

Анализа 1

- информатика -

БИТНЕ ТЕОРЕМЕ И ДЕФИНИЦИЈЕ ЗА ПРАКТИЧНИ ИСПИТ

Трећи семестар, 2026.

Аутор

Никола Маринковић

Асистент

Павле Касом

За неко $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\begin{aligned} x_i \neq 0 \quad H_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \\ x_i \geq 0 \quad G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n} \\ A_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \\ K_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \end{aligned} \quad (1)$$

За неко $n \in \mathbb{N}$ и $x_i \in \mathbb{R}^+$ важи

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq K_n$$

Дефиниција лимеса:

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \\ \text{Запис: } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \end{aligned} \quad (2)$$

Неодређени: $(\pm\infty) - (\pm\infty)$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, 1^∞ , ∞^0 , 0^0

Теорема 1. (Теорема о три лимеса)

$$\begin{aligned} (a_n), (b_n), (c_n) \\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad a_n \leq b_n \leq c_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = L \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L \end{aligned} \quad (3)$$

Последице

$$\begin{aligned} (a_n), \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, (b_n) \leftarrow \text{ограничен} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = 0 \end{aligned}$$

$$a > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Густина скупа $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{R}$

$$(\forall a, b \in \mathbb{R} \mid a < b) (\exists q \in \mathbb{Q})(\exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

$$a < q < b \wedge a < r < b$$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e \quad (4)$$

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

Поредбена скала: $a > 1, k > 0, c > 1 \in \mathbb{R}$

$$\log_a n \ll n^k \ll c^n \ll n! \ll n^n \ll (n!)^2 \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \wedge \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e$$

Теорема 2. (Штолц)

$$(x_n), (y_n) \nearrow, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = L \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = L \quad (6)$$

Последице

$$\text{Коши: } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = L$$

$$(a_i \neq 0) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} = L$$

$$(a_i > 0) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = L$$

$$(a_i > 0) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

Периодичан низ: $a_{n+T} = a_n$ ($T \in \mathbb{N}$)

Тачка нагомилавања: подниз (a_{n_k})

$$(a \in \overline{\mathbb{R}}) (a_{n_k}) \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$$

$\liminf$, $\limsup$

Болцано-Вајерштрас:

- Сваки ограничен низ има бар једну тачку нагомилавања у $\mathbb{R}$.
 - Сваки низ има т.н. у $\overline{\mathbb{R}}$.
 - Низ конвергира ако има тачно једну т.н. у $\mathbb{R}$.
-

Кошијеви низови:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N}) |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

Низ је конвергентан акко је Кошијев.

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа A

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

Функција је непрекидна у тачки a ако важи

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Функција је непрекидна у скупу ако је непрекидна у свакој тачки тог скупа.

Када је функција непрекидна у тачки, леви и десни лимес у њој су једнаки.

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$$

$$(\exists U_a)(\forall x \in \overset{\circ}{U}_a) f(x) = g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Теорема 3. За елементарне функције и рубне тачке њихових домена важи:

$$\begin{aligned}
n \in \mathbb{N} \text{ парно: } & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = +\infty \\
n \in \mathbb{N} \text{ непарно: } & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = \pm\infty \\
a \in \mathbb{R} \wedge a > 1 : & \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \\
a \in \mathbb{R} \wedge 0 < a < 1 : & \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \\
a \in \mathbb{R} \wedge a > 1 : & \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \log_a x = -\infty \\
a \in \mathbb{R} \wedge 0 < a < 1 : & \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \log_a x = +\infty \\
n \in \mathbb{N} \text{ парно: } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty \\
n \in \mathbb{N} \text{ непарно: } & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[n]{x} = \pm\infty \\
\alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha > 0 : & \lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha = 0+, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty \\
\alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha < 0 : & \lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0+ \\
k \in \mathbb{Z} : & \lim_{x \rightarrow (k\pi + \frac{\pi}{2})-} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (k\pi + \frac{\pi}{2})+} \operatorname{tg} x = -\infty \\
k \in \mathbb{Z} : & \lim_{x \rightarrow k\pi+} \operatorname{ctg} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow k\pi-} \operatorname{ctg} x = -\infty \\
& \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}-, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}+ \\
& \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arcctg} x = 0+, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi-
\end{aligned} \tag{7}$$

Асимптотске релације o , O , $\sim$

$$f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \in A'$$

$$f = o(g) \quad (f \ll g, \quad x \rightarrow a)$$

$$(\exists U_a)(\exists \alpha : \overset{\circ}{U}_a \rightarrow \mathbb{R})(\forall x \in \overset{\circ}{U}_a) f(x) = \alpha(x)g(x) \wedge \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$$

Ако важи $g(x) \neq 0 \quad (\forall x \in \overset{\circ}{U}_a) :$

$$\begin{aligned}
& \bullet f = o(g), \quad x \rightarrow a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \\
& \bullet o(f) \pm o(f) = o(f), \quad x \rightarrow a \\
& \bullet o(c \cdot f) = o(f) = c \cdot o(f), \quad x \rightarrow a, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
& \bullet o(o(f)) = o(f), \quad x \rightarrow a \\
& \bullet f \cdot o(g) = o(f \cdot g) = o(f) \cdot o(g), \quad x \rightarrow a \\
& \bullet f \sim g, \quad x \rightarrow a \Rightarrow o(f) = o(g), \quad x \rightarrow a \\
& \bullet f \sim g, \quad x \rightarrow a \Rightarrow f = g + o(g), \quad x \rightarrow a \\
& \bullet f = o(1), \quad x \rightarrow a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
& f, g: A \rightarrow \mathbb{R}, a \in A' \\
& f = O(g), x \rightarrow a \\
& (\exists U_a)(\exists \beta: \mathring{U}_a \rightarrow \mathbb{R})(\forall x \in \mathring{U}_a) f(x) = \beta(x)g(x) \\
& g(x) \neq 0 (\forall x \in \mathring{U}_a) \\
& f = O(g), x \rightarrow a \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f, g: A \rightarrow \mathbb{R}, a \in A' \\
& f \sim g, x \rightarrow a \\
& (\exists U_a)(\exists \gamma: \mathring{U}_a \rightarrow \mathbb{R})(\forall x \in \mathring{U}_a) f(x) = \gamma(x)g(x) \wedge \lim_{x \rightarrow a} \gamma(x) = 1 \\
& g(x) \neq 0 (\forall x \in \mathring{U}_a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), x \rightarrow 0 \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), x \rightarrow 0 \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), x \rightarrow 0 \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} + o(x^n), x \rightarrow 0 \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n), x \rightarrow 0, \alpha \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Теорема 4. (Хајне)

$$\begin{aligned}
& f: A \rightarrow \mathbb{R}, a \in A', L \in \overline{\mathbb{R}} \\
& \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall (x_n)|x_i \in A \setminus \{a\}) (\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a) \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L
\end{aligned} \tag{9}$$

Коментар. Хајнеова теорема се практично може користити на следеће начине:

- нађемо два низа (x_n) и (y_n) тако да оба теже ка a , $f(x_n)$ и $f(y_n)$ теже ка различитим вредностима, па знамо да $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- користимо познате развоје

$$e^{x_n} = 1 + x_n + o(x_n) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

$$f : A \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in A \cap A'$$

Функција f је у тачки a

- непрекидна акко

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$$

- непрекидна слева

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$$

- непрекидна здесна

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$$

Функција је непрекидна у a ако је непрекидна слева и здесна.

- f, g непрекидне у $a \Rightarrow f \pm g, \alpha \cdot f, f \cdot g, \frac{f}{g} \ (g \neq 0)$ непрекидне у a
- $f : A \rightarrow B, \quad g : B \rightarrow \mathbb{R}$
 f непрекидна у a, g непрекидна у $f(a) \Rightarrow g \circ f$ је непрекидна у a
- све елементарне функције су непрекидна на свом домену (D_f)
- $x \in (a, b) \ f(x) = g(x) \wedge g$ непрекидна на $(a, b) \Rightarrow f$ непрекидна на (a, b)

Глобална својства непрекидних функција

$$f : A \rightarrow \mathbb{R} \ (a \in A) \ f(a) = 0 \leftarrow \text{нула функције}$$

Коши-Болцано: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција

$$f(a) \cdot f(b) \leq 0 \Rightarrow \exists c \in [a, b] \ f(c) = 0$$

Међувредност: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција

$$f(a) = A, \ f(b) = B \Rightarrow (\exists c \in [a, b]) \ f(c) = C \in [A, B]$$

Вајерштрас: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна и ограничена функција која достиже свој максимум и минимум

$$(\exists m, M \in \mathbb{R})(\exists \alpha, \beta \in [a, b])(\forall x \in [a, b]) \ f(\alpha) = m, \ f(\beta) = M, \ m \leq f(x) \leq M$$

- $A \subseteq \mathbb{R}$ је отворен акко

$$(\forall a \in A)(\exists \varepsilon > 0) \ (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A$$

- A је затворен ако је $A^C = \mathbb{R} \setminus A$ отворен

- отворени су сви интервали облика (a, b) $a, b \in \mathbb{R}$ и уније таквих интервала

- $A \subseteq \mathbb{R}$ отворен, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$$

- f је диференцијабилна у тачки $a \Rightarrow f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- f је диференцијабилна на скупу A ако је диференцијабилна за $\forall a \in A$
- леви извод

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- десни извод

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- функција је диференцијабилна у $a \in A$ ако леви и десни лимес у a постоје и једнаки су
- отворен скуп A такав да важи $(\forall a \in A) f(a) = g(a)$
 - ако је f дифф. у $a \Rightarrow g$ дифф. у a и важи $f'(a) = g'(a)$
 - ако је f дифф. у $A \Rightarrow (\forall a \in A) f'(a) = g'(a)$
- Ако је f диференцијабилна у a , она је у тој тачки и непрекидна (обрнуто не важи)

Ако су $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ функције диференцијабилне у $a \in A$, и A је отворени интервал, важи да је

$$\begin{aligned} f+g & \text{ дифф. и важи } (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \\ \lambda f & \text{ дифф. и важи } (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a) \\ fg & \text{ дифф. и важи } (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \\ g(a) \neq 0, \frac{f}{g} & \text{ дифф. и важи } \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2} \\ (f \circ g)'(a) & = f'(g(a)) \cdot g'(a) \end{aligned} \tag{10}$$

Функција $f(x)$	Извод $f'(x)$	Важи за
$c = \text{const}$	0	$x \in \mathbb{R}$
x	1	$x \in \mathbb{R}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$
		$\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q \text{ непарно}, x \neq 0$
		$\alpha = \frac{p}{q} > 1, q \text{ непарно}, x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\text{tg } x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\text{ctg } x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
$\text{arctg } x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\text{arccetg } x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

(11)

Диференцијални рачун

$$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}, f: A \rightarrow \mathbb{R}, a \in A$$

- $(\exists U_a)(\forall x \in U_a) f(x) \leq f(a) \Rightarrow f$ има локални максимум у a
- $(\exists U_a)(\forall x \in U_a) f(x) \geq f(a) \Rightarrow f$ има локални минимум у a
- Функција има локални екстремум ако има локални минимум или максимум (може их бити више)

Ферма: Ако је f дифф. у a , и a је локални екстремум, онда је $f'(a) = 0$

Рол: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ је непрекидна на $[a, b]$ и дифф. на (a, b)

$$f(a) = f(b) \Rightarrow (\exists c \in (a, b)) f'(c) = 0$$

Лагранж: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непр. на $[a, b]$ и дифф. на (a, b)

$$\Rightarrow (\exists \xi \in (a, b)) f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Коментар. Последице: $(\forall x \in (a, b))$

- $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \xi$
- $f'(x) \geq 0$ - f расте
- $f'(x) > 0$ - f монотono расте
- $f'(x) \leq 0$ - f опада
- $f'(x) < 0$ - f монотono опада
- $|\sin x| \leq |x|$

Асимптоте функције

- функција дефинисана на некој околини тачке $\pm\infty$ тј. на $(t, +\infty)$ (или $(-\infty, t)$) за неко $t \in \mathbb{R} \cup \{\mp\infty\}$

$$(\exists a, b \in \mathbb{R}) f(x) = ax + b + o(1), x \rightarrow \pm\infty$$

$\Rightarrow y = ax + b$ је асимптота функције f када $x \rightarrow \pm\infty$.

$a = 0$: $f(x) = b + o(1)$, $y = b$ хоризонтална асимптота (ХА) $a \neq 0$: коса асимптота (КА)

- $y = b$ је ХА ф-је f када $x \rightarrow \pm\infty$ акко важи

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$$

- $(a, b \in \mathbb{R}) y = ax + b$ асимптота f када $x \rightarrow \pm\infty$ акко

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \wedge b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$$

- ако $\nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$, f нема ни ХА ни КА када $x \rightarrow \pm\infty$
- ако $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$, $y = L$ је ХА
- ако $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}$ f нема ХА и тражимо КА
- права $y = ax + b$ је КА f када $x \rightarrow \pm\infty$ уколико:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$$

$$a \in \mathbb{R}, f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$$

Ако важи бар један:

$$\begin{aligned} 1^\circ (\exists \delta > 0)(a - \delta, a) \subseteq D_f \wedge \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \in \{-\infty, +\infty\} \\ 2^\circ (\exists \delta > 0)(a, a + \delta) \subseteq D_f \wedge \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \in \{-\infty, +\infty\} \end{aligned} \tag{12}$$

$\Rightarrow x = a$ је вертикална асимптота (ВА) функције f

Лопитал: ако су граничне вредности функција f и g у тачки обе једнаке бесконачности или нули, ако постоји количник извода тих функција, његова гранична вредност је једнака граничној вредности количника f и g .

$$(a \in \overline{\mathbb{R}}) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (13)$$

Присетимо се поредбене скале 5. Можемо је доказати користећи Лопиталова правила.

$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ - извод вишег реда

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x)$$

$$\ln(1+x) = x + o(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$$

Тејлоров полином

$$n \in \mathbb{N}, -\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty,$$

$f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ непр. и n пута дифф. у некој U_a за неко $a \in (\alpha, \beta)$

$$T_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (14)$$

$a = 0$ Маклоренов полином:

$$M_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$R_{n,a}(x) = f(x) - T_{n,a}(x) \leftarrow$ остатак Тејлоровог полинома функције f реда n са центром у тачки a

Остатак у Пеановог облику:

Φ -ја f n дифф. на U_a

$$\Rightarrow R_{n,a}(x) = o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a$$

Остатак у Лагранжовом облику:

Φ -ја f n дифф. на U_a и деф. $f^{(n+1)}$ на U_a

$$(\forall x \in U_a)(\exists \varepsilon \in (a, x)) \quad R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Конвексност и конкавност

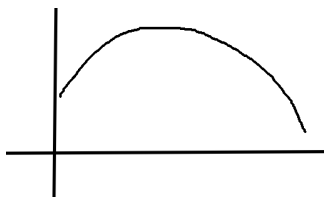
$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$



Конвексност:

$$(\forall x, y \in (a, b))(\forall \lambda \in [0, 1])$$

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

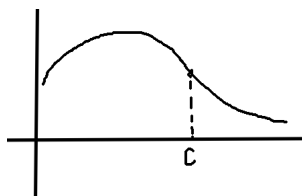


Конкавност:

$$(\forall x, y \in (a, b))(\forall \lambda \in [0, 1])$$

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

- $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ је диференцијабилна на (a, b)
 - f конвексна $\Leftrightarrow f' \nearrow$
 - f конкавна $\Leftrightarrow f' \searrow$
- $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ је двапут диференцијабилна на (a, b) .
Тада за $(\forall x \in (a, b))$ важи
 - f конвексна $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$
 - f конкавна $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$
- Неко $c \in (a, b)$ је превојна тачка функције f ако за неко $s > 0$ важи:



- f је конвексна на $(c - s, c)$ а конкавна на $(c, c + s)$
- обрнуто

Испитивање тока и скицирање графика функција

1. Домен функције

- Пресек домена свих функција од којих је функција компонована

2. Нуле и знак функције

- Испитујемо када је $f(x) = 0$, $f(x) > 0$, $f(x) < 0$
- Овај корак може се прескочити и оставити за крај када постаје једноставнији

3. Специјална својства (парност, непарност, периодичност)

- Функција је парна ако $f(-x) = f(x)$
- Функција је непарна ако $f(-x) = -f(x)$
- Функција је периодична уколико јој је домен симетричан у односу на 0 и уколико постоји периода $T > 0$ за коју важи $(\forall x \in D_f) f(x) = f(x + T)$

4. Непрекидност и диференцијабилност

- Функција је непрекидна као композиција непрекидних функција
- Рачунање првог извода

5. Монотоност и локални екстремуми

- Нуле првог извода, рачунамо други извод и уколико је у тим тачкама функција опадајућа, знамо да је максимум и обрнуто

6. Конвексност и конкавност функције

7. Асимптоте функције

- Хоризонталне, косе асимптоте
- Вертикалне асимптоте се гледају по „рупама“ у домену

8. График функције

- Да ли тангента пролази кроз (x, y)
- $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$