извода.

Q.E.D.

35. Кошијева и Лагранжова теорема о средњој вредности диференцијалног рачуна.

- (Кошијева теорема) $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непр. на $[a, b]$ и дифф. на (a, b) при чему је $(\forall x \in (a, b)) g'(x) \neq 0$.
Тада ће постојати $x_0 \in (a, b)$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

[Ако би $g(b) - g(a) = 0$ по Роловој теорем би постојала нула првог извода]

Доказ: $F(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$

$$\left. \begin{aligned} F(a) &= f(b)g(a) - g(b)f(a) \\ F(b) &= g(a)f(b) - f(a)g(b) \end{aligned} \right\} \Rightarrow F(a) - F(b) = 0$$

F непр. на $[a, b]$ дифф. на (a, b)

као композиција таквих

Задовољава услове Ролове теореме

$\Rightarrow$ њен први извод је нула у $x_0 \in (a, b)$

$$F'(x) = \underbrace{(f(b) - f(a))}_{\text{const}} g'(x) - \underbrace{(g(b) - g(a))}_{\text{const}} f'(x)$$

$$(f(b) - f(a)) g'(x_0) - (g(b) - g(a)) f'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

• (Лагранжова теорема) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 непр. на $[a, b]$, дифф. на (a, b) . $\exists x_0 \in (a, b)$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

Доказ следи из Кошијеве теореме када
 посматрамо $g(x) = x$

• Дифф. ф-ја $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ($\forall x \in (a, b)$)

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ КОНСТАНТНА

• $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ (строго) растућа

• $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ (строго) опадајућа

36. Лопиталова правила

- $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ гифф. на (a, b) ,
 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ и $g'(x) \neq 0$ ($\forall x \in (a, b)$)

Нека је $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Ако је $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$ или

$\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \pm\infty$ тада $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

$$1) \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & a < x < b \\ 0, & x = a \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & a < x < b \\ 0, & x = a \end{cases}$$

F и G су непр. на $[a, b)$, гифф. на (a, b)
 $x \in (a, b) \Rightarrow F$ и G непр. на $[a, x]$ гифф. на (a, x)

$$G' = g' \neq 0 \text{ на } (a, x) \quad \xi \in (a, x)$$

$$\text{Кошијева теорема: } \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

$$\left. \begin{matrix} F(a) = 0 \\ G(a) = 0 \end{matrix} \right\} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad / \lim$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a, a+\delta)) \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon$$

$\beta \in (a, a+\delta) \quad g \rightarrow +\infty$

$$\Rightarrow (\exists \delta_1 < \beta - a)(\forall t \in (a, a+\delta_1)) g(t) > g(\beta)$$

β фиксировано $t \rightarrow a+$

Ковшијева Т.: $\frac{f(t) - f(\beta)}{g(t) - g(\beta)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (\xi \in (t, \beta))$

$$\xi \in (a, a+\delta) \Rightarrow A - \varepsilon < \frac{f(t) - f(\beta)}{g(t) - g(\beta)} < A + \varepsilon$$

$$\bullet (A - \varepsilon) \left(1 - \frac{g(\beta)}{g(t)} \right) + \frac{f(\beta)}{g(t)} < \frac{f(t)}{g(t)} < (A + \varepsilon) \left(1 - \frac{g(\beta)}{g(t)} \right) + \frac{f(\beta)}{g(t)}$$

$$t \rightarrow a+ \quad \frac{g(\beta)}{g(t)} \rightarrow 0 \quad \frac{f(\beta)}{g(t)} \rightarrow 0 \quad \begin{matrix} g(t) \rightarrow +\infty \\ \beta \text{ const} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow A - \varepsilon < \frac{f(t)}{g(t)} < A + \varepsilon \xRightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t)}{g(t)} \rightarrow A, \quad t \rightarrow a+$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$$

С уместно $\varepsilon \leftarrow$ произв. велико

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > C \Rightarrow \frac{f(t)}{g(t)} > C \left(1 - \frac{g(\beta)}{g(t)} \right) + \frac{f(\beta)}{g(t)}$$

Лекта стр. је произв. велика када

$$t \rightarrow a+ \quad \text{тако да} \quad \frac{f(t)}{g(t)} \rightarrow +\infty$$

37. Изводи вишег реда

- Ако је ф-ја $f': (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифф. у тачки $x_0 \in (a, b)$ онда $(f')'(x_0)$ називамо другим изводом f и означавамо га са $f''(x_0)$
- На тај начин за свако $n \in \mathbb{N}_0$ можемо да дефинишемо n -ти извод ф-је f , у ознаци $f^{(n)}$.

$$f^{(0)}(x) := f(x)$$

Ако знамо извод реда $(n-1)$, $f^{(n-1)}(x)$, онда је n -ти извод дефинише

$$f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)})'(x) \quad \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right)$$

- f је n пута диференцијабилна ако има n -ти извод.
- Ако ф-ја има извод сваког реда она је бесконачно пута диференцијабилна.
- ~~Универзалност извода~~
- Нека ф-је $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ имају изводе реда n у тачки $x \in (a, b)$. Тада важи:

• (Линейност извода) $(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R})$

$$\lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x) = (\lambda f + \mu g)^{(n)}(x)$$

Привидјано следи из лине. првот извода.

• (Уопштено Лајбницово правило)

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$$

Индукцијом по n

$n=1$: обично Лајбницово правило $\checkmark$

$$\text{И.К.}: (f \cdot g)^{(n)}(x) = ((f \cdot g)^{(n-1)})'(x) =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-1-k)}(x) \right)'$$

ОБИЧНО
ЛАЈБНИЦОВО

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(f^{(k+1)}(x) g^{(n-1-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{j-1} \left(f^{(j)}(x) g^{(n-j)}(x) \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

$$= \binom{n-1}{n-1} \left(f^{(n)}(x) g^{(0)}(x) \right) + \binom{n-1}{0} f^{(0)}(x) g^{(n)}(x)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right) f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

38. Тейлорова формула са остатком
у Лагранжевом и Пеановом облику.

- Тейлоров полином степена n
функције f у тачки x_0

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ и пута дифер. у $x_0 \in (a, b)$

$$P_n(x_0, x; f) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

- n -ти остатак Тейлоровог полинома

$$r_n(x_0, x; f) = f(x) - \cancel{P_n(x_0, x; f)} P_n(x_0, x; f)$$

- $x_0 = 0$: Маклоренов полином

- (Пеанов облик остатка)

$$r_n(x_0, x; f) = o((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$$

Доказ: $\varphi(x)$ остатак Тейлоровог полинома

$$\varphi(x) = r_n(x_0, x; f) = f(x) - P_n(x_0, x; f)$$

Докажимо да $\varphi(x) = o((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$

φ има изводе до реда n у тачки x_0

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \dots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0$$

$$P_n^{(k)}(x_0, x; f) = f^{(k)}(x_0), 0 \leq k \leq n$$

Индукцијом по n показујемо
 да свака ф-ја φ која је n пута
 дифф. у x_0 и за коју важи
 $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \dots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0$
 задовољава релацију $\varphi(x) = o((x-x_0)^n)$
 деф. дифф. $x \rightarrow x_0$

$$n=1: \varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

$$\varphi(x) = o(x-x_0) \quad x \rightarrow x_0 \quad \checkmark$$

ИК: φ дифф. у x_0 $n+1$ пути

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \dots = \varphi^{(n+1)}(x_0) = 0$$

Лагранж: $\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi)(x-x_0)$
 ξ између x и x_0

$g(x) = \varphi'(x)$ и n пута дифф. у x_0

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0$$

$\forall x \rightarrow g(x) = o((x-x_0)^n), x \rightarrow x_0$

$\forall x \rightarrow \varphi'(x) = o((x-x_0)^n), x \rightarrow x_0$

$$g(\xi) = \alpha(\xi)(\xi-x_0)^n$$

за неке $\alpha \rightarrow 0$ када $\xi \rightarrow x_0$

$$|\varphi(x)| = |\alpha(\xi)| |\xi - x_0|^n |x - x_0| \leq |\alpha(\xi)| |x - x_0|^{n+1}$$

$\uparrow$
 ξ између x и x_0

$\Rightarrow x \rightarrow x_0 \Rightarrow \xi \rightarrow x_0$ па $\alpha(\xi) \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \varphi(x) = o((x-x_0)^{n+1}), x \rightarrow x_0$$

• Лагранжев облик остатка

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ и пута дифф. у тачкама
ЗАТВОРЕНОГ ИНТЕРВАЛА
са крајевима $x, x_0 \in (a, b)$ и нека је

њен n -ти извод непрекидан у свим
тачкама тог затвореног интервала.

Зодајно, нека f -ја има извод реда
 $n+1$ у тачкама отвореног интервала
са крајевима x и x_0 . Тада је

$$V_n(x_0, x; f) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) (x - x_0)^{n+1}$$

за неко ξ између x и x_0 .

$$F(t) = f(x) - P_n(t, x; f)$$

$$G(t) = (x - t)^{n+1}$$

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!} (x - t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x - t)^n \right)$$

$\Rightarrow F$ нейр. у тачкама отв. и нп. са
крајевима x и x_0 .

G задовољава исте особине и $G' \neq 0$ на
отв. и нп. Та примењујемо Кошијеву
теорему:

$$(\exists \xi \text{ између } x \text{ и } x_0) \quad \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

$$F(x) = 0, \quad F(x_0) = r_n(x_0, x; f)$$

$$G(x) = 0, \quad G'(x) = -(n+1)(x - x_0)^n$$

$$\begin{aligned} F'(t) &= - \left(f'(t) + \frac{f''(t)}{1!} (x-t) - \frac{f'(t)}{1!} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{n!} n(x-t)^{n-1} \right) \\ &= - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{0 - r_n(x_0, x; t)}{0 - (x - x_0)^{n+1}} = \frac{- \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n}{-(n+1)(x-x_0)^n}$$

$$\Rightarrow r_n(x_0, x; t) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(x_0) (x-x_0)^{n+1}$$

39. Маклоренови полиноми елементарних функција

$$\bullet P_n(0, x; f) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$$

$$\bullet e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$$

$$\bullet \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0$$

$$\bullet \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0$$

$$\bullet \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$$

$$\bullet (1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0, \alpha \in \mathbb{R}$$

40. Монотоност и локални екстремуми ф-ја

- тачка x_0 у којој је ф-ја f дифф. и важи $f'(x_0) = 0$ се зове стационарна (или критична) тачка ф-је f
- $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ два пута дифф. у $x_0 \in (a, b)$ при чему је x_0 стационарна тачка и важи $f''(x_0) \neq 0$. Тада је:
 - x_0 тачка локалног максимума ако је $f''(x_0) < 0$
 - x_0 тачка локалног минимума ако је $f''(x_0) > 0$

У доказу користимо развој ф-је помоћу Тејлоровог полинома другог реда и остатак описујемо у Пеановом

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

x_0 стационарна

$x \rightarrow x_0$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \underbrace{o((x - x_0)^2)}_{\text{ПРОИЗВОЉНО МАЛА}}, \quad x \rightarrow x_0$$

ЗНАК $f(x) - f(x_0)$ ЗАВИСИ
САМО ОД $f''(x_0)$

- Нека је f -ја f n пута дифф. у тачки x_0 . При чему су сви изводи до реда $n-1$ једнаки нули а извод реда n различит од нуле.

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$x \rightarrow x_0$

- n паран – знак зависи од знака $f^{(n)}(x_0)$

(исти закључак као и претходно)

- n непаран – ако је $x > x_0$ исто у супротном обрнуто

41. Конвексне и конкавне функције

• $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ $x_1, x_2 \in (a, b)$ $\lambda \in [0, 1]$

Њих зовемо да је ф-ја f :

• конвексна ако

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

• конкавна ако

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

• Свака тешила графика конвексне ф-је
је намази изнад графика

• Ако је ф-ја f конвексна на интервалу
 $(c-\delta_1, c)$ а конкавна на $(c, c+\delta_2)$
(или обрнуто), онда је тачка c
назива прелојном тачком ф-је f . ($\delta_1, \delta_2 > 0$)

• Надграф ф-је f је скупи
 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, y \geq f(x)\}$

• ф-ја је конвексна акко је њен
надграф конвексан скупи

• $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ $\eta_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

- Најбоља права која пролази кроз тачке $(x_0, f(x_0))$ и $(x, f(x))$ са графика f -је f недиференцијабилна у $x = x_0$

Најбоља је једнак тангенту у тачки x_0 која је гради са x_0 осом

• Своди се $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$

На однос међу најбољима одређених права

$x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ тачка између x_1 и x_2

$\Rightarrow \lambda = \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_2}$

пп $x_1 < x_2$

$f(x_0) \leq \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_2} f(x_2)$

$(x_2 - x_1)f(x_0) \leq (x_0 - x_2) \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_2} f(x_1) + (x_1 - x_0) \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_2} f(x_2)$ / $\cdot (x_2 - x_1)$

$\underbrace{(x_2 - x_0)}_{(x_2 - x_1) + (x_1 - x_0)} f(x_1) + \underbrace{(x_0 - x_1)}_{(x_0 - x_2) + (x_2 - x_1)} f(x_2) + (x_1 - x_2) f(x_0) \geq 0$

$\hookrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$

$\hookrightarrow \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$\Rightarrow$ За конвексну ф-ју $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$
и $(\forall x_1, x_2, x_3 \in (a, b)) \quad x_1 < x_2 < x_3$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

$$\Rightarrow U_{x_1}(x_2) \leq U_{x_1}(x_3) \leq U_{x_2}(x_3)$$

$$U_{x_2}(x_1) \leq U_{x_3}(x_1) \leq U_{x_3}(x_2)$$

$\Rightarrow$ За фиксирано x_0 натиб $U_{x_0}(x)$ је растућа ф-ја по x

• Ако је натиб $U_{x_0}(x)$ (за дат ф-јом x) растућа ф-ја по x за $\forall x_0 \in (a, b)$,
тада је ф-ја конвексна.

$$x_1, x_2 \in (a, b)$$

$x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ је између две тачке

$$\lambda = \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_2} \quad \frac{\lambda}{1 - \lambda} = \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_0}$$

$$x_1 < x_2 : \quad U_{x_0} \nearrow$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \quad / (x_2 - x_0)$$

$$(f(x_0) - f(x_1)) \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_0} \leq f(x_2) - f(x_0)$$

$$\frac{\lambda}{1 - \lambda} (f(x_0) - f(x_1)) \leq f(x_2) - f(x_0)$$

$$x_2 < x_1 \quad u_{x_0} \nearrow$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad / (x_0 - x_2)$$

$$f(x_0) - f(x_2) \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} (f(x_1) - f(x_0))$$

$$\Rightarrow f(x_0) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

• Ф-ја $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ је конвексна ако је ф-ја ~~највиша~~ најнижа $u_{x_0}(x) \nearrow$ по x за $(\forall x_0 \in (a, b))$

важи
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

та закључујемо да f има леву и десну извод у свакој

• $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна
Тада је ф-ја конвексна ако је њен први извод растућа ф-ја

$\Rightarrow f$ конвексна $x_1, x_2 \in (a, b) \quad x_1 < x_2$
 $\forall x \in (x_1, x_2)$ важи

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

$$C = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\underbrace{\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq C \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}}_{\text{проћемо лимесом}}$$

проћемо лимесом

$$f'_+(x_1) \leq C \Rightarrow f'(x_1) \leq C$$

$$f'_-(x_2) \geq C \Rightarrow f'(x_2) \geq C$$

$\rightarrow f'$ растућа на (a, b)

$\boxed{\Rightarrow} f'$ растућа $x_1 < x_0 < x_2$

$$u_{x_0}(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(c_1) \leftarrow \text{по Лагранжу}$$

$$u_{x_0}(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = f'(c_2) \downarrow$$

$$\Rightarrow c_1 < x_0 < c_2 \Rightarrow f'(c_1) \leq f'(c_2)$$

$$u_{x_0}(x_1) \leq u_{x_0}(x_2)$$

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ гва пута дифф.

f конвексна ако је други извод

недегативан на (a, b)

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ конв. ако } f' \nearrow \\ f' \nearrow \text{ ако } f'' \geq 0 \end{array} \right\} \checkmark$$

• конкавне само обрнуто