

[A#1]

$n \in \mathbb{N}$

$$x_i \neq 0 \quad H_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$$

$$x_i \geq 0 \quad G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}$$

$$A_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$K_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

$n \in \mathbb{N}, x_i \in \mathbb{R}^+$

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq K_n$$

лимес: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

неодређени

$$(\pm \infty) - (\pm \infty), \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, 1^\infty, \infty^0, 0^0$$

To $\exists L: (a_n), (b_n), (c_n)$

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) a_n \leq b_n \leq c_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$$

$$(a_n) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$(b_n) \leftarrow$ отграђен

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$$

$$a > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}) \quad a < b \quad (\exists q \in \mathbb{Q}) (\exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

$$a < q < b \quad \vee \quad a < r < b$$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

порядок роста скала: $a > 1, k > 0, c > 1 \in \mathbb{R}$

$$\log_a b \ll n^k \ll c^n \ll n! \ll n^n \ll (n!)^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e$$

$$\text{Штолц: } (x_n) \quad (y_n) \nearrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = L \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = L$$

$$\text{Кочин: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = L$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = L$$

$$a_i > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = L$$

$$a_i > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

$$\text{Периодичан: } a_{n+T} = a_n \quad T \in \mathbb{N}$$

ТАЧКА НАТОМИЛАВАЊА: ПОДНИЗ (a_{n_k})

$$(a \in \overline{\mathbb{R}}) \quad \text{ПОДНИЗ } (a_{n_k}) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$$

$$\liminf$$

$$\limsup$$

БОЛЦАНО-ВАЈЕРШТРАС:

• Сваки ограничен низ има бар једну
ТАЧКУ НАТОМИЛАВАЊА у $\mathbb{R}$

• Сваки низ има т.н. у $\overline{\mathbb{R}}$

• Низ конвертира ако има тачно једну т.н. у $\mathbb{R}$

КОШИЈЕВИ НИЗОВИ:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N}) |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

Низ је конвергентан ако је Кошијев

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка награнице скупа A

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

f -ја је непрекидта у тачки a

ако $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Непрекидта у скупу ако је непрекидта у свакој тачки

десни лимес, леви лимес

f је непрекидта

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

$$\exists \mathcal{U}_a) f(x) = g(x) (\forall x \in \mathcal{U}_a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Теорема: За елементарне функције и рубне тачке њихових домена важи:

$$n \in \mathbb{N} \text{ парно: } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty,$$

$$n \in \mathbb{N} \text{ непарно: } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty,$$

$$a \in \mathbb{R} \text{ и } a > 1: \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0,$$

$$a \in \mathbb{R} \text{ и } 0 < a < 1: \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty,$$

$$a \in \mathbb{R} \text{ и } a > 1: \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \log_a x = -\infty,$$

$$a \in \mathbb{R} \text{ и } 0 < a < 1: \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \log_a x = +\infty,$$

$$n \in \mathbb{N} \text{ парно: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty,$$

$$n \in \mathbb{N} \text{ непарно: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty,$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ и } \alpha > 0: \lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha = 0+,$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ и } \alpha < 0: \lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha = +\infty,$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ и } \alpha > 0: \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty,$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ и } \alpha < 0: \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0+,$$

$$k \in \mathbb{Z}: \lim_{x \rightarrow (k\pi + \frac{\pi}{2})-} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (k\pi + \frac{\pi}{2})+} \operatorname{tg} x = -\infty,$$

$$\text{Специјално је } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

$$k \in \mathbb{Z}: \lim_{x \rightarrow k\pi+} \operatorname{ctg} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow k\pi-} \operatorname{ctg} x = -\infty,$$

$$\text{Специјално је } \lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{ctg} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi-} \operatorname{ctg} x = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}-, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}+,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = 0+, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = \pi-.$$

Асимптотические разложения $o, O, \sim$

$$f, g: A \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in A'$$

$$f = o(g) \quad f \ll g, x \rightarrow a$$

$$(\exists U_a)(\alpha: U_a \rightarrow \mathbb{R})(\forall x \in U_a)$$

$$f(x) = \alpha(x)g(x) \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$$

Если верно $g(x) \neq 0 \quad (\forall x \in U_a)$

$$f = o(g), x \rightarrow a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\bullet \quad o(f) \pm o(f) = o(f), x \rightarrow a$$

$$\bullet \quad o(c \cdot f) = o(f) = c \cdot o(f), x \rightarrow a$$

$$c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\bullet \quad o(o(f)) = o(f), x \rightarrow a$$

$$\bullet \quad f \cdot o(g) = o(f \cdot g) = o(f) \cdot o(g), x \rightarrow a$$

$$\bullet \quad f \sim g, x \rightarrow a \Rightarrow o(f) = o(g), x \rightarrow a$$

$$\bullet \quad \Rightarrow f = g + o(g), x \rightarrow a$$

$$\bullet \quad f = o(1), x \rightarrow a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

$$f, g : A \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in A'$$

$$f = O(g), x \rightarrow a$$

$$(\exists U_a) (\exists \beta : U_a \rightarrow \mathbb{R}) (\forall x \in U_a) f(x) = \beta(x) g(x)$$

$$g(x) \neq 0 \quad (\forall x \in U_a)$$

$$f = O(g), x \rightarrow a \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$f, g : A \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in A'$$

$$f \sim g, x \rightarrow a \quad (\exists U_a) (\exists \gamma : U_a \rightarrow \mathbb{R})$$

$$(\forall x \in U_a) f(x) = \gamma(x) g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \gamma(x) = 1$$

$$g(x) \neq 0 \quad (\forall x \in U_a) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0,$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

при чему је, подсетимо се, $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-(n-1))}{n!}$ за свако $\alpha \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{ХАјте: } f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in A' \quad L \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall (x_n) \mid x_n \in A \setminus \{a\}) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$$

Имаћемо два низа (x_n) и (y_n) тако да оба теже ка a , али $f(x_n)$ и $f(y_n)$ теже ка различитој вредности, па знамо да $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

• користимо познате развоје

$$e^{x_n} = 1 + x_n + o(x_n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in A \cap A'$$

f непрекидна у a ако

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$$

непрекидна слева

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$$

десна

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$$

непрекидна у a

слева и десна

ако је непрекидна

f, g непрекидне у a

ОТВОРЕН: (a, b)
ЗАТВОРЕН: $[a, b]$

$f \pm g, \lambda \cdot f, f \cdot g, \frac{f}{g} (g \neq 0)$
непрекидне у a

$f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow \mathbb{R}$

f непр. у a, g непр. у $f(a)$

$\Rightarrow g \circ f$ непр. у a

две елементарне ф-је су непр. на $\mathbb{R}$

$x \in (a, b) f(x) = g(x)$ и g непр. на (a, b)

$\Rightarrow f$ непр. на (a, b)

стр 131

Глобална својства непрекидних ф-ја

$f: A \rightarrow \mathbb{R} (a \in A) f(a) = 0 \Leftarrow$ и $\forall A$ ф-је

Коши-Болцано: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непр.

$f(a) \cdot f(b) \leq 0 \Rightarrow \exists c \in [a, b] f(c) = 0$

Међувредност: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непр.

$f(a) = A, f(b) = B \Rightarrow \exists c \in [a, b] f(c) \in [A, B]$

Вајерштрас: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непр.

ограничена је и достиже свој макс. и мин.

$(\exists m, M \in \mathbb{R}) (\exists \alpha, \beta \in [a, b]) (\forall x \in [a, b]) m \leq f(x) \leq M$

- $A \subseteq \mathbb{R}$ је отворен ако и само ако
 $(\forall a \in A) (\exists \varepsilon > 0) (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A$

- затворен ако је $A^c = \mathbb{R} \setminus A$ отворен

- отворени су сви интервали облика
 (a, b) $a, b \in \mathbb{R}$ и јошје таквих инт.

- $A \subseteq \mathbb{R}$ отворен, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$

$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$ f диференцијабилна у тачки $a \Rightarrow f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- f глф. на скупу A ако је глф $\forall a \in A$

- леви извод $f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

десни извод $f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

- f глф у $A \Leftrightarrow$ леви = десни $\in \mathbb{R}$

- отв. скупу A $(\forall a \in A) f(a) = g(a)$

f глф. у $a \Rightarrow g$ глф у a $f'(a) = g'(a)$

f глф у $A \Rightarrow (\forall a \in A) f'(a) = g'(a)$

- f глф. у $a \Rightarrow f$ непр. у a

• $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ A отк. или.

дифф. у $a \in A$

- $f+g$ дифф

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

- λf дифф

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$$

- fg дифф.

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

- $g(a) \neq 0$ $\frac{f}{g}$ дифф.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

$$\bullet (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Дифф. функции

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$

$$\bullet (\exists U_a) (\forall x \in U_a) f(x) \leq f(a)$$

$\Rightarrow f$ имеет локальную максимум у a

$$\bullet (\exists U_a) (\forall x \in U_a) f(x) \geq f(a)$$

$\Rightarrow f$ имеет локальный минимум у a

ЛОКАЛЬНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ
(могут не быть глобальными)

Ферма: f дифф. у a , a - локал. экстр.

$$\Rightarrow f'(a) = 0$$

Рол: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

непрерывна на $[a, b]$
дифф. на (a, b)

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) \quad f'(c) = 0$$

	ФУНКЦИЈА $f(x)$	ИЗВОД $f'(x)$	ВАЖИ ЗА
1.	$c = \text{const}$	0	$x \in \mathbf{R}$
2.	x	1	$x \in \mathbf{R}$
3.	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbf{R}, x > 0$ $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}, q \text{ не парно}, x \neq 0$ $\alpha = \frac{p}{q} > 1, q \text{ не парно}, x \in \mathbf{R}$
4.	a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbf{R}$
5.	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$
6.	$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbf{R}$
7.	$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbf{R}$
8.	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$
9.	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$
10.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
11.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
12.	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbf{R}$
13.	$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbf{R}$

Лагранж: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

непр. на $[a, b]$
дифф. на (a, b)

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

последица: $(\forall x \in (a, b)) \quad f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = c$

$(\forall x \in (a, b)) \quad f'(x) \geq 0$ f монотонно расте (строго)

$f'(x) \leq 0$ f монотонно опада (строго)

$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |\sin x| \leq |x| \quad \Leftrightarrow \text{ако } x = 0$

$$x \in (0, \pi] \quad \sin x < x$$

$$x \in [-\pi, 0) \quad \sin x > x$$

Асимптоте ϕ -је

f деф на некој околни тачке $\pm\infty$

или на $(t, +\infty)$ $(-\infty, t)$ за $t \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$(\exists a, b \in \mathbb{R}) \quad f(x) = ax + b + o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty$$

$\Rightarrow y = ax + b$ је асимптота ϕ -је f
када $x \rightarrow \pm\infty$

$$a = 0: \quad f(x) = b + o(1)$$

$$y = b$$

хоризонтална
асимптота

$$a \neq 0:$$

коса
асимптота

• $y = b$ je XA Φ -je f kao $x \rightarrow \pm\infty$
akko je $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

• $(a, b \in \mathbb{R})$ $y = ax + b$ asim. f kao $x \rightarrow \pm\infty$
akko $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ i $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$

ako $\nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$, f nema ni XA ni KA
kao $x \rightarrow \pm\infty$

ako $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$, $y = L$ je XA

ako $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}$ f nema XA i
takođe KA

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$

pravu $y = ax + b$ je KA f kao $x \rightarrow \pm\infty$

$$a \in \mathbb{R} \quad f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$$

ако важи бар један:

$$1^\circ (\exists \delta > 0) (a - \delta, a) \subseteq D_f \wedge \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}$$

$$2^\circ (\exists \delta > 0) (a, a + \delta) \subseteq D_f \wedge \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}$$

$\Rightarrow x = a$ вертикална асимптота
(ВА) ϕ -је f

Лопитал $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\log_a x \ll x^k \ll e^x, \quad x \rightarrow +\infty$$

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x)$$

$$\ln(1+x) = x + o(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$$

Тејлоров полином

$n \in \mathbb{N}$, $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$, $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$

диф. и n -гифф у некој U_a $a \in (\alpha, \beta)$

$$T_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

$a=0$ МАКЛОРЕНОВ:

$$M_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$R_{n,a}(x) = f(x) - T_{n,a}(x) \leftarrow \text{остатак}$$

Тејлоровот полином φ -је f реда n са
центром у тачки a

Остатак у Пеановом облику:

f и гифф на U_a и гиф. $f^{(n+1)}$ на U_a

$$\Rightarrow R_{n,a}(x) = o((x-a)^n), x \rightarrow a$$

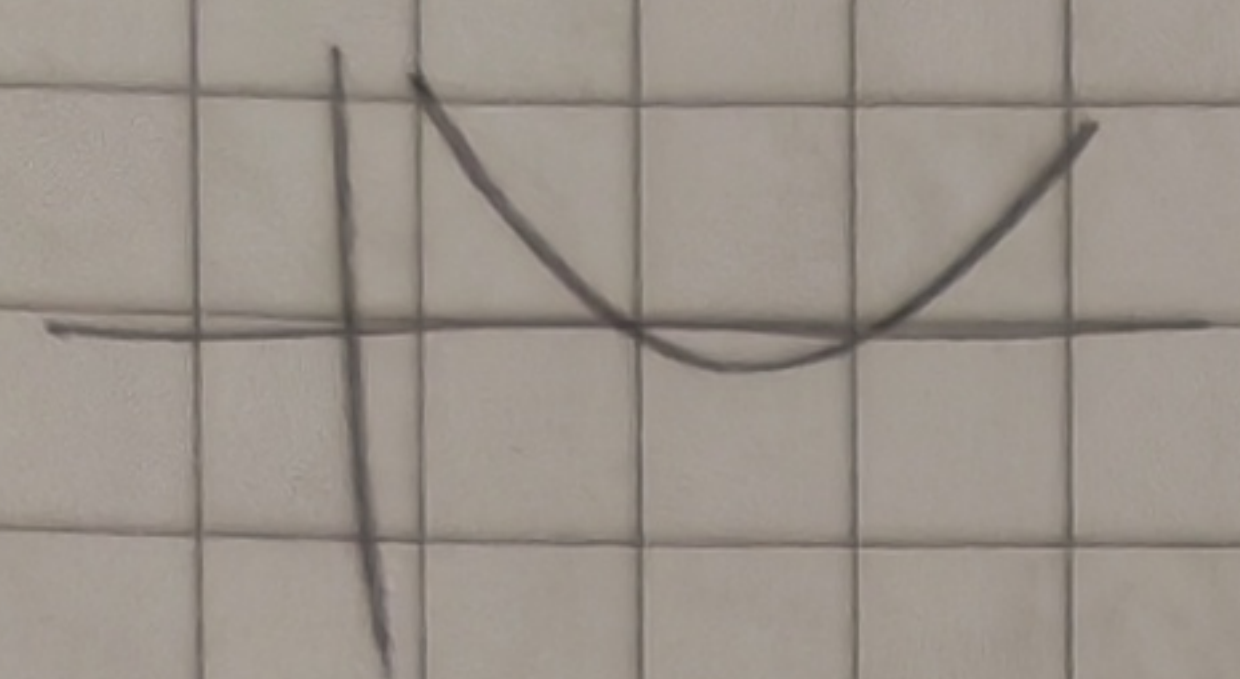
Лагранжов облик:

$$(\forall x \in U_a) (\exists \xi \in (a, x)) R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

КОНВЕКЦИЯ И КОНКАВНОСТ

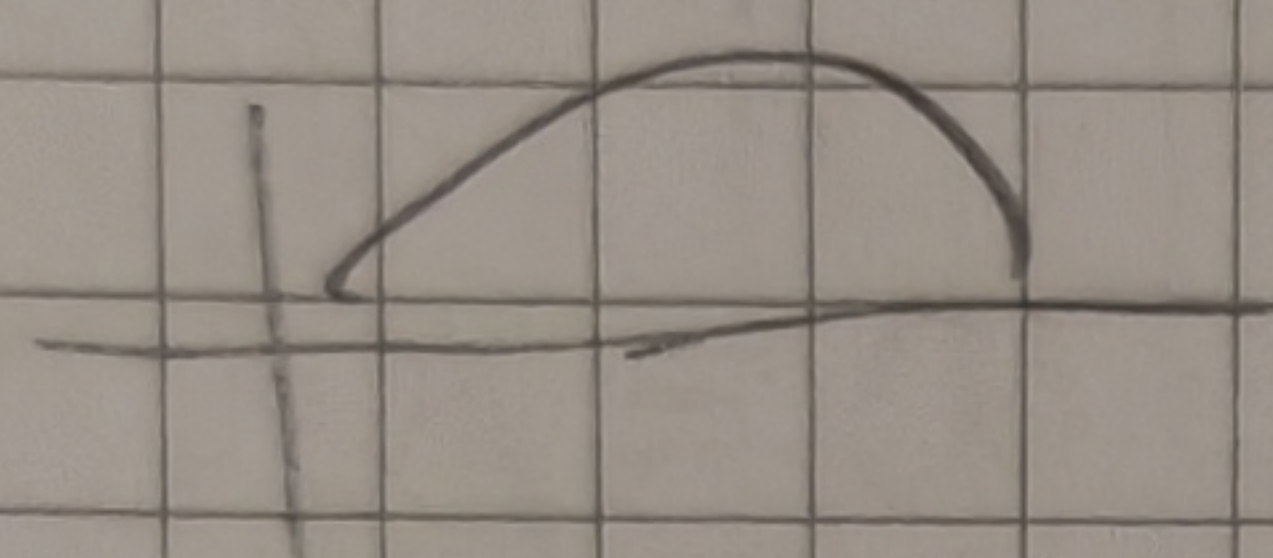
$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{КОНВЕКЦИЯ: } (\forall x, y \in (a, b)) (\forall \lambda \in [0, 1])$$



$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

$$\text{КОНКАВНОСТ: } (\forall x, y \in (a, b)) (\forall \lambda \in [0, 1])$$



$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

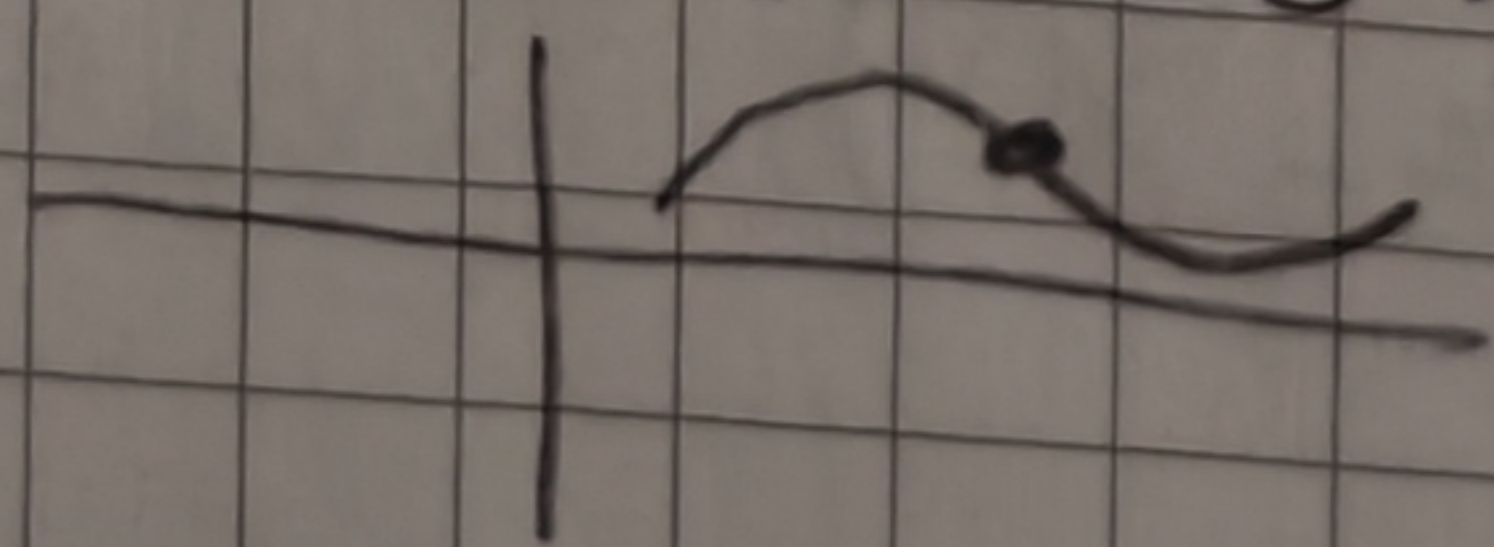
- $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ гурф. на (a, b)
 - f КОНВЕКЦИЯ $(\Rightarrow) f' \nearrow$
 - f КОНКАВНОСТ $(\Rightarrow) f' \searrow$
 - $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ гледище гурф. на (a, b)
 - f КОНВЕКЦИЯ $(\Rightarrow) f''(x) \geq 0$
 - f КОНКАВНОСТ $(\Rightarrow) f''(x) \leq 0$
- $\forall x \in (a, b)$

$$c \in (a, b)$$

ПРЕВОДНА ТАЧКА ако важи: $s > 0$

- f КОНВЕКЦИЯ на $(c-s, c)$, КОНКАВНОСТ на $(c, c+s)$

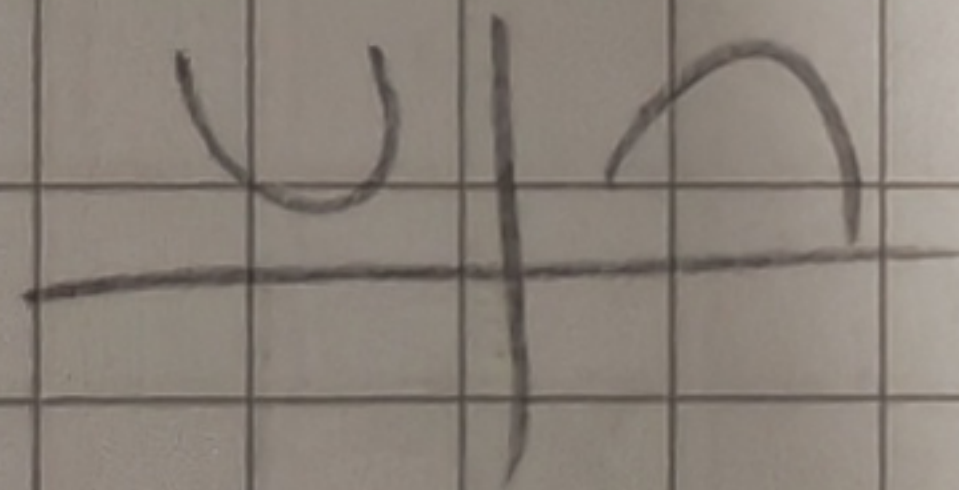
• обрнуто



Истиживање тока и скицавање графика функција

- 1° Зомет функције
- 2° Нуле и знак
- 3° Специјална својства (парност, непарност, периодичност)
- 4° Непрекидност и диференцијабилност

5° Монотоност

5° Монотоност и локални екстремуми
 $f''(x) = 0$ 

7° Асимптоте ф-ја (по току)
- по рунтама у зомету

8° График ф-је

Да ли тангентна пролази кроз (x, y)

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$