

Појам функције. Елементарне функције и њихови графици

Дефиниција: Нека су A и B два непразна скупа и $a \in A$, $b \in B$ њихови елементи. Уређени пар (a, b) чија је прва координата елемент a , а друга координата елемент b дефинишемо са

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Иако је дефиниција мало необична, она обезбеђује да за разлику од скупа $\{a, b\}$, где није битно који елемент први, а који други наводимо, у уређеном пару је редослед важан.

Тврђење: За два уређена пара (a, b) и (c, d) важи

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$$

тј. два уређена пара су једнака ако и само ако су им једнаке одговарајуће координате (прва са првом и друга са другом).

Зато је, рецимо, $\{1, 2\} = \{2, 1\}$, али је $(1, 2) \neq (2, 1)$.

На сличан начин се дефинишу уређене тројке, четворке и генерално уређене n -торке за $n \geq 3$.

Дефиниција: Нека су A и B два скупа. Знамо од раније како се дефинишу пресек, унија, и разлика ова два скупа, а сада ћемо дефинисати њихов Декартов производ $A \times B$ на следећи начин:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Дакле, Декартов производ скупова A и B је скуп свих уређених парова чија је прва координата из скупа A , а друга из скупа B .

Рецимо, за $A = \{1, 2\}$ и $B = \{5, 7, 10\}$ је $A \times B = \{(1, 5), (1, 7), (1, 10), (2, 5), (2, 7), (2, 10)\}$, а $B \times A = \{(5, 1), (5, 2), (7, 1), (7, 2), (10, 1), (10, 2)\}$. Зато видимо да су у општем случају скупови $A \times B$ и $B \times A$ различити.

Дефиниција: Нека су X и Y два непразна скупа. Бинарна релација (или, просто, релација) ρ из X у Y је било који подскуп Декартовог производа $X \times Y$ тј. $\rho \subseteq X \times Y$.

У горњем примеру, неке од релација из A у B су

$$\rho_1 = \{(1, 7), (2, 7), (2, 10)\}, \rho_2 = \emptyset, \rho_3 = A \times B,$$

док $\rho_4 = \{(2, 5), (1, 2)\}$ није релација из A у B .

Најзначајнији тип релација којим ћемо се бавити су функције.

Дефиниција: Нека су X и Y два непразна скупа. Ако је f релација из X у Y таква да за свако $x \in X$ постоји тачно једно $y \in Y$ тако да важи $(x, y) \in f$, кажемо да је f функција (или пресликавање) из X у Y и то пишемо $f : X \rightarrow Y$. Скуп X називамо доменом ове функције, а скуп Y кодоменом. Такође, уместо $(x, y) \in f$ пишемо $f(x) = y$ и кажемо да се елемент x функцијом f слика у елемент y .

Навешћемо неке посебне типове функција са којима ћемо се често сусретати.

За функцију $f : X \rightarrow Y$ кажемо да је:

- о „1-1” (или *инјекција*) ако за све $x_1, x_2 \in X$ за које је $x_1 \neq x_2$ важи $f(x_1) \neq f(x_2)$, што је

еквивалентно са тим да из $f(x_1) = f(x_2)$ следи $x_1 = x_2$;

- „на” (или *сурјекција*) ако за свако $y \in Y$ постоји неко $x \in X$ такво да важи $f(x) = y$;
- *бијекција* ако је и „1 – 1” и „на” тј. ако за свако $y \in Y$ постоји тачно једно $x \in X$ такво да је $f(x) = y$.

Свака бијекција има своју инверзну функцију, у ознаци $f^{-1} : Y \rightarrow X$, такву да за свако $x \in X$ и $y \in Y$ важи $f^{-1}(y) = x$ ако је $f(x) = y$. Одатле важи $f^{-1}(f(x)) = x$ за свако $x \in X$ и $f(f^{-1}(y)) = y$ за свако $y \in Y$.

Ми ћемо углавном радити са функцијама чији домен D_f је неки подскуп скупа $\mathbb{R}$, а кодомен управо скуп $\mathbb{R}$. Када дефинишемо тј. задајемо неку функцију, неопходно је рећи шта је њен домен, кодомен и на који начин се елементи из домена њом пресликавају. Уколико се домен не наведе експлицитно, тада га сами одређујемо као највећи подскуп скупа $\mathbb{R}$ на коме је функција добро дефинисана, а уколико се не нагласи шта је кодомен, подразумевамо да је то скуп $\mathbb{R}$.

График функције $f : X \rightarrow Y$ је подскуп Декартовог производа $X \times Y$ и дефинишемо га на следећи начин:

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}.$$

Често ћемо желети да када радимо са функцијом $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, где је $A \subseteq \mathbb{R}$, скицирамо и њен график тако што за сваку $x \in A$ одредимо вредност функције у њој $f(x)$ и тачку $(x, f(x))$ унесемо у координатни систем.

Навешћемо још неке посебне типове функција са којима ћемо се често сретати.

Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$ непразан и $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Кажемо да је функција f :

- *растућа* ако за све $x, y \in A$ за које је $x \leq y$ важи $f(x) \leq f(y)$;
- *строго растућа* ако за све $x, y \in A$ за које је $x < y$ важи $f(x) < f(y)$;
- *опадајућа* ако за све $x, y \in A$ за које је $x \leq y$ важи $f(x) \geq f(y)$;
- *строго опадајућа* ако за све $x, y \in A$ за које је $x < y$ важи $f(x) > f(y)$;
- *монотона* ако је растућа или опадајућа;
- *строго монотона* ако је или строго растућа или строго опадајућа;
- *ограничена одозго* ако постоји реалан број M такав да је $f(x) \leq M$ за све $x \in A$;
- *ограничена одоздо* ако постоји реалан број m такав да је $f(x) \geq m$ за све $x \in A$;
- *ограничена* ако је ограничена и одоздо и одозго, што је еквивалентно са тим да постоји реалан број $M \geq 0$ такав да је $|f(x)| \leq M$ за све $x \in A$;
- *парна* ако за свако $x \in A$ важи $-x \in A$ и $f(-x) = f(x)$
- *непарна* ако за свако $x \in A$ важи $-x \in A$ и $f(-x) = -f(x)$
- *периодична* ако постоји реалан број $T > 0$, који називамо *периодом* ове функције, такав да за свако $x \in A$ важи $x + T \in A$ и $f(x + T) = f(x)$.

За скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ такав да за свако $x \in A$ важи $-x \in A$ кажемо да је *симетричан*.

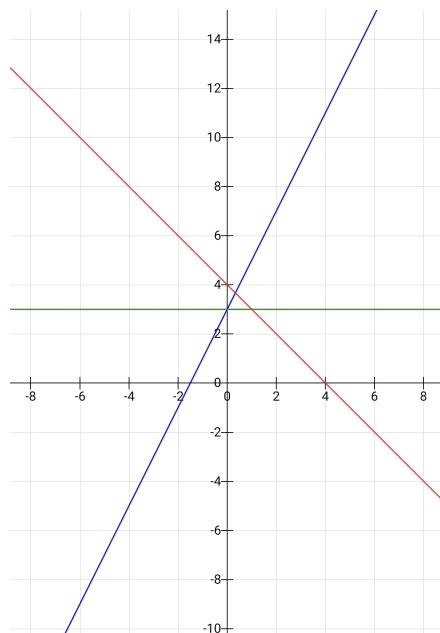
Број $a \in A$ такав да је $f(a) = 0$ називамо *нулом функције* f .

Сада ћемо пажњу посветити елементарним функцијама које су нам најбитније, јер ћемо на овом предмету често радити са њима и њиховим комбинацијама, па је потребно да их добро упознамо. За сваку од њих ћемо навести домен, која специјална својства поседује и скицирати њен график.

(1) Линеарна функција

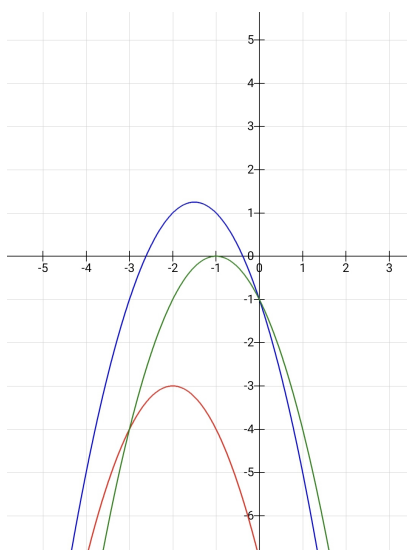
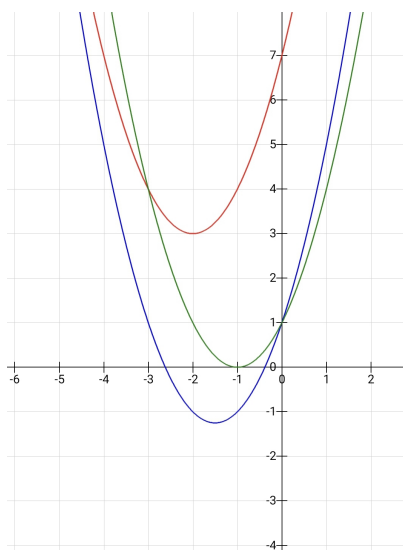
Функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $f(x) = kx + n$ назива се линеарна функција. Њен график је једна права чији положај тј. нагиб зависи од знака броја k , који називамо коефицијентом правца

функције f . На слици испод можемо видети како он изгледа за $k < 0$ када је f строго опадајућа (црвена боја), за $k = 0$ када је f константна функција (зелена боја) и за $k > 0$ када је f строго растућа (плава боја). Из средње школе знамо да ако са α означимо угао који график линеарне функције гради са позитивним делом x -осе, важи једнакост $k = \operatorname{tg} \alpha$.



(2) Квадратна функција

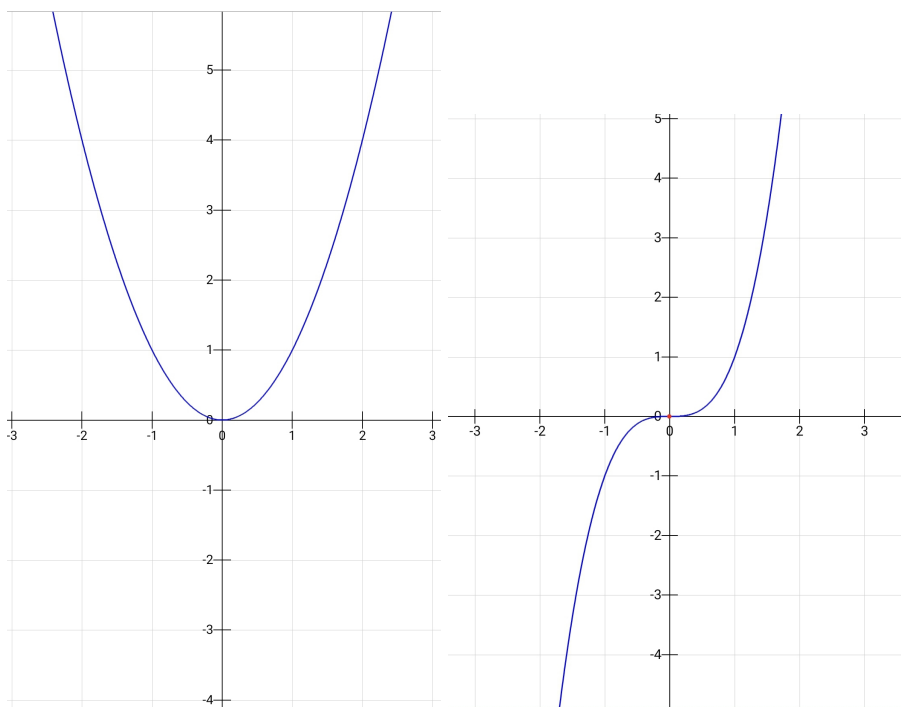
Функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $f(x) = ax^2 + bx + c$, уз услов $a \neq 0$, назива се квадратна функција. Њен график називамо параболом. Израз $D = b^2 - 4ac$ називамо дискриминантом ове квадратне функције. Знамо да уколико је $D > 0$, ова квадратна функција има две различите реалне нуле, ако је $D = 0$, има једну реалну нулу, док у случају $D < 0$ нема реалних нула. Положај параболе зависи од знака бројева a и D . На левој слици је приказан случај када је $a > 0$. Плава боја одговара случају $D > 0$, зелена случају $D = 0$, а црвена случају $D < 0$. На десној слици је случај када је $a < 0$, и то плава боја за $D > 0$, зелена за $D = 0$ и црвена за $D < 0$.



(3) Степена функција

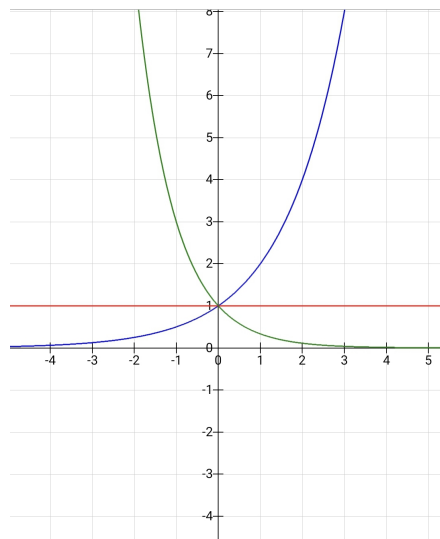
Функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $f(x) = x^n$, при чему је $n \geq 2$ природан број, назива се степена функција. На слици лево је приказан график једне овакве функције за парно n , а десно за непарно n . У случају непарног n степена функција је строго растућа на целом скупу $\mathbb{R}$, док је у случају парног n она строго опадајућа на скупу $(-\infty, 0]$ и строго растућа на $[0, +\infty)$. Како је $(-x)^{2k} = (-1)^{2k} x^{2k} = x^{2k}$ и $(-x)^{2k+1} = (-1)^{2k+1} x^{2k+1} = -x^{2k+1}$ за свако $k \in \mathbb{N}$, видимо да за парно $n = 2k$ важи $f(-x) = f(x)$ за свако $x \in \mathbb{R}$, док за непарно $n = 2k + 1$ важи $f(-x) = -f(x)$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Дакле, за парно n степена функција је парна, а за непарно n је непарна.

Такође, за непарно n степена функција је бијекција, док за парно n то није случај (није „1–1”, јер је $f(x) = f(-x)$, нити је „на”, јер узима само ненегативне вредности, па не постоји $x \in \mathbb{R}$ такво да је $f(x) = -1$), али ако јој сузимо и домен и кодомен тј. посматрамо је као функцију $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, она ће постати бијекција.



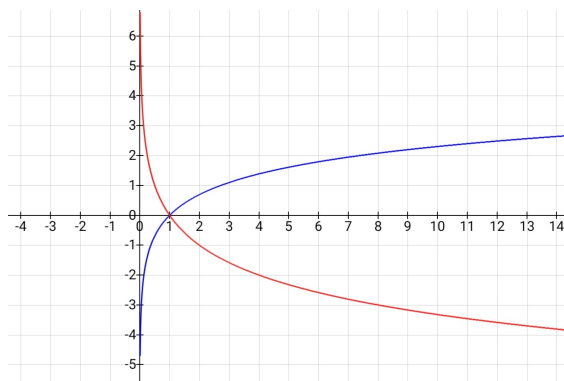
(4) Експоненцијална функција

Функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $f(x) = a^x$, при чему је $a > 0$ реалан број, назива се експоненцијална функција. Положај и облик графика експоненцијалне функције зависи од вредности броја a . Имамо један дегенерисани случај када је $a = 1$, јер је тада $f(x) = 1^x = 1$ за свако $x \in \mathbb{R}$, па ову функцију нећемо ни сматрати за експоненцијалну, већ за линеарну као што смо и мало пре навели (црвена боја на графику испод). За $a > 1$ график је приказан плавом бојом и у том случају је експоненцијална функција строго растућа на $\mathbb{R}$, а за $a < 1$ зеленом бојом и тада је она строго опадајућа на $\mathbb{R}$. Оно што је заједничко за оба недегенерисана случаја је да је $f(0) = 1$, јер је $a^0 = 1$ за било који позитивни реални број a и да је експоненцијална функција позитивна у свакој тачки, па је самим тим ограничена одоздо нулом. Она није бијекција, јер као што смо рекли, узима само позитивне вредности, али ако јој сузимо кодомен и посматрамо као функцију $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, постаће бијекција.



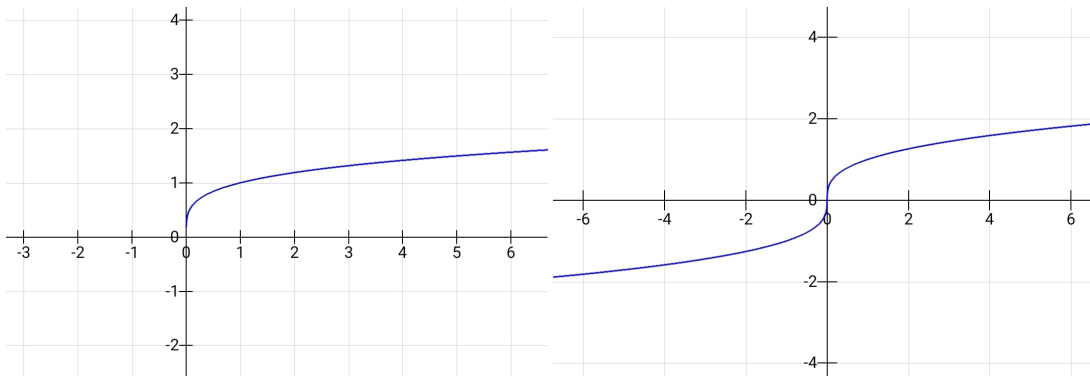
(5) Логаритамска функција

Функција $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $f(x) = \log_a x$ назива се логаритамска функција са основом a , при чему је $a > 0$ и $a \neq 1$ реалан број. Она је инверзна експоненцијалној функцији (након сужавања њеног кодомена на $(0, +\infty)$), па задовољава релацију $a^{\log_a x} = x$ за свако $x > 0$ и $\log_a(a^y) = y$ за свако $y \in \mathbb{R}$. Дакле, $\log_a x = y$ је еквивалентно са $x = a^y$. Уколико је $a > 1$, логаритамска функције је строго растућа (график плавом бојом), док је за $a < 1$ строго опадајућа (график црвеном бојом).



(6) Корена функција

Функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $f(x) = \sqrt[n]{x}$ за непарно $n \geq 3$ и $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ дата са $g(x) = \sqrt[n]{x}$ за парно $n \in \mathbb{N}$ називају се корене функције. Функција f је инверзна степеној функцији за непарно n , па ту важе релације $(\sqrt[n]{x})^n = x$ и $\sqrt[n]{x^n} = x$ за свако $x \in \mathbb{R}$, док је функција g инверзна рестрикцији степене функције на скупу $[0, +\infty)$ за парно n , па ту такође важе релације $(\sqrt[n]{x})^n = x$ и $\sqrt[n]{x^n} = x$, али за свако $x \geq 0$. На левој слици видимо како изгледа график корене функције за парно n , а на десној за непарно $n \geq 3$ и оне су строго растуће функције (свака на свом домену).



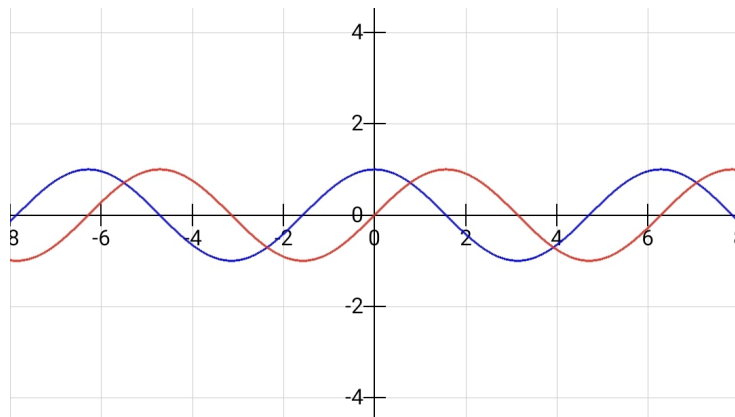
(7) Тригонометријске функције

Функције $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ и $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ чије графике можемо видети на следећој слици (црвена и плава боја, редом) су 2π -периодичне функције, што значи да је $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ и $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Даље, синусна функција је непарна, а косинусна парна тј. за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $\sin(-x) = -\sin x$ и $\cos(-x) = \cos x$. Уз то, имамо и $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Ове функције су ограничене и одозго са -1 и одозго са 1, па за свако $x \in \mathbb{R}$ имамо да важи $-1 \leq \sin x \leq 1$ тј. $|\sin x| \leq 1$ и $-1 \leq \cos x \leq 1$ тј. $|\cos x| \leq 1$.

Због тога што је периодична, $\sin x$ није „1-1” функција, а није ни „на”, јер узима вредности само у интервалу $[-1, 1]$, па самим тим није ни бијекција. Али, ако посматрамо њену рестрикцију из интервала $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ у $[-1, 1]$ тј. $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$. постаће бијекција. Слично важи и за функцију $\cos x$, с тим што њу рестрикујемо као $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$.

Знамо велики број адиционих формула из средње школе од којих ћемо овде навести четири најчешће коришћене.

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$



Графике функција $\operatorname{tg} = \frac{\sin}{\cos} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\operatorname{ctg} = \frac{\cos}{\sin} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ можемо видети на наредној слици (плава и црвена боја, редом). Њихови домени су такви, јер мора бити $\cos x \neq 0$ тј. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ за $k \in \mathbb{Z}$ да би $\operatorname{tg} x$ била дефинисана и слично, да би $\operatorname{ctg} x$ била дефинисана, мора бити $\sin x \neq 0$ тј. $x \neq k\pi$ за $k \in \mathbb{Z}$.

Ове две функције су периодичне са периодом π , јер за свако x из њихових домена важи

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{\sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi}{\cos x \cos \pi - \sin x \sin \pi} = \frac{\sin x \cdot (-1) + \cos x \cdot 0}{\cos x \cdot (-1) - \sin x \cdot 0} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x \quad \text{и}$$

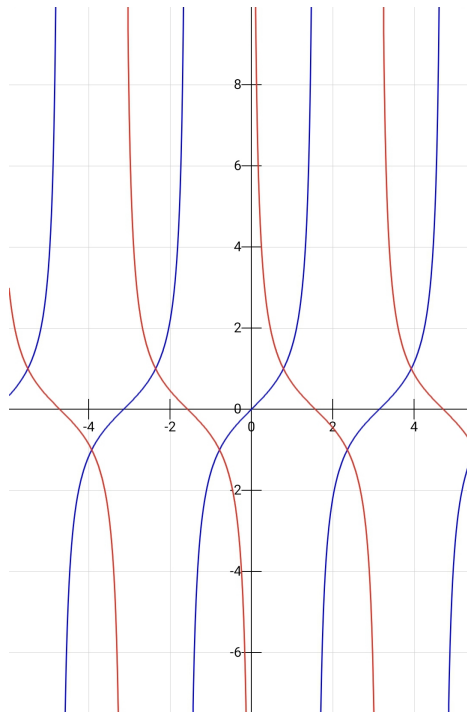
$$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x + \pi)} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x.$$

Даље, оне су и непарне, јер за свако x из њихових домена важи

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x \quad \text{и}$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(-x)} = \frac{1}{-\operatorname{tg} x} = -\frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\operatorname{ctg} x.$$

Ни ове две функције нису бијекције, јер нису „1-1” пошто су периодичне, али рестрикција функције tg на интервал $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ тј. $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ јесте бијекција, као и рестрикција функције ctg на интервал $(0, \pi)$ тј. $\operatorname{ctg} : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$.



(8) Инверзне тригонометријске функције

Функција $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ представља инверзну функцију од функције $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, што значи да важи $\sin(\arcsin x) = x$ за свако $x \in [-1, 1]$ и $\arcsin(\sin x) = x$ за свако $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Она је строго растућа, непарна функција и њен график видимо на следећој слици (лево). Овде треба бити опрезан: рекли смо да једнакост $\arcsin(\sin x) = x$ важи за све $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, док за неке друге вредности x не мора важити. Рецимо, $\arcsin(\sin 2\pi)$ је сигурно различито од 2π , јер функција $\arcsin$ не може „вратити” вредност 2π која не припада интервалу $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Зато приликом рачунања вредности $\arcsin(\sin 2\pi)$ размишљамо на следећи начин: прво тражимо $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ такво да је $\sin t = \sin 2\pi$, па је и $\arcsin(\sin 2\pi) = \arcsin(\sin t)$, а потом искористимо да је $\arcsin(\sin t) = t$, јер $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Конкретно, овде можемо узети да је $t = 0$, јер је $\sin 2\pi = \sin 0$, пошто је синусна функција 2π -периодична. Зато је

$$\arcsin(\sin 2\pi) = \arcsin(\sin 0) = 0$$

и слично је

$$\arcsin\left(\sin \frac{7\pi}{2}\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{2} - 2 \cdot 2\pi\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Такође, некад је погодно употребити и чињеницу $\sin(\pi - x) = \sin x$ која се директно добија из адиционе формуле. На пример,

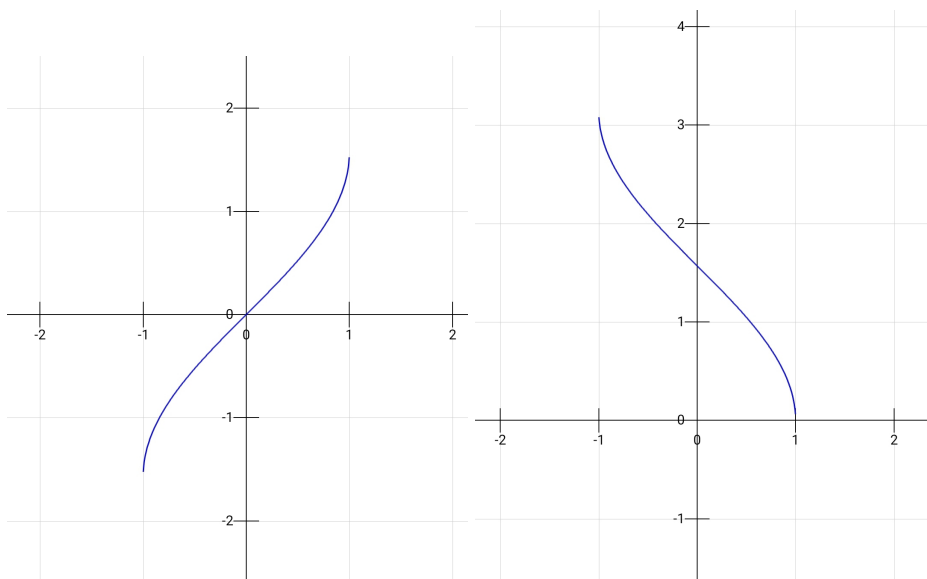
$$\arcsin\left(\sin \frac{11\pi}{4}\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{11\pi}{4} - 2\pi\right)\right) = \arcsin\left(\sin \frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$\arcsin\left(\sin\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right)\right) = \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Функција $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ представља инверзну функцију од функције $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, што значи да важи $\cos(\arccos x) = x$ за свако $x \in [-1, 1]$ и $\arccos(\cos x) = x$ за свако $x \in [0, \pi]$. Њен график видимо на следећој слици (десно) и она је строго опадајућа. Овде је слична ситуација као код претходне функције – израз $\arccos(\cos x)$ је једнак x за све $x \in [0, \pi]$, али ако тачка x не припада овом интервалу, морамо је „пребацити” у овај интервал користећи 2π -периодичност и парност косинусне функције. Зато је

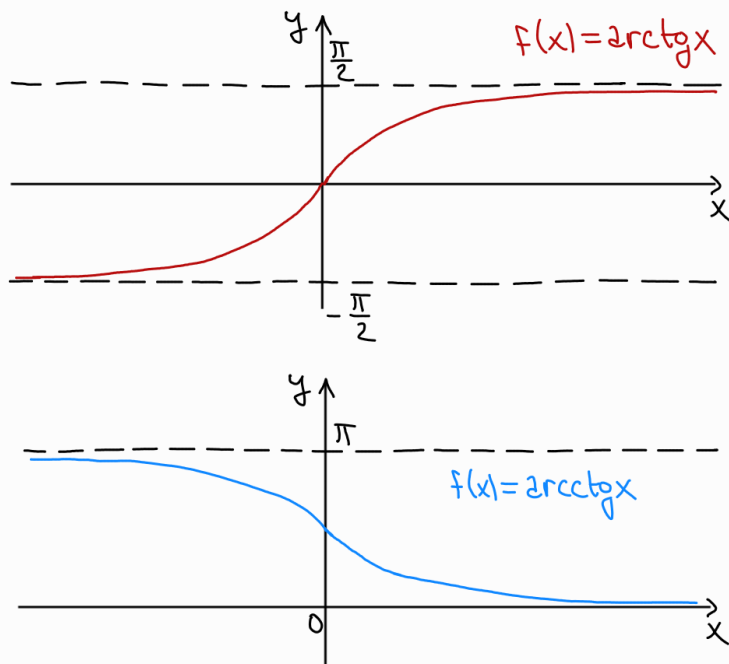
$$\arccos(\cos(-2\pi)) = \arccos(\cos(-2\pi + 2\pi)) = \arccos(\cos 0) = 0 \quad \text{и}$$

$$\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \arccos\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$



Функција $\arctg : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ је инверзна функција од функције $\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, па због тога задовољава $\operatorname{tg}(\arctg x) = x$ за свако $x \in \mathbb{R}$ и $\arctg(\operatorname{tg} x) = x$ за свако $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, док за $x \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ вредност израза $\arctg(\operatorname{tg} x)$ се може рачунати аналогно као и код претходно наведених инверзних функција користећи π -периодичност функције $\operatorname{tg} x$. Такође, $\arctg$ је строго растућа, непарна функција одоздо ограничена са $-\frac{\pi}{2}$, а одозго са $\frac{\pi}{2}$. Њен график можемо видети на слици испод (црвена боја).

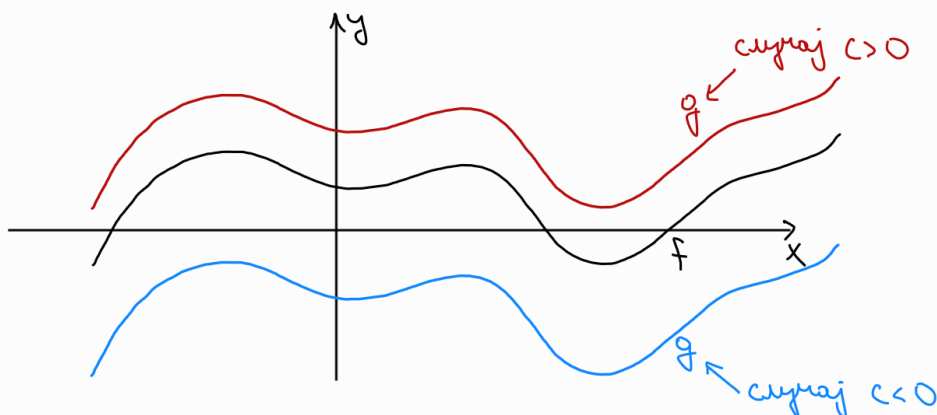
Функција $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ је инверзна функција од функције $\operatorname{ctg} : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, па задовољава $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ за свако $x \in \mathbb{R}$ и $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$ за свако $x \in (0, \pi)$, док за $x \notin (0, \pi)$ се вредност израза $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ рачуна користећи π -периодичност функције $\operatorname{ctg} x$. Функција arcctg је строго опадајућа и одоздо ограничена нулом, а одозго са π и њен график можемо видети на слици испод (плава боја).



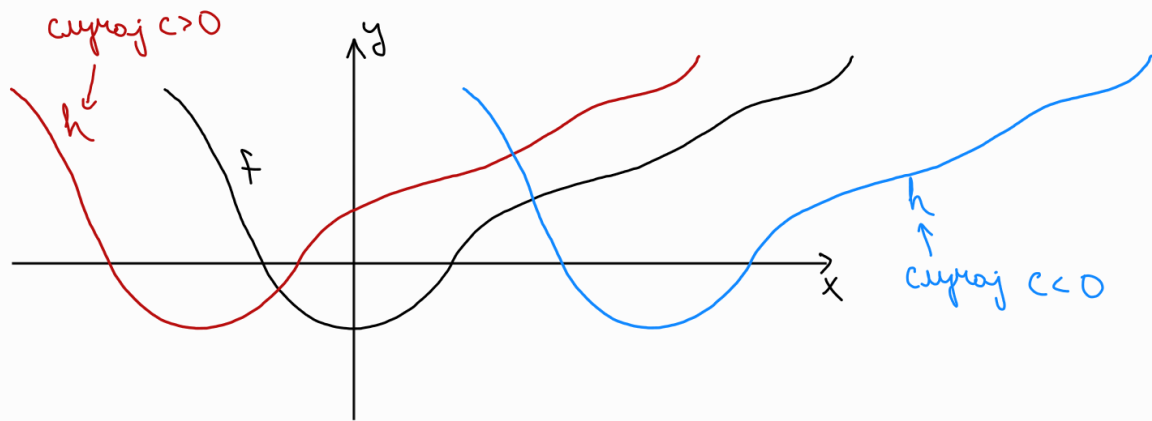
Овим смо завршили упознавање са елементарним функцијама и све што је до сада обрађено ће се сматрати познатим надаље и може се користити без додатног образлагања.

Сада ћемо показати како од графика неке познате функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ лако можемо добити график функција $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ датих са $g(x) = f(x) + c$ и $h(x) = f(x + c)$, где је $c \in \mathbb{R}$ произвољна позитивна константа.

Прво, ако је $c > 0$, видимо да у произвољној тачки $x \in \mathbb{R}$ функција g узима вредност за c увећану у односу на вредност коју узима функција f у тој тачки, што значи да је график функције g „подигнут” за вредност c у односу на график функције f па се може нацртати једноставном translацијом графика функције f у позитивном смеру y -осе за вредност c . Слична је ситуација уколико је $c < 0$, с тим што се график функције g добија „спуштањем” графика функције f , односно translацијом у негативном смеру y -осе за $-c$.

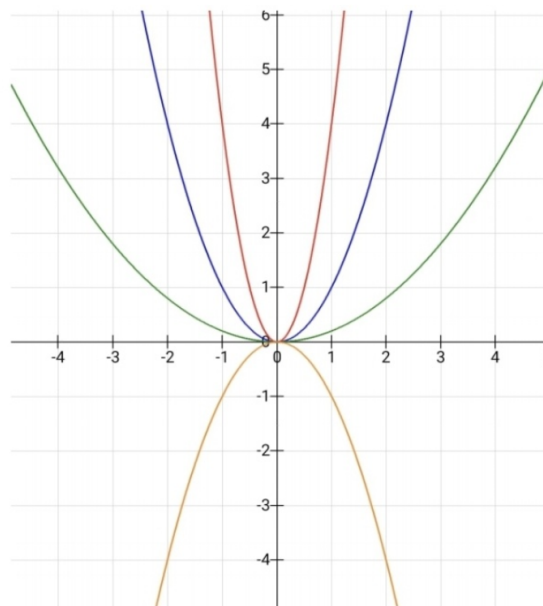


Даље, ако је $c > 0$, видимо да исту вредност коју функција h узима у тачки x , функција f узима у тачки $x + c$, што значи да функција f „касни” за функцијом h односно h „жури” у односу на f за c (ако променљиву x схватимо као време које тече, а вредности $f(x)$ и $h(x)$ као положаје где се нека тачка налазила у датом тренутку x). Зато график функције h можемо добити translацијом графика функције f у смеру супротном од x -осе за вредност c . Слична је ситуација и ако је $c < 0$, само овај пут функција h „касни” за функцијом f , па се график функције h добија translацијом графика функције f у позитивном смеру x -осе за $-c$.



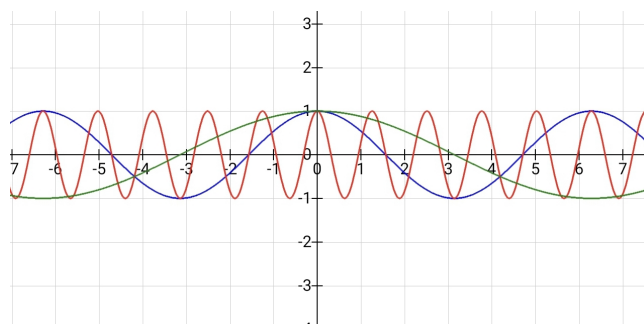
Сада ћемо описати како се добија график функције $g(x) = cf(x)$ од графика функције f , где је $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ произвољна константа. Размотримо прво случај када је $c > 0$. Видимо да у произвољној тачки $x \in \mathbb{R}$ функција g узима c пута „већу” вредност у односу на вредност коју функција f узима у тој тачки, па график функције g можемо добити издуживањем ($c > 1$) односно скупљањем ($c < 1$) графика функције f дуж y -осе. За $c = -1$, видимо да функција g у тачки x узима супротну вредност од вредности коју у истој тачки узима функција f , па график функције g можемо скицирати тако што „пресликамо” график функције f у односу на x -осу. Кад је $0 < c \neq -1$, прво пресликамо график функције f у односу на x -осу, а затим тако пресликани график издужимо ($c < -1$) или скупимо ($c > -1$) дуж y -осе.

На следећој слици можемо видети графике функција $f(x) = x^2$ (плава боја), $g_1(x) = 4x^2$ (црвена боја), $g_2(x) = \frac{x^2}{5}$ (зелена боја) и $g_3(x) = -x^2$ (наранџаста боја).

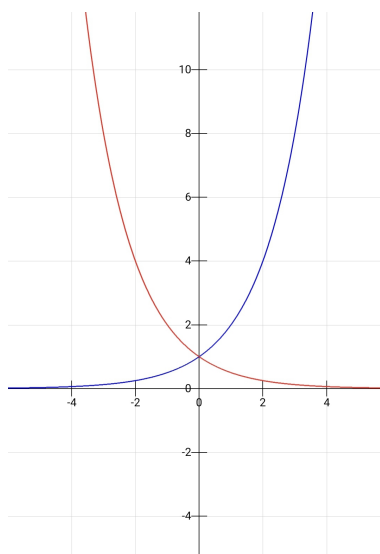


Нека је сада дат график функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, а треба скицирати график функције $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дате са $g(x) = f(cx)$ за различите вредности константе $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Прво, нека је $c > 0$. Видимо да у произвољној тачки $x \in \mathbb{R}$ функција g достиже вредност коју је функција f достизала у тачки cx , па се график функције g може добити издуживањем ($c < 1$) односно скупљањем ($c > 1$) графика функције f дуж x -осе. У случају $c = -1$ имамо $g(x) = f(-x)$, па вредност коју функција g узима у тачки x функција f узима у тачки $-x$, што значи да график функције g можемо добити тако што пресликамо график функције f у односу на y -осу. За $0 > c \neq -1$, прво пресликамо график функције f преко y -осе, а затим тако пресликани график издужимо ($c > -1$) или скупимо ($c < -1$) како бисмо добили график функције g .

На слици испод можемо видети графике функција $f(x) = \cos x$ (плава боја), $g_1(x) = \cos 5x$ (црвена боја) и $g_2(x) = \cos \frac{x}{2}$ (зелена боја).



На следећој слици можемо видети графике функција $f(x) = 2^x$ (плава боја) и $g(x) = 2^{-x}$ (црвена боја). График функције g смо добили тако што смо график функције f пресликали у односу на y -осу, јер важи $g(x) = f(-x)$, па је ово горе описана ситуација за $c = -1$.



Подсетимо се дефиниције апсолутне вредности реалног броја x :

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Сада, знајући како изгледа график функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ лако можемо скицирати графике функција g и h датих са $g(x) = |f(x)|$ и $h(x) = f(|x|)$. Важи

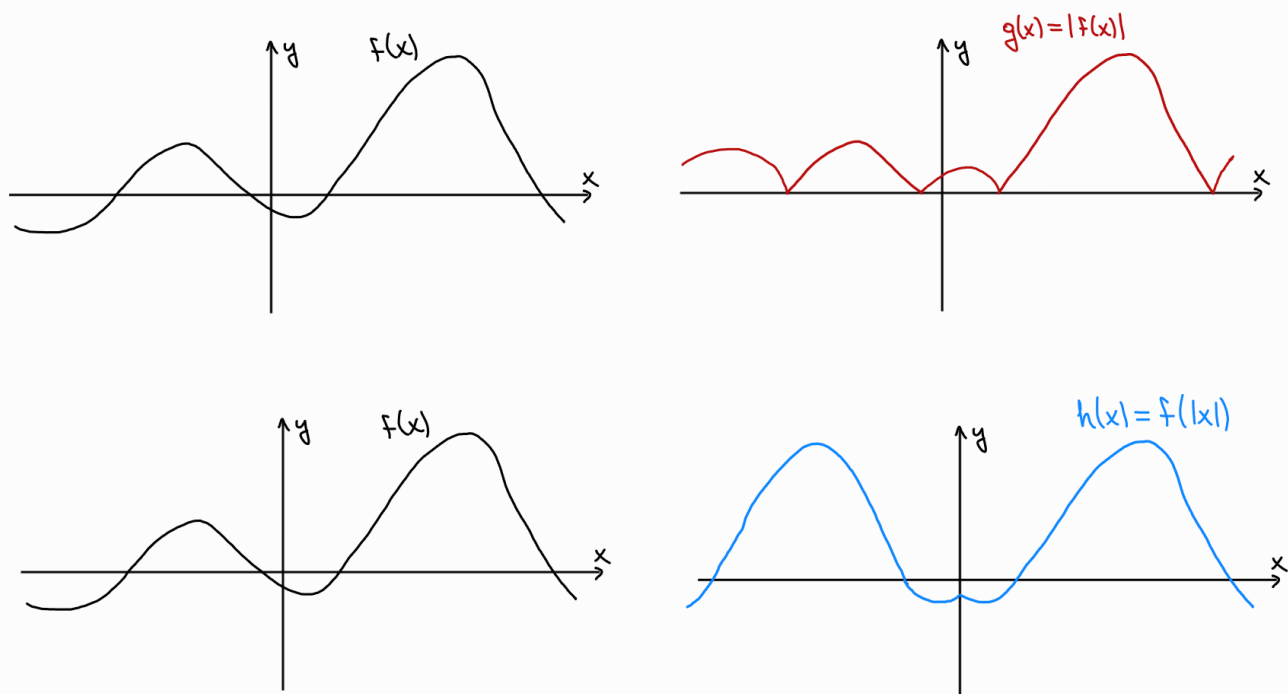
$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} -f(x), & f(x) < 0, \\ f(x), & f(x) \geq 0, \end{cases}$$

што значи да за оне $x \in \mathbb{R}$ у којима функција f узима ненегативне вредности важи $g(x) = f(x)$, док за преостале x важи $g(x) = -f(x)$. Зато график функције g можемо добити тако што оне делове графика функције f који су испод x -осе пресликамо преко ње, а делове који су изнад ње не дирамо.

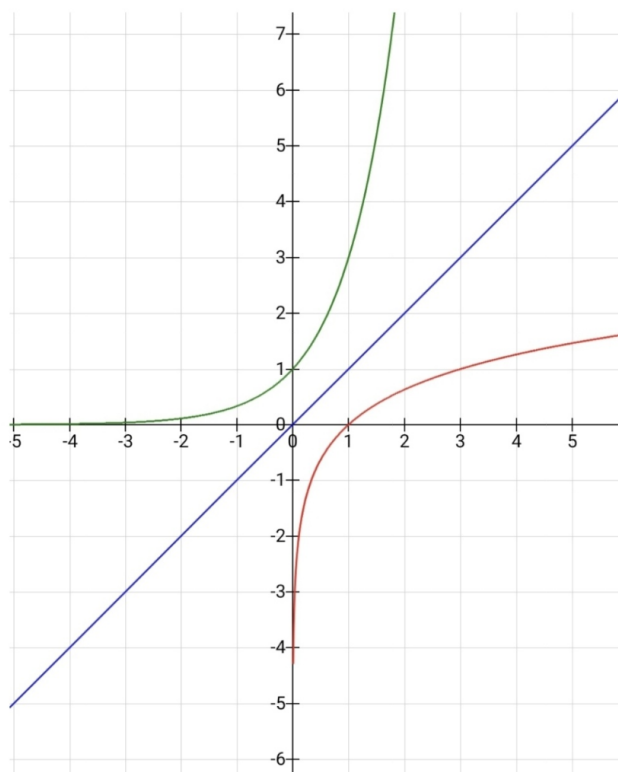
Слично, имамо

$$h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(-x), & x < 0, \\ f(x), & x \geq 0, \end{cases}$$

па график функције h добијамо тако што део графика функције f са десне стране y -осе (то су тачке $x \geq 0$) не дирамо, док део графика функције f са леве стране y -осе (то су тачке $x < 0$) заменимо пресликаним делом графика са десне стране преко y -осе.



За крај овог одељка, објаснићемо како, уколико је дат график неке бијекције f , можемо скицирати график њене инверзне функције f^{-1} . Знамо да тачка (a, b) припада графику функције f акко је $f(a) = b$ тј. $a = f^{-1}(b)$, што је еквивалентно са тим да тачка (b, a) припада графику функције f^{-1} . Зато график функције f^{-1} можемо лако скицирати тако што график функције f пресликамо у односу на праву $y = x$, што можемо видети на следећој слици на примеру функција $f(x) = 3^x$ (зелена боја) и $f^{-1}(x) = \log_3 x$ (црвена боја), док је права $y = x$ означена плавом бојом.



Задаток. Определити домене следећих функција:

а) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{2-x}{2x+1}} + \log_{10} \frac{x+1}{1-x}$; б) $g(x) = \sqrt{\sin x}$;

в) $h(x) = \arcsin \sqrt{x^2 - x + 1}$.

а) Услови: 1) $2x+1 \neq 0$ и $1-x \neq 0$ (због именилаца)

2) $\frac{2-x}{2x+1} \geq 0$ (због метабришног корена)

3) $\frac{x+1}{1-x} > 0$ (због логаритма)

1) $2x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$

$1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

2) $2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

$2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

3) $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

$1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

	$-\infty$	-1	1
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$-$
$\frac{x+1}{1-x}$	$-$	$+$	$-$

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2
$2-x$	$+$	$+$	$-$
$2x+1$	$-$	$+$	$+$
$\frac{2-x}{2x+1}$	$-$	$+$	$-$

Дакле, $\frac{2-x}{2x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{1}{2}, 2]$.

Дакле, $\frac{x+1}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$.

$\Rightarrow$ Мора важити $x \neq -\frac{1}{2}$, $x \neq 1$, $x \in (-\frac{1}{2}, 2]$ и $x \in (-1, 1)$,

што у пресеку даје $D_f = (-\frac{1}{2}, 1)$.

б) Услови: $\sin x \geq 0$ (због квадратног корена)

Са графика фје $\sin x$ знамо да је она на интерва-

на $[0, \pi]$ ненегативна, на интервалу $(\pi, 2\pi)$ негативна,
на $[2\pi, 3\pi]$ ненегативна, па на $(3\pi, 4\pi)$ негативна итд.

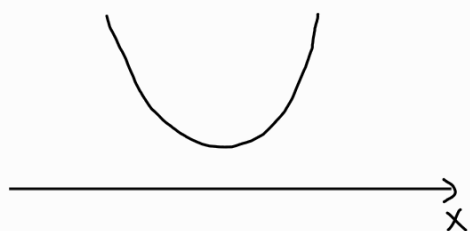
Прецизније, на сваком интервалу $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ је
ненегативна, а на сваком интервалу $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$
је негативна, где $k \in \mathbb{Z}$. Зато је домен f је
унија свих интервала облика $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, где $k \in \mathbb{Z}$

иј. $D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$

в) Услови: 1) $x^2 - x + 1 \geq 0$ (због квадратног корена)

2) $\sqrt{x^2 - x + 1} \in [-1, 1]$ (због f је $\arcsin$)

1) Квадратна f ја $x^2 - x + 1$ има позитиван коефицијент
уз x^2 ($1 > 0$) и дискриминанту $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$



$\Rightarrow x^2 - x + 1 > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$

2) $\sqrt{x^2 - x + 1} \in [-1, 1] \Leftrightarrow -1 \leq \sqrt{x^2 - x + 1} \leq 1$

$\sqrt{x^2 - x + 1} \geq 0 > -1$ за све $x \in \mathbb{R}$, па још треба да важи

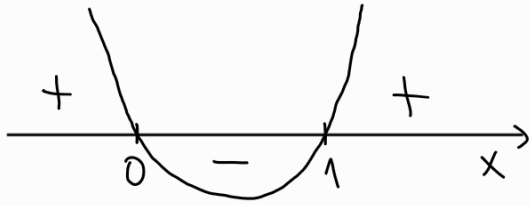
$\sqrt{x^2 - x + 1} \leq 1 \quad / (\)^2$ (смето да квадрирамо, јер су обе стране
ненегативне)

$$x^2 - x + 1 \leq 1$$

$$x^2 - x \leq 0$$

$$x(x-1) \leq 0$$

$$x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$



$$\text{Значит, } x(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 1].$$

Пересекон двух условий получается $D_h = [0, 1]$.

Принцип математичке индукције

Принцип математичке индукције је честа метода доказивања тврдњи које важе за све природне бројеве (или све почев од неког). Нека израз T означава неко тврђење, а израз $T(n)$ да то тврђење важи за природан број n . Принцип математичке индукције каже да уколико важи:

1) $T(1)$ (база индукције);

2) $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ за свако $n \in \mathbb{N}$ (индуктивни корак);

тада важи $T(n)$ за свако $n \in \mathbb{N}$, односно сви природни бројеви задовољавају то тврђење. Уколико уместо $T(1)$ у бази важи $T(n_0)$ за произвољно $n_0 \in \mathbb{N}$, а у кораку важи $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ за све $n \geq n_0$, тада принцип математичке индукције каже да тврђење T важи за све природне бројеве $n \geq n_0$.

Када неко тврђење доказујемо помоћу математичке индукције, базу индукције проверавамо заменом $n = 1$ (или $n = n_0$) у тврђење које доказујемо и непосредно се уверимо да она важи. Приликом доказивања индуктивног корака тј. импликације $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, прво претпоставимо да важи $T(n)$. Ову претпоставку називамо *индуктивна претпоставка* (или *индуктивна хипотеза*). Затим, користећи тврђење $T(n)$ доказујемо да важи и тврђење $T(n+1)$ и тиме је доказ индуктивног корака завршен. У наредним задацима ћемо приказати широку примену математичке индукције и доказивању разних тврдњи.

1. Доказати да за сваки природан број n важи једнакост $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Решење: Доказ спроводимо математичком индукцијом. Пре него што почнемо, приметимо да се на левој страни налази n сабирака.

Прво проверавамо базу тј. да ли тврђење задатка важи за $n = 1$. Како је $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, имамо да база индукције важи.

Нека је сада $n \in \mathbb{N}$ произвољан број. Доказујемо индуктивни корак, па претпостављамо да тврђење важи за n (индуктивна хипотеза) и доказујемо да важи за $n+1$. Дакле, по индуктивној хипотези знамо да важи $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, а желимо да покажемо $1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Користећи индуктивну хипотезу у суми $1+2+\dots+n+(n+1)$ збир првих n сабирака можемо заменити са $\frac{n(n+1)}{2}$, па имамо да је

$$1+2+\dots+n+(n+1) \stackrel{\text{иx}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

што смо и хтели да покажемо. Дакле, на основу принципа математичке индукције важи тврђење задатка.

2. Доказати да за сваки природан број n важи једнакост $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Решење: Опет ћемо користити математичку индукцију. Приметимо да се на левој страни налази n сабирака.

База (за $n = 1$) је испуњена јер је $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$.

Сада, нека је $n \in \mathbb{N}$ произвољно. Претпоставимо да за ово n важи тврђење задатка, односно $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (индуктивна хипотеза) и докажимо да ово тврђење важи и за $n+1$ тј. да важи $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$. По индуктивној хипотези имамо да је

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 \stackrel{\text{иx}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+4n+3n+6)}{6} = \\
&= \frac{(n+1)(2n(n+2)+3(n+2))}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6},
\end{aligned}$$

што смо и желели, па тврђење задатка следи по принципу математичке индукције. Некад није тако једноставно леву страну трансформацијама свести на десну (мало пре смо се сетили да израз $2n^2 + 7n + 6$ запишемо као $2n^2 + 4n + 3n + 6$ и раставимо га на $(n+2)(2n+3)$), па можемо у индуктивном кораку заменити део израза њему једнаким по индуктивној хипотези, а затим проверити да ли је тако добијени израз једнак десној страни. Дакле, мало пре када смо желели да докажемо да је $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$, могли смо рећи да је по индуктивној хипотези то еквивалентно са $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$ и затим све свести на заједнички именилац, измножити и на крају добити $0 = 0$, што ћемо некад убудуће и радити.

3. Доказати да за сваки природан број n важи једнакост $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.

Решење: И овај задатак ћемо урадити математичком индукцијом. Пошто је први сабирак $1 = 2 \cdot 1 - 1$, други сабирак је $3 = 2 \cdot 2 - 1$ и тако даље, видимо да се на левој страни налази n сабирака.

За $n = 1$ имамо $2 \cdot 1 - 1 = 1^2$, па је база индукције испуњена.

Нека је $n \in \mathbb{N}$ произвољно. Претпоставимо да тврђење важи за n тј. да је испуњено $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ (индуктивна хипотеза) и докажимо да важи $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = (n+1)^2$.

По индуктивној хипотези имамо

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2(n+1)-1) \stackrel{\text{иx}}{=} n^2 + (2n+2-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

што је и требало показати, па тврђење задатка важи по математичкој индукцији.

4. Доказати да за сваки природан број n важи једнакост

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Решење: Доказаћемо ово тврђење помоћу математичке индукције.

За $n = 1$ имамо $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$ што је тачно, па је база индукције испуњена.

Нека је $n \in \mathbb{N}$ произвољно. Претпоставимо да тврђење важи за n тј. да је испуњено $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$ (индуктивна хипотеза) и докажимо да оно важи и за $n+1$, односно да је

$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$. Корситећи индуктивну хипотезу имамо да је

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &\stackrel{\text{иx}}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} = \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2,
\end{aligned}$$

што је и требало доказати, па тврђење задатка важи на основу принципа математичке индукције.

5. Доказати да за сваки природан број n важи једнакост $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Решење: Урадићемо овај задатак на два начина – помоћу математичке индукције и непосредним сређивањем израза на левој страни.

За $n = 1$ имамо $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1}$, што је тачно, па важи база индукције.

Нека је сада $n \in \mathbb{N}$ произвољно. Претпоставимо да тврђење важи за n тј. да је испуњено $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ (индуктивна хипотеза) и докажимо да важи за $n+1$, односно $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$. Сређујемо леву страну и користимо индуктивну хипотезу, па имамо

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &\stackrel{\text{их}}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}, \end{aligned}$$

што је и требало доказати, па тврђење задатка важи на основу принципа математичке индукције.

Урадимо сада задатак на други начин. Приметимо да за свако $k \in \mathbb{N}$ важи следећи низ једнакости

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Одатле је

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

јер су се сви сабирци осим првог и последњег међусобно скратили.

6. Доказати да за свако $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ и свако $n \in \mathbb{N}$ важи $\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Решење: Нека је $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ произвољно. Урадићемо и овај задатак на два начина. Први начин је помоћу математичке индукције.

За $n = 1$ имамо $1 + q = \frac{1-q^2}{1-q}$, што је тачно, јер знамо да је $1 - q^2 = (1+q)(1-q)$, па је испуњена база индукције.

Нека је сада $n \in \mathbb{N}$ произвољно. Претпоставимо да тврђење важи за n тј. да је испуњено $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (индуктивна хипотеза) и докажимо да важи за $n+1$, односно $1 + q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$. Користећи индуктивну хипотезу имамо

$$\begin{aligned} 1 + q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1} &\stackrel{\text{их}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1}(1-q)}{1-q} = \\ &= \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}, \end{aligned}$$

што је и требало доказати. Зато, тврђење задатка следи из принципа математичке индукције.

Урадимо сада задатак не користећи математичку индукцију. Означимо са $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ суму коју рачунамо. Множењем обе стране са q добијамо

$$qS = q(1 + q + q^2 + \dots + q^n) = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1},$$

па и

$$S - qS = (1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) - (q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1},$$

јер су се сви остали сабирци међусобно пократили. Последње је еквалентно са $(1-q)S = 1 - q^{n+1}$, што коначно даје $S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ тј. $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Приметимо да смо овде смели да делимо са $1 - q$, јер је $q \neq 1$, па зато добијена једнакост важи за све $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. У случају $q = 1$ је тривијално израчунати ову суму:

$$1 + 1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n + 1,$$

јер у суми учествује $n + 1$ сабирака и сваки од њих је једнак 1.

7. Доказати да за сваки природан број $n \geq 4$ важи $2^n \geq n^2$.

Решење: Опет ћемо користити принцип математичке индукције.

Пошто тврђење доказујемо за све $n \geq 4$, у бази ћемо проверавати истинитост тврђења за $n = 4$. Како је заиста $2^4 \geq 4^2$, база индукције је испуњена.

Нека је сада $n \geq 4$ произвољно. Претпоставимо да тврђење важи за n тј. да важи $2^n \geq n^2$ (индуктивна хипотеза) и докажимо да оно важи и за $n + 1$, односно да је $2^{n+1} \geq (n + 1)^2$. Када у индуктивној хипотези помножимо обе стране позитивним бројем 2, имамо да је $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^2$, па уколико покажемо да је $2n^2 \geq (n + 1)^2$, важиће низ неједнакости $2^{n+1} \geq 2n^2 \geq (n + 1)^2$, а онда и $2^{n+1} \geq (n + 1)^2$. Зато је довољно показати да је $2n^2 \geq (n + 1)^2$ (не заборавимо да је $n \geq 4$). Неједнакост $2n^2 \geq (n + 1)^2$ је еквивалентна неједнакости $2n^2 \geq n^2 + 2n + 1$ што је даље еквивалентно са $n^2 - 2n - 1 \geq 0$. Како је $n^2 - 2n - 1 = n^2 - 2n + 1 - 2 = (n - 1)^2 - 2 \geq (4 - 1)^2 - 2 = 7 \geq 0$, заиста важи $2n^2 \geq (n + 1)^2$ и $2^{n+1} \geq (n + 1)^2$. Дакле, тврђење задатка важи по принципу математичке индукције.

8. Доказати да за сваки природан број $n \geq 2$ важи неједнакост $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24}$.

Решење: Задатак ћемо урадити користећи математичку индукцију. Приметимо прво да се на левој страни налази n сабирака (то видимо по другом сабирку у имениоцу).

За $n = 2$ имамо $\frac{1}{1+2} + \frac{1}{2+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$, па је база индукције задовољена.

Нека је сада $n \geq 2$ произвољно. Претпоставимо да тврђење важи за n тј. да важи $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ (индуктивна хипотеза) и докажимо да оно важи и за $n + 1$, односно да је $\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} > \frac{13}{24}$. Трансформисањем израза са леве стране неједнакости тако да се у њему појави израз из индуктивне хипотезе имамо да је

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \stackrel{\text{их}}{>} \\ &> \frac{13}{24} + \frac{2n+2+2n+1-2(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{13}{24} + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > \frac{13}{24} + 0 = \frac{13}{24}, \end{aligned}$$

што смо и желели да покажемо, па тврђење задатка следи по принципу математичке индукције.

9. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \leq \sqrt{\frac{1}{3n+1}}$.

Решење: Тражену неједнакост ћемо доказати применом математичке индукције.

За $n = 1$ имамо $\frac{1}{2} \leq \sqrt{\frac{1}{4}}$ што је очигледно тачно, па је база индукције испуњена.

Нека је сада $n \in \mathbb{N}$ произвољно. Претпоставимо да за n важи тврђење задатка тј. $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \leq \sqrt{\frac{1}{3n+1}}$ (индуктивна хипотеза) и докажимо да тврђење важи и за $n + 1$ односно да је испуњено $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+2)} \leq \sqrt{\frac{1}{3(n+1)+1}} = \sqrt{\frac{1}{3n+4}}$. Трансформисањем последњег израза са леве стране и коришћењем индуктивне хипотезе имамо

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+2)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \stackrel{\text{их}}{\leq} \sqrt{\frac{1}{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2},$$

при чему смо искористили да неједнакост из индуктивне хипотезе остаје важећа након множења обе стране позитивним бројем $\frac{2n+1}{2n+2}$. Приметимо да уколико бисмо показали да важи

$\sqrt{\frac{1}{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq \sqrt{\frac{1}{3n+4}}$, важио би низ неједнакости $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+2)} \stackrel{\text{ИХ}}{\leq} \sqrt{\frac{1}{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq \sqrt{\frac{1}{3n+4}}$, па

бисмо добили жељену неједнакост. Неједнакост $\sqrt{\frac{1}{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq \sqrt{\frac{1}{3n+4}}$ је након квадрирања (обе стране су ненегативне, па смемо да их квадрирамо) еквивалентна са $\frac{(2n+1)^2}{(3n+1)(2n+2)^2} \leq \frac{1}{3n+4}$ што је након множења обе стране позитивним $(3n+1)(2n+2)^2(3n+4)$ даље еквивалентно са $(2n+1)^2(3n+4) \leq (3n+1)(2n+2)^2$. Сређивањем израза на обе стране добијамо еквивалентну неједнакост $12n^3 + 28n^2 + 19n + 4 \leq 12n^3 + 28n^2 + 20n + 4$ тј. $0 \leq n$ што је тачно за свако $n \in \mathbb{N}$.

Дакле, заиста је $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+2)} \stackrel{\text{ИХ}}{\leq} \sqrt{\frac{1}{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq \sqrt{\frac{1}{3n+4}}$, што смо и желели, па тврђење задатка следи математичком индукцијом.

10. Доказати да за сваки природан број n важи $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$.

Решење: И у овом задатку ћемо искористити принцип математичке индукције.

За $n = 1$ имамо $133 \mid 3059$, што је тачно, па је база индукције испуњена.

Нека је сада $n \in \mathbb{N}$ произвољно. Претпоставимо да за n важи тврђење задатка тј. да је $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ дељиво са 11 (индуктивна хипотеза) и докажимо да важи $133 \mid 11^{(n+1)+2} + 12^{2(n+1)+1}$ тј. $133 \mid 11^{n+3} + 12^{2n+3}$. Из индуктивне хипотезе имамо да је $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133k$ за неко $k \in \mathbb{N}$, а одатле и

$$\begin{aligned} 11^{n+3} + 12^{2n+3} &= 11 \cdot 11^{n+2} + 12^2 \cdot 12^{2n+1} = 11 \cdot 11^{n+2} + 144 \cdot 12^{2n+1} = 11 \cdot 11^{n+2} + 11 \cdot 12^{2n+1} + 133 \cdot 12^{2n+1} = \\ &= 11(11^{n+2} + 12^{2n+1}) + 133 \cdot 12^{2n+1} \stackrel{\text{ИХ}}{=} 11 \cdot 133k + 133 \cdot 12^{2n+1} = 133(11k + 12^{2n+1}), \end{aligned}$$

што је очигледно дељиво са 133, па тврђење задатка следи математичком индукцијом.

11. Доказати да је за сваки природан број $n \geq 2$ број $\cos \frac{\pi}{2^n}$ ирационалан.

Решење: И ово ћемо показати математичком индукцијом.

За $n = 2$ имамо да је $\cos \frac{\pi}{2^2} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ што је ирационалан број, па је база индукције задовољена.

Нека је сада $n \geq 2$ произвољно. Претпоставимо да за n важи тврђење задатка тј. да је $\cos \frac{\pi}{2^n}$ ирационалан број (индуктивна хипотеза) и докажимо да тврђење важи и за $n+1$, односно да је број $\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$ такође ирационалан. Претпоставимо супротно тј. нека је $\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{p}{q}$ за неке $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Коришћењем адиционе формуле $\cos^2 \varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$ тј. $\cos 2\varphi = 2\cos^2 \varphi - 1$ за $\varphi = \frac{\pi}{2^{n+1}}$ добијамо $\cos \frac{\pi}{2^n} = 2\frac{p^2}{q^2} - 1 = \frac{2p^2 - q^2}{q^2}$ што је рационалан број, јер $2p^2 - q^2 \in \mathbb{Z}$, $q^2 \in \mathbb{N}$. Ово је контрадикција са индуктивном хипотезом да је $\cos \frac{\pi}{2^n}$ ирационалан број, па је наша претпоставка нетачна. Дакле, број $\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$ је такође ирационалан, што смо и желели, па тврђење задатка следи по математичкој индукцији.

Дефиниција: Факторијел броја $n \in \mathbb{N}$ дефинишемо као производ свих природних бројева мањих или једнаких од n тј.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n,$$

а дефинишемо и $0! = 1$.

За произвољне бројеве $n, k \in \mathbb{N}_0$ такве да је $n \geq k$ дефинишемо биномни коефицијент

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot \dots \cdot 1}{k! \cdot (n-k) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Такође, биномни коефицијент можемо дефинисати и за произвољне $\alpha \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}_0$ са

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}$$

иако за сада (док у Анализи 2 не дефинишемо гама функцију) не можемо дефинисати факторијел произвољног реалног броја α који не припада скупу $\mathbb{N}_0$.

Тврђење: Нека су $n, k \in \mathbb{N}_0$. Тада важи:

- 1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ уколико је $n \geq k$;
- 2) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$;
- 3) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ уколико је $n \in \mathbb{N}$;
- 4) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ уколико је $n \geq k+1$.

Доказ: 1) $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$

$$2) \binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$$

$$\binom{n}{n} \stackrel{1)}{=} \binom{n}{0} = 1$$

$$\boxed{n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n \cdot (n-1)!}$$

$$3) \binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{n!}{1 \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{n-1} \stackrel{1)}{=} \binom{n}{1} = n$$

$$\begin{aligned} 4) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k) \cdot (n-k-1)!} + \\ &+ \frac{n!}{(k+1) \cdot k! \cdot (n-k-1)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{k+1+n-k}{(n-k) \cdot (k+1)} = \frac{n! \cdot (n+1)}{k! \cdot (k+1) \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

12. (Бинумова биномна формула) Нека су $a, b \in \mathbb{R}$ произвољни. Докажи да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \underbrace{\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n}_{n+1 \text{ саврота}}.$$

Доказујемо твђење постоји математичке индукције.

База: $n=1$

$$(a+b)^1 \stackrel{?}{=} \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1$$

$$a+b = 1 \cdot a + 1 \cdot b \quad (\text{T})$$

✓

Упорак: $n \in \mathbb{N}$ произвољно

Претпоставимо да твђење важи за n тј. важи

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \quad (\text{индуктивна хипотеза})$$

HX

и докажимо да важи и за $n+1$ тј. да је

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \binom{n+1}{2} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n+1}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n+1}{n} a b^n + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}.$$

Умемо да је:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot (a+b)^n =$$

$$\stackrel{\text{HX}}{=} (a+b) \cdot \left(\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \right) =$$

$$= \underbrace{\binom{n}{0} a^{n+1}}_{\uparrow} + \underbrace{\binom{n}{1} a^n b}_{\downarrow} + \underbrace{\binom{n}{2} a^{n-1} b^2}_{\downarrow} + \dots + \underbrace{\binom{n}{n-1} a^2 b^{n-1}}_{\downarrow} + \underbrace{\binom{n}{n} a b^n}_{\downarrow} +$$

$$+ \underbrace{\binom{n}{0} a^n b}_{\downarrow} + \underbrace{\binom{n}{1} a^{n-1} b^2}_{\downarrow} + \dots + \underbrace{\binom{n}{n-2} a^2 b^{n-1}}_{\downarrow} + \underbrace{\binom{n}{n-1} a b^n}_{\downarrow} + \underbrace{\binom{n}{n} b^{n+1}}_{\uparrow} =$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right) a^n b + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right) a^{n-1} b^2 + \dots + \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right) a^2 b^{n-1} + \\
&\quad + \left(\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} \right) a b^n + \binom{n}{n} b^{n+1} = \\
&= a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \binom{n+1}{2} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n+1}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n+1}{n} a b^n + b^{n+1} = \\
&= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \binom{n+1}{2} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n+1}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n+1}{n} a b^n + \binom{n+1}{0} b^{n+1},
\end{aligned}$$

што је и требало доказати, па тврђење задатка важи на основу принципа математичке индукције.

Неједнакости

У Анализи се у великом броју дефиниција и теорема појављују неке неједнакости па ће нам њихово добро познавање олакшати даљи рад. У овом одељку ћемо проучити разне неједнакости које ће нам убудуће често бити корисне.

Тврђење: Доказати да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $x^2 \geq 0$, при чему једнакост важи акко је $x = 0$.

Доказ: Разликоваћемо три случаја. Нека је прво $x > 0$. Како је производ два позитивна броја опет позитиван број, имамо да је $x^2 = x \cdot x > 0$. Слично, ако је $x < 0$, имамо $x^2 = x \cdot x > 0$, јер је производ два негативна броја позитиван број. На крају, за $x = 0$ имамо $0^2 = 0 \geq 0$, па видимо да се управо у овом случају (и само у њему) достиже једнакост.

Тврђење: Доказати да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $|x| \geq 0$, при чему једнакост важи акко је $x = 0$.

Доказ: И овде ћемо као у доказу претходног тврђења разликовати три случаја. Ако је $x > 0$, имамо да је и $|x| = x > 0$. Затим, ако је $x < 0$, важи $|x| = -x > 0$. И коначно, за $x = 0$ је $|0| = 0 \geq 0$, па се само у овом случају достиже једнакост.

1. Решити неједначине:

а) $|x| \leq 2$;

б) $|x| \geq 4$;

в) $|x - 3| \leq 5$;

г) $|x + 1| \geq 2$;

Решење: а) Размотрићемо два случаја.

Прво, за $x \geq 0$ важи $|x| = x$, па је неједначина еквивалентна са $x \leq 3$. Дакле, у овом случају (узимајући у обзир да разматрамо само $x \geq 0$) решење неједначине је $x \in [0, 3]$.

Нека је сада $x < 0$. Важи $|x| = -x$, па је неједначина еквивалентна са $-x \leq 3$, што је након множења обе стране са -1 еквивалентно са $x \geq -3$. То значи да је у овом случају (узимајући у обзир да је $x < 0$) решење неједначине $x \in [-3, 0)$.

Унијом решења из ова два случаја добијамо да је решење ове неједначине $x \in [-3, 3]$.

б) И овде радимо слично као у претходном примеру.

Нека је прво $x \geq 0$. Тада је $|x| = x$, па је неједначина еквивалентна са $x \geq 3$ и тако је њено решење у овом случају $x \in [3, +\infty)$.

У случају $x < 0$ је $|x| = -x$, па је неједначина еквивалентна са $-x \geq 3$ тј. са $x \leq -3$. Зато је њено решење у овом случају $x \in (-\infty, -3]$.

Унија решења ова два случаја даје $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.

в) Сменом $t = x - 3$ ова неједначина се своди на $|t| \leq 5$, па на основу дела а) знамо да је њено решење $t \in [-5, 5]$, односно $-5 \leq t \leq 5$. Враћањем смене имамо $-5 \leq x - 3 \leq 5$, па додавањем 3 свим изразима у неједначини добијамо $-2 \leq x \leq 8$ тј. $x \in [-2, 8]$.

г) И овај пример можемо решити истом идејом коју смо користили у претходном. Сменом $t = x + 1$ ова неједначина се своди на $|t| \geq 2$, па на основу дела б) знамо да је њено решење $t \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ тј. $t \leq -2$ или $t \geq 2$. Враћањем смене имамо да је $x + 1 \leq -2$ или $x + 1 \geq 2$, односно $x \leq -3$ или $x \geq 1$. Дакле, решење полазне неједначине је $x \in (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$.

На исти начин као у претхоном задатку можемо извести да за све $a \in \mathbb{R}$ и $r > 0$ важи:

$$|x| \leq r \iff x \in [-r, r], \quad |x| < r \iff x \in (-r, r),$$

$$|x| \geq r \iff x \in (-\infty, -r] \cup [r, +\infty), \quad |x| > r \iff x \in (-\infty, -r) \cup (r, +\infty),$$

$$|x - a| \leq r \iff x \in [a - r, a + r], \quad |x - a| < r \iff x \in (a - r, a + r),$$

$$|x - a| \geq r \iff x \in (-\infty, a - r] \cup [a + r, +\infty), \quad |x - a| > r \iff x \in (-\infty, a - r) \cup (a + r, +\infty).$$

2. а) Доказати да за свака два броја $a, b \in \mathbb{R}$ важи $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Када важи једнакост?

б) Доказати да за свака три броја $a, b, c \in \mathbb{R}$ важи $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Када важи једнакост?

Решење: а) Неједнакост $a^2 + b^2 \geq 2ab$ је еквивалентна са $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ односно $(a - b)^2 \geq 0$.

Како је последња неједнакост увек тачна, јер је квадрат било ког реалног броја ненегативан, то је и почетна неједнакост тачна. Једнакост важи ако и само ако је $a - b = 0$ тј. $a = b$.

б) Применом неједнакости из дела а) на бројеве a и b , b и c , па c и a (два по два) имамо да важи $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$ и $c^2 + a^2 \geq 2ca$, па сабирањем ових неједнакости добијамо $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2ab + 2bc + 2ca$ односно $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Једнакост важи ако и само ако важи једнакост у све три сабране неједнакости тј. ако и само ако је $a = b$, $b = c$ и $c = a$, што је еквивалентно са $a = b = c$.

3. Нека су бројеви $a, b \in \mathbb{R}$ такви да је $a + b \geq 0$. Доказати да важи $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

Решење: Неједнакост $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$ је (након што све пребацимо на леву страну) еквивалентна са $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 \geq 0$. Израз за леве стране можемо трансформисати на следећи начин:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 &= (a^3 - a^2b) + (b^3 - ab^2) = a^2(a - b) + b^2(b - a) = \\ &= a^2(a - b) - b^2(a - b) = (a^2 - b^2)(a - b) = (a + b)(a - b)^2. \end{aligned}$$

Како је $a + b \geq 0$ по услову задатка и $(a - b)^2 \geq 0$ као квадрат реалног броја, то је $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 = (a + b)(a - b)^2 \geq 0$, а онда је и $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

Теорема [неједнакост троугла]: Доказати да за свака два броја $a, b \in \mathbb{R}$ важи $|a + b| \leq |a| + |b|$, при чему једнакост важи акко су оба броја ненегативна или оба непозитивна.

Доказ: Ако је $a = 0$, неједнакост постаје $|a + 0| \leq |a| + |0|$ тј. $|a| \leq |a|$, што је очигледно тачно и, штавише, важи једнакост. Потпуно исто важи и у случају $b = 0$. Зато надаље можемо претпоставити да је $a \neq 0 \neq b$.

1° $a > 0$ и $b > 0$

Имамо да је и $a + b > 0$, па је $|a + b| = a + b$ и $|a| + |b| = a + b$, па у овом случају важи (не)једнакост.

2° $a < 0$ и $b < 0$

Имамо да је и $a + b < 0$, па је $|a + b| = -(a + b) = -a - b$ и $|a| + |b| = -a + (-b) = -a - b$, па и у овом случају важи (не)једнакост.

3° $a > 0$ и $b < 0$

Имамо прво $|a| + |b| = a + (-b) = a - b$, па треба доказати да је $|a + b| \leq a - b$. На основу коментара након првог задатка знамо да је то еквивалентно са $-(a - b) \leq a + b \leq a - b$, односно са $b - a \leq a + b \leq a - b$. Неједнакост $b - a \leq a + b$ је еквивалентна са $b - a - a - b \leq 0$, односно са $-2a \leq 0$. Како је $a > 0$, то је $-2a < 0$, па ова неједнакост важи (и строга је тј. не важи једнакост). Слично, неједнакост $a + b \leq a - b$ је еквивалентна са $a + b - a + b \leq 0$, односно са $2b \leq 0$, а то свакако важи пошто је $b < 0$ (штавише важи $2b < 0$). Дакле, имамо да је $b - a < a + b < a - b$, па је зато

$|a + b| < a - b = |a| + |b|$ и видимо да у овом случају важи строга неједнакост.

4° $a < 0$ и $b > 0$

Како је неједнакост троугла симетрична по a и b (тј. заменом места a и b се добије иста неједнакост), то овај случај следи директно из претходног.

Дакле, у сваком случају важи неједнакост, док једнакост важи када су оба броја позитивна, оба негативна или када је неки од бројева a и b једнак нули. Другим речима, када су оба броја ненегативна или оба непозитивна.

Анализирањем случајева када је који од бројева a и b негативан, позитиван или једнак нули лако се изводи следеће тврђење познато из основне и средње школе.

Тврђење: За свака два броја $a, b \in \mathbb{R}$ важи $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ и $|-a| = |a|$.

Докажимо сада једно корисно уопштење неједнакости троугла.

4. [неједнакост многоугла]: Доказати да за сваки природан број n и све реалне бројеве $x_1, x_2, \dots, x_n$ важи

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

Решење: Доказ ћемо спровести математичком индукцијом по n .

За $n = 1$ треба доказати да је $|x_1| \leq |x_1|$ за свако $x_1 \in \mathbb{R}$, што је очигледно тачно, па је база индукције задовољена.

Нека је сада $n \in \mathbb{N}$ произвољно. Претпоставимо да тврђење задатка важи за n тј. да за било којих n бројева $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ важи $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ (индуктивна хипотеза) и докажимо да за било којих $n + 1$ бројева $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}$ важи $|x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| + |x_{n+1}|$. Зато, нека су $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}$ произвољни. Уведимо ознаку $a = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Користећи неједнакост троугла тј. да је $|a + x_{n+1}| \leq |a| + |x_{n+1}|$, а потом и индуктивну хипотезу имамо

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}| = |a + x_{n+1}| \leq |a| + |x_{n+1}| = |x_1 + x_2 + \dots + x_n| + |x_{n+1}| \stackrel{\text{ИХ}}{\leq} |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| + |x_{n+1}|,$$

што смо и хтели да покажемо, па тврђење следи по математичкој индукцији.

5. [Бернулијева неједнакост] Показати да за сваки природан број n и сваки реалан број $x > -1$ важи

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Решење: Нека је $x > -1$ произвољан реалан број. Ову неједнакост ћемо доказати математичком индукцијом по n .

Нека је прво $n = 1$. Тада добијамо неједнакост $(1 + x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$, што је заправо $1 + x \geq 1 + x$. Ово је очигледно тачно, штавише важи и једнакост, па је база индукције задовољена.

Нека је сада $n \in \mathbb{N}$ произвољно. Претпоставимо да за n важи тврђење, односно да је $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ (индуктивна хипотеза) и докажимо да тврђење важи за $n + 1$ тј. да је $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$. На основу индуктивне хипотезе добијамо

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \stackrel{\text{ИХ}}{\geq} (1 + x)(1 + nx) = 1 + x + nx + nx^2 \geq 1 + x + nx + 0 = 1 + (n + 1)x,$$

при чему смо користили да је $nx^2 \geq 0$, јер је $n > 0$ и $x^2 \geq 0$, као и чињеницу да неједнакост из индуктивне хипотезе остаје важећа након множења обе стране позитивним $1 + x$. Дакле, доказали смо да је $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$, па тврђење задатка следи по принципу математичке индукције.

Коментар: Приметимо да смо у бази, односно за $n = 1$, видели да у Бернулијевој неједнакости важи једнакост. Затим, из доказа индуктивног корака видимо како да би важило $(1+x)^{n+1} = 1 + (n+1)x$, мора бити $nx^2 = 0$, што значи да је $x = 0$. И заиста, кад је $x = 0$ важи $(1+0)^{n+1} = 1^{n+1} = 1 = 1 + (n+1) \cdot 0$. Дакле, осим за $n = 1$, једнакост важи још и за $x = 0$, тако да имамо закључак да је $(1+x)^n = 1 + nx$ ако и само ако је $n = 1$ или $x = 0$.

6. [Коши–Шварцова неједнакост] Нека је $n \in \mathbb{N}$ и нека су $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ произвољни реални бројеви. Тада важи $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$.

Решење: Приметимо прво да уколико је $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, једнакост тривијално важи као $0 \geq 0$. У супротном, посматрајмо функцију $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дату са $f(x) = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \dots + (a_nx + b_n)^2$. Очигледно је $f(x) \geq 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, јер је сваки сабирак ненегативан као квадрат реалног броја. С друге стране, када квадрирамо и прегрупишемо изразе на десној страни израза којим је дата функција f , добијемо

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Дакле, f је једна квадратна функција чији је члан уз x^2 једнак $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0$, па како она узима само ненегативне вредности, то њена дискриминанта мора бити непозитивна. Одатле имамо да је $4(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \leq 0$ односно $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$.

Размотримо још када у овој неједнакости важи једнакост. Свакако, у тривијалном случају $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ она важи. У нетривијалном случају, када смо посматрали квадратну функцију f , једнакост

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) = (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

је еквивалентна чињеници да је дискриминанта ове функције једнака нули, што заправо значи да f има тачно једну нулу $\lambda \in \mathbb{R}$. Тада је $f(\lambda) = 0$, односно $(a_1\lambda + b_1)^2 + (a_2\lambda + b_2)^2 + \dots + (a_n\lambda + b_n)^2 = 0$, па пошто су сви сабирци ненегативни, мора важити $a_1\lambda + b_1 = a_2\lambda + b_2 = \dots = a_n\lambda + b_n = 0$ тј. $b_1 = -\lambda a_1, b_2 = -\lambda a_2, \dots, b_n = -\lambda a_n$.

Дакле, једнакост важи ако и само ако је $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (0, 0, \dots, 0)$ или $(b_1, b_2, \dots, b_n) = -\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n)$, односно ако и само ако су вектори $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ и $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ линеарно зависни.

Да бисмо исказали следећу неједнакост, прво ћемо увести неопходне појмове. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Аритметичку средину бројева $x_1, x_2, \dots, x_n$ дефинишемо као $A_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$, геометријску као $G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$ (када су $x_1, x_2, \dots, x_n$ ненегативни), хармонијску као $H_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$ (када су бројеви $x_1, x_2, \dots, x_n$ различити од нуле) и квадратну као $K_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$.

Теорема: Нека су $n \in \mathbb{N}$ произвољан природан број и $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ произвољни позитивни реални бројеви. Тада важи

$$H_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq A_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq K_n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Притом, једнакост на било ком, а самим тим и на сваком, месту важи ако и само ако је $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Најчешће ћемо користити неједнакост између аритметичке и геометријске средине коју краће називамо *АГ неједнакост*.

7. Нека су $n \in \mathbb{N}$ природан и $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ позитивни реални бројеви. Доказати да важи

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2.$$

Решење: Први начин: Пошто се тражи да докажемо да је производ нека два збира већи или једнак од нечега, покушаћемо преко Коши–Шварцове неједнакости. Са тим циљем уводимо ознаке $a_1 = \sqrt{x_1}$, $a_2 = \sqrt{x_2}$, ..., $a_n = \sqrt{x_n}$, $b_1 = \frac{1}{\sqrt{x_1}}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{x_2}}$, ..., $b_n = \frac{1}{\sqrt{x_n}}$. Тада тражену неједнакост можемо записати као $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq n^2$. На основу неједнакости Коши–Шварца имамо да важи

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 =$$

$$\left(\sqrt{x_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \sqrt{x_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \dots + \sqrt{x_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right)^2 = (1 + 1 + \dots + 1)^2 = n^2,$$

па је зато и $(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2$.

Други начин: Изрази који се појављују у неједнакости коју доказујемо такође се јављају и у аритметичкој и хармонијској средини позитивних бројева $x_1, x_2, \dots, x_n$, па ћемо искористити неједнакост између ове две средине. Важи, $H_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq A_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, па је

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Множењем обе стране са позитивним $n \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$ добијамо

$$n^2 \leq (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right),$$

што се и тражило.

8. Доказати да за сваки природан број n важи $n! \leq \left(\frac{n+1}{2} \right)^n$.

Решење: Дата неједнакост је (након кореновања, чиме се не мења знак неједнакости) еквивалентна са $\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$. Приметимо да је $\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} = G_n(1, 2, \dots, n)$, па можемо да искористимо АГ неједнакост. Дакле, важи $G_n(1, 2, \dots, n) \leq A_n(1, 2, \dots, n)$, односно

$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{1 + 2 + \dots + n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2},$$

одакле након степеновања са n (чиме се не мења знак неједнакости) следи тражена неједнакост.

Напомена: Овде је коришћен индентитет $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, који је раније доказан помоћу математичке индукције.

9. а) Доказати да за свако $a > 0$ важи $a + \frac{1}{a} \geq 2$, при чему једнакост важи ако и само ако је $a = 1$.

б) Доказати да за свако $a < 0$ важи $a + \frac{1}{a} \leq -2$, при чему једнакост важи ако и само ако је $a = -1$.

Решење: а) Кад год имамо збир неких бројева чији је производ константан (тј. не зависи од самих сабирака), можемо преко АГ неједнакости проценити од чега је он већи или једнак. Овде имамо $\frac{a + \frac{1}{a}}{2} \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1$ тј. $a + \frac{1}{a} \geq 2$. Знамо да једнакост важи ако и само ако је $a = \frac{1}{a}$ тј. $a^2 = 1$, односно $a = 1$, јер је $a > 0$.

б) Пошто је $a < 0$, можемо означити $b = -a > 0$. На основу дела а) знамо да је $b + \frac{1}{b} \geq 2$, а зато и $-a - \frac{1}{a} \geq 2$. Множењем обе стране ове неједнакости са -1 (чиме се „окреће” знак неједнакости) добијамо $a + \frac{1}{a} \leq -2$. Једнакост $a + \frac{1}{a} = -2$ важи ако и само ако је $b + \frac{1}{b} = 2$, а то је на основу дела а) еквивалентно са $b = 1$. Дакле, једнакост важи ако и само ако је $-a = b = 1$, односно $a = -1$.

Супремум и инфимум

Дефиниција: Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$ непразан. За број $M \in \mathbb{R}$ кажемо да је горње ограничење или мајоранта скупа A уколико за свако $a \in A$ важи $a \leq M$. Слично, за број $m \in \mathbb{R}$ кажемо да је доње ограничење или миноранта скупа A ако за свако $a \in A$ важи $m \leq a$. Скуп A може имати више горњих и више доњих ограничења, а може их уопште и немати.

Пример: Бројеви 2, 5, 9 и 1000 су нека од горњих ограничења скупа $[0, 2]$ а 0, -5 и -1000000 нека од доњих ограничења овог скупа. Скуп $\mathbb{R}$ нема горње ограничење, јер не постоји број $M \in \mathbb{R}$ који је већи или једнак од свих реалних бројева и слично, нема ни доње ограничење.

Дефиниција: Уколико скуп има бар једно горње ограничење, кажемо да је он ограничен одозго, а уколико има бар једно доње ограничење, кажемо да је ограничен одоздо.

Наравно, уколико је M горње ограничење скупа A , тада је и сваки број већи од M такође горње ограничење овог скупа, па он има бесконачно много горњих ограничења. Дакле, произвољан скуп или нема горњих ограничења или их има бесконачно много. Аналогно, уколико је m доње ограничење скупа A , тада је и сваки број мањи од m такође његово доње ограничење, па он или нема ниједно или има бесконачно много доњих ограничења.

Дефиниција: Најмање горње ограничење скупа A (уколико оно постоји) називамо његовим супремумом и означавамо га са $\sup A$, док највеће доње ограничење (уколико постоји) називамо његовим инфимумом и означавамо га са $\inf A$.

Другим речима, уколико је M' неко горње ограничење скупа A (тј. за свако $a \in A$ важи $a \leq M'$), тада је $\sup A \leq M'$. Аналогно, уколико је m' неко доње ограничење скупа A , онда је $\inf A \geq m'$.

Коментар: Из дефиниције видимо да супремум и инфимум неког скупа могу, али не морају припадати том скупу.

Следећа теорема говори под којим условима постоје супремум односно инфимум непразног подскупа скупа $\mathbb{R}$.

Теорема [о супремуму и инфимуму]: Ако је непразан скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ ограничен одозго, тада он има супремум, док ако је ограничен одоздо, он има инфимум.

Наредна теорема се често користи приликом доказивања да је неки број супремум односно инфимум посматраног скупа.

Теорема [ε -карактеризација супремума и инфимума]: Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$ непразан и $i, s \in \mathbb{R}$. Тада је $\sup A = s$ ако и само ако важи:

- 1) $(\forall a \in A) a \leq s$ (s је горње ограничење скупа A);
- 2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A) a > s - \varepsilon$ (s је најмање такво, односно $s - \varepsilon$ није горње ограничење скупа A ни за једно $\varepsilon > 0$).

Слично, $\inf A = i$ ако и само ако важи:

- 1) $(\forall a \in A) i \leq a$ (i је доње ограничење скупа A);
- 2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A) a < i + \varepsilon$ (i је највеће такво, односно $i + \varepsilon$ није доње ограничење скупа A ни за једно $\varepsilon > 0$).

Важна последица теореме о супремуму је Архимедово својство скупа $\mathbb{R}$.

Теорема [Архимедово својство]: Нека су a и b произвољни позитивни реални бројеви. Тада постоји јединствен природан број n такав да важи $(n - 1)a \leq b < na$.

Уопштење Архимедовог својства када $b \in \mathbb{R}$ можемо видети у наредном тврђењу.

Тврђење: Нека су $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$ произвољни реални бројеви. Тада постоји јединствен број $n \in \mathbb{Z}$ такав да важи $(n-1)a \leq b < na$.

Доказ: Први случај: Ако је $b > 0$, на основу Архимедовог својства знамо да постоји јединствено $n \in \mathbb{N}$, па је самим тим и $n \in \mathbb{Z}$, такво да је $(n-1)a \leq b < na$.

Други случај: Ако је $b = 0$, треба доказати да постоји јединствен цео број n такав да је $(n-1)a \leq 0 < na$. Након дељења ове неједнакости позитивним бројем a , добијамо $n-1 \leq 0 < n$, па је јасно да ово једино важи за $n = 1$.

Трећи случај: Нека је сада $b < 0$. Онда је $-b > 0$, па на основу Архимедовог својства постоји јединствен природан број m такав да је $(m-1)a \leq -b < ma$, што је након множења са -1 еквивалентно са $-ma < b \leq -(m-1)a$. Сада, уколико је $-ma < b < -(m-1)a$, можемо узети $n = -m+1 \in \mathbb{Z}$ и заиста важи $(n-1)a < b < na$, па самим тим и $(n-1)a \leq b < na$, док уколико је $b = -(m-1)a$, онда важи $(n-1)a \leq b < na$, те можемо узети $n = -m+2$ и онда заиста важи $(n-1)a \leq b < na$.

Специјално, за $a = 1$ из претходног тврђења имамо да за сваки број $b \in \mathbb{R}$ постоји јединствен број $n \in \mathbb{Z}$ такав да је $n-1 \leq b < n$. Број $n-1 \in \mathbb{Z}$ називамо *целим делом* броја $b \in \mathbb{R}$ и означавамо га са $[b]$. Дакле, цео део реалног броја x је заправо највећи цео број мањи или једнак од броја x . То значи да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $[x] \leq x < [x] + 1$, а зато и $x-1 < [x] \leq x$. Тако је, на пример, $[n] = n$ за свако $n \in \mathbb{Z}$, $[11.99] = 11$, $[2.5] = 2$, $[-2.5] = -3$.

Коментар: Из претходних закључака видимо и да за сваки реалан број x постоји цео број $[x] + 1$ који је већи од њега, па самим тим постоји и природан број већи од њега.

Сада можемо увести и *разломљени део* броја x , у ознаци $\{x\}$, као $\{x\} = x - [x]$ за $x \in \mathbb{R}$. Приметимо да из неједнакости $[x] \leq x < [x] + 1$ директно следи $0 \leq x - [x] < 1$ тј. $0 \leq \{x\} < 1$ за све $x \in \mathbb{R}$. Дакле, сваки реалан број x се на јединствен начин може записати као збир једног целог и једног реалног броја из интервала $[0, 1)$ као $x = [x] + \{x\}$.

1. Доказати да за свака два броја $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{Z}$ важи $[x+n] = [x] + n$.

Решење: Нека су $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{Z}$ произвољни. Знамо да је $x = [x] + \{x\}$ и притом је $[x] \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq \{x\} < 1$. Тада је $x+n = [x] + \{x\} + n$ и важи $[x] + n \leq x+n < [x] + n + 1$, па смо број $x+n$ сместили између два цела броја $[x] + n$ и $[x] + n + 1$. Како је $x+n < [x] + n + 1$, мора бити $[x+n] = [x] + n$.

2. Доказати да за свака два реална броја x и y важи $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$ и навести по један пример када је лева односно десна неједнакост заправо једнакост.

Решење: Нека су $x, y \in \mathbb{R}$ произвољни. Као у претходном задатку можемо записати $x = [x] + \{x\}$ и $y = [y] + \{y\}$, где је $[x], [y] \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq \{x\}, \{y\} < 1$. Одатле је $x+y = [x] + [y] + \{x\} + \{y\}$, па како је $0+0 = 0 \leq \{x\} + \{y\} < 1+1 = 2$, имамо да је $[x] + [y] \leq x+y < [x] + [y] + 2$. Дакле, сместили смо реалан број $x+y$ између два цела броја $[x] + [y]$ и $[x] + [y] + 2$, па може бити или $[x+y] = [x] + [y]$ или $[x+y] = [x] + [y] + 1$ (опција $[x+y] = [x] + [y] + 2$ није могућа, јер је $[x+y] \leq x+y < [x] + [y] + 2$), те је заиста $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$.

Рецимо, за $x = 1.5$ и $y = 2.1$ имамо $[x+y] = [3.6] = 3 = 1 + 2 = [x] + [y]$, док за $x = 1.5$ и $y = 2.8$ имамо $[x+y] = [4.3] = 4 = 1 + 2 + 1 = [x] + [y] + 1$.

Дефиниција: Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$ непразан. Уколико постоји елемент $M \in A$ такав да је $a \leq M$ за свако $a \in A$, кажемо да је број M максимум скупа A и пишемо $M = \max A$, док уколико постоји елемент $m \in A$ такав да важи $m \leq a$ за свако $a \in A$, кажемо да је он минимум скупа A и пишемо $\min A = m$. Другим речима, број M је максимум скупа A уколико је он његово горње ограничење и притом му припада, док је број m минимум скупа A уколико је он његово доње

ограничење и припада му.

Тврђење: Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$ непразан. Уколико постоји, максимум овог скупа је јединствен. Такође, уколико овај скуп има минимум, и он је јединствен.

Доказ: Претпоставимо да су M_1 и M_2 два максимума скупа A . Тада, по дефиницији максимума скупа важи $M_1, M_2 \in A$, $x \leq M_1$ и $x \leq M_2$ за све $x \in A$. Одатле имамо да је $M_1 \leq M_2$ (јер $M_1 \in A$) и $M_2 \leq M_1$ (јер $M_2 \in A$), па је $M_1 = M_2$. Аналогно се доказује и да је минимум скупа јединствен уколико постоји.

Приметимо да уколико постоји $s = \sup A$ и важи $s \in A$, тада је број s уједно и горње ограничење скупа A (пошто је његов супремум) и његов елемент, па је онда $\max A = s$ тј. $\max A = \sup A$. С друге стране, уколико постоји $M = \max A$, тада је скуп A ограничен одозго бројем M , па постоји $\sup A$ и важи $M \leq \sup A$ (јер је M елемент скупа A , а $\sup A$ његово горње ограничење), али и $\sup A \leq M$ (јер је M једно горње ограничење скупа A , а $\sup A$ његово најмање горње ограничење), па мора бити $M = \sup A$ и самим тим $\sup A \in A$.

Дакле, $\sup A$ постоји и $\sup A \in A$ ако и само ако постоји $\max A$ (и тада је $\max A = \sup A$).

Ова чињеница нам омогућује да уколико смо доказали да постоји супремум скупа и одредили га, довољно је само да проверимо да ли он припада том скупу како бисмо утврдили да ли скуп има максимум. С друге стране, уколико смо одредили максимум скупа, одмах знамо да тај скуп има и супремум који је једнак његовом максимуму.

Аналогно тврђење важи и за инфимум тј. $\inf A$ постоји и $\inf A \in A$ ако и само ако постоји $\min A$ (и тада је $\min A = \inf A$). Зато уколико нађемо $\inf A$, довољно је само да проверимо да ли он припада скупу A како бисмо утврдили да ли постоји $\min A$, док уколико прво одредимо $\min A$, одмах знамо да постоји и $\inf A$ и да је $\inf A = \min A$.

3. Одредити супремум, инфимум, максимум и минимум (уколико постоје) скупа A ако је:

а) $A = [0, 1]$, б) $A = [0, 1)$, в) $A = (0, 1]$, г) $A = (0, 1)$.

Решење: а) Приметимо да за свако $a \in A$ важи $a \leq 1$, па је број 1 једно горње ограничење скупа A . Уз то, $1 \in A$, па је $\max A = 1$, а самим тим и $\sup A = 1$. Слично, за свако $a \in A$ је $a \geq 0$ и $0 \in A$, па је $\min A = 0$, те је онда и $\inf A = 0$.

б) Слично као у претходном примеру закључујемо да је $\min A = \inf A = 0$. Даље, можемо приметити да је број 1 једно горње ограничење скупа A , па је скуп A ограничен одозго и по теорему постоји $\sup A$. Међутим, како $1 \notin A$, то не можемо тако лако доказати да је $\sup A = 1$ као у претходном примеру, па ћемо то урадити помоћу ε -карактеризације. Први услов је свакако испуњен, јер је $a \leq 1$ за све $a \in A$. Да бисмо доказали и други услов, узмемо $\varepsilon > 0$ произвољно и тражимо $a \in [0, 1)$ такво да је $a > 1 - \varepsilon$. За такво a можемо узети било који ненегативан број из интервала $(1 - \varepsilon, 1)$ (рецимо $a = 0$ за $\varepsilon > 1$ или $a = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ за $\varepsilon \leq 1$), па по поменутој теорему имамо да је $\sup A = 1$. Како $\sup A \notin A$, то $\max A$ не постоји.

в) На сличан начин као у делу а) можемо доказати да је $\sup A = \max A = 1$. Затим, приметимо да је број 0 $\notin A$ једно доње ограничење скупа A , па ћемо пробати да докажемо да је $\inf A = 0$ помоћу ε -карактеризације. Прво, свакако важи $0 \leq a$ за све $a \in A$. Друго, нека је $\varepsilon > 0$ произвољно и потражимо $a \in A$ такво да је $a < 0 + \varepsilon$ тј. $a < \varepsilon$. Ако је $\varepsilon > 1$, можемо узети $a = 1$, јер $1 \in A$ и $1 < \varepsilon$, док уколико је $\varepsilon \leq 1$, можемо узети $a = \frac{\varepsilon}{2}$ и заиста је $a \in A$ и $a < \varepsilon$. Дакле, $\inf A = 0$, а како $0 \notin A$, скуп A нема минимум.

г) Аналогно као у примеру под б) можемо доказати да је $\sup A = 1$, па како $1 \notin A$, скуп A нема максимум. С друге стране, аналогно као у делу в) можемо доказати да је $\inf A = 0$, па видимо

да скуп A нема минимум, јер $0 \notin A$.

4. Одредити супремум, инфимум, максимум и минимум (ако постоје) скупа

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \log_2 |x-2| \leq 0\}.$$

Решење: Треба решити неједначину $x^2 \log_2 |x-2| \leq 0$ и тако одредити све елементе скупа A . Прво треба видети за које $x \in \mathbb{R}$ је израз $x^2 \log_2 |x-2|$ дефинисан. Израз x^2 је дефинисан за све $x \in \mathbb{R}$, док да би $\log_2 |x-2|$ био дефинисан, мора важити $|x-2| > 0$ тј. $x \neq 2$, па тражимо само такве x . За $x = 0$ ова једначина је тачна, јер је $0 \leq 0$, па претпоставимо надаље да је $x \neq 0$. Тада је $x^2 > 0$, па је неједначина $x^2 \log_2 |x-2| \leq 0$ еквивалентна са $\log_2 |x-2| \leq 0$. Након степеновања са 2 добијамо да је последња једначина еквивалентна са $2^{\log_2 |x-2|} \leq 2^0$ (јер је функција 2^x строго растућа), што је даље еквивалентно са $|x-2| \leq 1$. Одатле је $-1 \leq x-2 \leq 1$ односно $1 \leq x \leq 3$. Дакле, или је $x = 0$ или је $-1 \leq x \leq 3$, што уз почетни коментар да је $x \neq 2$ због дефинисаности израза са леве стране неједначине значи да је $x = 0$ или $x \in [1, 3] \setminus \{2\}$. Зато можемо рећи да је $A = \{0\} \cup [1, 2) \cup (2, 3]$. Сада лако видимо да је 0 елемент скупа A који је његово доње ограничење, а 3 његов елемент који је његово горње ограничење, па зато имамо $\inf A = \min A = 0$ и $\sup A = \max A = 3$.

5. Одредити супремум, инфимум, максимум и минимум (уколико постоје) скупа

$$A = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m \leq n \right\}.$$

Решење: За било која два природна броја m и n из услова $m \leq n$ дељењем обе стране са позитивним n имамо да је $\frac{m}{n} \leq 1$, па за свако $a \in A$ важи $a \leq 1$ и зато је број 1 једно горње ограничење скупа A . Како $1 \in A$ (рецимо, када узмемо $m = n = 1$), то је $\max A = 1$, а самим тим је и $\sup A = 1$. Потражимо сада неко доње ограничење скупа A . Како су сви природни бројеви позитивни, то је и њихов количник такав, па су сви елементи скупа A позитивни. Дакле, 0 је једно доње ограничење скупа A , па по теореме постоји $\inf A$. Покажимо користећи ε -карактеризацију да је $\inf A$ баш једнак 0. Први услов је испуњен, јер смо већ установили да је 0 доње ограничење скупа A . Нека је сада $\varepsilon > 0$ произвољно. Тражимо елемент $a \in A$ такав да је $a < 0 + \varepsilon = \varepsilon$. Како су сви елементи скупа A облика $\frac{m}{n}$ при чему су $m, n \in \mathbb{N}$ и $m \leq n$, то заправо значи да тражимо два природна броја m и n са такве да је $\frac{m}{n} < \varepsilon$. Пошто желимо да разломак $\frac{m}{n}$ буде што мањи (како бисмо га учинили мањим од ε), можемо узети што мањи бројилац тј. $m = 1$. Сада још треба показати да постоји $n \in \mathbb{N}$ такво да је $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Ово је еквивалентно са $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (јер су n и ε позитивни). На основу коментара након Архимедовог својства знамо да за сваки реалан број постоји природан број већи од њега, па зато постоји $n \in \mathbb{N}$ такав да је $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Дакле, одабиром таквог n и $m = 1$, нашли смо елемент $a = \frac{m}{n} \in A$ такав да је $a < \varepsilon$, па је испуњен и други услов из ε -карактеризације инфimumа. Зато је $\inf A = 0$. Како $0 \notin A$ (јер су сви елементи скупа A позитивни), то $\min A$ не постоји.

6. Одредити супремум, инфимум, максимум и минимум (ако постоје) скупа

$$A = \left\{ \frac{2n}{2m+1} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Решење: Слично као у претходном задатку можемо прво закључити да је 0 једно доње ограничење скупа C , јер је $2n > 0$ и $2m+1 > 0$ за све $m, n \in \mathbb{N}$, па су сви елементи скупа A ненегативни. Докажимо помоћу ε -карактеризације да је $\inf A = 0$. Први услов је већ испуњен пошто је 0 доње ограничење овог скупа. Да бисмо доказали други услов, нека је $\varepsilon > 0$ и тражимо $a \in A$ такво да је $a < 0 + \varepsilon = \varepsilon$. Дакле, заправо тражимо $m, n \in \mathbb{N}$ такве да је $a = \frac{2n}{2m+1} < \varepsilon$. Пошто желимо да разломак $\frac{2n}{2m+1}$ буде што мањи (како бисмо га учинили мањим од ε), можемо узети што мањи бројилац тј. $n = 1$. Сада још треба показати да постоји $m \in \mathbb{N}$ такво да је $\frac{2}{2m+1} < \varepsilon$.

Ово је еквивалентно са $2m + 1 > \frac{2}{\varepsilon}$ (јер су $2m + 1$ и ε позитивни), што је даље еквивалентно са $2m > \frac{2}{\varepsilon} - 1$, односно са $m > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$. На основу коментара након Архимедовог својства овакав природан број m сигурно постоји, па одабиром таквог m и $n = 1$ имамо елемент $a = \frac{2}{2m+1} \in A$ такав да је $a < \varepsilon$. Зато је $\inf A = 0$, а како $0 \notin A$ (јер су сви елементи скупа A позитивни), скуп A нема минимум. Што се тиче горњег ограничења овог скупа, за разлику од претходног задатка овде немамо никакву везу између бројева m и n па морамо друкчије да размишљамо, јер нисмо сигурни шта би могло бити горње ограничење овог скупа. Да ли постоји неки позитиван број M такав да је $\frac{2n}{2m+1} \leq M$ за све $m, n \in \mathbb{N}$? Ако би постојао, претходна неједнакост би морала да важи и за оне m и n за које је тај разломак што већи, а то је за велике вредности броја n и мале вредности броја m . Специјално, ако ставимо $m = 1$, морало би да важи $\frac{2n}{3} \leq M$ за свако $n \in \mathbb{N}$, односно $n \leq \frac{3M}{2}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Међутим, ово је у контрадикцији са коментаром након Архимедовог својства да за сваки реалан број постоји природан број који је од њега већи, па број M са наведеним особинама не постоји. Зато скуп A уопште није ограничен одозго, па самим тим нема ни супремум ни максимум.

7. Одредити супремум, инфимум, максимум и минимум (ако постоје) скупа

$$A = \left\{ \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Решење: Приметимо да како су m и n позитивни, свакако је и $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} > 0$, па је број 0 једно доње ограничење скупа A . Међутим, неће важити $\inf A = 0$, јер лако можемо уочити да је и број 2 доње ограничење овог скупа. Заиста, бројеви $\frac{m}{n}$ и $\frac{n}{m}$ су међусобно реципрочни, па на основу АГ једнакости имамо

$$\frac{\frac{m}{n} + \frac{n}{m}}{2} \geq \sqrt{\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m}} = 1,$$

односно $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq 2$ за све $m, n \in \mathbb{N}$. Такође, једнакост важи ако и само ако је $\frac{m}{n} = \frac{n}{m}$ тј. $m^2 = n^2$, што је еквивалентно са $m = n$, јер се ради о природним (дакле, позитивним) бројевима. Овим смо добили да је број 2 доње ограничење скупа A и да $2 \in A$ (одабиром $m = n = 1$), па је $\min A = 2$, а зато и $\inf A = 2$.

На први поглед, ни овде се не намеће шта би било горње ограничење скупа A . Претпоставимо да је он ограничен одозго, односно да постоји нека константа $M \in \mathbb{R}$ таква да је $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \leq M$ за све $m, n \in \mathbb{R}$. Приметимо да први сабирак можемо учинити произвољно великим ако бирамо што веће m и што мање n (па ћемо зато одабрати $n = 1$), а други сабирак је свакако позитиван. Имамо да за све $m \in \mathbb{N}$ важи

$$M \geq \frac{m}{1} + \frac{1}{m} > m + 0 = m,$$

што знамо да није могуће на основу коментара након Архимедовог својства. Зато скуп A није ограничен одозго, па самим тим нема ни супремум ни максимум.

8. Одредити супремум, инфимум, максимум и минимум (ако постоје) скупа $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

Решење: Када будемо увели појмове низа, монотоности низа и граничне вредности (тј. лимеса) низа, овакве задатке ћемо моћи да решавамо тако што испитамо монотоност низа $a_n = \frac{1}{n}$ и одредимо његову граничну вредност, па искористимо одговарајућу теорему. Одрадићемо касније пар задатака и на тај начин, а сада ћемо решити овај задатак без коришћења тих појмова, већ ћемо размишљати као у претходним задацима.

Приметимо прво да су сви елементи скупа A позитивни као количници позитивних бројева 1 и n , па је број 0 једно доње ограничење овог скупа. Чини се да израз $\frac{1}{n}$ може бити произвољно близак нули за довољно велико n , па ћемо покушати да докажемо да је $\inf A = 0$. Пошто смо већ утврдили да је 0 доње ограничење овог скупа, нека је $\varepsilon > 0$ произвољно и тражимо $a \in A$

такво да је $a < 0 + \varepsilon = \varepsilon$. Дакле, тражимо $n \in \mathbb{N}$ такво да је $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Последње је еквивалентно са $n > \frac{1}{\varepsilon}$, а знамо да такво n постоји на основу коментара након Архимедовог својства. За ово n је заиста $a = \frac{1}{n} < \varepsilon$, па на основу ε -карактеризације инфимума закључујемо да је $\inf A = 0$. Како $0 \notin A$, јер су сви елементи овог скупа позитивни, то не постоји $\min A$.

Сада одређујемо $\sup A$, те размишљамо шта би могло бити његово горње ограничење. Израз $\frac{1}{n}$ је све мањи како је n веће, па ће највећи бити када је n најмање могуће, односно када је $n = 1$. Другим речима, за све $n \in \mathbb{N}$ важи $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1$, па је број 1 једно горње ограничење скупа A . Како за $n = 1$ видимо да $1 \in A$, то је $\max A = 1$, па и $\sup A = 1$.

9. Одредити супремум, инфимум, максимум и минимум (ако постоје) скупа $A = \left\{ \frac{7n-3}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

Решење: Прво, запишимо елементе овог скупа у погоднијем облику како бисмо лакше могли да проценимо шта би била његова потенцијална доња и горња ограничења. Имамо да је $\frac{7n-3}{n} = 7 - \frac{3}{n}$. Овај облик нам је погоднији, јер је 7 константа, као и бројилац разломка $\frac{3}{n}$, па једино његов именилац зависи од n , док су у разломку $\frac{7n-3}{n}$ и бројилац и именилац зависили од n и то нам је отежавало ситуацију. Као у претходном задатку, приметимо да је за веће n израз $\frac{3}{n}$ све мањи, па би он био највећи за најмање могуће n тј. $n = 1$, док да би био што мањи, n треба да буде што веће. Дакле, $\frac{3}{n} \leq \frac{3}{1} = 3$ и $\frac{3}{n} > 0$ као количник два позитивна броја за све $n \in \mathbb{N}$. Зато је $7 - \frac{3}{n} \geq 7 - 3 = 4$ и $7 - \frac{3}{n} < 7 - 0 = 7$, па је број 4 једно доње ограничење скупа A , док је број 7 једно његово горње ограничење. Додатно, како $4 \in A$ (узимајући да је $n = 1$), имамо да је $\min A = 4$, а онда и $\inf A = 4$. Даље, већ смо доказали да је 7 горње ограничење скупа A , па да бисмо доказали да је то и његов супремум, користићемо ε -карактеризацију супремума. Нека је $\varepsilon > 0$ и тражимо $a \in A$ такво да је $a > 7 - \varepsilon$, односно тражимо $n \in \mathbb{N}$ такво да је $7 - \frac{3}{n} > 7 - \varepsilon$. Ово је еквивалентно са $\frac{3}{n} < \varepsilon$ тј. са $n > \frac{3}{\varepsilon}$, а овакво $n \in \mathbb{N}$ постоји на основу коментара након Архимедовог својства. Дакле, нашли смо одговарајуће $n \in \mathbb{N}$, а тиме и $a \in A$ такво да је $a > 7 - \varepsilon$, па је заиста $\sup A = 7$. Како је $\frac{3}{n} > 0$, то је и $7 - \frac{3}{n} < 7$, па $7 \notin A$, јер су сви елементи скупа A мањи од 7. Зато овај скуп нема максимум.

10. Одредити супремум, инфимум, максимум и минимум (ако постоје) скупа $A = \left\{ \frac{3n^2+8}{n^2+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

Решење: Као и у претходном задатку, прво ћемо мало преформулисати израз којим су дати елементи овог скупа како бисмо лакше могли да радимо са њима. Имамо да је

$$\frac{3n^2+8}{n^2+2} = \frac{3n^2+6+2}{n^2+2} = \frac{3(n^2+2)+2}{n^2+2} = 3 + \frac{2}{n^2+2},$$

па сада имамо посла са разломком чији именилац зависи од n , док је бројилац константан. Приметимо да ће за веће n и именилац n^2+2 бити већи, па ће разломак $\frac{2}{n^2+2}$ бити мањи. То значи да ће овај разломак бити највећи могући када је $n = 1$, а најмањи када n буде што веће. Другим речима, $\frac{2}{n^2+2} \leq \frac{2}{1^2+2} = \frac{2}{3}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, а са друге стране је $\frac{2}{n^2+2} > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, јер су 2 и n^2+2 позитивни. Зато је $3 + \frac{2}{n^2+2} \leq 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$ и $3 + \frac{2}{n^2+2} > 3 + 0 = 3$ за све $n \in \mathbb{N}$, па је број $\frac{11}{3}$ једно горње ограничење скупа A , док је број 3 једно његово доње ограничење. Додатно, како $\frac{11}{3} \in A$ (узимајући да је $n = 1$), имамо да је $\max A = \frac{11}{3}$, а онда и $\sup A = \frac{11}{3}$. Даље, већ смо доказали да је број 3 доње ограничење скупа A , па да бисмо доказали да је то и његов инфимум, користићемо ε -карактеризацију. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно и тражимо $a \in A$ такво да је $a < 3 + \varepsilon$, односно тражимо $n \in \mathbb{N}$ такво да је $3 + \frac{2}{n^2+2} < 3 + \varepsilon$. Ово је еквивалентно са $\frac{2}{n^2+2} < \varepsilon$ што је даље еквивалентно са $n^2 + 2 > \frac{2}{\varepsilon}$, односно $n^2 > \frac{2}{\varepsilon} - 2$. Ако је $\frac{2}{\varepsilon} - 2 < 0$, можемо узети рецимо $n = 1$, док у супротном можемо узети било које $n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 2}$, јер овакво n постоји на основу коментара након Архимедовог својства. На тај начин пронашли смо елемент $a \in A$ такав да је $a < 3 + \varepsilon$, па је $\inf A = 3$. Како је $3 + \frac{2}{n^2+2} > 3$ за свако $n \in \mathbb{N}$, то $3 \notin A$, па не постоји $\min A$.

11. (јун 2 '23) Наћи супремум, инфимум, максимум и минимум (ако постоје) скупа $A = \left\{ \frac{2+(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

$$(-1)^n = \begin{cases} -1, & n \text{ нејарно} \\ 1, & n \text{ парно} \end{cases} \Rightarrow \frac{2+(-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ нејарно} \\ \frac{3}{n}, & n \text{ парно} \end{cases}$$

Посматрамо прво израз $\frac{1}{n}$ за нејарне $n \in \mathbb{N}$.

Важно $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1$ за свако нејарно n , јер је $n \geq 1$,

а такође је $\frac{1}{n} > 0$ за свако нејарно n .

$$\Rightarrow \underline{0 < \frac{1}{n} \leq 1 \text{ за све нејарне } n \in \mathbb{N}}$$

Сада посматрамо израз $\frac{3}{n}$ за парне $n \in \mathbb{N}$.

$$n \text{ парно} \Rightarrow n \geq 2 \Rightarrow \frac{3}{n} \leq \frac{3}{2}$$

и такође је $\frac{3}{n} > 0$

$$\Rightarrow \underline{0 < \frac{3}{n} \leq \frac{3}{2} \text{ за све парне } n \in \mathbb{N}}$$

Дакле, и за парне и за нејарне n су елементи скупа A већи од 0, па је 0 доње ограничење скупа A . Докажимо да је $\inf A = 0$.

1) 0 је доње ограничење скупа A ✓

2) $\varepsilon > 0$ произвољно

Потражимо $a \in A$ т.д. је $a < 0 + \varepsilon = \varepsilon$ т.д. потражимо
 непарно $n \in \mathbb{N}$ т.д. је $\frac{1}{n} < \varepsilon$ или парно $n \in \mathbb{N}$ т.д.
 је $\frac{3}{n} < \varepsilon$. На пример, или тешко на прву варијанту.

$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$, а пошто непарно $n \in \mathbb{N}$ сигурно постоји
 (последња Архимедова својства)

$$\Rightarrow \inf A = 0$$

$$\frac{3}{n} > 0 \text{ и } \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow 0 \notin A \Rightarrow \text{не постоји } \min A$$

Дакле, за све парне n је $\frac{3}{n} \leq \frac{3}{2}$, а за све непарне

n је $\frac{1}{n} \leq 1 < \frac{3}{2}$, па је број $\frac{3}{2}$ горње ограничење

скупља A . Уз то, $\frac{3}{2} \in A$ (за $n=2$), па је $\max A = \frac{3}{2}$, а

$$\text{зато и } \sup A = \frac{3}{2}.$$

12. (јун 1 '24) Наћи супремум, инфимум, максимум и
 минимум (ако постоје) скупова $A = \left\{ \frac{3 \cdot (-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ и

$$B = \{ 3 \cdot (-1)^n \cdot n \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

$$\frac{3 \cdot (-1)^n}{n} = \begin{cases} -\frac{3}{n}, & n \text{ непарно} \leftarrow \text{негативни, па тешко преко њих} \\ & \text{потражити инфимум} \\ \frac{3}{n}, & n \text{ парно} \leftarrow \text{позитивни, па тешко преко њих} \\ & \text{потражити супремум} \end{cases}$$

За веће n је $\frac{3}{n}$ мањи, а $-\frac{3}{n}$ већи, па имамо:

$$\underline{0 < \frac{3}{n} \leq \frac{3}{2} \text{ за све парне } n \text{ (јер је } n \geq 2)}$$

$$0 < \frac{3}{n} \leq \frac{3}{1} = 3 \text{ } \cdot (-1) \text{ за све непарне } n \text{ (јер је } n \geq 1)$$

$$\Rightarrow \underline{-3 \leq -\frac{3}{n} < 0 \text{ за све непарне } n}$$

Дакле, -3 је једно доње ограничење скупа A (за све непарне n је $-\frac{3}{n} \geq -3$ и за све парне n је $\frac{3}{n} > 0 > -3$) и $-3 \in A$ (за $n=1$, што је непарно, је $-\frac{3}{n} = -3$), па је $\min A = -3$ и онда $\inf A = -3$.

Затим, $\frac{3}{2}$ је горње ограничење скупа A (за све парне n је $\frac{3}{n} \leq \frac{3}{2}$ и за све непарне n је $-\frac{3}{n} < 0 < \frac{3}{2}$) и $\frac{3}{2} \in A$ (за $n=2$, што је парно, је $\frac{3}{n} = \frac{3}{2}$), па је $\max A = \frac{3}{2}$ и $\sup A = \frac{3}{2}$.

Прелазимо сада на скуп B .

$$3 \cdot (-1)^n \cdot n = \begin{cases} -3n, & n \text{ непарно} \\ 3n, & n \text{ парно} \end{cases}$$

Претпоставимо да је скуп B ограничен одозго са $M \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow -3n \leq M \text{ за све непарне } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{и } 3n \leq M \text{ за све парне } n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \leq \frac{M}{3} \text{ за све парне } n \in \mathbb{N},$$

што, наравно, није могуће

$\Rightarrow B$ није ограничен одозго, па не постоје $\sup B$ ни $\max B$

Претпоставимо да је скуп B ограничен одозго са $m \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \exists n \geq m$ за све парне $n \in \mathbb{N}$

и $-3n \geq m$ за све непарне $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \leq -\frac{m}{3}$ за све непарне $n \in \mathbb{N}$
што, наравно, није могуће

$\Rightarrow B$ није ограничен одозго, па не постоје $\inf B$ ни $\min B$

13. Наћи супремум, инфимум, максимум и минимум

(ако постоје) скупова $A = \{6x - 4 \mid x \in [0, 1]\}$ и

$$B = \{|6x - 4| \mid x \in [0, 1]\}.$$

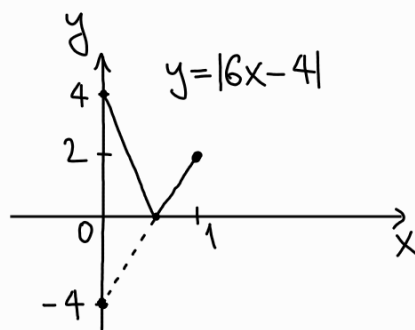
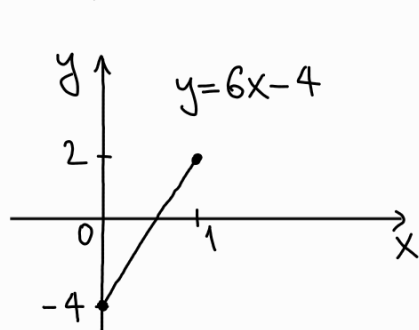
Приметимо да за све $x \in [0, 1]$ важи $0 \leq 6x \leq 6$ и

$-4 \leq 6x - 4 \leq 2$, па је -4 једно доње, а 2 једно горње

ограничење скупа A . Тако и $-4 \in A$ (за $x=0$) и $2 \in A$

(за $x=1$), па је $\min A = -4$ и $\inf A = -4$, као и $\max A = 2$

и $\sup A = 2$.



$$6x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 6x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow |6x - 4| = \begin{cases} 4 - 6x, & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ 6x - 4, & x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

$$\underline{x \in [0, \frac{2}{3}]} \Rightarrow 0 \leq 6x \leq 4 \quad | \cdot (-1) \Rightarrow -4 \leq -6x \leq 0 \quad | +4 \Rightarrow \underline{0 \leq 4 - 6x \leq 4}$$

$$\underline{x \in [\frac{2}{3}, 1]} \Rightarrow 4 \leq 6x \leq 6 \quad | -4 \Rightarrow \underline{0 \leq 6x - 4 \leq 2}$$

Дакле, за све $x \in [0, 1]$ је $|6x - 4| \geq 0$ и $|6x - 4| \leq 4$, па је 0 једно доње, а 4 једно горње ограничење скупа B .

Уколико $0 \in B$ (за $x = \frac{2}{3}$) и $4 \in B$ (за $x = 0$), па је

$$\min B = \inf B = 0 \quad \text{и} \quad \max B = \sup B = 4.$$

Низови и њихова гранична вредност

Функцију $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ називамо *реалним низом* или *низом реалних бројева*. Уместо $a(n)$ користићемо ознаку a_n и бројеве $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ називамо *члановима* или *елементима* овог низа. Низове ћемо означавати са (a_n) , $(a_n)_{n=1}$, или $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Низ може бити задат експлицитно, када се сваки члан низа непосредно може израчунати помоћу одговарајуће формуле. На пример, такав је низ (a_n) задат са $a_n = \frac{3n-1}{n+4}$ за који лако видимо да је $a_1 = \frac{2}{5}$, $a_2 = \frac{5}{6}$, $a_{100} = \frac{299}{104}$ итд. Такође, низ може бити задат и рекурентно тј. формулом помоћу које се следећи члан низа може израчунати из претходних, док је првих неколико чланова тог низа експлицитно задато. На пример, низ (a_n) дат са $a_1 = 5$ и $a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$ је један рекурентно задати низ. Тада је $a_2 = 2a_1^2 - 1 = 2 \cdot 25 - 1 = 49$, $a_3 = 2a_2^2 - 1 = 2 \cdot 2401 - 1 = 4801$ итд. Код рекурентно задатих низова није увек једноставно извести експлицитну формулу којом би се непосредно израчунао члан a_n за произвољно $n \in \mathbb{N}$. Зато, ако бисмо у том примеру желели да израчунамо a_{100} , морали бисмо претходно редом да израчунамо $a_2, a_3, \dots, a_{98}$ и a_{99} .

Кажемо да је низ (a_n) :

- *растући* ако за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $a_{n+1} \geq a_n$;
- *строго растући* ако за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $a_{n+1} > a_n$;
- *опadaјући* ако за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $a_{n+1} \leq a_n$;
- *строго опadaјући* ако за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $a_{n+1} < a_n$;
- *монотон* ако је растући или опadaјући;
- *строго монотон* ако је или строго растући или строго опadaјући;
- *ограничен одозго* ако постоји реалан број M такав да је $a_n \leq M$ за све $n \in \mathbb{N}$;
- *ограничен одоздо* ако постоји реалан број m такав да је $a_n \geq m$ за све $n \in \mathbb{N}$;
- *ограничен* ако је ограничен и одоздо и одозго, што је еквивалентно са тим да постоји реалан број $M \geq 0$ такав да је $|a_n| \leq M$ за све $n \in \mathbb{N}$.

Пример: Низ $a_n = \frac{1}{n}$ је строго опadaјући, јер за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $n+1 > n$, па зато и $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ тј. $a_{n+1} < a_n$. Он је ограничен одозго бројем 1 (и сваким реалним бројем већим од 1), јер је $n \geq 1$, па је $a_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1$ за све $n \in \mathbb{N}$, а такође је и ограничен одоздо бројем 0 (као и сваким негативним бројем), јер за све $n \in \mathbb{N}$ је $\frac{1}{n} > 0$ као количник два позитивна броја.

Пример: Низ $b_n = n$ је строго растући, јер за свако $n \in \mathbb{N}$ је $n+1 > n$ тј. $b_{n+1} > b_n$. Он је ограничен одоздо, на пример, бројем 0, јер је $b_n = n > 0$ за све $n \in \mathbb{N}$. Међутим, он није ограничен одозго, јер од раније знамо да не постоји реалан број M који је већи или једнак од свих природних бројева, па самим тим није ни ограничен.

Пример: Нека је низ (c_n) дат са $c_n = (-1)^n$. Приметимо да је

$$c_n = \begin{cases} -1, & n \text{ је непарно;} \\ 1, & n \text{ је парно.} \end{cases}$$

Овај низ је зато евидентно одозго ограничен бројем 1, а одоздо бројем -1 . Међутим, није опadaјући, јер за непарне $n \in \mathbb{N}$ не важи $c_{n+1} \leq c_n$, а није ни растући, јер за парне $n \in \mathbb{N}$ не важи $c_{n+1} \geq c_n$. Дакле, низ (c_n) није монотон.

Приметимо да уколико је (a_n) растући низ, тада је $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$, па је он ограничен

одоздо са a_1 . Аналогно, уколико је (a_n) опадајући низ, тада је $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$, па је он ограничен одозго са a_1 .

Један од најважнијих појмова везаних за низове јесте њихова конвергенција, односно њихова гранична вредност или лимес, па ћемо их сада дефинисати и надаље их детаљно проучавати.

Надаље ћемо са $\overline{\mathbb{R}}$ означавати проширени скуп реалних бројева тј. $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Дефиниција: Нека је $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. Под ε -околином тачке a подразумевамо отворени интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, док под отвореном околином или краће – околином тачке a подразумевамо било који отворени интервал (α, β) такав да $a \in (\alpha, \beta)$. Ако је U_a нека отворена околина тачке a тада скуп $\mathring{U}_a = U_a \setminus \{a\}$ називамо пробушеном околином ове тачке.

Под околином тачке $-\infty$ подразумевамо било који интервал $(-\infty, b)$, док под околином тачке $+\infty$ подразумевамо било који интервал $(b, +\infty)$ за $b \in \mathbb{R}$.

Дефиниција: Нека је (a_n) реалан низ. Кажемо да је број $L \in \mathbb{R}$ његова *гранична вредност* или његов *лимес* уколико важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \ n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

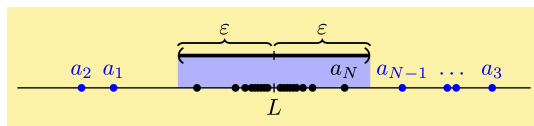
што се може записати и као

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \ |a_n - L| < \varepsilon$$

или

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \ a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

То означавамо са $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. Дакле, реалан број L је лимес низа (a_n) ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји индекс n_0 такав да сви чланови низа почев од n_0 -тог припадају ε -околини тачке a , односно само првих $n_0 - 1$ чланова може (али не мора) бити ван ове околине. На следећој слици можемо видети илустрацију ове дефиниције (при чему је уместо n_0 за индекс коришћена ознака N).



Такође, тада кажемо и да низ (a_n) конвергира (или тежи) ка L и такав низ називамо конвергентним.

Уколико низ није конвергентан, кажемо да дивергира, односно да је дивергентан. Код дивергентних низова разликујемо два типа. Уколико важи

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \ a_n > M \quad \text{тј.}$$

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \ a_n \in (M, +\infty),$$

кажемо да низ (a_n) одређено дивергира ка $+\infty$ и то пишемо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. Слично, уколико је

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \ a_n < M \quad \text{тј.}$$

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \ a_n \in (-\infty, M),$$

кажемо да низ (a_n) одређено дивергира ка $-\infty$ и пишемо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Уколико низ дивергира, а не дивергира одређено, кажемо да он неодређено дивергира.

Пример: Нека је $a \in \mathbb{R}$ и (a_n) низ такав да је $a_n = a$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Тада је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. То можемо доказати по дефиницији. За дато $\varepsilon > 0$ треба наћи $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за свако $n \geq n_0$ важи $|a_n - a| < \varepsilon$. Међутим, за свако $n \in \mathbb{N}$ је $|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$, па можемо узети $n_0 = 1$ и тиме је доказ завршен.

Урадићемо сада пар задатака у којима ћемо по дефиницији испитивати конвергенцију низова.

1. Доказати да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2$.

Решење: Означимо овај низ са $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Доказујемо да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ тј. да важи $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) |a_n - 2| < \varepsilon$. Нека је зато $\varepsilon > 0$ произвољно. Циљ је да нађемо $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за све $n \geq n_0$ важи $|a_n - 2| < \varepsilon$. Како је $|a_n - 2| = \left| \frac{2n+1}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n+1-2(n+2)}{n+2} \right| = \left| \frac{-3}{n+2} \right| = \frac{3}{n+2}$, то је $|a_n - 2| < \varepsilon$ еквивалентно са $\frac{3}{n+2} < \varepsilon$, што је даље еквивалентно са $n+2 > \frac{3}{\varepsilon}$, односно са $n > \frac{3}{\varepsilon} - 2$. За n_0 ћемо узети први природан број који је већи од $\frac{3}{\varepsilon} - 2$. Уколико је $\frac{3}{\varepsilon} - 2 < 0$, можемо узети $n_0 = 1$, док уколико је $\frac{3}{\varepsilon} - 2 \geq 0$, узећемо $n_0 = \left[\frac{3}{\varepsilon} - 2 \right] + 1$. На тај начин смо обезбедили да је $n_0 > \frac{3}{\varepsilon} - 2$, па ће и за све $n \geq n_0$ бити $n > \frac{3}{\varepsilon} - 2$, односно $|a_n - 2| < \varepsilon$. То значи да овај низ конвергира ка 2 тј. да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2$.

Коментар: Нисмо морали да узмемо за n_0 баш први (односно најмањи) природан број који је већи од $\frac{3}{\varepsilon} - 2$, већ је то могао бити било који природан број са тим својством. Важно је само да за све природне бројеве n почев од n_0 важи жељена неједнакост.

2. Доказати да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3}{n} = +\infty$.

Решење: Означимо са $a_n = \frac{n^2+3}{n}$. Доказујемо да овај низ одређено дивергира ка $+\infty$ тј. да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, односно $(\forall M \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) a_n > M$. Нека је зато $M \in \mathbb{R}$ произвољно. Тражимо $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за све $n \geq n_0$ важи $a_n > M$ тј. $\frac{n^2+3}{n} > M$. Приметимо да је $\frac{n^2+3}{n} = n + \frac{3}{n} > n + 0 = n$, па ако обезбедимо да је $n > M$, биће и $a_n = \frac{n^2+3}{n} > M$. Дакле, за n_0 можемо узети први природан број већи од M . Формално, за $M < 0$ узимамо $n_0 = 1$, а за $M \geq 0$ ћемо узети $n_0 = [M] + 1$. За овако одабрано n_0 је $n_0 > M$, па ће и за све $n \geq n_0$ бити $n > M$ и самим тим $a_n = n + \frac{3}{n} > M$. Овим смо доказали да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3}{n} = +\infty$.

3. Доказати да низ $c_n = (-1)^n$ дивергира.

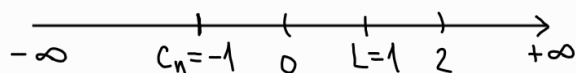
Решење: Претпоставимо супротно тј. нека је $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L \in \mathbb{R}$. Размотрићемо три случаја у зависности од тога шта може бити број L и доказати да ниједан од њих није могућ.

1° $L = 1$

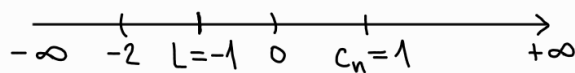
Пошто је $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$, знамо да за свако $\varepsilon > 0$ постоји индекс $n_0 \in \mathbb{N}$ такав да за све $n \geq n_0$ важи $c_n \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$. Како су чланови низа (c_n) бројеви -1 и 1 , наизменично, и свакако је $1 \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, идеја нам је да одаберемо довољно мало $\varepsilon > 0$ такво да $-1 \notin (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$. Узмимо зато, на пример, $\varepsilon = 1$. Као што смо малопре рекли, из чињенице да је $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$ добијамо да постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да $c_n \in (0, 2)$ за све $n \geq n_0$. Међутим, ово није могуће, јер постоји непаран природан број n такав да је $n \geq n_0$ (рецимо $n = 2n_0 + 1$), а онда је $c_n = -1 \notin (0, 2)$. Дobili смо контрадикцију у овом случају, па не може бити $L = 1$.

2° $L = -1$

Овај случај се решава аналогно као претходни. Из чињенице да је $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -1$, знамо да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за свако $n \geq n_0$ важи $c_n \in (-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon)$. Одабиром $\varepsilon = 1$ имамо да постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за све $n \geq n_0$ важи $c_n \in (-2, 0)$. Међутим, то није могуће, јер постоји парно n које је веће од n_0 (рецимо, $n = 2n_0$) за које је $c_n = 1 \notin (-2, 0)$. Дакле, ни овај случај није могућ.



Илустрација првог случаја
($n = 2n_0 + 1$)

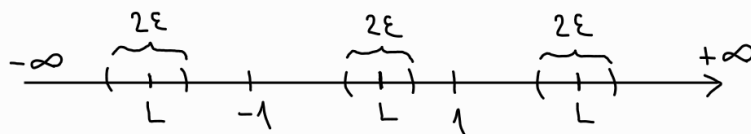


Илустрација другог случаја
($n = 2n_0$)

3° $-1 \neq L \neq 1$

И овај случај се испитује слично као претходна два. Пошто је $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$, за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за свако $n \geq n_0$ важи $c_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Међутим, било да је $L < -1$, $L \in (-1, 1)$ или $L > 1$, можемо одабрати довољно мало $\varepsilon > 0$ такво да ни -1 ни 1 не припадају околини $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Али, онда за све $n \in \mathbb{N}$ важи да $c_n \notin (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, што је у контрадикцији са горњим закључком да сви чланови низа (c_n) почев од индекса n_0 припадају околини $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Према томе, ниједан од случајева није могућ, па низ (c_n) дивергира.



Илустрација трећег случаја

Навешћемо сада неколико теорема са предавања које ће нам бити од користи у задацима.

Теорема: Уколико низ (a_n) има граничну вредност, она је јединствена. Другим речима, ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_2$, мора бити $L_1 = L_2$.

Теорема: Сваки конвергентан низ је ограничен. Последишно, сваки неограничен низ је дивергентан. Обрнуто не мора да важи што видимо на примеру низа $a_n = (-1)^n$ који је ограничен, али није конвергентан.

Теорема: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.

Доказ: Имамо да је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 &\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad ||a_n| - 0| < \varepsilon \\ &\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad ||a_n|| < \varepsilon \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad |a_n| < \varepsilon \\ &\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad |a_n - 0| < \varepsilon \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \end{aligned}$$

У претходном ланцу еквиваленција, кључна је била чињеница да је $|a_n| \geq 0$, па је зато $||a_n|| = |a_n|$.

Коментар: Генерално, за било које $L \in \mathbb{R}$ важи импликација $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |L|$. Међутим, у супротном смеру ова импликација не важи. Пример за то је низ $a_n = (-1)^n$ за који је $|a_n| = |(-1)^n| = 1$, па је $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$, док $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ уопште не постоји.

Теорема: Нека су (a_n) и (b_n) два конвергентна низа, $\lambda \in \mathbb{R}$ произвољно и нека је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L_2$. Тада су и низови $(a_n + b_n)$, (λa_n) , $(a_n b_n)$ такође конвергентни и важи $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = L_1 + L_2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda L_1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = L_1 L_2$. Уколико је $L_2 \neq 0$, тада је и низ $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ конвергентан и важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2}$.

У претходној теореме смо видели како лимес може проћи кроз основне рачунске операције када је реч о конвергентним низовима. Међутим, лимес може проћи кроз основне рачунске операције и у појединим случајевима када неки од низова одређено дивергира или када низ у имениоцу тежи нули. На пример, ако су (a_n) и (b_n) два низа таква да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, тада је $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$. Ову чињеницу краће записујемо као $a + (+\infty) = +\infty$ знајући да је ту реч о лимесу збира два низа од којих један тежи ка $a \in \mathbb{R}$, а други ка $+\infty$. Притом, уколико низ (a_n) конвергира ка a , а сви његови чланови су већи или једнаки од a , користимо запис $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a+$, док уколико су сви чланови овог низа мањи или једнаки од a , можемо писати $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a-$. У складу са оваквим начином записивања у наредном тврђењу наводимо како се константе сабирају, одузимају, множе и деле са бесконачностима и са нулом кад год се то може одредити.

Теорема: Нека су $a > 0$ и $b < 0$ реални бројеви. Тада важи

$$\begin{aligned} +\infty \pm a &= +\infty, \quad +\infty \pm b = +\infty, \quad -\infty \pm a = -\infty, \quad -\infty \pm b = -\infty, \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \\ (+\infty) \cdot a &= +\infty, \quad (+\infty) \cdot b = -\infty, \quad (-\infty) \cdot a = -\infty, \quad (-\infty) \cdot b = +\infty, \quad \frac{a}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{b}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{+\infty}{a} = +\infty, \quad \frac{+\infty}{b} = -\infty, \\ \frac{-\infty}{a} &= -\infty, \quad \frac{-\infty}{b} = +\infty, \quad \frac{a}{0+} = +\infty, \quad \frac{a}{0-} = -\infty, \quad \frac{b}{0+} = -\infty, \quad \frac{b}{0-} = +\infty, \quad \frac{0+}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{0-}{\pm\infty} = 0, \\ \frac{+\infty}{0+} &= +\infty, \quad \frac{+\infty}{0-} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{0+} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{0-} = +\infty. \end{aligned}$$

Међутим, уколико су два низа (a_n) и (b_n) таква да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, не можемо унапред знати да ли постоји и колико износи $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ у шта ћемо се касније уверити у задацима. Другим речима, не знамо унапред да израчунамо $(+\infty) - (+\infty)$. Зато ћемо такве изразе називати неодређеним изразима.

Изрази облика $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, 1^∞ , ∞^0 , 0^0 су неодређени изрази и када се они јаве приликом рачунања неког лимеса, морамо помоћу погодних трансформација и тврђења да их сведемо на неке од одређених израза из претходне две теореме.

Теорема: Нека је $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 0; \\ 1, & \alpha = 0; \\ 0, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Теорема: Нека је $q \in \mathbb{R}$ и $a_n = q^n$ геометријски низ. Тада важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} +\infty, & q > 1; \\ 1, & q = 1; \\ 0, & q \in (-1, 1); \end{cases}$$

док у случају $q \leq -1$ овај низ неодређено дивергира.

Сада ћемо прећи на задатке и показати како их користећи претходно наведене теореме можемо једноставније решавати у поређењу са прва три задатка која смо морали да радимо по дефиницији.

4. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+2}$.

Решење: Приметимо да смо овај лимес по дефиницији израчунали у првом задатку. Међутим, сада је идеја да користећи позната тврђења будемо ефикаснији. За почетак можемо видети да

је тражени лимес неодређеног облика $\frac{\infty}{\infty}$, јер је $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 1) = 2 \cdot (+\infty) + 1 = +\infty + 1 = +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + 2) = +\infty + 1 = +\infty$. Зато ћемо га прво трансформисати и ту је стандардна идеја да и у бројиоцу и у имениоцу извучемо „најјачи“ члан односно онај највећег степена (који „најбрже“ тежи ка ∞). И у бројиоцу и у имениоцу тај члан је n , па имамо да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2 + \frac{1}{n})}{n(1 + \frac{2}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{2 + \frac{1}{+\infty}}{1 + \frac{2}{+\infty}} = \frac{2 + 0}{1 + 0} = 2.$$

Дакле, кључ је био у извлачењу „најјачих“ чланова у бројиоцу и имениоцу и њиховом скраћивању, јер смо на тај начин почетни неодређени облик $\frac{\infty}{\infty}$ трансформисали у израз у коме се јављају само одређени облици и лако довршили задатак. Ово је универзална идеја и можемо је користити кад год се ради о лимесу количника два полинома, али и не нужно полинома, већ изрази који теже ка ∞ . Демонстрираћемо ту идеју у још два задатка пре него што изведемо генерални закључак када је реч о лимесу количника два полинома.

5. (Септембар 1 2024) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 4n^2 + 1}{5n^3 + 3n + n^4}$.

Решење: Имамо да је $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^3 - 4n^2 + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(2 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3} \right)$. Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3} \right) = 2 - \frac{4}{+\infty} + \frac{1}{+\infty} = 2 - 0 + 0 = 2$, то је $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^3 - 4n^2 + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(2 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3} \right) = +\infty \cdot 2 = +\infty$. На сличан начин добијамо да је и $\lim_{n \rightarrow \infty} (5n^3 + 3n + n^4) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(\frac{5}{n} + \frac{3}{n^3} + 1 \right) = +\infty \cdot \left(\frac{5}{+\infty} + \frac{3}{+\infty} + 1 \right) = +\infty \cdot (0 + 0 + 1) = +\infty \cdot 1 = +\infty$, па је лимес који рачунамо неодређеног облика $\frac{\infty}{\infty}$. Поново ћемо извлачити „најјаче“ сабирка и из бројиоца и имениоца. У бројиоцу је то n^3 , а у имениоцу n^4 , па ћемо управо њих извући и скратити их. Имамо да је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 4n^2 + 1}{5n^3 + 3n + n^4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(2 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3} \right)}{n^4 \left(\frac{5}{n} + \frac{3}{n^3} + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3}}{n \left(\frac{5}{n} + \frac{3}{n^3} + 1 \right)} = \\ &= \frac{2 - \frac{4}{+\infty} + \frac{1}{+\infty}}{+\infty \cdot \left(\frac{5}{+\infty} + \frac{3}{+\infty} + 1 \right)} = \frac{2 - 0 + 0}{+\infty \cdot (0 + 0 + 1)} = \frac{2}{+\infty \cdot 1} = \frac{2}{+\infty} = 0. \end{aligned}$$

6. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^3 + n^2 - 1}{n^2 - n + 4}$.

Решење: И овај лимес је облика $\frac{\infty}{\infty}$, јер је $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2n^3 + n^2 - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(-2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \right) = +\infty \cdot (-2 + 0 - 0) = +\infty \cdot (-2) = -\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n + 4) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} \right) = +\infty \cdot (1 - 0 + 0) = +\infty \cdot 1 = +\infty$. Извлачењем монома n^3 из бројиоца и n^2 из имениоца (као „најјачих“ чланова) и њиховим скраћивањем имамо да је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^3 + n^2 - 1}{n^2 - n + 4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(-2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \right)}{n^2 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(-2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \right)}{1 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}} = \\ &= \frac{+\infty \cdot \left(-2 + \frac{1}{+\infty} - \frac{1}{+\infty} \right)}{1 - \frac{1}{+\infty} + \frac{4}{+\infty}} = \frac{+\infty \cdot (-2 + 0 - 0)}{1 - 0 + 0} = \frac{+\infty \cdot (-2)}{1} = \frac{-\infty}{1} = -\infty. \end{aligned}$$

На основу претходних задатака можемо увидети принцип по коме израчунавамо

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_1 n + b_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k \left(a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \dots + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k} \right)}{n^m \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + \dots + \frac{b_1}{n^{m-1}} + \frac{b_0}{n^m} \right)},$$

где су $k, m \in \mathbb{N}$ и $a_k \neq 0 \neq b_m$ реални бројеви. Приметимо прво да у заградама и у бројиоцу и имениоцу сви чланови осим првих теже нули. Разликујемо случајеве:

1° Ако је $k = m$, након скраћивања разломка у лimesу са n^k лако видимо да је $L = \frac{a_k}{b_m}$.

2° Ако је $k < m$, након скраћивања разломка у лimesу са n^k добијамо да је $L = 0$.

3° Ако је $k > m$, након скраћивања разломка у лimesу са n^m добијамо да је $L = +\infty$ ако су a_k и b_m истог знака, док је иначе $L = -\infty$.

7. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$.

Решење: Сетимо се да смо раније помоћу математичке индукције извели формулу за збир квадрата првих n природних бројева, па ћемо је овде искористити како бисмо упростили израз чији лimes рачунамо. Зато је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{6n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6} = \frac{2 + \frac{3}{+\infty} + \frac{1}{+\infty}}{6} = \frac{2 + 0 + 0}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

8. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} \right)$.

Решење: Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n + 1} = \sqrt{+\infty + (+\infty) + 1} = \sqrt{+\infty} = +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 - n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = +\infty \cdot \sqrt{1 - 0 + 0} = +\infty$, то се у овом лimesу јавља неодређени израз $(+\infty) - (+\infty)$. Да бисмо га елиминисали, разлику ова два корена која се појављују у лimesу ћемо помножити и поделити са њиховим збиром како бисмо направили разлику квадрата у бројоцу (нешто слично као кад рационалишемо разломак). Зато је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} \right) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + n + 1) - (n^2 - n + 1)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + 0 + 0} + \sqrt{1 - 0 + 0}} = \frac{2}{1 + 1} = 1. \end{aligned}$$

Коментар: У горњем рачуну смо користили да је $\sqrt{n^2} = n$, јер је n позитивно као природан број. Генерално, важи $\sqrt{x^2} = |x|$ за све $x \in \mathbb{R}$.

9. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$.

Решење: Овде имамо n сабирака, а n тежи $+\infty$, па не можемо лimesом проћи кроз ову суму, јер нема коначан (и константан) број сабирака. Зато би било идеално уколико бисмо могли да је поједноставимо и потом лакше израчунамо овај лimes. Сетимо се да смо помоћу математичке индукције извели формулу за ову суму (а извели смо је и без коришћења математичке индукције). Када то искористимо, имамо да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

10. Нека је $q \in (-1, 1)$ реалан број. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q + q^2 + \dots + q^n)$.

Решење: И овде се под лимесом јавља сума која има $n + 1$ сабирака, а n тежи $+\infty$, па би најпогодније било средити је и тек онда израчунати њен лимес. Ово је у ствари сума геометријског низа и када смо радили принцип математичке индукције смо на два начина показали да је $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Користећи то добијамо да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q + q^2 + \dots + q^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Притом смо користили познато тврђење за геометријски низ да је $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, па самим тим и $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$ када је $q \in (-1, 1)$.

Коментар: Конвергенција и лимес низа не зависе од првих неколико (коначно много) чланова тог низа. Другим, речима, ако је (a_n) неки конвергентан низ који тежи ка L , тада и додавањем коначно много чланова на почетак овог низа или одбацивањем првих неколико његових чланова опет добијамо низ који конвергира ка броју L . Слично, ако је (a_n) дивергентан, додавањем на почетак или одбацивањем с почетка коначно много чланова добићемо низ који такође дивергира. Зато смо у овом задатку користили да низ (q^{n+1}) , чији су елементи редом $q^2, q^3, \dots$ тежи нули, јер је он добијен од „класичног“ геометријског низа (q^n) , чији су елементи $q, q^2, q^3, \dots$, одбацивањем првог члана, а знали смо да је $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

11. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+2}}{2^n + 3^n}$.

Решење: Како сви сабирци и у бројиоцу и у имениоцу (као геометријски низови код којих је $q = 2 > 1$ односно $q = 3 > 1$) теже $+\infty$, то је овај лимес облика $\frac{\infty}{\infty}$. Зато нам је поново идеја извучемо „најјаче“ чланове у бројиоцу и имениоцу па скратимо шта можемо. У бројиоцу је то 3^{n+2} , јер има већу основу од 2^{n+1} , док је у имениоцу то 3^n . Зато је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+2}}{2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2} \left(\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} + 1 \right)}{3^n \left(\frac{2^n}{3^n} + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^2 \left(\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} + 1 \right)}{\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 0 + 1 \right)}{0 + 1} = \frac{9}{1} = 9,$$

при чему смо користили да геометријски низови $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ односно $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ теже нули јер $\frac{2}{3} \in (-1, 1)$.

Када смо се упознали са основним идејама и техникама за израчунавање лимеса, навешћемо још пар теорема које такође могу бити врло корисне у задацима.

Теорема: Нека су (a_n) и (b_n) два низа која конвергирају или одређено дивергирају (дакле, имају лимес у скупу $\mathbb{R}$). Ако постоји број $n_0 \in \mathbb{N}$ такав да за свако $n \geq n_0$ важи $a_n \leq b_n$, тада је и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Теорема [о два полицајца]: Нека су (a_n) , (b_n) и (c_n) низови за које постоји број $n_0 \in \mathbb{N}$ такав да важи $a_n \leq b_n \leq c_n$ за све $n \geq n_0$. Ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L \in \mathbb{R}$, тада је и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

Теорема о два полицајца ће нам бити посебно погодна када рачунамо лимес неког низа који је задат помоћу неког незгодног израза; најчешће као сума променљивог броја сабирака која не може лепо да се среди као у седмом, деветом или десетом задатку. Тада ћемо пробати да нађемо два низа која ограничавају почетни низ одоздо односно одозго. Уколико та два низа теже ка истој вредности, тада ће и полазни низ такође тежити ка њој.

Наводимо и једну једноставну последицу теореме о два полицајца коју ћемо такође користити.

Теорема: Нека је (a_n) низ који конвергира ка нули и (b_n) ограничен низ. Тада и низ $(a_n b_n)$

конвергира ка нули тј. важи $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$.

Теорема: Нека је $a > 0$ реалан број. Тада је $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Теорема: Важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

12. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2024n!)}{\sqrt{n}}$.

Решење: Оно што одмах можемо приметити је да је бројилац овог разломка ограничен низ, јер знамо да је $|\sin x| \leq 1$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Самим тим је и $|\sin(2024n!)| \leq 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Даље, имамо да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$, па је низ чији лимес рачунамо заправо производ једног ограниченог низа и једног низа који тежи нули. Зато је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2024n!)}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin(2024n!) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0.$$

13. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\cos n}}{n^2}$.

Решење: И овде можемо размишљати као у претходном задатку. Због чињенице да је $|\cos n| \leq 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$ имамо да је $-1 \leq \cos n \leq 1$, па је и $2^{-1} \leq 2^{\cos n} \leq 2^1$, односно $\frac{1}{2} \leq 2^{\cos n} \leq 2$ пошто је експоненцијална функција 2^x растућа (основа јој је већа од 1). То значи да је низ $2^{\cos n}$ ограничен. С друге стране, низ $\frac{1}{n^2}$ тежи нули, јер је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$, па је почетни низ производ једног ограниченог низа и једног низа који тежи нули, те је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\cos n}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^{\cos n} \cdot \frac{1}{n^2} \right) = 0.$$

14. (Јун 1 2024) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot (-1)^n}{n}$.

Решење: Раније смо видели да је низ $(-1)^n$ ограничен, јер је одоздо ограничен са -1 и одозго са 1 . Уз то је $\frac{1}{n}$ низ који тежи ка нули, јер је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = 0$, па је зато

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot (-1)^n}{n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left((-1)^n \cdot \frac{1}{n} \right) = 3 \cdot 0 = 0.$$

Коментар: Приметимо да је низ $\frac{3 \cdot (-1)^n}{n}$ конвергентан иако се у њему јавља низ $(-1)^n$ за који смо раније установили да није конвергентан. Зато морамо у задацима бити опрезни и не журити са закључком да неки низ дивергира само јер се у њему појављује неки други дивергентан низ.

15. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.

Решење: Означимо са $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. За разлику од седмог, деветог и десетог задатка, овде не можемо ефикасно сумирати израз чији лимес тражимо тј. не можемо наћи експлицитну формулу за a_n , али га можемо ограничити одозго и одоздо. Приметимо прво да у суми којом је задатак члан a_n има n сабирака (јер први сабирак има 1 под кореном у имениоцу, следећи има 2 и тако даље, последњи сабирак има n у имениоцу). Највећи сабирак у том изразу је $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ (јер има најмањи именилац), а најмањи је $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ (јер има највећи именилац). Дакле, сваки од n сабирака је већи или једнак од $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, па је та сума тј. a_n веће или једнако од $n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$. Слично, пошто је сваки од n сабирака мањи или једнак од $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, то је $a_n \leq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Зато, за свако $n \in \mathbb{N}$ имамо да је

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Како је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1,$$

као и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1,$$

по теореме о два полицајца следи и да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

16. (Септембар 1 2024) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ако постоји, где је $b_n = \frac{1}{\sqrt[6]{n^6 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[6]{n^6 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[6]{n^6 + 2n}}$.

Решење: Сличним резонувањем као у претходном задатку видимо (из именилаца) да у изразу за b_n има $2n$ сабирака и да је највећи међу њима $\frac{1}{\sqrt[6]{n^6 + 1}}$, а најмањи $\frac{1}{\sqrt[6]{n^6 + 2n}}$. Зато за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$2n \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{n^6 + 2n}} \leq b_n \leq 2n \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{n^6 + 1}} \quad \text{тј.}$$

$$\frac{2n}{\sqrt[6]{n^6 + 2n}} \leq b_n \leq \frac{2n}{\sqrt[6]{n^6 + 1}}.$$

Како је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt[6]{n^6 + 2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt[6]{n^6} \cdot \sqrt[6]{1 + \frac{2}{n^5}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n \cdot \sqrt[6]{1 + \frac{2}{n^5}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[6]{1 + \frac{2}{n^5}}} = \frac{2}{\sqrt[6]{1 + 0}} = 2 \quad \text{и}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt[6]{n^6 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt[6]{n^6} \cdot \sqrt[6]{1 + \frac{1}{n^6}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n \cdot \sqrt[6]{1 + \frac{1}{n^6}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[6]{1 + \frac{1}{n^6}}} = \frac{2}{\sqrt[6]{1 + 0}} = 2,$$

на основу теореме о два полицајца закључујемо да је и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$.

17. Нека је $k \in \mathbb{N}$ природан број и $a_1, a_2, \dots, a_k$ позитивни реални бројеви. Тада је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n} = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}.$$

Решење: Нека је $M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Тада је $a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n \geq M^n$ (један од бројева $a_1, a_2, \dots, a_k$ је баш једнак M , а остали су позитивни) и $a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n \leq kM^n$ (сви $a_1, a_2, \dots, a_k$ су мањи или једнаки од M , па су и сви $a_1^n, a_2^n, \dots, a_k^n$ мањи или једнаки од M^n). Дакле, за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$M^n \leq a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n \leq kM^n,$$

па након узимања n -тог корена од све три стране (чиме се не мења знак, јер је n -ти корен растућа функција) добијамо

$$M \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n} \leq \sqrt[n]{k} \cdot M.$$

Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} M = M$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{k} \cdot M) = 1 \cdot M = M$ (на основу горње теореме), то је по теореме о два полицајца и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n} = M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$.

Коментар: Резултат овог задатка можемо убудуће на вежбама, а и на испитима, користити као познат.

18. (Септембар 2 2024) Нека је низ (b_n) дат са $b_n = \frac{4^n + 6^n}{3^n + 7^n}$. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n}$ уколико постоје.

Решење: Као геометријски низови са основом већом од 1, оба сабирка у бројоцу и оба у

имениоцу теже $+\infty$, па се у лимесу $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ јавља неодређени израз $\frac{\infty}{\infty}$. Извући ћемо 6^n у бројиоцу и 7^n у имениоцу као „најјаче” чланове и добити

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 6^n}{3^n + 7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n \left(\frac{4^n}{6^n} + 1 \right)}{7^n \left(\frac{3^n}{7^n} + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n \left(\left(\frac{4}{6} \right)^n + 1 \right)}{7^n \left(\left(\frac{3}{7} \right)^n + 1 \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n(0+1)}{7^n(0+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n}{7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{7} \right)^n = 0,\end{aligned}$$

при чему смо у рачуну користили да низови $\left(\frac{4}{6}\right)^n$, $\left(\frac{3}{7}\right)^n$ и $\left(\frac{6}{7}\right)^n$ теже нули као геометријски низови са основама између -1 и 1 .

Даље, како је $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, то је лимес $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^{\frac{1}{n}}$ неодређеног облика 0^0 , па га не можемо непосредно израчунати, већ га прво морамо трансформисати. Користећи резултат претходног задатка имамо да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4^n + 6^n}{3^n + 7^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{4^n + 6^n}}{\sqrt[n]{3^n + 7^n}} = \frac{\max\{4, 6\}}{\max\{3, 7\}} = \frac{6}{7}.$$

Пре него што урадимо наредни задатак, подсетимо се једног тврђења са предавања.

Теорема: За свака два реална броја a и b таква да је $a < b$ постоје рационалан број $q \in \mathbb{Q}$ и ирационалан број $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ између њих тј. такви да је $a < q < b$ и $a < r < b$.

Узастопном применом ове теореме можемо закључити да за свака два реална броја a и b таква да је $a < b$ постоји бесконачно много рационалних бројева између њих, а такође и бесконачно много ирационалних бројева између њих.

19. Нека је $x \in \mathbb{R}$ произвољан реалан број. Доказати да постоји низ (a_n) чији су сви чланови рационални такав да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$.

Решење: Нека је $a_n = \frac{[nx]}{n}$, где је у бројиоцу са $[nx]$ означен цео део броја nx . Како је $[nx] \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$, то је $a_n \in \mathbb{Q}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Да бисмо испитали конвергенцију низа a_n , ограничићемо га одоздо и одозго користећи познате неједнакости за функцију цео део. Наиме, како је $nx - 1 < [nx] \leq nx$, то је и $\frac{nx-1}{n} < \frac{[nx]}{n} \leq \frac{nx}{n}$, односно $x - \frac{1}{n} < a_n \leq x$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Из $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{1}{n}\right) = x - 0 = x$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x = x$ и теореме о два полицајца имамо да је и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$, па овај низ (a_n) испуњава тражена својства.

Дакле, сваком реалном броју (био он рационалан или ирационалан) се може „прићи” помоћу рационалних бројева. Такође, уз малу модификацију конструкције у претходном задатку може се доказати и да се произвољном реалном броју може „прићи” помоћу ирационалних бројева.

Монотони и ограничени низови.

Број e

Раније смо установили како да би низ био конвергентан, он мора бити ограничен. Међутим, услов да је низ монотон није неопходан за његову конвергенцију. На пример, доказали смо да низ $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ конвергира ка нули, али он није монотон, јер су његови чланови наизменично негативни, па позитивни. Међутим, уколико је низ ограничен и монотон, биће и конвергентан. Поновићемо најпре неколико теорема са предавања које ће нам бити од велике користи приликом рада са монотоним низовима.

Теорема: Нека је низ (a_n) монотон и ограничен. Тада је он конвергентан тј. постоји број $L \in \mathbb{R}$ такав да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Сетимо се да смо раније већ закључили да је растући низ ограничен одозго својим првим чланом, док је опадајући низ ограничен одозго својим првим чланом. Зато можемо претходну теорему формулисати и на следећи начин.

Теорема: Нека је (a_n) растући низ који је ограничен одозго. Тада он конвергира тј. постоји $L \in \mathbb{R}$ такав да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. Уочимо скуп $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Тада је $\inf A = a_1$ и $\sup A = L$.

Нека је сада (a_n) опадајући низ који је ограничен одоздо. Тада он конвергира тј. постоји $L \in \mathbb{R}$ такав да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. Уочимо скуп $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Тада је $\sup A = a_1$ и $\inf A = L$.

Наредна теорема говори о томе шта је гранична вредност монотоног низа који није ограничен.

Теорема: Уколико је низ (a_n) растући и није ограничен одозго, тада је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. Уколико је низ (a_n) опадајући и није ограничен одоздо, тада је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Дакле, сваки монотон низ има лимес у $\overline{\mathbb{R}}$, а да ли је он коначан или бесконачан зависи од тога да ли је тај низ ограничен.

Теорема: Низ $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ је строго растући и одозго ограничен низ. Зато је он конвергентан и његову граничну вредност означавамо са e . Број e називамо *Ојлеровим бројем* и за њега важи $e = 2,718281828\dots$, па самим тим и $e \in (2, 3)$. Низ $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ је строго опадајући и одоздо ограничен низ. Самим тим је и он конвергентан и он такође конвергира ка e . Дакле,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Напомена: Надаље ћемо уместо $\log_e x$ писати $\ln x$.

Дакле, за свако $n \in \mathbb{N}$ имамо да је $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, па логаритмовањем (са основом e) добијамо да је $n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Одатле је $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ и $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$, односно важи неједнакост

$$\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$.

Пређимо сада на задатке.

1. Нека је $a \geq 0$ реалан број. Доказати да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Решење: Пре свега, за $a \leq 1$ се тврђење задатка лако доказује. Заиста, за $0 \leq a < 1$ је $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$

и $\lim_{n \rightarrow \infty} n! = +\infty$, па је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = \frac{0}{+\infty} = 0$, док за $a = 1$ имамо да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = \frac{1}{+\infty} = 0$. Зато надаље

можемо претпоставити да је $a > 1$. Означимо са $x_n = \frac{a^n}{n!}$. Приметимо прво да је $\frac{a^n}{n!} > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па је овај низ ограничен одоздо нулом. Сада ћемо испитати његову монотоност како бисмо могли да искористимо одговарајућу теорему. Зато упоређујемо $x_n = \frac{a^n}{n!}$ и $x_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$. Имамо да је

$$x_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a \cdot a^n}{(n+1) \cdot n!} = \frac{a}{n+1} \cdot \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n+1} \cdot x_n.$$

Како је a фиксиран реалан број, то ће $n+1$ постати веће од a почев од неког $n_0 \in \mathbb{N}$. Прецизније за све $n \geq n_0 = [a]$ је $n+1 \geq [a] + 1 > a$, па је тада и $\frac{a}{n+1} < 1$. Сада, користећи да је $x_n > 0$ за све $n \geq n_0$ имамо да је $x_{n+1} = \frac{a}{n+1} \cdot x_n < 1 \cdot x_n = x_n$, што значи да је низ (x_n) опадајући почев од n_0 -тог члана. Пошто је овај низ одоздо ограничен и опадајући од неког члана (што је довољно, јер смо рекли да конвергенција низа не зависи од првих коначно много његових чланова), на основу теореме закључујемо да је он конвергентан тј. да је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L \in \mathbb{R}$. Још треба одредити број L . То ћемо урадити тако што се вратимо на једнакост $x_{n+1} = \frac{a}{n+1} \cdot x_n$ и узмемо лимес од обе стране. Тада је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{n+1} \cdot x_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = \frac{a}{+\infty} = 0$, имамо да је $L = 0 \cdot L$, одакле је $L = 0$. Према томе, заиста је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Коментар: Убудуће можемо приликом испитивања монотоности низа посматрати разлику $a_{n+1} - a_n$ и упоредити је са нулом како бисмо утврдили да ли је низ растући или опадајући. Такође, уколико су сви чланови низа позитивни, можемо посматрати и количник $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ и упоредити га са бројем 1, па у зависности одтога закључити да ли је низ растући или опадајући.

2. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$.

Решење: Урадићемо овај задатак на два начина. Први је помоћу теореме о два полицајца и мало је краћи, а други је помоћу теореме о монотонном и ограниченем низу како бисмо провежбали ту технику.

Први начин: Приметимо прво да је $\frac{n!}{n^n} > 0$ за све $n \in \mathbb{N}$. Такође имамо да је

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = \frac{1}{n}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. Дакле, за свако $n \in \mathbb{N}$ испуњено је $0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$, па како је $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, на основу теореме о два полицајца је и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Други начин: Означимо са $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Као у првом начину, одмах имамо да је $a_n > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па је овај низ одоздо ограничен нулом. Сада ћемо испитати његову монотоност, па упоређујемо чланове a_{n+1} и a_n . Пошто су они позитивни и у њима се јавља факторијел, посматраћемо количник $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ како би се факторијели скратили. Имамо да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)! \cdot n^n}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} = \frac{n! \cdot (n+1) \cdot n^n}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n < 1^n = 1.$$

Сада из $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ множењем обе стране неједнакости са позитивним a_n добијамо да важи $a_{n+1} < a_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$, те је овај низ строго опадајући. На основу теореме закључујемо да је он конвергентан, па постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$. Број L ћемо одредити тако што пустимо лимес у једнакости која повезује чланове a_{n+1} и a_n . Малопре смо извели да је $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$, па је $a_{n+1} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \cdot a_n$. Пуштањем лимеса на обе стране једнакости добијамо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n}{n+1} \right)^n \cdot a_n \right)$.

Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e},$$

то из горње једнакости имамо $L = \frac{1}{e} \cdot L$ тј. $L \left(1 - \frac{1}{e} \right) = 0$, а одатле коначно и $L = 0$. Дакле, важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

3. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$.

Решење: Означимо са $a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$. И овде размишљамо слично као у претходним задацима. Прво, свакако је $a_n > 0$ за све $n \in \mathbb{N}$, па је овај низ одоздо ограничен нулом. Можемо зато испитати његову монотоност упоређивањем израза $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ са бројем 1. Имамо да је за свако $n \in \mathbb{N}$ испуњено

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot (n!)^2}{((n+1)!)^2 \cdot n^n} = \frac{(n+1) \cdot (n+1)^n \cdot (n!)^2}{(n! \cdot (n+1))^2 \cdot n^n} = \frac{(n+1) \cdot (n+1)^n \cdot (n!)^2}{(n!)^2 \cdot (n+1)^2 \cdot n^n} = \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n. \end{aligned}$$

Како је $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e < 3$ и $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{3}$ за све $n \geq 2$, то је и $\frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$, односно $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ за свако $n \geq 2$. Након множења последње неједнакости са позитивним a_n добијамо $a_{n+1} < a_n$ за свако $n \geq 2$, па је низ (a_n) опадајући почев од другог члана. Од раније знамо и да је одоздо ограничен нулом, па је он по теорему и конвергентан и зато постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$. Из горње једнакости $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ имамо $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot a_n$, па ћемо на ову једнакост пустити лимес кад $n \rightarrow \infty$. Користећи $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$, добијамо $L = 0 \cdot e \cdot L = 0$, па је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$.

4. Нека је $c > 1$ реалан број и $k \in \mathbb{N}$ природан. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{c^n}$.

Решење: Означимо са $a_n = \frac{n^k}{c^n}$. Овај низ је свакако ограничен одоздо нулом, јер је $n^k > 0$ и $c^n > 0$ за све $n \in \mathbb{N}$. Испитаћемо још његову монотоност и зато ћемо посматрати количник $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ и, пошто су сви чланови овог низа позитивни, упоредити тај количник са бројем 1. Имамо да је

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^k}{c^{n+1}}}{\frac{n^k}{c^n}} = \frac{(n+1)^k \cdot c^n}{n^k \cdot c^{n+1}} = \frac{(n+1)^k}{n^k \cdot c} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^k \cdot \frac{1}{c} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^k \cdot \frac{1}{c}.$$

Даље, важи

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^k \cdot \frac{1}{c} \leq 1 \iff \left(1 + \frac{1}{n} \right)^k \leq c \iff 1 + \frac{1}{n} \leq \sqrt[k]{c} \iff \frac{1}{n} \leq \sqrt[k]{c} - 1 \iff n \geq \frac{1}{\sqrt[k]{c} - 1},$$

па за све $n \geq n_0 = \left\lceil \frac{1}{\sqrt[k]{c} - 1} \right\rceil + 1$ важи $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^k \cdot \frac{1}{c} \leq 1$ тј. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$. Дакле, низ (a_n) је опадајући почев од n_0 -тог члана, а знамо и да је ограничен одоздо, па зато постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$. Вратимо се на једнакост $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^k \cdot \frac{1}{c}$, односно $a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^k \cdot \frac{1}{c} \cdot a_n$ и пустимо да $n \rightarrow \infty$ на обе стране. Знајући да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^k = (1+0)^k = 1$, добијамо $L = 1 \cdot \frac{1}{c} \cdot L$ тј. $L \left(1 - \frac{1}{c} \right) = 0$. Пошто је $c > 1$, то је $1 - \frac{1}{c} \neq 0$, па мора бити $L = 0$. Овим смо доказали да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{c^n} = 0$.

Користећи тврђење претходног задатка може се извести и да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{c^n} = 0$ и за све реалне

бројеве $k > 0$ и $c > 1$, а потом помоћу тога и да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0$ за све реалне бројеве $a > 1$ и $k > 0$. Ми ћемо ова тврђења лакше извести касније када будемо обрађивали лимесе функција.

Дефиниција: Уколико за низове (a_n) и (b_n) важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, то означавамо са $a_n \ll b_n$ и кажемо да је низ (a_n) бесконачно мали у односу на низ (b_n) . Такође, кажемо и да је низ (a_n) асимптотски слабији од низа (b_n) , као и да је (b_n) асимптотски јачи од (a_n) .

Релација $\ll$ је транзитивна тј. уколико су (a_n) , (b_n) , (c_n) три низа таква да је $a_n \ll b_n$ и $b_n \ll c_n$, тада је и $a_n \ll c_n$.

На основу претходног знамо да важи следећа теорема.

Теорема (поредбена скала): Нека су $a > 1$, $k > 0$ и $c > 1$ реални бројеви. Тада је

$$\log_a n \ll n^k \ll c^n \ll n! \ll n^n \ll (n!)^2.$$

Са предавања знамо да сви низови из поредбене скале теже ка $+\infty$, па је њен значај управо у разрешавању неодређених израза. Сада када знамо који је тип низа од кога „јачи”, моћи ћемо увек „најјачи” члан да извучемо испред заграде и тако сведемо лимес на одређени облик.

5. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^3 n}{n}$.

Решење: Имамо да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^3 n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^3 n}{(\sqrt[3]{n})^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}} \right)^3.$$

На основу поредбене скале знамо да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{3}}} = 0$, па је и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^3 n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}} \right)^3 = 0^3 = 0$.

6. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{10} + \pi^n}$.

Решење: Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{10} + \pi^n) = +\infty$, то је лимес $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{10} + \pi^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{10} + \pi^n)^{\frac{1}{n}}$ неодређеног облика ∞^0 , па ћемо извући „јачи” члан испод корена како би нам остали само одређени изрази у лимесу. На основу поредбене скале знамо да је π^n асимптотски јачи од n^{10} , па је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{10} + \pi^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\pi^n \left(\frac{n^{10}}{\pi^n} + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \sqrt[n]{\frac{n^{10}}{\pi^n} + 1} = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{0 + 1} = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = \pi \cdot 1 = \pi.$$

7. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n + 5^n - 4n!}{n! + \sin(n^2)}$.

Решење: По поредбној скали имамо да је израз $n!$ асимптотски најјачи и у бројиоцу и у имениоцу, па ћемо га извући на оба места и потом скратити. Зато је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n + 5^n - 4n!}{n! + \sin(n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \left(\frac{\ln n}{n!} + \frac{5^n}{n!} - 4 \right)}{n! \left(1 + \frac{\sin(n^2)}{n!} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{n!} + \frac{5^n}{n!} - 4}{1 + \frac{\sin(n^2)}{n!}} = \frac{0 + 0 - 4}{1 + 0} = -4.$$

Притом смо на основу поредбене скале знали да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n!} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n!}$, док је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n^2)}{n!} = 0$, јер је низ $\sin(n^2)$ ограничен (са -1 одоздо и са 1 одозго), а низ $\frac{1}{n!}$ тежи нули, јер је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

8. Доказати да низ $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ конвергира.

Решење: Показаћемо да је овај низ монотон и ограничен, одакле ће следити тврђење задатка. Прво ћемо показати да је монотон и зато посматрамо разлику $a_{n+1} - a_n$ како би се што више сабирака међусобно скратило. Имамо да је

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n =$$

$$= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) = \frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Раније смо извели да је $\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ за све $n \in \mathbb{N}$, па одатле одмах закључујемо да је $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$, односно $a_{n+1} < a_n$ за све $n \in \mathbb{N}$. Дакле, овај низ је строго опадајући. Сада је потребно још да докажемо да је он ограничен одоздо и то ћемо урадити користећи поменућу неједнакост $\ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}$ за све $k \in \mathbb{N}$. Одатле за $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ редом добијамо

$$1 > \ln(1+1) = \ln 2, \quad \frac{1}{2} > \ln \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \ln \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{3} > \ln \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \ln \frac{4}{3}, \quad \dots, \quad \frac{1}{n} > \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n+1}{n},$$

а онда и

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} - \ln n = \\ &= \ln \left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n}\right) - \ln n = \ln(n+1) - \ln n > 0, \end{aligned}$$

јер је $\ln x$ растућа функција. Према томе, сви елементи овог низа су позитивни, па је он одоздо ограничен нулом. Заједно са претходним, то значи да је он конвергентан и да постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$.

Коментар: Да не би дошло до забуне, како смо у претходним задацима често имали ситуацију да је гранична вредност низа баш онај број којим га ограничимо одоздо односно одозго, нагласимо да овде број 0 није гранична вредност овог низа (иако само га одоздо ограничили нулом). У ствари, његову граничну вредност називамо *Ојлеровом константом* и обележавамо је са γ . Зато је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma = 0.577\dots$

9. Доказати да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = +\infty$.

Решење: Означимо са $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, а посматраћемо упоредо и низ из претходног задатка $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$. Како је $b_n = a_n + \ln n$ и знамо да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \gamma$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \ln(+\infty) = +\infty$, то је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + \ln n) = \gamma + (+\infty) = +\infty.$$

10. Одредити $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$.

Решење: Означимо са $c_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$. Као и раније када смо имали неку суму, и сада можемо пробати да је ограничимо помоћу њеног најмањег и највећег сабирака, а то су $\frac{1}{2n}$ и $\frac{1}{n+1}$, редом. Сума којом је дат члан c_n има n сабирака (први сабирак у имениоцу има $n+1$, други $n+2$, а последњи $n+n=2n$), па имамо да је $\frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{n}{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Међутим, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, па нам овде Теорема о два полицајца није од помоћи. Зато морамо да размишљамо на други начин.

Означимо $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ и $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ као у претходном задатку. Приметимо прво да је

$$c_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = b_{2n} - b_n,$$

а онда како је $b_n = a_n + \ln n$ и $b_{2n} = a_{2n} + \ln(2n)$, имамо да је $c_n = a_{2n} + \ln(2n) - (a_n + \ln n) = a_{2n} - a_n + \ln(2n) - \ln n = a_{2n} - a_n + \ln \frac{2n}{n} = a_{2n} - a_n + \ln 2$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Сада једноставно закључујемо да је $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_{2n} - b_n + \ln 2) = \gamma - \gamma + \ln 2 = \ln 2$, што је и требало израчунати.

Коментар: Низ (b_n) је конвергирао ка броју γ , па смо искористили познато тврђење са предавања да и његов подниз сачињен од чланова са парним индексима тј. подниз (b_{2n}) такође

конвергира ка броју γ . Убрзо ћемо се и на вежбама детаљније бавити поднизовима и тачкама нагомилавања низова.

Горе смо навели једно важно тврђење са предавања које каже да низ $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ конвергира ка Ојлеровом броју e . Приметимо да се у овом низу јавља неодређени облик 1^∞ кад $n \rightarrow \infty$. Управо та теорема (односно њене две последице које доле наводимо) ће нам помоћи приликом одређивања лимеса у којима се јавља баш тај неодређени облик.

Теорема: Нека су низови (a_n) и (b_n) такви да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$. Тада је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n}.$$

Теорема: Нека је низ (a_n) такав да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ и сви његови елементи су различити од нуле.

Тада је $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$.

11. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n}$.

Решење: Пошто је овај лимес евидентно неодређеног облика 1^∞ , идеја је да употребимо неку од претходне две теореме. Имамо да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{3}{n} \cdot 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right)^6.$$

Дакле, прво смо трансформисали израз под лимесом тако да се у загради као други сабирак појави $\frac{3}{n}$, а у изложивоцу његов реципрочни низ $\frac{n}{3}$ да би све изгледало као у претходној теорему. После тога смо, наравно, морали да „доведемо у ред” то што смо претходно у изложивоцу убацили низ $\frac{3}{n}$ множењем са $\frac{n}{3}$ у изложивоцу. Сада, како је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$, то је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}} = e$, па је коначно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right)^6 = e^6.$$

12. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$.

Решење: И овде је лимес који рачунамо облика 1^∞ , па ћемо размишљати слично као у претходном задатку. Имамо да је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-1}{n}\right)^{-n}\right)^{\frac{-1}{n} \cdot n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-1}{n}\right)^{-n}\right)^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}, \end{aligned}$$

при чему смо користили да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} = 0$, па је по теорему $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^{-n} = e$.

13. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$.

Решење: Пошто је овај лимес облика 1^∞ , записаћемо прво основу у облику два сабирка од којих је један број 1, а други тежи нули и онда погодено трансформисати израз у изложивоцу. Имамо да је $\frac{n^2+1}{n^2-2} = \frac{(n^2-2)+3}{n^2-2} = 1 + \frac{3}{n^2-2}$ и заиста је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2-2} = 0$. Зато је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n^2-2}\right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{3}{n^2-2}\right)^{\frac{n^2-2}{3}}\right)^{\frac{3}{n^2-2} \cdot n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{3}{n^2-2}\right)^{\frac{n^2-2}{3}}\right)^{\frac{3n^2}{n^2-2}}.$$

Сада је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n^2-2}\right)^{\frac{n^2-2}{3}} = e$ по теореме, јер је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2-2} = 0$, а такође је и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^2-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{1-\frac{2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{1-\frac{2}{n^2}} = \frac{3}{1-0} = 3$. Одатле коначно имамо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{3}{n^2-2}\right)^{\frac{n^2-2}{3}}\right)^{\frac{3n^2}{n^2-2}} = e^3.$$

14. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}$.

Решење: И овде лако видимо да је тражени лимес неодређеног облика 1^∞ , па ћемо применити, сада већ, стандардну технику. Прво је $\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} = \frac{(n^2-n+1)+2n}{n^2-n+1} = 1 + \frac{2n}{n^2-n+1}$ и притом је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2-n+1} = 0$, јер је полином у бројоциу мањег степена него онај у имениоциу. Зато је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2+1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n}{n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2n}{n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-n+1}{2n}}\right)^{\frac{2n}{n^2-n+1} \cdot \frac{n^2+1}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2n}{n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-n+1}{2n}}\right)^{\frac{2(n^2+1)}{n^2-n+1}}. \end{aligned}$$

На основу теореме имамо да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n}{n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-n+1}{2n}} = e$, а уз то је и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n^2+1)}{n^2-n+1} =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2(1+\frac{1}{n^2})}{n^2(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(1+\frac{1}{n^2})}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{2 \cdot (1+0)}{1-0+0} = 2$. Из тога следи да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2n}{n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-n+1}{2n}}\right)^{\frac{2(n^2+1)}{n^2-n+1}} = e^2.$$

За крај овог одељка, урадићемо један задатак који смо већ раније урадили на вежбама, а у коме се одређују супремум и инфимум неког скупа. Циљ је да илуструјемо колико нам познавање низова може олакшати одређивање супремума и инфimumа скупова и убудуће можемо увек тако решавати ове задатке кад год нам је то погодно.

15. Одредити супремум, инфимум, максимум и минимум (ако постоје) скупа $A = \left\{\frac{3n^2+8}{n^2+2} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

Решење: Можемо увести низ (a_n) дефинисан са $a_n = \frac{3n^2+8}{n^2+2}$ тако да су елементи скупа A тачно чланови овог низа. Сетимо се да смо и када смо први пут решавали овај задатак најпре записали елементе овог низа на погоднији начин. Имали смо да је

$$a_n = \frac{3n^2+8}{n^2+2} = \frac{3n^2+6+2}{n^2+2} = \frac{3(n^2+2)+2}{n^2+2} = 3 + \frac{2}{n^2+2}.$$

Сада ћемо испитати монотоност овог низа. Приметимо да је $(n+1)^2 > n^2$, па самим тим и $(n+1)^2+2 > n^2+2$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Зато је $\frac{2}{(n+1)^2+2} < \frac{2}{n^2+2}$, па и $3 + \frac{2}{(n+1)^2+2} < 3 + \frac{2}{n^2+2}$, односно $a_{n+1} < a_n$ за све $n \in \mathbb{N}$. Дакле, низ (a_n) је строго опадајући, па на основу теореме (друге по реду наведене у овој лекцији) знамо да је $\sup A = a_1 = \frac{11}{3}$ и $\inf A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n^2+2}\right) = 3 + \frac{2}{+\infty} = 3+0=3$. Такође, за $n=1$ видимо да $a_1 = \frac{11}{3} \in A$, те је и $\max A = \frac{11}{3}$. Са друге стране, видимо да је $a_n = 3 + \frac{2}{n^2+2} > 3+0=3$ за све $n \in \mathbb{N}$, па $3 \notin A$ и зато скуп A нема минимум.

На овај начин смо избегли нагађање горњих и доњих ограничења скупа A , као и коришћење дефиниције максимума и минимума и ε -карактеризације супремума и инфimumа.

Штолцова теорема

У овом одељку бавићемо се Штолцовом теоремом и њеним применама. Она се користи приликом рачунања лимеса у облику количника два низа, најчешће када је један од њих задат као сума променљивог броја сабирака, а такође и када је један од тих низова рекурентно задат.

Штолцова теорема: Нека су (x_n) и (y_n) два реална низа, при чему је (y_n) строго растући и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$. Уколико постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = L \in \overline{\mathbb{R}}$, тада постоји и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ и он је такође једнак L .

Напомена: Израз $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ у Штолцовој теореме можемо заменити изразом $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ (јер та два израза под лимесом у суштини представљају исти низ) уколико нам он буде лакши за рачунање.

Навешћемо и неколико теорема доказаних на предавањима помоћу Штолцове теореме.

Теорема [Коши]: Ако је (a_n) низ реалних бројева такав да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$, тада је и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = L$.

Теорема: Ако је (a_n) реалан низ чији су сви чланови различити од нуле такав да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$, тада је и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = L$.

Теорема: Ако је (a_n) реалан низ са позитивним члановима такав да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$, тада је и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = L$.

Дакле, када неки низ тежи ка L , тада (уколико су добро дефинисани) и низови аритметичких, хармонијских и геометријских средина његових чланова такође теже ка L .

1. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$.

Решење: Овај задатак смо већ раније урадили, међутим, користили смо чињеницу да знамо експлицитну формулу за суму квадрата првих n природних бројева. Сада га можемо урадити помоћу Штолцове теореме не користећи поменућу формулу. Уочимо низове (x_n) и (y_n) дате са $x_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ и $y_n = n^3$ за све $n \in \mathbb{N}$. Како је $y_n = (n+1)^3 > n^3 = y_{n-1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, то је низ (y_n) строго растући и уз то је $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = +\infty$. Зато можемо пробати да израчунамо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$, па уколико овај лимес постоји, Штолцова теорема ће нам завршити задатак. Имамо да је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)}{(n+1)^3 - n^3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{3n^2 + 3n + 1} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

јер су у последњем лимесу степени полинома у бројиоцу и имениоцу једнаки, па је тај лимес једнак количнику коефицијената уз „најјачи” члан n^2 . На основу Штолцове теореме следи и да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{3}$ тј. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$.

Можемо приметити како је сума великог броја сабирака (прецизније, n сабирака где n тежи $+\infty$) у бројиоцу након примене Штолцове теореме „нестала” и остало је само коначно много сабирака и у бројиоцу и имениоцу. Зато ћемо у таквим ситуацијама лимесе често израчунавати помоћу Штолцове теореме.

Наредни задатак представља уопштење претходног.

2. Нека је $k \in \mathbb{N}$. Одредити $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}$.

Решење: Овај пут не можемо ефикасно средити суму у бројиоцу, јер не знамо шта је збир k -тих степена првих n природних бројева за произвољно $k \in \mathbb{N}$ (а у претходном задатку смо знали за $k = 2$). Зато ћемо уочити низове $x_n = 1^k + 2^k + \dots + n^k$ и $y_n = n^{k+1}$ и прво рећи да је низ (y_n) строго растући пошто је $y_{n+1} = (n+1)^k > n^k = y_n$, као и да је $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^k = +\infty$. Затим, рачунамо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1^k + 2^k + \dots + n^k + (n+1)^k) - (1^k + 2^k + \dots + n^k)}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{k}{0}n^k + \binom{k}{1}n^{k-1} + \dots + \binom{k}{k-1}n^1 + \binom{k}{k}n^0}{\binom{k+1}{0}n^{k+1} + \binom{k+1}{1}n^k + \dots + \binom{k+1}{k}n^1 + \binom{k+1}{k+1}n^0 - n^{k+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k + \binom{k}{1}n^{k-1} + \dots + \binom{k}{k-1}n^1 + \binom{k}{k}n^0}{(k+1)n^k + \dots + \binom{k+1}{k}n^1 + \binom{k+1}{k+1}n^0} = \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

У претходном рачуну смо приликом сређивања израза $\frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}}$ искористили биномну формулу како бисмо и у бројиоцу и у имениоцу добили полиноме по n и потом једноставно израчунали лимес као количник два полинома истог степена користећи да је $\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0}$ и $\binom{k+1}{1} = k+1$. Сада, на основу Штолцове теореме имамо да је и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{k+1}$, што се и тражило.

3. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2)}{n^4}$.

Решење: Означимо са $x_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2)$ и $y_n = n^4$. Низ (y_n) је строго растући, јер је $y_{n+1} = (n+1)^4 > n^4 = y_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$, а такође је и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 = +\infty$. Сада ћемо прво израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$. Како је $x_{n+1} - x_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)(n+3) - (1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2)) = (n+1)(n+2)(n+3) = n^3 + 6n^2 + 11n + 6$ и $y_{n+1} - y_n = (n+1)^4 - n^4 = \binom{4}{0}n^4 + \binom{4}{1}n^3 + \binom{4}{2}n^2 + \binom{4}{3}n + \binom{4}{4}n^0 - n^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$, то је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}{4n^3 + 6n^2 + 4n + 1} = \frac{1}{4}.$$

Зато је и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2)}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{4}$ на основу Штолцове теореме.

Сада ћемо формулисати и доказати једну теорему коју ће нам бити корисна у задацима.

Теорема: Нека је (a_n) низ позитивних реалних бројева. Ако постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L \in \overline{\mathbb{R}}$, онда постоји и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ и важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

Доказ: Уочимо низ (b_n) дат са $b_1 = a_1$ и $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ за све $n \in \mathbb{N}$. По услову теореме је $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

Али, онда је на основу једног од горе наведених тврђења и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n} = L$. Како је $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = a_n$, то значи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

Ова теорема ће нам бити корисна када рачунамо лимес облика $\sqrt[n]{a_n}$, где је a_n неки низ. Уколико у тој ситуацији проценимо да нам је лакше да израчунамо лимес низа $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ и тај лимес заиста постоји, помоћу теореме ћемо знати да је то и лимес низа $\sqrt[n]{a_n}$.

4. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

Решење: Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{+\infty} = 0$, то је тражени лимес $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

неодређеног облика 0^0 , па ћемо покушати да применимо претходну теорему. Означимо са $a_n = \frac{1}{n!} > 0$ и пошто тражимо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, одредићемо прво $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$. Имамо да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n-1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!}{n \cdot (n-1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

па је зато и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$ тј. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

5. Одредити $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Решење: Имамо да је $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \sqrt[n]{a_n}$, где је низ $a_n = \frac{n!}{n^n} > 0$. Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ на основу поредбене скале, то је тражени лимес $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ неодређеног облика 0^0 . Зато ћемо покушати да применимо претходну теорему (сви чланови низа (a_n) су позитивни), па ћемо потражити $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$. Имамо да је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot (n-1)^{n-1}}{(n-1)! \cdot n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! \cdot n \cdot (n-1)^{n-1}}{(n-1)! \cdot n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-1}{n}\right)^{-n}\right)^{\frac{-1}{n} \cdot (n-1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{n-1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-1 + \frac{1}{n}} = e^{-1+0} = e^{-1} = \frac{1}{e}, \end{aligned}$$

па је и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$.

6. (Јун 1 2023) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{n}{n}\right)}$

Решење: Означимо са $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{n}{n}\right) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{n} = \frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{n^n}$. Како треба да израчунамо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, кренућемо од рачунања лимеса $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$ који делује једноставније. Имамо да је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{n^n}}{\frac{n(n+1)\dots (2n-2)}{(n-1)^{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots (2n-2)(2n-1) \cdot 2n \cdot (n-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)\dots (2n-2) \cdot n^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1) \cdot 2 \cdot \cancel{n} \cdot (n-1)^{n-1}}{\cancel{n} \cdot n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(2n-1) \cdot (n-1)^{n-1}}{n \cdot n^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2(2n-1)}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Како је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(2n-1)}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{2}{n}\right) = 4 \quad \text{и} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-1}{n}\right)^{-n}\right)^{\frac{-1}{n} \cdot (n-1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{n-1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-1 + \frac{1}{n}} = e^{-1+0} = e^{-1} = \frac{1}{e}, \end{aligned}$$

то је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{4}{e}$. Зато је на основу теореме и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{n}{n}\right)} = \frac{4}{e}$.

Рекурентно задати низови

У претходним лекцијама смо се бавили испитивањем својстава и рачунањем лимеса експлицитно задатих низова, а сада ћемо то радити за рекурентно задате низове. Да поновимо, код рекурентно задатих низова ће нам бити дато првих неколико чланова као и формула помоћу које можемо рачунати наредне чланове користећи претходне. Ту формулу називамо рекурентном везом. Приликом рачунања граничних вредности овако задатих низова врло често ћемо користити теорему о монотонном и ограниченом низу, а њихову монотоност и ограниченост ћемо најчешће доказивати помоћу математичке индукције.

1. Нека је $a < 3$ реалан број. Дат је низ (a_n) са $a_1 = a$ и $a_{n+1} = \frac{3+a_n}{2}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Испитати конвергенцију овог низа.

Решење: Приметимо да је низ (a_n) рекурентно задат. Како се у рекурентној вези дели са 2, то је сваки следећи члан низа добро дефинисан, па је и цео низ добро дефинисан. По услову задатка је његов први члан одозго ограничен бројем 3, па нас то може навести на помисао да су и остали његови чланови одозго ограничени са 3. Покушајмо зато да докажемо индукцијом да важи $a_n \leq 3$ за свако $n \in \mathbb{N}$. За $n = 1$ по услову задатка имамо да је $a_1 = a < 3$, па је база индукције испуњена. Претпоставимо сада да је за неко $n \in \mathbb{N}$ тврђење испуњено тј. да је $a_n \leq 3$ (индуктивна хипотеза) и докажимо да то важи и за $n + 1$, односно да је $a_{n+1} \leq 3$. Користећи индуктивну хипотезу добијамо

$$a_{n+1} = \frac{3+a_n}{2} \leq \frac{3+3}{2} = 3,$$

па су сви чланови овог низа мањи или једнаки од 3, те можемо рећи да је низ (a_n) ограничен одозго бројем 3. Докажимо још и да је он монотон и посматрајмо разлику $a_{n+1} - a_n$ са тим циљем. Имамо да је

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3+a_n}{2} - a_n = \frac{3+a_n-2a_n}{2} = \frac{3-a_n}{2} \geq \frac{3-3}{2} = 0,$$

јер смо претходно доказали да је $a_n \leq 3$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Из $a_{n+1} - a_n \geq 0$ следи да је $a_{n+1} \geq a_n$ за све $n \in \mathbb{N}$, па је низ (a_n) растући. Сада, како је овај низ растући и ограничен одозго, он је и конвергентан на основу теореме, па постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$. Вредност броја L ћемо као и раније одређивати тако што пустимо да $n \rightarrow \infty$ у рекурентној вези. Зато из $a_{n+1} = \frac{3+a_n}{2}$ имамо $L = \frac{3+L}{2}$ и одатле лако добијамо $2L = 3 + L$ тј. $L = 3$. Овим смо коначно доказали да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$, чиме смо завршили задатак.

Коментар: Овде смо имали среће да нас је информација из задатка како је $a_1 = a < 3$ навела да помислимо да је број 3 једно горње ограничење посматраног низа, што се испоставило тачним, а потом смо користећи њу доказали да је низ растући и тиме малтене завршили задатак. Међутим, да је први члан био дат као конкретан број – на пример $a_1 = 1$, не бисмо могли на тај начин да закључимо да је број 3 (или неки други) горње ограничење низа. Зато у тим ситуацијама можемо размишљати на следећи начин: уколико би наш низ конвергирао, шта би му била гранична вредност? Уколико је то број L , из рекурентне везе $a_{n+1} = \frac{3+a_n}{2}$ пуштањем да $n \rightarrow \infty$ добијамо једначину $L = \frac{3+L}{2}$ коју лако решавамо и добијамо да је $L = 3$ њено једино решење. Дакле, на овај начин смо увидели да уколико низ конвергира, гранична вредност му мора бити број 3 и онда би му, у случају да је монотон, број 3 био горње или доње ограничење,

па можемо покушати да докажемо нешто од та два.

Овако ћемо размишљати убудуће уколико не можемо одмах да уочимо шта би било горње или доње ограничење рекурентно задатог низа.

2. Нека је $a \in \mathbb{R}$ и низ (a_n) дат са $a_1 = a$ и $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 6}{5}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Испитати конвергенцију овог низа уколико је: а) $a \in (2, 3)$; б) $a > 3$.

Решење: а) Најпре напоменимо да се у рекурентној вези дели са 5, па је сваки следећи члан низа добро дефинисан и зато је и сам низ добро дефинисан. Приметимо да за први члан a_1 из услова задатка имамо доње и горње ограничење, јер је $a_1 \in (2, 3)$. Покушајмо индукцијом да докажемо да ово важи за све чланове низа. База индукције је испуњена, јер смо већ видели да је $a_1 \in (2, 3)$, па претпоставимо зато да за неко $n \in \mathbb{N}$ важи $a_n \in (2, 3)$ (индуктивна хипотеза) и докажимо да је и $a_{n+1} \in (2, 3)$. Из $a_n \in (2, 3)$ тј. $2 < a_n < 3$ након квадрирања (чиме се не мења знак јер су сви бројеви позитивни) добијамо $4 < a_n^2 < 9$, па одатле и

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 6}{5} > \frac{4 + 6}{5} = 2 \quad \text{и} \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 6}{5} < \frac{9 + 6}{5} = 3.$$

Зато је и $a_{n+1} \in (2, 3)$ и тиме смо индукцијом доказали да је низ (a_n) одоздо ограничен бројем 2, а одоздо бројем 3, па је он ограничен низ. Испитаћемо сада његову монотоност посматрајући разлику $a_{n+1} - a_n$. За свако $n \in \mathbb{N}$ је испуњено

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + 6}{5} - a_n = \frac{a_n^2 + 6 - 5a_n}{5} = \frac{(a_n - 2)(a_n - 3)}{5} < 0,$$

јер из претходно доказаног $a_n \in (2, 3)$ следи да је $a_n - 2 > 0$ и $a_n - 3 < 0$. Зато је $a_{n+1} < a_n$, те је овај низ строго опадајући, а како смо малопре доказали да је ограничен, он је и конвергентан. Означимо са $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$. Из рекурентне везе $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 6}{5}$ пуштајући да $n \rightarrow \infty$ добијамо $L = \frac{L^2 + 6}{5}$ тј. $L^2 + 6 = 5L$. То је еквивалентно са $L^2 - 5L + 6 = 0$, односно са $(L - 2)(L - 3) = 0$. Дакле, постоје два кандидата за граничну вредност овог низа – то су бројеви 2 и 3 и морамо да утврдимо који од њих то заиста јесте. Сетимо се да је први члан низа a_1 био између бројева 2 и 3 тј. важи $2 < a_1 < 3$ и овај низ је опадајући, па самим тим његов лимес не може бити број 3. Формално, за све $n \in \mathbb{N}$ важи $a_n \leq a_1$ (јер је у питању опадајући низ), па пуштањем да $n \rightarrow \infty$ добијамо $L \leq a_1 < 3$. Зато опција $L = 3$ није могућа и ипак важи $L = 2$. Дакле, низ (a_n) конвергира ка броју 2 у овом случају.

б) На сличан начин као у претходном делу задатка прво можемо утврдити да је низ добро дефинисан, а потом индукцијом доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $a_n > 3$, па је овај низ одоздо ограничен бројем 3. А онда видимо и да је

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + 6}{5} - a_n = \frac{a_n^2 + 6 - 5a_n}{5} = \frac{(a_n - 2)(a_n - 3)}{5} > 0,$$

јер је $a_n - 3 > 0$ и $a_n - 2 > 0$ и зато је овај низ строго растући. Иако смо доказали да је он одоздо ограничен, још увек не можемо да применимо теорему (о монотоним и ограниченим низу), јер је он растући а нисмо сигурни да ли је ограничен и одозго. Зато ћемо прво претпоставити да јесте ограничен одозго и онда по теорему имамо да постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$. Пуштајући да $n \rightarrow \infty$ у рекурентној вези $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 6}{5}$ добијамо једначину $L = \frac{L^2 + 6}{5}$ коју смо у делу а) решили и видели да су њена решења $L = 2$ и $L = 3$. Међутим, како је у овом случају $a_1 = a > 3$ и низ строго растући, то он не може конвергирати ни ка броју 2 ни ка броју 3. Формално, за све $n \in \mathbb{N}$ важи $a_n \geq a_1$ (јер је у питању растући низ), па након пуштања да $n \rightarrow \infty$ добијамо $L \geq a_1 > 3 > 2$

и зато није могуће да буде ни $L = 3$ ни $L = 2$. Дакле, наша претпоставка да је низ ограничен одозго ипак није била добра. То значи да је он строго растући низ који није ограничен одозго, па по теореме важи $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

3. Испитати конвергенцију низа (a_n) датог са $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}$, при чему се у претходном изразу квадратни корен јавља n пута. Дакле, $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ и тако даље.

Решење: Иако је овај низ записан у необичном облику, лако можемо приметити рекурентну везу $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, као и да је $a_1 = \sqrt{2}$ први члан низа, што нам је довољно за његово даље разматрање. Најпре напоменимо да је овај низ очигледно одоздо ограничен нулом, јер је квадратни корен ненегативна функција. Самим тим је $2 + a_n > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па је овај низ добро дефинисан, јер се приликом рачунања сваког следећег члана не може под кореном појавити негативна вредност.

Пошто на први поглед нисмо сигурни шта би могло бити његово горње ограничење (и да ли оно уопште постоји), применићемо стандардни трик који смо објаснили у коментару након првог задатка и претпоставити да овај низ конвергира ка броју $L \in \mathbb{R}$. Штавише, пошто су сви чланови низа ненегативни, и његова гранична вредност мора бити таква тј. важи $L \geq 0$. Зато, када пустимо да $n \rightarrow \infty$ у рекурентној вези $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, добијамо једначину $L = \sqrt{2 + L}$ која је након квадрирања (обе стране су ненегативне, па их смемо квадрирати) еквивалентна са $L^2 = 2 + L$. Последње је еквивалентно са $L^2 - L - 2 = 0$ тј. $(L - 2)(L + 1) = 0$, па ова једначина има два решења: $L = 2$ и $L = -1$. Због ранијег закључка да је $L \geq 0$, мора бити $L = 2$. Дакле, за сада смо утврдили да **ако је низ (a_n) конвергентан**, његова гранична вредност мора бити број 2. Међутим, морамо имати на уму да још увек нисмо заиста доказали да он конвергира, већ ћемо то тек урадити.

Када смо утврдили да овај низ може конвергирати једино ка броју 2 и како је $a_1 = \sqrt{2} < 2$, покушајмо да докажемо да је он одозго ограничен тим бројем тј. да је за свако $n \in \mathbb{N}$ испуњено $a_n < 2$. То ћемо урадити помоћу математичке индукције. За $n = 1$ имамо $\sqrt{2} < 2$, што је тачно, па је база индукције испуњена. Претпоставимо сада да је $a_n < 2$ за неко $n \in \mathbb{N}$ (индуктивна хипотеза) и докажимо да је и $a_{n+1} < 2$. По индуктивној хипотези имамо да је $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$, јер је квадратни корен строго растућа функција. Зато је $a_n < 2$ за свако $n \in \mathbb{N}$, те смо доказали да је низ (a_n) одоздо ограничен бројем 2. Докажимо још и да је он растући тј. да је $a_{n+1} \geq a_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. То можемо урадити на два начина, па ћемо их овде оба илустровати.

Први начин: Користећи да су и a_{n+1} и a_n ненегативни, па их у неједнакости можемо квадрирати, имамо да је

$$a_{n+1} \geq a_n \iff \sqrt{2 + a_n} \geq a_n \iff 2 + a_n \geq a_n^2 \iff 0 \geq a_n^2 - a_n - 2 \iff (a_n - 2)(a_n + 1) \leq 0.$$

Последња неједнакост је заиста тачна, јер како је $0 \leq a_n < 2$ за свако $n \in \mathbb{N}$, то је $a_n - 2 < 0$ и $a_n + 1 > 0$. Дакле, $a_{n+1} \leq a_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па је овај низ стварно растући.

Други начин: Овде ћемо доказ да је $a_{n+1} \geq a_n$ за све $n \in \mathbb{N}$ спровести математичком индукцијом. Приметимо прво да је $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2 + 0} = \sqrt{2} = a_1$, па је база индукције испуњена. Нека је сада $n \in \mathbb{N}$ произвољан и претпоставимо да важи $a_{n+1} \geq a_n$ (индуктивна хипотеза), а докажимо да је $a_{n+2} \geq a_{n+1}$. Користећи индуктивну хипотезу и чињеницу да је квадратни корен строго растућа функција имамо да је заиста

$$a_{n+2} = \sqrt{2 + a_{n+1}} \overset{\text{их}}{\geq} \sqrt{2 + a_n} = a_{n+1}.$$

Дакле, доказали смо (на два начина) да је низ (a_n) растући, а од раније смо знали да је одозго ограничен бројем 2, тако да на основу теореме можемо закључити да је он конвергентан. Штавише, ако се вратимо на почетак задатка и сетимо се да смо доказали да уколико низ (a_n) конвергира, његова гранична вредност мора бити број 2, сада смо и дефинитивно потврдили да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

4. Нека је $a > 0$ реалан број. Дат је низ (x_n) са $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ за свако $n \in \mathbb{N}$, док је $x_1 > 0$ произвољан позитиван број. Испитати конвергенцију овог низа и уколико је конвергентан, наћи му граничну вредност.

Решење: Пре свега, лако можемо доказати индукцијом да су сви чланови овог низа добро дефинисани и позитивни. База је испуњена, јер је по услову задатка $x_1 > 0$, док уколико претпоставимо да је $x_n > 0$ и добро дефинисан (индуктивна хипотеза), лако видимо да је и $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ добро дефинисан, јер смо да делимо бројем x_n који је позитиван по индуктивној хипотези, а такође је и $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) > \frac{1}{2} \cdot (0 + 0) = 0$. На основу тога имамо да је овај низ добро дефинисан и одоздо ограничен нулом. Пре него што кренемо да размишљамо о монотоности и (евентуалном) горњем ограничењу овог низа, прво ћемо одредити шта би могла бити његова потенцијална гранична вредност уколико би конвергирао. Нека је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L \in \mathbb{R}$. Ако пустимо да $n \rightarrow \infty$ у рекурентној вези $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$, добијамо једначину $L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{a}{L} \right)$, која је еквивалентна са $L = \frac{L^2 + a}{2L}$. Уз напомену да је $L \neq 0$ (да би именилац био дефинисан), то је даље еквивалентно са $2L^2 = L^2 + a$, односно са $L^2 = a$. Та једначина има два решења: $L = -\sqrt{a}$ и $L = \sqrt{a}$, а узевши у обзир претходни коментар, треба посебно размотрити и опцију $L = 0$. Дакле, постоје три могућности за граничну вредност овог низа уколико је он конвергентан. Иако смо већ доказали да је $x_n > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, можемо још прецизније ограничити одоздо овај низ. Ако пажљивије погледамо рекурентну везу, на десној страни се налази аритметичка средина позитивних бројева x_n и $\frac{a}{x_n}$ чији је производ константан, па применом АГ неједнакости добијамо да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}.$$

Дакле, овај низ је почев од другог члана ограничен одоздо са $\sqrt{a}$, па зато мора бити и $L \geq \sqrt{a}$. Због тога је $L = \sqrt{a}$ једина могућа опција за његову граничну вредност од полазних кандидата $-\sqrt{a}$, 0 и $\sqrt{a}$. Наравно, још увек нисмо показали да је низ (x_n) конвергентан, већ све ово говоримо под претпоставком да јесте. Оно што јесмо показали јесте да је он ограничен одоздо (бројем $\sqrt{a}$), па уколико бисмо показали да је опадајући, тада бисмо по теореме добили да је он конвергентан и потом бисмо дефинитивно знали да је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L = \sqrt{a}$ (као једина могућа опција). Покажимо зато да за свако $n \geq 2$ важи $x_{n+1} \leq x_n$. Имамо да је

$$x_{n+1} \leq x_n \iff \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \leq x_n \iff x_n + \frac{a}{x_n} \leq 2x_n \iff \frac{a}{x_n} \leq x_n \iff a \leq x_n^2 \iff \sqrt{a} \leq x_n,$$

при чему смо у последње две еквиваленције користили то што је x_n позитиван, па се множењем са x_n и кореновањем не мења знак неједнакости. Како је $x_n \geq \sqrt{a}$ за свако $n \geq 2$, то је и $x_{n+1} \leq x_n$ за све $n \geq 2$, те је овај низ опадајући почев од другог члана. Заједно са претходним закључцима, то значи да је он конвергентан и да је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$.

5. Низ (a_n) је дат са $a_1 > 0$ произвољно и $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3a_n^2}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Одредити ако постоје:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^3}{n}$.

Решење: а) Приметимо најпре да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3a_n^2} > a_n + 0 = a_n$, јер је $\frac{1}{3a_n^2} > 0$, па је ово један строго растући низ, а како му је први члан позитиван, сви његови чланови су такви. То значи да приликом рачунања сваког следећег члана не долази до дељења нулом (пошто је $3a_n^2 > 0$), па је овај низ добро дефинисан и можемо прећи на испитивање његове конвергенције. Како на први поглед не можемо да одредимо шта би могло бити његово горње ограничење, напоменимо да, с обзиром да је ово строго растући низ, постоје две могућности – или је он ограничен одозго, па по теореме постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ или није ограничен одозго, па је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. Претпоставимо да важи ово прво. Пошто је овај низ растући то је $a_n \geq a_1$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па након пуштања да $n \rightarrow \infty$ добијамо $L \geq a_1 > 0$ тј. $L > 0$. Када у рекурентној вези $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3a_n^2}$ пустимо да $n \rightarrow \infty$, добијамо $L = L + \frac{1}{3L^2}$ тј. $\frac{1}{3L^2} = 0$ што није могуће ни за један позитиван реалан број L . Зато је наша претпоставка нетачна, па важи ово друго тј. да низ (a_n) није ограничен одозго, те је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

б) На основу дела а) знамо да је тражени лимес $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^3}{n}$ неодређеног облика $\frac{\infty}{\infty}$. Пошто је низ n у имениоцу растући и тежи ка $+\infty$, пробаћемо да применимо Штолцову теорему. Сада рачунамо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{n+1-n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(a_n + \frac{1}{3a_n^2}\right)^3 - a_n^3}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n^3 + 3a_n^2 \cdot \frac{1}{3a_n^2} + 3a_n \cdot \frac{1}{9a_n^4} + \frac{1}{27a_n^6} - a_n^3\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3a_n^3} + \frac{1}{27a_n^6}\right) = 1 + \frac{1}{3 \cdot (+\infty)} + \frac{1}{27 \cdot (+\infty)} = 1 + 0 + 0 = 1 \end{aligned}$$

и на основу Штолцове теореме закључујемо да је и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^3}{n} = 1$.

6. Нека је низ (a_n) дат са $a_1 > 0$ произвољно и $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{a_n^2}}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Одредити ако постоје:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^4}{n}$.

Решење: а) Докажимо прво индукцијом да су сви чланови овог низа добро дефинисани и позитивни. За $n = 1$ из услова задатка знамо да је $a_1 > 0$ добро дефинисан, па је база индукције задовољена. Зато претпоставимо да за неко $n \in \mathbb{N}$ важи $a_n > 0$ (индуктивна хипотеза). Тада је $a_n^2 + \frac{1}{a_n^2}$ добро дефинисан израз, јер се дели са позитивним бројем a_n^2 и позитиван је, јер су $a_n^2 > 0$ и $\frac{1}{a_n^2} > 0$ по индуктивној хипотези. Зато је a_{n+1} добро дефинисан и важи $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{a_n^2}} > \sqrt{0} = 0$. На основу принципа математичке индукције закључујемо да су сви чланови овог низа добро дефинисани и позитивни, па је ово један добро дефинисан низ. Користећи рекурентну везу и управо доказану позитивност свих чланова овог низа имамо да је $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{a_n^2}} > \sqrt{a_n^2 + 0} = \sqrt{a_n^2} = |a_n| = a_n$ за све $n \in \mathbb{N}$ што значи да је (a_n) строго растући низ. Као и у прошлом задатку, постоје две могућности – он је или ограничен одозго и конвергира ка неком броју $L \in \mathbb{R}$ или није ограничен одозго и одређено дивергира ка $+\infty$. Претпоставимо да важи прва опција и нека је зато $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$. Пошто је низ растући, то за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $a_n \geq a_1$, а онда је и $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq a_1 > 0$, односно $L > 0$. Када пустимо да $n \rightarrow \infty$ у рекурентној вези $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{a_n^2}}$, добијамо једначину $L = \sqrt{L^2 + \frac{1}{L^2}}$. Након квадрирања (што смемо, јер су обе стране позитивне) та једначина је еквивалентна са $L^2 = L^2 + \frac{1}{L^2}$ тј. са $\frac{1}{L^2} = 0$, што није могуће ни за један позитиван реалан број L . Зато ипак важи друга опција, односно $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

б) Овај лимес је неодређеног облика $\frac{\infty}{\infty}$, па пошто је низ у имениоцу растући и тежи ка $+\infty$,

пробаћемо да искористимо Штолцову теорему. Имамо да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^4 - a_n^4}{n+1-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(a_n^2 + \frac{1}{a_n^2}\right)^2 - a_n^4}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n^4 + 2a_n^2 \cdot \frac{1}{a_n^2} + \frac{1}{a_n^4} - a_n^4\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{a_n^4}\right) = 2 + \frac{1}{+\infty} = 2,$$

те на основу Штолцове теореме закључујемо да је и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^4}{n} = 2$.

7. Нека је низ (x_n) такав да је $x_1 > 0$ произвољно и $x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n^2 + 1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Израчунати (ако постоје):

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot x_n^2)$.

Решење: а) Приметимо прво да је овај низ добро дефинисан, јер се у рекурентној вези дели са бројем $x_n^2 + 1$ који је свакако позитиван. Индукцијом можемо лако показати да је $x_n > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Заиста, по услову задатка је $x_1 > 0$, па је база индукције задовољена. Претпоставимо сада да за неко $n \in \mathbb{N}$ важи $x_n > 0$ (индуктивна хипотеза) докажимо да је и $x_{n+1} > 0$. Како је $x_n > 0$ и $x_n^2 + 1 > 0 + 1 = 1$ по индуктивној хипотези, то је и $x_{n+1} > 0$ као количник два позитивна броја. Према томе, низ (x_n) је ограничен одоздо нулом. Сада ћемо испитати његову монотоност. Имамо да је

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{x_n^2 + 1} - x_n = \frac{x_n - (x_n^2 + 1)x_n}{x_n^2 + 1} = \frac{x_n - x_n^3 - x_n}{x_n^2 + 1} = -\frac{x_n^3}{x_n^2 + 1} < 0,$$

јер је по претходно доказаном $x_n^3 > 0$ и $x_n^2 + 1 > 0 + 1 = 1 > 0$. То значи да је $x_{n+1} < x_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па је овај низ строго опадајући, а како смо већ доказали да је ограничен одоздо, то је он и конвергентан. Означимо са $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L \in \mathbb{R}$. Пуштањем да $n \rightarrow \infty$ у рекурентној вези $x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n^2 + 1}$, добијамо једначину $L = \frac{L}{L^2 + 1}$ која је еквивалентна са $L(L^2 + 1) = L$. Последње је еквивалентно са $L^3 + L = L$ тј. са $L^3 = 0$. Одатле видимо да је $L = 0$ једино решење те једначине и самим тим гранична вредност овог низа. Другим речима, важи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

б) На основу претходног дела задатка, видимо да је овај лимес неодређеног облика $\infty \cdot 0$. Не можемо одмах применити Штолцову теорему као у претходним задацима, јер лимес који рачунамо није у облику количника два низа. Зато ћемо прво израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx_n^2}$ помоћу Штолцове теореме, а потом и тражени лимес. Имамо да је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx_n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_n^2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}}{n+1-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(x_n^2+1)^2}{x_n^2} - \frac{1}{x_n^2}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^4 + 2x_n^2 + 1 - 1}{x_n^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^4 + 2x_n^2}{x_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2(x_n^2 + 2)}{x_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + 2) = 0^2 + 2 = 2. \end{aligned}$$

Напоменимо само да у претходном рачуну нисмо одмах знали да важи друга једнакост, већ је тај закључак уследио по Штолцовој теорему тек након што смо показали да одговарајући

лимес $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}}{n+1-n}$ постоји. Сада једноставно можемо израчунати да је $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{nx_n^2}} = \frac{1}{2}$.

Подсетник: Раније смо доказали Бернулијеву неједнакост тј. да за свако $n \in \mathbb{N}$ и $x > -1$ важи $(1+x)^n \geq 1+nx$. Након тога смо извели закључак да једнакост $(1+x)^n = 1+nx$ важи акко је $n = 1$ или $x = 0$.

8. Дат је низ (x_n) са $x_1 > 0$ произвољно и $x_{n+1} = \sqrt[4]{1+4x_n} - 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Испитати

конвергенцију овог низа.

Решење: Докажимо прво помоћу математичке индукције да су сви чланови овог низа добро дефинисани и позитивни с обзиром да о његовом првом члану имамо само информацију да је позитиван. База индукције следи директно по услову задатка, јер је $x_1 > 0$. Претпоставимо сада да за неко $n \in \mathbb{N}$ важи да је x_n добро дефинисан и $x_n > 0$ (индуктивна хипотеза) и докажимо да је и члан x_{n+1} добро дефинисан и позитиван. Прво, из $x_n > 0$ можемо закључити $1 + 4x_n > 1 + 4 \cdot 0 = 1$, па је $x_{n+1} = \sqrt[4]{1 + 4x_n} - 1$ добро дефинисан, јер се под кореном налази позитивна вредност. Такође, имамо и да је $x_{n+1} = \sqrt[4]{1 + 4x_n} - 1 > \sqrt[4]{1} - 1 = 1 - 1 = 0$, па по принципу математичке индукције следи да је низ (x_n) добро дефинисан и да су сви његови чланови позитивни бројеви. То значи да је он одоздо ограничен нулом, па ћемо покушати да докажемо да је и опадајући. Имамо да је

$$x_{n+1} \leq x_n \iff \sqrt[4]{1 + 4x_n} - 1 \leq x_n \iff \sqrt[4]{1 + 4x_n} \leq 1 + x_n \iff 1 + 4x_n \leq (1 + x_n)^4,$$

при чему смо у последњој еквиваленцији користили да су обе стране неједнакости позитивне, па се степеновањем са бројем 4 не мења знак неједнакости. Знајући да је $x_n > 0 > -1$ из Бернулијеве неједнакости имамо да је $(1 + x_n)^4 \geq 1 + 4x_n$, па је зато $x_{n+1} \leq x_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и последично је низ (x_n) опадајући. То значи да је он конвергентан, јер смо већ доказали да је одоздо ограничен нулом, па ћемо означити са $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L \in \mathbb{R}$. Како је $x_n \geq 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, то је и $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0$. Да бисмо одредили број L , вратићемо се на рекурентну везу $x_{n+1} = \sqrt[4]{1 + 4x_n} - 1$ и пустити да $n \rightarrow \infty$. Тако добијамо једначину $L = \sqrt[4]{1 + 4L} - 1$ тј. $1 + L = \sqrt[4]{1 + 4L}$. Можемо је степеновати бројем 4, јер су обе стране у њој ненегативне и добити њој еквивалентну једначину $(1 + L)^4 = 1 + 4L$. Приметимо да је ова једначина заправо случај када важи једнакост у Бернулијевој неједнакости $(1 + L)^4 \geq 1 + 4L$ (Бернулијева неједнакост се овде може применити пошто је $L \geq 0 > -1$). Како се та једнакост може достићи на два начина, када је $4 = 1$ или $L = 0$, а прва опција евидентно није могућа, то мора бити $L = 0$. Зато је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Поднизови и тачке нагомилавања низа

Дефиниција: За реалан низ (a_n) кажемо да је *периодичан са периодом* $T \in \mathbb{N}$ уколико за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $a_{n+T} = a_n$.

Дефиниција: Нека је $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ реалних бројева и $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ строго растући низ природних бројева чији су чланови $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. Тада за низ $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ чији су чланови $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}, \dots$ кажемо да је *подниз* низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Пример: Нека је (a_n) реални низ. Уколико одаберемо $n_k = 2k$ добијамо подниз $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ чији су чланови сви чланови датог низа (a_n) са парним индексима. Бирајући $n_k = 5k + 2$, $k \in \mathbb{N}_0$ добијамо подниз $(a_{5k+2})_{k \in \mathbb{N}_0}$ са члановима $a_2, a_7, a_{12}, \dots, a_{52}, a_{57}, \dots, a_{502}, \dots$ датог низа, док бирајући да је $n_k = k^2$ добијамо подниз $(a_{k^2})_{k \in \mathbb{N}}$ са члановима $a_1, a_4, a_9, a_{16}, \dots, a_{225}, \dots, a_{2025}, \dots$ датог низа.

Дефиниција: За тачку $a \in \overline{\mathbb{R}}$ кажемо да је *тачка нагомилавања* низа (a_n) ако постоји његов подниз (a_{n_k}) такав да је $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$. Са $T(a_n)$ обележавамо скуп свих тачака нагомилавања низа (a_n) . Најмању тачку нагомилавања низа (a_n) тј. минимум скупа $T(a_n)$ називамо *лимес инфериор* овог низа и обележавамо га са $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ или $\varliminf_{n \rightarrow \infty} a_n$. Слично, највећу тачку нагомилавања низа (a_n) тј. максимум скупа $T(a_n)$ називамо *лимес супериор* овог низа и обележавамо га са $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ или $\varlimsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Пример: Нека је $a_n = (-1)^n$. Знамо да је $a_n = 1$ за парне n и $a_n = -1$ за непарне n , па важи $a_{n+2} = a_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$, те је овај низ периодичан са периодом 2. Посматрајмо подниз овог низа за који је $n_k = 2k$ тј. подниз $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ (чији су индекси парни). Пошто је $a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$ за свако $k \in \mathbb{N}$, видимо да су сви његови чланови једнаки 1, па самим тим овај подниз конвергира ка 1. Слично, можемо посматрати и подниз за који је $n_k = 2k + 1$, где $k \in \mathbb{N}_0$, тј. подниз $(a_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}_0}$ (чији су индекси непарни). Из тога што је $a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$ за свако $k \in \mathbb{N}_0$ имамо да тај подниз конвергира ка -1 . Зато су бројеви -1 и 1 две тачке нагомилавања овог низа.

Коментар: Након што наведемо одговарајуће теореме утврдићемо да су ово и једине две тачке нагомилавања овог низа.

Следећа теорема нам говори о егзистенцији тачака нагомилавања ограниченог низа.

Теорема [Болцано–Вајерштрас]: Сваки ограничен низ реалних бројева има бар једну тачку нагомилавања у $\mathbb{R}$.

Такође, евидентно је да уколико низ није ограничен, једна од његових тачака нагомилавања је $-\infty$ или $+\infty$. Наредно тврђење обједињује ово запажање са Болцано–Вајерштрасовом теоремом.

Теорема: Сваки низ реалних бројева има бар једну тачку нагомилавања у $\overline{\mathbb{R}}$.

Следеће тврђење говори о томе како се конвергенција низа може описати у контексту његових тачака нагомилавања.

Теорема: Низ (a_n) конвергира акко има само једну, и то коначну, тачку нагомилавања.

Другим речима, за $L \in \mathbb{R}$ важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Наравно, ово значи да уколико низ (a_n) конвергира ка броју L , онда и сваки његов подниз

(a_{n_k}) конвергира ка броју L . Ту чињеницу смо већ једном употребили раније у лекцији *Моно-тони и ограничени низови*.

Навешћемо још једно тврђење које нам описује поступак којим налазимо све тачке нагомилавања (у $\overline{\mathbb{R}}$) неког низа.

Теорема: Ако је низ (a_n) записан као унија својих k поднизова, где $k \in \mathbb{N}$, и притом први подниз тежи ка $L_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, други ка $L_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ и тако даље, k -ти подниз тежи ка $L_k \in \overline{\mathbb{R}}$, тада су све тачке нагомилавања овог низа $T(a_n) = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$.

Пример: Вратимо се на низ $a_n = (-1)^n$ и одредимо све његове тачке нагомилавања. Горе смо га раздвојили на два његова подниза – један са непарним индексима и други са парним индексима. Закључили смо да први конвергира ка -1 , а други ка 1 . Како ова два подниза у унији дају цео низ, то су ово једине тачке нагомилавања тог низа, односно важи $T(a_n) = \{-1, 1\}$. Зато је $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$ и $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Из тога можемо и закључити нешто што смо већ одавно доказали, а то је да овај низ дивергира.

1. Наћи све тачке нагомилавања низа $a_n = 1 + \frac{n^2}{n^2 + 5} \cdot \cos \frac{n\pi}{2}$, као и $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ и $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Решење: Када бисмо пробали да израчунамо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (наравно, тај лимес не постоји што ћемо убрзо и видети), добили бисмо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n^2}{n^2 + 5} \cdot \cos \frac{n\pi}{2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 5} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{n\pi}{2} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2} \left(1 + \frac{5}{n^2} \right)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{n\pi}{2} = \\ &= 1 + \frac{1}{1 + 0} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{n\pi}{2} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Примећујемо да нам „проблем” ствара низ $b_n = \cos \frac{n\pi}{2}$, јер имамо да је $b_1 = 0$, $b_2 = -1$, $b_3 = 0$, $b_4 = 1$, $b_5 = 0 = b_1$, $b_6 = -1 = b_2$ и тако даље, па се чини да је овај низ периодичан са периодом 4.

4. Докажимо ово и формално. За свако $n \in \mathbb{N}$ имамо да је

$$b_{n+4} = \cos \frac{(n+4)\pi}{2} = \cos \frac{n\pi + 4\pi}{2} = \cos \left(\frac{n\pi}{2} + 2\pi \right) = \cos \frac{n\pi}{2} = b_n,$$

при чему смо у рачуну користили 2π -периодичност функције $\cos x$ и добили да је низ (b_n) заиста периодичан са периодом 4. Зато га можемо поделити на четири подниза (који у унији дају цео тај низ) у зависности од тога који остатак даје индекс при дељењу са 4. Дакле, посматраћемо поднизовете $(b_{4k+1})_{k \in \mathbb{N}_0}$, $(b_{4k+2})_{k \in \mathbb{N}_0}$, $(b_{4k+3})_{k \in \mathbb{N}_0}$ и $(b_{4k})_{k \in \mathbb{N}}$.

1° $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$: У овом случају је $b_n = b_{4k} = b_4 = 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$ овог облика, па имамо да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n^2}{n^2 + 5} \cdot b_n \right) = 1 + 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 + 1 = 2.$$

2° $n = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$: У овом случају је $b_n = b_{4k+1} = b_1 = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$ овог облика, па је зато

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n^2}{n^2 + 5} \cdot b_n \right) = 1 + 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 1 + 0 = 1.$$

3° $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}_0$: У овом случају је $b_n = b_{4k+2} = b_2 = -1$ за свако $n \in \mathbb{N}$ овог облика, па имамо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n^2}{n^2 + 5} \cdot b_n \right) = 1 + 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) = 1 - 1 = 0.$$

4° $n = 4k + 3$, $k \in \mathbb{N}_0$: У овом случају је $b_n = b_{4k+3} = b_3 = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$ овог облика, па је зато

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n^2}{n^2 + 5} \cdot b_n \right) = 1 + 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 1 + 0 = 1.$$

На овај начин смо пронашли све тачке нагомилавања низа (a_n) , те је $T(a_n) = \{0, 1, 2\}$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ и $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

2. Дат је низ $a_n = \sqrt[n]{2^n + 5^{n \cdot (-1)^n}}$. Одредити његове тачке нагомилавања, као и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ и $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Решење: Приметимо да нам овде, као и у горе урађеном примеру, једини „проблем” за конвергенцију низа (a_n) прави низ $b_n = (-1)^n$. Како је (b_n) периодичан низ са периодом 2 (јер су његови чланови -1 и 1 , наизменично), то ћемо га поделити на два подниза на основу остатка који његов индекс даје при дељењу са 2 (тј. на основу парности индекса). Другим речима, посматраћемо поднизове $(b_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}_0}$ и $(b_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$.

1° $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$: У овом случају је $b_n = b_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$ за све $n \in \mathbb{N}$ овог облика, па је $a_n = \sqrt[n]{2^n + 5^{n \cdot (-1)}} = \sqrt[n]{2^n + 5^{-n}} = \sqrt[n]{2^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n}$. Зато, користећи од раније изведену формулу имамо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n} = \max \left\{ 2, \frac{1}{5} \right\} = 2.$$

2° $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$: У овом случају је $b_n = b_{2k} = (-1)^{2k} = 1$ за све $n \in \mathbb{N}$ овог облика, па је $a_n = \sqrt[n]{2^n + 5^{n \cdot 1}} = \sqrt[n]{2^n + 5^n}$. Зато, имамо да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n} = \max \{ 2, 5 \} = 5.$$

Сада лако можемо констатовати да је $T(a_n) = \{2, 5\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ и $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$.

3. Нека је низ (a_n) дат са $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n + \frac{n}{n+1} \sin \frac{2n\pi}{3} + \frac{\ln n}{n!}$. Одредити све његове тачке нагомилавања.

Решење: Размишљамо на исти начин као у претходним задацима – желимо да видимо како бисмо рачунали лimes низа a_n , па имамо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left((-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n + \frac{n}{n+1} \sin \frac{2n\pi}{3} + \frac{\ln n}{n!} \right).$$

Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(1 + \frac{1}{n})} = \frac{1}{1+0} = 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n!} = 0$ на основу поредбене скале, то је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot e + 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{2n\pi}{3} + 0 = e \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{2n\pi}{3}.$$

Можемо приметити да овде „проблем” праве низови $b_n = (-1)^n$ и $c_n = \sin \frac{2n\pi}{3}$. Већ смо видели да је низ (b_n) периодичан са периодом 2, док за низ (c_n) можемо израчунати првих неколико чланова: $c_1 = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $c_2 = \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $c_3 = \sin(2\pi) = 0$, $c_4 = \sin \frac{8\pi}{3} = \sin \frac{2\pi}{3} = c_1$, $c_5 = \sin \frac{10\pi}{3} = \sin \frac{4\pi}{3} = c_2$ и тако даље. Чини се да је он периодичан са периодом 3, а то лако можемо и доказати користећи 2π -периодичност функције $\sin x$ на следећи начин:

$$c_{n+3} = \sin \frac{2(n+3)\pi}{3} = \sin \frac{2n\pi + 6\pi}{3} = \sin \left(\frac{2n\pi}{3} + 2\pi \right) = \sin \frac{2n\pi}{3} = c_n, \quad \text{за свако } n \in \mathbb{N}.$$

С обзиром да због низа (b_n) (коме је период 2) желимо да посматрамо његов индекс по модулу 2, а због низа (c_n) (коме је период 3) желимо да посматрамо његов индекс по модулу 3, знајући да је НЗС(2, 3) = 6 посматраћемо индекс низа (a_n) по модулу 6. Зато ћемо га поделити на шест поднизова $(a_{6k+1})_{k \in \mathbb{N}_0}$, $(a_{6k+2})_{k \in \mathbb{N}_0}$, $(a_{6k+3})_{k \in \mathbb{N}_0}$, $(a_{6k+4})_{k \in \mathbb{N}_0}$, $(a_{6k+5})_{k \in \mathbb{N}_0}$ и $(a_{6k})_{k \in \mathbb{N}}$ и испитати конвергенцију сваког од њих. Пре него што то и урадимо, напоменимо да ћемо овакве задатке увек радити на тај начин - **уочимо низове који праве „проблем” за конвергенцију**

полазног низа, видимо по ком модулу треба да посматрамо њихове индексе у зависности од тога који је њихов период, па затим посматрамо индексе почетног низа по НЗС-у свих тих модулова и тако га поделимо на поднизове.

1° $n = 6k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$: У овом случају је $b_{6k+1} = b_1 = -1$ и $c_{6k+1} = c_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ за свако $k \in \mathbb{N}_0$, те је

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{6k+1} = e \lim_{k \rightarrow \infty} b_{6k+1} + \lim_{k \rightarrow \infty} c_{6k+1} = e \lim_{k \rightarrow \infty} (-1) + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{2} = -e + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2° $n = 6k + 2$, $k \in \mathbb{N}_0$: Сада је $b_{6k+2} = b_2 = 1$ и $c_{6k+2} = c_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ за свако $k \in \mathbb{N}_0$, па је

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{6k+2} = e \lim_{k \rightarrow \infty} b_{6k+2} + \lim_{k \rightarrow \infty} c_{6k+2} = e \lim_{k \rightarrow \infty} 1 + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = e - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3° $n = 6k + 3$, $k \in \mathbb{N}_0$: У овом случају је $b_{6k+3} = b_3 = b_1 = -1$ и $c_{6k+3} = c_3 = 0$ за свако $k \in \mathbb{N}_0$, те је

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{6k+3} = e \lim_{k \rightarrow \infty} b_{6k+3} + \lim_{k \rightarrow \infty} c_{6k+3} = e \lim_{k \rightarrow \infty} (-1) + \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = -e.$$

4° $n = 6k + 4$, $k \in \mathbb{N}_0$: У овом случају је $b_{6k+4} = b_4 = b_2 = 1$ и $c_{6k+4} = c_4 = c_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ за свако $k \in \mathbb{N}_0$, те је

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{6k+4} = e \lim_{k \rightarrow \infty} b_{6k+4} + \lim_{k \rightarrow \infty} c_{6k+4} = e \lim_{k \rightarrow \infty} 1 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{2} = e + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5° $n = 6k + 5$, $k \in \mathbb{N}_0$: Сада је $b_{6k+5} = b_5 = b_1 = -1$ и $c_{6k+5} = c_5 = c_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ за свако $k \in \mathbb{N}_0$, па је зато

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{6k+5} = e \lim_{k \rightarrow \infty} b_{6k+5} + \lim_{k \rightarrow \infty} c_{6k+5} = e \lim_{k \rightarrow \infty} (-1) + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -e - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6° $n = 6k$, $k \in \mathbb{N}$: Овде је $b_{6k} = b_2 = 1$ и $c_{6k} = c_3 = 0$ за свако $k \in \mathbb{N}_0$, те је

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{6k} = e \lim_{k \rightarrow \infty} b_{6k} + \lim_{k \rightarrow \infty} c_{6k} = e \lim_{k \rightarrow \infty} 1 + \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = e.$$

Зато је $T(a_n) = \left\{ -e + \frac{\sqrt{3}}{2}, e - \frac{\sqrt{3}}{2}, -e, e + \frac{\sqrt{3}}{2}, -e - \frac{\sqrt{3}}{2}, e \right\}$.

4. (Септембар 1 2024) Дати су низови $a_n = \frac{2n^3 - 4n^2 + 1}{5n^3 + 3n + n^4}$ и $b_n = \frac{1}{\sqrt[6]{n^6 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[6]{n^6 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[6]{n^6 + 2n}}$. Одредити тачке нагомилавања низа $c_n = a_n \cdot \sin(n! + 1) + (-1)^n b_n \cos \frac{n\pi}{2}$.

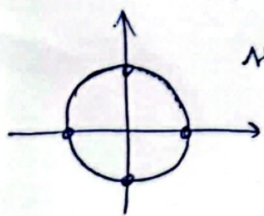
Да ли постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$?

Решење: Најпре напоменимо да смо раније (у претходним лекцијама) већ утврдили да су низови (a_n) и (b_n) конвергентни и да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$. Зато можемо прво закључити да је $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot \sin(n! + 1)) = 0$, јер низ (a_n) тежи нули, а низ $\sin(n! + 1)$ је ограничен пошто је $|\sin(n! + 1)| \leq 1$ за све $n \in \mathbb{N}$. Зато, када бисмо пробали да израчунамо $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, имали бисмо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n \cdot \sin(n! + 1) + (-1)^n b_n \cos \frac{n\pi}{2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot \sin(n! + 1)) + \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{n\pi}{2} = 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{n\pi}{2} = \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{n\pi}{2}, \end{aligned}$$

па ћемо посебно разматрати низове $(-1)^n$ и $\cos \frac{n\pi}{2}$.

Тут $(-1)^n$ је периодичан са периодом 2, јер је $(-1)^{n+2} = (-1)^n \cdot (-1)^2 = (-1)^n \cdot 1 = (-1)^n$ за све $n \in \mathbb{N}$.



и $\cos \frac{n\pi}{2}$ је периодичан са периодом 4, јер је

$$\cos \frac{(n+4)\pi}{2} = \cos \left(\frac{n\pi}{2} + 2\pi \right) = \cos \frac{n\pi}{2}$$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & n \text{ парно} \\ -1, & n \text{ непарно} \end{cases}$$

$$\cos \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ 0, & n = 4k+1 \vee n = 4k+3 \\ -1, & n = 4k+2 \end{cases}$$

$H3C(2, 4) = 4 \Rightarrow$ једино могуће c_n на бесконачној осовини

$$n = 4k: c_n = a_n \cdot \sin(n! + 1) + 1 \cdot b_n \cdot 1 =$$

$$= \underbrace{a_n \cdot \sin(n! + 1)}_{\downarrow 0} + \underbrace{b_n}_{\downarrow 2} \rightarrow 2, \quad \begin{matrix} k \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty \end{matrix}$$

$$n = 4k+1 \text{ или } n = 4k+3: c_n = a_n \cdot \sin(n! + 1) + (-1) \cdot b_n \cdot 0 = \\ = a_n \cdot \sin(n! + 1) \rightarrow 0, \quad \begin{matrix} k \rightarrow \infty \text{ и } n \rightarrow \infty \end{matrix}$$

$$n = 4k+2: c_n = a_n \cdot \sin(n! + 1) + 1 \cdot b_n \cdot (-1) =$$

$$= \underbrace{a_n \cdot \sin(n! + 1)}_{\downarrow 0} - \underbrace{b_n}_{\downarrow 2} \rightarrow -2, \quad \begin{matrix} k \rightarrow \infty \text{ и } n \rightarrow \infty \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ могуће c_n имају три граничне вредности: $-2, 0, 2$

Самим тим, овај низ није конвергентан и $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ не постоји.

Кошијеви низови

У овом одељку дефинисаћемо појам Кошијевог низа и видети у каквој је он вези са конвергенцијом. Испоставља се да је у задацима у којима се испитује конвергенција низова, а не могу се ефикасно употребити до сада познате методе, најлакше испитати да ли је дати низ Кошијев или није, па тако закључити да ли је конвергентан.

Дефиниција: За низ (a_n) кажемо да је *Кошијев* уколико важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon,$$

што се еквивалентно може формулисати и као

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N}) \quad |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

Теорема [Кошијев критеријум конвергенције низова]: Низ реалних бројева је конвергентан ако и само ако је Кошијев.

Као што смо већ на почетку рекли, након што испитамо да ли је неки низ Кошијев, помоћу ове теореме можемо одмах закључити и да ли је конвергентан или није.

1. Доказати да је низ $a_n = \frac{\cos(\ln 1)}{1 \cdot 2} + \frac{\cos(\ln 2)}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos(\ln n)}{n(n+1)}$ конвергентан.

Решење: Пробаћемо да докажемо да је овај низ Кошијев, одакле би следило тврђење задатка. Дакле, доказујемо да за свако $\varepsilon > 0$ постоји индекс $n_0 \in \mathbb{N}$ такав да за све природне бројеве $n \geq n_0$ и $p \in \mathbb{N}$ важи $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$. Нека је зато $\varepsilon > 0$ произвољно и желимо да нађемо овакво n_0 . Како бисмо успели у томе, циљ је да разлику $|a_{n+p} - a_n|$ упростимо и ограничимо одозго изразом који не зависи од броја p , а потом видимо почев од ког $n_0 \in \mathbb{N}$ ће тај израз бити мањи од ε . Имамо да је

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| \frac{\cancel{\cos(\ln 1)}}{1 \cdot 2} + \frac{\cancel{\cos(\ln 2)}}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cancel{\cos(\ln n)}}{n(n+1)} + \frac{\cos(\ln(n+1))}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{\cos(\ln(n+p))}{(n+p)(n+p+1)} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\cancel{\cos(\ln 1)}}{1 \cdot 2} + \frac{\cancel{\cos(\ln 2)}}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cancel{\cos(\ln n)}}{n(n+1)} \right) \right| = \left| \frac{\cos(\ln(n+1))}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{\cos(\ln(n+p))}{(n+p)(n+p+1)} \right|. \end{aligned}$$

Последњи израз се не може нарочито средити због бројилаца, али се може одозго ограничити користећи неједнакост многоугла и ограниченост косинусне функције. Зато је

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| \frac{\cos(\ln(n+1))}{(n+1)(n+2)} + \frac{\cos(\ln(n+2))}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{\cos(\ln(n+p))}{(n+p)(n+p+1)} \right| \leq \\ &= \left| \frac{\cos(\ln(n+1))}{(n+1)(n+2)} \right| + \left| \frac{\cos(\ln(n+2))}{(n+2)(n+3)} \right| + \dots + \left| \frac{\cos(\ln(n+p))}{(n+p)(n+p+1)} \right| = \frac{|\cos(\ln(n+1))|}{(n+1)(n+2)} + \frac{|\cos(\ln(n+2))|}{(n+2)(n+3)} + \dots \\ &\quad + \frac{|\cos(\ln(n+p))|}{(n+p)(n+p+1)} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}. \end{aligned}$$

Последњу суму већ можемо израчунати користећи трик од раније, па је зато

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \\ &= \frac{(n+2) - (n+1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{(n+3) - (n+2)}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{(n+p+1) - (n+p)}{(n+p)(n+p+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{\cancel{n+2}} + \frac{1}{\cancel{n+2}} - \frac{1}{\cancel{n+3}} + \dots \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\cancel{n+p}} - \frac{1}{n+p+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} \quad \text{за све } n, p \in \mathbb{N},$$

при чему смо на крају користили да је умањилац $\frac{1}{n+p+1}$ позитиван и помоћу тога успели да оценимо одозго $|a_{n+p} - a_n|$ изразом који не зависи од броја p . Сада је већ ситуација много једноставнија, јер сетимо се да је циљ био израз $|a_{n+p} - a_n|$ начинити мањим од ε почев од индекса n_0 , па како смо управо доказали да је $|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{n+1}$, уколико обезбедимо да је $\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$ за $n \geq n_0$, заиста ће бити и $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ за све $n \geq n_0$. Како је $\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n+1 \geq \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$, то можемо узети $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil + 1$ уколико је $\frac{1}{\varepsilon} - 1 \geq 0$ односно $n_0 = 1$ уколико је $\frac{1}{\varepsilon} - 1 < 0$. На тај начин смо постигли да за све $n \geq n_0$ и $p \in \mathbb{N}$ важи $\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$, па је и $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$. Дакле, низ (a_n) је Кошијев и самим тим конвергентан.

Коментар: Напоменимо да помоћу Кошијевог критеријума можемо само да докажемо да низ конвергира, али не и да одредимо шта је његова гранична вредност. Међутим, она се није ни тражила у задатку.

2. Испитати конвергенцију низа $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

Решење: Доказаћемо да је овај низ Кошијев како бисмо закључили да конвергира. Нека је зато $\varepsilon > 0$ произвољно. Тражимо $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за све природне бројеве $n \geq n_0$ и $p \in \mathbb{N}$ важи $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$. Са тим циљем, упростићемо и одозго ограничити разлику $|a_{n+p} - a_n|$ изразом који не зависи од броја p на следећи начин:

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| \cancel{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} - \left(\cancel{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} \right| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2}. \end{aligned}$$

Није једноставно средити последњи израз, али јесте ограничити га одозго користећи неједнакости $(n+1)^2 > n(n+1)$, $(n+2)^2 > (n+1)(n+2)$, $\dots$, $(n+p)^2 > (n+p-1)(n+p)$, а потом се добијени израз може средити на сличан начин као у претходном задатку. Имамо да је

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \\ &= \frac{(n+1) - n}{n(n+1)} + \frac{(n+2) - (n+1)}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{(n+p) - (n+p-1)}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{\cancel{n+1}} + \frac{1}{\cancel{n+1}} - \frac{1}{\cancel{n+2}} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{\cancel{n+p-1}} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} \quad \text{за све } n, p \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

при чему смо користили да је умањилац $\frac{1}{n+p}$ позитиван за све природне n и p . Одатле је $|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{n}$ за све $n, p \in \mathbb{N}$, па уколико важи $\frac{1}{n} < \varepsilon$, важиће и $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ што смо желели. Пошто је $\frac{1}{n} < \varepsilon$ еквивалентно са $n > \frac{1}{\varepsilon}$, можемо одабрати $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$. Сада, из свега претходног имамо да за све природне бројеве $n \geq n_0$ и $p \in \mathbb{N}$ важи $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, па је дати низ Кошијев, а зато и конвергентан.

3. Испитати конвергенцију низа $a_n = \frac{\sin(1!)}{2} + \frac{\sin(2!)}{2^2} + \dots + \frac{\sin(n!)}{2^n}$.

Решење: Слично као у претходним задацима, показаћемо да је овај низ Кошијев. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно и тражимо $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за све природне бројеве $n \geq n_0$ и $p \in \mathbb{N}$ важи $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$. Сада ћемо проценити разлику $|a_{n+p} - a_n|$ користећи неједнакост многоугла и ограниченост синусне функције на следећи начин:

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{\cancel{\sin(1!)}}{2^1} + \frac{\cancel{\sin(2!)}}{2^2} + \dots + \frac{\cancel{\sin(n!)}}{2^n} + \frac{\sin((n+1)!)}{2^{n+1}} + \frac{\sin((n+2)!)}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\sin((n+p)!)}{2^{n+p}} \right|$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{\sin(1!)}{2^1} + \frac{\sin(2!)}{2^2} + \dots + \frac{\sin(n!)}{2^n} \right) \Bigg| = \left| \frac{\sin((n+1)!)}{2^{n+1}} + \frac{\sin((n+2)!)}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\sin((n+p)!)}{2^{n+p}} \right| \leq \\
& \leq \left| \frac{\sin((n+1)!)}{2^{n+1}} \right| + \left| \frac{\sin((n+2)!)}{2^{n+2}} \right| + \dots + \left| \frac{\sin((n+p)!)}{2^{n+p}} \right| = \frac{|\sin((n+1)!)|}{2^{n+1}} + \frac{|\sin((n+2)!)|}{2^{n+2}} + \dots \\
& \quad + \frac{|\sin((n+p)!)|}{2^{n+p}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}} \right).
\end{aligned}$$

Приметимо да се сума у загради лако може израчунати као сума геометријског низа, па имамо да је

$$|a_{n+p} - a_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}} \right) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{2^{n+1} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{2^n} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+p}} < \frac{1}{2^n},$$

за све $n, p \in \mathbb{N}$. Дакле, да бисмо начинили разлику $|a_{n+p} - a_n|$ мањом од ε за свако $n \geq n_0$ и $p \in \mathbb{N}$, довољно је постићи да је $\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$ за свако $n \geq n_0$. Пошто је $\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow 2^n \geq \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \geq \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \geq -\log_2 \varepsilon$, можемо узети $n_0 = \lceil -\log_2 \varepsilon \rceil + 1$ уколико је $-\log_2 \varepsilon \geq 0$ односно $n_0 = 1$ уколико је $-\log_2 \varepsilon < 0$. Тиме смо постигли да за све природне бројеве $n \geq n_0$ и p важи $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, те је овај низ Кошијев и зато је конвергентан.

4. Испитати конвергенцију низа $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

Решење: Нагласимо да смо у лекцији *Монотони и ограничени низови* већ доказали да овај низ одређено дивергира ка $+\infty$, али је сада циљ да то учинимо користећи Кошијев критеријум. Испитаћемо да ли је овај низ Кошијев или није и на основу тога ћемо извести закључак о његовој конвергенцији. Претпоставимо да он јесте Кошијев. То значи да за свако $\varepsilon > 0$ постоји индекс $n_0 \in \mathbb{N}$ такав да за свако $n \geq n_0$ и $p \in \mathbb{N}$ важи $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, односно

$$\begin{aligned}
& \left| \cancel{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} - \left(\cancel{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right| = \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} \right| = \\
& = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Међутим, лако је видети да ово није могуће. Наиме, како у суми $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p}$ има p сабирака и најмањи међу њима је $\frac{1}{n+p}$, то је $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} \geq p \cdot \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}$, па на основу претходног имамо да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за све $n \geq n_0$ и $p \in \mathbb{N}$ важи $\frac{p}{n+p} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} < \varepsilon$, а самим тим и $\frac{p}{n+p} < \varepsilon$. Али, за свако $\varepsilon > 0$ можемо одабрати $n = p = n_0$ и добијамо $\frac{1}{2} = \frac{n_0}{n_0+n_0} < \varepsilon$ што евидентно није тачно, на пример, за $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Зато наша полазна претпоставка није била добра, па низ (a_n) није Кошијев и зато он дивергира.

Граничне вредности функција

Увешћемо неколико неопходних појмова и тврђења како бисмо могли да уведемо централни појам ове лекције – граничну вредност (односно лimes) функције и радимо са њим.

Дефиниција: Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$. За $a \in \overline{\mathbb{R}}$ кажемо да је *тачка нагомилавања скупа* A уколико постоји низ (a_n) такав да $a_n \in A \setminus \{a\}$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Скуп свих тачака нагомилавања скупа A обележавамо са A' .

Теорема: Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$. Тада је $a \in \mathbb{R}$ тачка нагомилавања скупа A ако за сваку њену околину U_a важи $\mathring{U}_a \cap A \neq \emptyset$. Слично, $-\infty$ је тачка нагомилавања скупа A уколико за свако $b \in \mathbb{R}$ важи $(-\infty, b) \cap A \neq \emptyset$, а $+\infty$ је тачка нагомилавања овог скупа уколико за свако $b \in \mathbb{R}$ важи $(b, +\infty) \cap A \neq \emptyset$.

Напоменимо да тачка нагомилавања неког скупа не мора припадати том скупу тј. не мора нужно бити $A' \subseteq A$. Такође, не мора важити ни $A \subseteq A'$, односно не мора свака тачка неког скупа бити уједно и његова тачка нагомилавања. За такве тачке $a \in A \setminus A'$ кажемо да су *изоловане*.

Пример: Одредимо све тачке нагомилавања скупа $A = (0, 1) \cup \{3\}$.

Најпре уочимо произвољно $a \in (0, 1)$. Нека је низ (a_n) дат са $a_n = a - \frac{1}{n}$. Пошто је $\frac{1}{n} > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, то су сви чланови овог низа мањи, па и различити од броја a . Докажимо да постоји индекс n_0 такав да је $a_n > 0$ за све $n \in \mathbb{N}$. Имамо да је $a_n > 0 \Leftrightarrow a - \frac{1}{n} > 0 \Leftrightarrow a > \frac{1}{n} \Leftrightarrow n > \frac{1}{a}$, па можемо узети $n_0 = \left[\frac{1}{a}\right] + 1$ и почев од тог индекса ће сви чланови низа (a_n) бити у интервалу $(0, a)$, а самим тим и у скупу A . Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a - \frac{1}{n}\right) = a - 0 = a$, то је број a тачка нагомилавања скупа A тј. $a \in A'$.

Посматрајмо сада низове $b_n = \frac{1}{2n}$ и $c_n = 1 - \frac{1}{2n}$. Сви њихови чланови припадају интервалу $(0, 1)$, па и скупу A и важи $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = 1 - 0 = 1$. Одатле видимо да су и бројеви 0 и 1 тачке нагомилавања скупа A иако му не припадају.

Докажимо сада да број 3 није тачка нагомилавања скупа A иако му припада. Уочимо његову околину $U = (2, 4)$ и одговарајућу пробушену околину $\mathring{U} = (2, 4) \setminus \{3\} = (2, 3) \cup (3, 4)$. Како је $\mathring{U} \cap A = \emptyset$, то број 3 није тачка нагомилавања овог скупа.

Уочимо сада произвољно $a \in (-\infty, 0) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$. Ком год од ова три интервала да припада број a , можемо наћи његову довољно малу околину (а онда и пробушену околину) која је дисјунктна са скупом A , па број a није тачка нагомилавања овог скупа.

Коначно, уочимо околину $(-\infty, -1)$ тачке $-\infty$ и околину $(5, +\infty)$ тачке $+\infty$. Како су оне дисјунктне са скупом A , то ни $-\infty$ ни $+\infty$ нису његове тачке нагомилавања.

На основу свега претходног можемо закључити да је $A' = [0, 1]$, а приметимо и да је број 3 једина изолована тачка скупа A , јер важи $A \setminus A' = \{3\}$.

Дефиниција: Нека је $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ функција, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа A и $L \in \overline{\mathbb{R}}$ произвољно. Тада кажемо да је L *гранична вредност* (или *лimes*) функције f кад x тежи ка a и пишемо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ако за сваку околину V_L тачке L постоји околина U_a тачке a таква да за свако $x \in \mathring{U}_a$ важи $f(x) \in V_L$. То можемо записати и као

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff (\forall V_L)(\exists U_a)(\forall x \in A) x \in \mathring{U}_a \Rightarrow f(x) \in V_L.$$

Уколико су и a и L реални бројеви, можемо користити њихове ε -окоleine односно δ -окоleine,

па тада имамо

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A) 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Уколико је $a \in \mathbb{R}$ и $L = +\infty$, тада горњи израз добија облик

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \iff (\forall M \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in A) 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M,$$

док за $a \in \mathbb{R}$ и $L = -\infty$ имамо

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \iff (\forall M \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in A) 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < M.$$

За $a = +\infty$ и $L \in \mathbb{R}$ имамо да је

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in A) x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon,$$

а за $a = -\infty$ и $L \in \mathbb{R}$ је

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in A) x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Даље, уколико је $a = L = +\infty$, важи

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff (\forall M_1 \in \mathbb{R})(\exists M_2 \in \mathbb{R})(\forall x \in A) x > M_2 \Rightarrow f(x) > M_1,$$

уколико је $a = +\infty$ и $L = -\infty$, важи

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \iff (\forall M_1 \in \mathbb{R})(\exists M_2 \in \mathbb{R})(\forall x \in A) x > M_2 \Rightarrow f(x) < M_1,$$

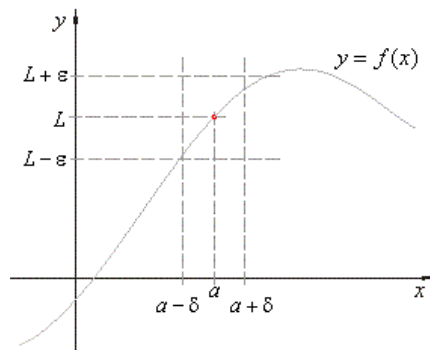
за $a = -\infty$ и $L = +\infty$ је

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \iff (\forall M_1 \in \mathbb{R})(\exists M_2 \in \mathbb{R})(\forall x \in A) x < M_2 \Rightarrow f(x) > M_1$$

и коначно за $a = L = -\infty$ је

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \iff (\forall M_1 \in \mathbb{R})(\exists M_2 \in \mathbb{R})(\forall x \in A) x < M_2 \Rightarrow f(x) < M_1.$$

На следећој слици имамо илустрацију дефиниције лimesа у случају када су тачке a и L коначне.



Напоменимо да како из дефиниције лimesа $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ следи за сваку околину V_L тачке L постоји околина U_a тачке a таква да за свако $x \in \overset{\circ}{U}_a$ важи $f(x) \in V_L$, то не мора нужно бити и $f(a) \in V_L$, јер $a \notin \overset{\circ}{U}_a$ пошто је $\overset{\circ}{U}_a = U_a \setminus \{a\}$. Другим речима, вредност лimesа $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ не мора обавезно бити једнака вредности $f(a)$. Штавише, поменути лimes може постојати и уколико

тачка a не припада домену функције f (иако она мора бити његова тачка нагомилавања) тј. уколико израз $f(a)$ уопште није ни дефинисан.

Зато су нам функције код којих се ове две вредности поклапају посебно занимљиве и оне имају свој назив.

Дефиниција: Нека је $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ функција и $a \in A \cap A'$. Кажемо да је ова функција *непрекидна у тачки a* уколико је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, односно уколико је

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A) \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Међутим, када је $x = a$ тривијално важи $|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ за свако $\varepsilon > 0$, па у горњој дефиницији можемо дозволити и да буде $x = a$ тј. $|x - a| = 0$. Зато имамо да је функција f непрекидна у тачки a уколико важи $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, односно уколико је

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A) \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Напомена: Уколико је $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ функција и $a \in A$ изолована тачка њеног домена, тада постоји $\delta > 0$ такво да је $(a - \delta, a + \delta) \cap A = \{a\}$. Зато за свако $\varepsilon > 0$ можемо узети управо то $\delta > 0$ и онда ће за све $x \in A$ за које је $|x - a| < \delta$ (а то је заправо само $x = a$) важити $|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$. Зато је f непрекидна у свакој својој изолованој тачки, па нам оне нису интересантне приликом испитивања непрекидности функције, већ су интересантније оне тачке домена које су истовремено и његове тачке нагомилавања.

Дефиниција: За функцију $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ кажемо да је непрекидна на скупу $B \subseteq A$ уколико је она непрекидна у свакој тачки скупа B .

Дефиниција: Нека је $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ функција, $a \in \bar{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа A и $L \in \bar{\mathbb{R}}$ произвољно. Уколико важи

$$(\forall V_L)(\exists U_a)(\forall x \in A) \ x \in U_a \cap (a, +\infty) \Rightarrow f(x) \in V_L$$

кажемо да је L *десни лимес* (или *десна гранична вредност*) функције f кад x тежи a и пишемо

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = L, \quad f(a+0) = L \text{ или } f(a+) = L, \text{ док уколико је}$$

$$(\forall V_L)(\exists U_a)(\forall x \in A) \ x \in U_a \cap (-\infty, a) \Rightarrow f(x) \in V_L$$

кажемо да је L *леви лимес* (или *лева гранична вредност*) функције f кад x тежи a и то пишемо као $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = L, \quad f(a-) = L$ или $f(a-0) = L$.

Дакле, код десног лимеса $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ посматрамо само тачке x за које је $x > a$, па се на бројевној правој налазе десно од тачке a , док у левом лимесу $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ посматрамо само оне тачке x које су мање од a и самим тим се на бројевној правој налазе лево од ње.

Уколико треба да израчунамо $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, а није нам погодно да то урадимо директно, можемо прво израчунати $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ и упоредити их, о чему говори следеће тврђење.

Теорема: Нека је $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ функција, $a \in \bar{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа A и $L \in \bar{\mathbb{R}}$. Тада важи

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a+} f(x).$$

Теорема: Нека је $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ функција и $a \in A \cap A'$. Тада је f непрекидна у тачки a ако и само ако важи $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$.

Пример: Нека је функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ константна тј. постоји $c \in \mathbb{R}$ такво да је $f(x) = c$ за свако

$x \in \mathbb{R}$. Тада је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$, јер за свако $\varepsilon > 0$ можемо одабрати произвољно $\delta > 0$ и имамо да из $|x - a| < \delta$ заиста следи $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

1. Доказати да је $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 2) = 2$.

Решење: По дефиницији треба доказати да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да за свако $x \in \mathbb{R}$ за које је $|x - 0| < \delta$ тј. $|x| < \delta$ важи $|(x^3 + 2) - 2| < \varepsilon$. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Како је

$$|(x^3 + 2) - 2| < \varepsilon \iff |x^3| < \varepsilon \iff |x|^3 < \varepsilon \iff |x| < \sqrt[3]{\varepsilon},$$

то видимо да одабиром $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon} > 0$ заиста из $|x| < \delta$ следи $|(x^3 + 2) - 2| < \varepsilon$, па смо тиме по дефиницији доказали да је $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 2) = 2$.

2. Доказати да је $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{2x + 1} = \frac{3}{2}$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 1}{2x + 1} = \frac{3}{2}$.

Решење: Означимо са $f(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$. Докажимо прво да је $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$. То значи да треба да докажемо да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $M \in \mathbb{R}$ такво да за све $x > M$ важи $|f(x) - \frac{3}{2}| < \varepsilon$. Нека је зато $\varepsilon > 0$ произвољно. Како је

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon &\iff \left| \frac{3x-1}{2x+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{2(3x-1) - 3(2x+1)}{2(2x+1)} \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{6x-2-6x-3}{2(2x+1)} \right| < \varepsilon \\ &\iff \left| \frac{-5}{2(2x+1)} \right| < \varepsilon \iff \frac{5}{2|2x+1|} < \varepsilon \iff |2x+1| > \frac{5}{2\varepsilon} \iff 2x+1 > \frac{5}{2\varepsilon} \vee 2x+1 < -\frac{5}{2\varepsilon} \\ &2x > \frac{5}{2\varepsilon} - 1 \vee 2x < -\frac{5}{2\varepsilon} - 1 \iff x > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \vee x < -\frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

то можемо одабрати $M = \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$ и заиста ће за све $x > M$ бити испуњено $|f(x) - \frac{3}{2}| < \varepsilon$. Зато је $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$.

Докажимо сада и да је $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{3}{2}$. Да бисмо то урадили по дефиницији морамо да докажемо да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $M \in \mathbb{R}$ такво да за свако $x < M$ важи $|f(x) - \frac{3}{2}| < \varepsilon$. Нека је зато $\varepsilon > 0$ произвољно. Како смо малопре видели да је

$$\left| f(x) - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon \iff x > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \vee x < -\frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2},$$

овај пут можемо узети $M = -\frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$ и стварно ће за свако $x < M$ важити $|f(x) - \frac{3}{2}| < \varepsilon$. На тај начин смо доказали и да је $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{3}{2}$.

Теорема: Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in A'$ и функције $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ које се поклапају на некој пробушеној околини тачке A тј. постоји U_a такво да је $f(x) = g(x)$ за све $x \in U_a$. Тада је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ уколико ови лимеси постоје. Зато можемо рећи да је лимес локално својство функције, односно довољно је да знамо вредности функције на некој малој пробушеној околини тачке да бисмо могли да израчунамо њен лимес у тој тачки уколико он постоји.

Та чињеница одговара тврђењу везаном за низове које каже да конвергенција низа не зависи од првих неколико (коначно много) његових чланова, већ је довољно посматрати само чланове почев од неког индекса n_0 како би се испитала његова конвергенција.

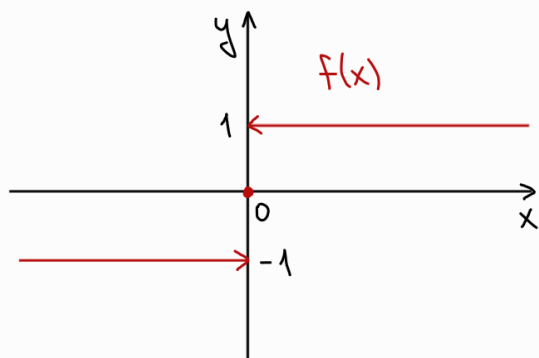
Дефиниција: Функцију $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дату са

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

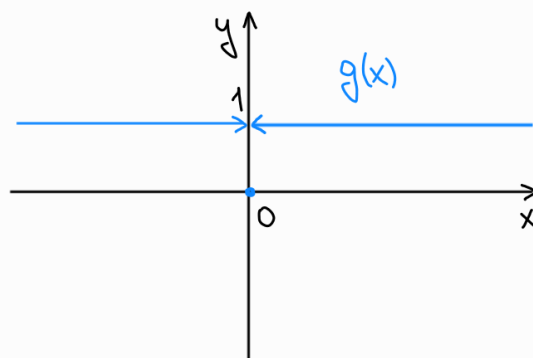
називамо *сигнум функцијом* и обележавамо је са $\operatorname{sgn} x$. Дакле, ова функција нам „враћа” знак реалног броја x , при чему сматрамо да је знак броја 0 једнак 0.

3. Дате су функције $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ са $f(x) = \operatorname{sgn} x$ и $g(x) = |\operatorname{sgn} x|$. Израчунати $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ за све $a \in \overline{\mathbb{R}}$ и испитати непрекидност ових функција на скупу $\mathbb{R}$.

Решење: Скицираћемо прво графике ових функција и засебно разматрати случајеве када је $a < 0$, $a = 0$ и $a > 0$ да бисмо израчунали тражене лимесе, а потом и испитали непрекидност ових функција.



$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \text{ и } x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

1° $a < 0$ или $a = -\infty$

f се поклапа са константном фјом -1 на скупу $(-\infty, 0)$, што је окolina тачке a , па је

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (-1) = -1, \text{ јер се на } (-\infty, 0) \text{ } f \text{ поклапа}$$

са константном фјом 1 , па је $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} 1 = 1$

$$\text{Унако је } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -1 = f(a) \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 1 = g(a),$$

па су f и g непрекидне у a за свако $a < 0$,

па су зато обе непрекидне на скупу $(-\infty, 0)$

2° $a > 0$ или $a = +\infty$

f се поклапа са константним фјам 1 на интервалу $(0, +\infty)$, што је околина тачке a , та је

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} 1 = 1, \text{ а и } g \text{ се поклапа на } (0, +\infty) \text{ са}$$

$$\text{константним фјам 1, та је } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} 1 = 1$$

$$\text{Унако је } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 = f(a) \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 1 = g(a),$$

то су f и g непрекидне у a за свако $a > 0$,

та су зато обе непрекидне на интервалу $(0, +\infty)$

3° $a = 0$

Овде ћемо засебно рачунати леву и десну лimes, јер се фја f разликује лево и десно од нуле.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 1 = 1, \text{ јер се } f \text{ поклапа са 1 на десној}$$

околини $(0, +\infty)$ тачке 0

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-1) = -1, \text{ јер се } f \text{ поклапа са -1 на левој}$$

околини $(-\infty, 0)$ тачке 0

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \Rightarrow \text{не постоји } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

фја g се поклапа са фјам 1 на било којој продишеној

$$\text{околини тачке 0, та је } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Пошто не постоји $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, то не може бити

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, па f није непрекидна у 0 , а

пошто је $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1 \neq 0 = g(0)$, g није непрекидна у 0 нити постоји $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

Т. Све елементарне функције су непрекидне на свом домену.

Ова теорема нам помаже да једноставније рачунамо лимсе уместо по дефиницији као до сада.

Пример: $\lim_{x \rightarrow 3} e^x = e^3$ и

$\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x = \sin \pi = 0$, јер су $\sin x$ и e^x непрекид-

не функције на $\mathbb{R}$ пошто су елементарне

Осим што је корисно знати да су елементарне фје непрекидне на свом домену, треба знати и чему оне тежу на рубу својих домена што наводи нас у следећој теорему.

Теорема: За елементарне функције и рубне тачке њихових домена важи:

$$\begin{aligned}
 n \in \mathbb{N} \text{ парно: } & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty, \\
 n \in \mathbb{N} \text{ непарно: } & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty, \\
 a \in \mathbb{R} \text{ и } a > 1: & \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \\
 a \in \mathbb{R} \text{ и } 0 < a < 1: & \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \\
 a \in \mathbb{R} \text{ и } a > 1: & \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \log_a x = -\infty, \\
 a \in \mathbb{R} \text{ и } 0 < a < 1: & \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \log_a x = +\infty, \\
 n \in \mathbb{N} \text{ парно: } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty, \\
 n \in \mathbb{N} \text{ непарно: } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty, \\
 \alpha \in \mathbb{R} \text{ и } \alpha > 0: & \lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha = 0+, \\
 \alpha \in \mathbb{R} \text{ и } \alpha < 0: & \lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha = +\infty, \\
 \alpha \in \mathbb{R} \text{ и } \alpha > 0: & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty, \\
 \alpha \in \mathbb{R} \text{ и } \alpha < 0: & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0+, \\
 k \in \mathbb{Z}: & \lim_{x \rightarrow (k\pi + \frac{\pi}{2})-} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (k\pi + \frac{\pi}{2})+} \operatorname{tg} x = -\infty, \\
 \text{Специјално је} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty. \\
 k \in \mathbb{Z}: & \lim_{x \rightarrow k\pi+} \operatorname{ctg} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow k\pi-} \operatorname{ctg} x = -\infty, \\
 \text{Специјално је} & \lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{ctg} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi-} \operatorname{ctg} x = -\infty. \\
 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}-, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}+, \\
 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccctg} x = 0+, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccctg} x = \pi-.
 \end{aligned}$$

Лимес функције се, као и лимес низа, лепо слаже са основним рачунским операцијама што видимо из наредног тврђења.

Теорема: Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in A'$ и $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ функције такве да је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2 \in \mathbb{R}$. Тада важи:

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$,
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x)) = \alpha L_1$ за свако $\alpha \in \mathbb{R}$,
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$,
- 4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ уколико је $L_2 \neq 0$.

4. Израчунати $\lim_{x \rightarrow 2} \left(e^x + 2x - \sqrt[3]{\frac{x}{2}} \right)$.

Решење: Коришћењем претходне теореме и чињенице да су елементарне функције непрекидне, лако видимо да је

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(e^x + 2x - \sqrt[3]{\frac{x}{2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} e^x + 2 \lim_{x \rightarrow 2} x - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x} = e^2 + 2 \cdot 2 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \sqrt[3]{2} = e^2 + 4 - 1 = e^2 + 3.$$

5. а) Израчунајте $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-1}{2x+1}$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-1}{2x+1} = \frac{3 \cdot 3 - 1}{2 \cdot 3 + 1} = \frac{8}{7}$$

б) Израчунајте $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{2x+1}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{2x+1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}(3-\frac{1}{x})}{\cancel{x}(2+\frac{1}{x})} = \frac{3-\frac{1}{-\infty}}{2+\frac{1}{-\infty}} = \frac{3+0}{2+0} = \frac{3}{2}$$

в) Израчунајте $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+5x-1}{3x^3+3x+8}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+5x-1}{3x^3+3x+8} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2}(2+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2})}{\cancel{x^3}(3+\frac{3}{x^2}+\frac{8}{x^3})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3x} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

Заче, код лимеса облика $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$,

где су $P(x)$ и $Q(x)$ полиноми, поступак рачунања је

потпуно исти као код лимеса нивола када имамо

поличник два полинома. С друге стране, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} =$

$= \frac{P(a)}{Q(a)}$ када $a \in \mathbb{R}$ на основу теореме

теореме.

6. а) Израчунајте $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{+\infty} - \underbrace{\sqrt{x^2-x}}_{+\infty}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}) \cdot \frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - (x^2 - x)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} \stackrel{+\infty}{=} \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + |x| \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} =$$

$x \rightarrow +\infty$, па можемо сматрати $x > 0$ и $|x| = x$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = 1$$

5) Израчунајте $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\underbrace{\sqrt{x^2 + x}}_{+\infty} - \underbrace{\sqrt{x^2 - x}}_{+\infty}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - (x^2 - x)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} \stackrel{+\infty}{=} \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + |x| \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} =$$

$x \rightarrow -\infty$, па можемо сматрати $x < 0$ и $|x| = -x$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}})} =$$

$$= \frac{2}{-(\sqrt{1} + \sqrt{1})} = -1$$

Упоменутар: За је $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = +\infty$, видимо излажењем

најјачеј маке пај. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot (1 - \frac{1}{x}) = (+\infty)^2 \cdot 1 =$

$= +\infty$ и слично је $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x) = +\infty$.

7. (Септембар 2 '23) Усправити $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{\ln(2x)}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{\ln(2x)} = \frac{2 \cdot 1 - 2}{\ln(2 \cdot 1)} = \frac{0}{\ln 2} = 0$$

8. (Септембар 1 '24) Усправити $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \cos(x-3\pi)}{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x}}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \cos(x-3\pi)}{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x}} = \frac{\sin 0 - \cos(0-3\pi)}{\sqrt{0^2+0+1} - \sqrt{0^2+0}} = \frac{0 - \cos(-3\pi)}{\sqrt{1} - \sqrt{0}} =$$

$\cos x$ је парна $\cos x$ је 2π -периодична

$$= \frac{-\cos(3\pi)}{1-0} = \frac{-\cos \pi}{1} = \frac{-(-1)}{1} = 1$$

9. Усправити $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$ ако постоји.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} &= \frac{\cos 0}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{x} &= \frac{\cos 0}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{не постоји } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$$

Сага ћемо навести неке важне твђење које ће нам помоћи приликом решања лимеса. Оно је генерално доказано на прелиминарно, а оне делове твђења који још нису доказани ћемо доказати на самом крају овог фајла.

Т. (Основни лимеси)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \text{ где је } a > 0 \text{ реалан број}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^d - 1}{x} = d, \text{ где је } d \in \mathbb{R}$$

Ови лимеси нам помажу у случајевима где се појављују неизређени изрази $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0, \dots\right)$ и функције које нису полиноми (тригонометријске, експоненцијална, логаритам, корен).

1. Наћи лимес $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \ln(1+x)}{5x}.$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \ln(1+x)}{5x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin x}{5x} - \frac{\ln(1+x)}{5x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{5} \cdot \overset{1}{\left(\frac{\sin x}{x} \right)} - \frac{1}{5} \cdot \overset{1}{\left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)} \right) = \frac{2}{5} \cdot 1 - \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5}$$

2. Наћи $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} \cdot x}{\frac{\sin x}{x} \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot x}{1 \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

Изразе $e^x - 1$ и $\sin x$ смо поделили и помножили са x како бисмо могли да користимо основне лимесе.

Ова тема месно раздвојена и наглашена.

3. Наћи $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x - \sqrt[3]{1+x}}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x - \sqrt[3]{1+x}} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x - (1+x)^{\frac{1}{3}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\frac{e^x - 1}{x} \cdot x + 1 - \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{3}} - 1}{x} \cdot x + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1 \cdot x + 1 - \left(\frac{1}{3}x + 1 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x + 1 - \frac{x}{3} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\frac{2x}{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 = 3 \end{aligned}$$

Почео смо морати да трансформирамо изразе који су се појављивали у почетном лимесу како бисмо могли да користимо основне лимесе.

Т. (смена променљиве у лимесу)

Нека су $A, B \subseteq \mathbb{R}$ и $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ где и $a \in A'$, $b \in B'$

и нека је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и постоји $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = L \in \mathbb{R}$

Уколико постоји околина U_a тачке a и.г. за свако $x \in U_a \cap A$ важи $f(x) \neq b$, тада се у лимесу $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x))$

може увести смену на следећи начин:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \left(\begin{array}{l} t = f(x), t \rightarrow b \\ \text{јер } f(x) \rightarrow b, \text{ кад } x \rightarrow a \end{array} \right) = \lim_{t \rightarrow b} g(t) = L.$$

Натоме увек применим увођења смене у лимесу експлицитно проверавајући постојање поменутих околности $\forall a$, јер ће смене које уводимо најмање одговарати некој од три ситуације у којима је смену дозвољено увести:

1° $t = f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ тј. f је линеарна фја

2° $b = -\infty$ или $b = +\infty$

3° фја g је непр. у тачки $b \in \mathbb{R}$.

Ипак, егзистенција те околности је важан услов, јер са предложа знамо пример када се смена у лимесу не може увести када он није испуњен. Уколико смена не постоји под неку од три наведене ситуације, требало би се (бар усмено) уверити да је услов испуњен.

4. Наћи $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} \stackrel{0/0}{=} \left(\begin{array}{l} t = 5x \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\frac{t}{5}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5 \sin t}{t} \stackrel{1}{=} 5 \cdot 1 = 5$$

Пошто је под синусом био израз $5x$, бирам сво смену $t = 5x$ да бисмо могли да искористимо основни лимес.

Убрзати, ради кратке записи, можемо и да не уводимо смену експлицитно, већ усменим путем на следећи начин:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x} \right) \cdot 5 = 1 \cdot 5 = 5$$

1, jer $5x \rightarrow 0$ kao $x \rightarrow 0$

Donje, ugraditi smo zahtjev na isti način kao ranije uz smenu $t = 5x$, tje $t \rightarrow 0$, ali je ovaj put mnogo jednostavnije završiti, jer je yčeno neposredno.

5. Iritu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin 5x}{5x} \right) \cdot 5x - \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right) \cdot 3x}{x} =$$

1, jer $5x \rightarrow 0$ 1, jer $3x \rightarrow 0$ kao $x \rightarrow 0$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot 5x - 1 \cdot 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2$$

6. Usporediti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$, tje cy $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{e^{ax} - 1}{ax} \right) \cdot ax + 1 - \left(\frac{e^{bx} - 1}{bx} \right) \cdot bx + 1}{x} =$$

1, jer $ax \rightarrow 0$ 1, jer $bx \rightarrow 0$ kao $x \rightarrow 0$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot ax + 1 - (1 \cdot bx + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + 1 - bx - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a-b)x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (a-b) = a-b$$

7. Usporediti $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x) \stackrel{\infty \cdot 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = 1, \text{ jer } \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ kao } x \rightarrow +\infty$$

(smena $t = \frac{1}{x}$, $t \rightarrow 0$ kao $x \rightarrow +\infty$
u trenutak je $\frac{1}{x} \neq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, tje
se sme gledati ova smena)

8. Упростити $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x} &\stackrel{0}{=} \left(\begin{array}{l} t = x-1 \Rightarrow x = t+1 \\ x \rightarrow 1 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-(t+1)^2}{\sin(\pi(t+1))} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-(t^2+2t+1)}{\sin(\pi t + \pi)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-t^2-2t-1}{\sin \pi t \underbrace{\cos \pi}_{-1} + \cos \pi t \underbrace{\sin \pi}_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^2-2t}{-\sin \pi t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2+2t}{\sin \pi t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(t+2)}{\underbrace{\frac{\sin \pi t}{\pi t}}_{\substack{\uparrow \\ 1, \text{ jer } \pi t \rightarrow 0 \text{ kao } t \rightarrow 0}} \cdot \pi t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(t+2)}{\pi t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t+2}{\pi} = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Обде је x тежило 1, а не 0, та смо бирали смену поменку да t тежи 0 да бисмо могли да користимо основне лимесе. То је стандардна техника када тежило да уопште не тежи нули, а променљива не тежи нули.

9. Наћи $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{x-1}-1}{\ln(3x-5)}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{x-1}-1}{\ln(3x-5)} &\stackrel{0}{=} \left(\begin{array}{l} t = x-2, x = t+2 \\ x \rightarrow 2 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{t+2}-1}{\ln(3(t+2)-5)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^{\frac{1}{4}}-1}{\ln(1+3t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\underbrace{(1+t)^{\frac{1}{4}}-1}_{\substack{\rightarrow \frac{1}{4}, \text{ jer } t \rightarrow 0}} \cdot t}{\underbrace{\ln(1+3t)}_{\substack{\rightarrow 1, \text{ jer } 3t \rightarrow 0 \text{ kao } t \rightarrow 0}} \cdot 3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4} \cdot t}{1 \cdot 3t} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

10. Упростити $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x-3} \right)^x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x-3} \right)^x \stackrel{1^\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-3+6}{x-3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{6}{x-3} \right)^x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\frac{6}{x-3}}{\frac{x-3}{6}} \right)^{\frac{6}{x-3} \cdot x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{6x}{x-3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{6}{1-\frac{3}{x}}} = e^6$$

11. Hatu $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{3x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^2+1}{x-1}}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{3x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^2+1}{x-1}} \stackrel{1^\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 + x + 1 - 2x}{3x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^2+1}{x-1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2x}{3x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^2+1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{-2x}{3x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^2+1}{x-1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{-2x}{3x^2 + x + 1} \right)^{\frac{-2x}{3x^2 + x + 1} \cdot \frac{x^2+1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{-2x(x^2+1)}{(3x^2+x+1)(x-1)}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{-2x^3 - 2x}{3x^3 + 3x^2 + x^2 + x + x + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{-2x^3 - 2x}{3x^3 + 4x^2 + 2x + 1}} \stackrel{L: x^3}{=} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{-2 - \frac{2}{x}}{3 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}} = e^{-\frac{2}{3}}$$

Асимптотичке резулте σ , 0 и $\sim$

Def. $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ и $a \in A'$

Њихово је $f = o(g)$, $x \rightarrow a$ (мишљамо: „ f је мало σ од g кад x иде ка a “, а њихово и да је f бесконачно мало или занемарљиво мада у односу на g кад $x \rightarrow a$) ако постоји

окolina U_a тачке a и фја $d: U_a \rightarrow \mathbb{R}$ т.г. је

$(\forall x \in U_a) f(x) = d(x) \cdot g(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} d(x) = 0$.

Уколико је $g(x) \neq 0$ за све x из неке пробушене околне тачке a , тада је услов $f = o(g), x \rightarrow a$ еквивалентан са $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ (може се узети $\alpha(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ у дефиницији малог o).

Тхемемар: За конкретну фју f и тачку a се са $o(f), x \rightarrow a$ означава скуп свих бесконачно малих фја у односу на фју f кад $x \rightarrow a$.

Def. $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ и $a \in A'$

Укажемо да је $f = O(g), x \rightarrow a$ (мишљамо: „ f је велико O од g кад x тежи a “) ако постоји околна U_a тачке a и ограничена фја $\beta: U_a \rightarrow \mathbb{R}$ т.ј. је $(\forall x \in U_a) f(x) = \beta(x) \cdot g(x)$.

Уколико је $g(x) \neq 0$ за све x из неке пробушене околне тачке a , тада је услов $f = O(g), x \rightarrow a$ еквивалентан са тим да је $\frac{f(x)}{g(x)}$ ограничена фја на некој пробушеној околности тачке a (може се узети $\beta(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ у дефиницији великог O).

Def. $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ и $a \in A'$

Укажемо да је $f \sim g, x \rightarrow a$ (мишљамо: „ f се понаша као g кад x тежи a “) ако постоји околна U_a тачке a и фја

$\mu: U_a \rightarrow \mathbb{R}$ т.ј. је $(\forall x \in U_a) f(x) = \mu(x) \cdot g(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} \mu(x) = 1$.

Уколико је $g(x) \neq 0$ за све x из неке пробушене околне тачке a , тада је услов $f \sim g, x \rightarrow a$ еквивалентан са

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ (може се узети $\mu(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ у дефиницији $\sim$).

Примеры: 1) $x^3 = o(x^8)$, $x \rightarrow +\infty$

$$\text{јер } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^5} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

2) $x^8 = o(x^3)$, $x \rightarrow 0$

$$\text{јер } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^8}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} x^5 = 0^5 = 0$$

И теоремо, ако су $\alpha < \beta$ реални бројеви, важи

$$x^\alpha = o(x^\beta), x \rightarrow +\infty \quad \text{и} \quad x^\beta = o(x^\alpha), x \rightarrow 0.$$

3) $x^2 + 3x - 1 \sim x^2$, $x \rightarrow \pm\infty$

$$\text{јер } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \overset{0}{\cancel{\frac{3}{x}}} - \overset{0}{\cancel{\frac{1}{x^2}}} \right) = 1$$

4) $\sin x \sim x$, $x \rightarrow 0$

$$\text{јер } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

5) $\tan x \sim x$, $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \text{јер } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{1}{\sin x}}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \\ &= \frac{1}{\cos 0} = 1 \end{aligned}$$

6) $\arcsin x \sim x$, $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \text{јер } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} &= \left(\begin{array}{l} t = \arcsin x \Rightarrow x = \sin t \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

7) $\arctan x \sim x$, $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \text{јер } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} &= \left(\begin{array}{l} t = \arctan x \Rightarrow x = \tan t \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\tan t}{t}} \stackrel{5)}{=} \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

$$8) \arctg x \sim \frac{\pi}{2}, x \rightarrow +\infty \quad \text{и} \quad \arctg x \sim -\frac{\pi}{2}, x \rightarrow -\infty$$

$$\text{јер } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctg x}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arctg x}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$9) \sin x = O(1), x \rightarrow a \text{ за произвољно } a \in \mathbb{R},$$

$$\text{јер је } \frac{\sin x}{1} = \sin x \text{ ограничена ф-ца на } \mathbb{R}$$

$$\text{Слично, } \cos x = O(1), \arctg x = O(1), \operatorname{arccotg} x = O(1), x \rightarrow a \\ \text{за произвољно } a \in \mathbb{R}.$$

T. $\sim$ је релација еквиваленције тј. ланчи

$$1) f \sim f, x \rightarrow a$$

$$2) f \sim g, x \rightarrow a \Rightarrow g \sim f, x \rightarrow a$$

$$3) f \sim g, x \rightarrow a \text{ и } g \sim h, x \rightarrow a \Rightarrow f \sim h, x \rightarrow a$$

$$T. 1) o(f) \pm o(f) = o(f), x \rightarrow a$$

Овако записано твђење тумачимо на следећи начин:

$$g = o(f), x \rightarrow a \text{ и } h = o(f), x \rightarrow a \Rightarrow g \pm h = o(f), x \rightarrow a$$

тј. збир и разлика две бесконачно мале ф-це у односу на f кад $x \rightarrow a$ су такође бесконачно мале ф-це у односу на f кад $x \rightarrow a$.

И следећа твђења слично тумачимо.

$$2) o(c \cdot f) = o(f), x \rightarrow a \text{ и } c \cdot o(f) = o(f), x \rightarrow a \text{ за } c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$g = o(c \cdot f), x \rightarrow a \Rightarrow g = o(f), x \rightarrow a \text{ и } g = c \cdot o(f), x \rightarrow a \\ \Downarrow \\ g = o(f), x \rightarrow a$$

$$3) o(o(f)) = o(f), x \rightarrow a$$

$$g = o(o(f)), x \rightarrow a \Rightarrow g = o(f), x \rightarrow a$$

$$4) f \cdot o(g) = o(f \cdot g), x \rightarrow a$$

$$h = o(g), x \rightarrow a \Rightarrow f \cdot h = o(f \cdot g), x \rightarrow a$$

$$5) o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g), x \rightarrow a$$

$$h = o(f), \varphi = o(g), x \rightarrow a \Rightarrow h \cdot \varphi = o(f \cdot g), x \rightarrow a$$

$$6) f \sim g, x \rightarrow a \Rightarrow o(f) = o(g), x \rightarrow a$$

$$7) f \sim g, x \rightarrow a \Rightarrow f = g + o(g), x \rightarrow a$$

$$8) f = o(1), x \rightarrow a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

$$\text{Замечание: } f = o(1), x \rightarrow a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{1} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

Используя из основных леммы можно се показать некие фте.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x \sim x, x \rightarrow 0 \stackrel{1)}{\Rightarrow} \sin x = x + o(x), x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \Rightarrow \ln(1+x) \sim x, x \rightarrow 0 \stackrel{1)}{\Rightarrow} \ln(1+x) = x + o(x), x \rightarrow 0$$

Полезно также се изложит и $\operatorname{tg} x = x + o(x), x \rightarrow 0$,

$$\arcsin x = x + o(x), x \rightarrow 0 \text{ и } \operatorname{arctg} x = x + o(x), x \rightarrow 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Rightarrow e^x - 1 \sim x, x \rightarrow 0 \Rightarrow e^x - 1 = x + o(x), x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow e^x = 1 + x + o(x), x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1 \Rightarrow 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right), x \rightarrow 0 \stackrel{2)}{\Rightarrow} 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2), x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} - o(x^2), x \rightarrow 0 \stackrel{2)}{\Rightarrow} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1 \Rightarrow (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow (1+x)^{\alpha}-1=\alpha x+o(\alpha x), x \rightarrow 0 \stackrel{2)}{\Rightarrow} (1+x)^{\alpha}-1=\alpha x+o(x), x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+o(x), x \rightarrow 0 \text{ и } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{Упоменутар: директно провери везимо за свакој локви и за } \alpha=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x-1}{x \ln a} = 1 \Rightarrow a^x-1 \sim x \ln a, x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow a^x-1 = x \ln a + o(x \ln a), x \rightarrow 0 \stackrel{2)}{\Rightarrow} a^x-1 = x \ln a + o(x), x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow a^x = 1 + x \ln a + o(x), x \rightarrow 0 \text{ и } a \neq 1, a > 0 \quad \text{Упоменутар: провери локви и за } a=1$$

Везимо да смо на овај начин апроксимирали (развили) фје $\sin x, \cos x, \tan x, \arcsin x, \arctan x, e^x, \ln(1+x), a^x, (1+x)^{\alpha}$ помоћу полинома првог или (за фју $\cos x$) другог степена кад $x \rightarrow 0$ и изразили одступање полинома од фје помоћу малог o .
Ово ће нам бити веома корисно у лимесима и скраћенице нам постоје које смо користили раније или везимо у наредним примерима које смо мањекећ били израдили.

$$\begin{aligned} \text{Пр. 1)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + o(5x) - (3x + o(3x))}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + o(x) - 3x - o(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + o(x)}{x} \stackrel{L: x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} (2 + o(1)) = 2 \end{aligned}$$

Напомена: $o(x) - o(x) = o(x)$ на основу прве особине из претих. Т.
та се применом одузимања не могу скраћити малови $o(x)$

$$2) a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{јер } ax \rightarrow 0 \text{ и } bx \rightarrow 0 \text{ кад } x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + ax + o(ax) - (1 + bx + o(bx))}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + ax + o(x) - 1 - bx - o(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a-b)x + o(x)}{x} \stackrel{L: x}{=} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (a-b + o(1)) = a-b$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\ln(x+1) - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + o(1)) = 1$$

12. Hatue $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[6]{1+4x} - 2}{\sqrt[5]{1+5x} - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[6]{1+4x} - 2}{\sqrt[5]{1+5x} - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}} + (1+4x)^{\frac{1}{6}} - 2}{(1+5x)^{\frac{1}{5}} - 1} \stackrel{3x \rightarrow 0, 4x \rightarrow 0, 5x \rightarrow 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{3} \cdot 3x + o(3x) + 1 + \frac{1}{6} \cdot 4x + o(4x) - 2}{1 + \frac{1}{5} \cdot 5x + o(5x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x) + \frac{2}{3}x + o(x)}{x + o(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{3}x + o(x)}{x + o(x)} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{3} + o(1)}{1 + o(1)} = \frac{5}{3}$$

13. Usporyadajte $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{3x^2}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{3x^2}} \stackrel{1^\infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{\ln(\cos x)}\right)^{\frac{1}{3x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(\cos x)}{3x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{3x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1 + (-\frac{x^2}{2} + o(x^2)))}{3x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(-\frac{x^2}{2} + o(x^2))}{3x^2}} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{3x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{6} + o(1)} = e^{-\frac{1}{6}}$$

(*) : $o(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)) = o(-\frac{x^2}{2}) + o(o(x^2)) = o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$

У оваквим ситуацијама где се једна фја састоји од друге фјам врло је корисно пребацити на основу e и потом користити своје фја.

14. Наћи $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2} \stackrel{0/0}{=} \left(\begin{array}{l} t = x - 7, x = t + 7 \\ x \rightarrow 7 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t+7+2} - \sqrt[3]{t+7+20}}{\sqrt[4]{t+7+9} - 2} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+t} - \sqrt[3]{27+t}}{\sqrt[4]{16+t} - 2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{1+\frac{t}{9}} - \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{1+\frac{t}{27}}}{\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{1+\frac{t}{16}} - 2} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3 \left(1 + \frac{t}{9}\right)^{\frac{1}{2}} - 3 \left(1 + \frac{t}{27}\right)^{\frac{1}{3}}}{2 \left(1 + \frac{t}{16}\right)^{\frac{1}{4}} - 2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{9} + o(t)\right) - 3 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{t}{27} + o(t)\right)}{2 \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{t}{16} + o(t)\right) - 2} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3 + \frac{t}{6} + o(t) - 3 - \frac{t}{27} - o(t)}{2 + \frac{t}{32} + o(t) - 2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{7t}{54} + o(t)}{\frac{t}{32} + o(t)} \stackrel{L'H}{=} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{7}{54} + o(1)}{\frac{1}{32} + o(1)} = \frac{\frac{7}{54}}{\frac{1}{32}} = \frac{112}{27}$$

Обде кад израса $\sqrt{9+t}$ нисмо одмах могли да искористимо одговарајућу развој $(1+x)^a = 1+ax+o(x), x \rightarrow 0$, бети смо управо морали да извадимо фактор 9 (потом је јачи од t кад $t \rightarrow 0$) како бисмо добили израс $\left(1+\frac{t}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ који се може развити јер $\frac{t}{9} \rightarrow 0$ кад $t \rightarrow 0$.

15. Наћи: а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[5]{x^5 + x^4} - \sqrt{x^2 - 2x} \right)$,

$$\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[5]{x^5 + x^4} - \sqrt{x^2 - 2x}).$$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[5]{x^5 + x^4} - \sqrt{x^2 - 2x}) \stackrel{+\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[5]{x^5(1 + \frac{1}{x})} - \sqrt{x^2(1 - \frac{2}{x})}) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[5]{x^5} \cdot \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{x}}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot (1 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{5}} - |x| \cdot (1 - \frac{2}{x})^{\frac{1}{2}}) =$$

$$\stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x(1 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{5}} - x(1 + \frac{-2}{x})^{\frac{1}{2}}) =$$

$\Gamma(*)$: $x \rightarrow +\infty$, па је од некег интервала $x > 0$ и $|x| = x$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot (1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})) - x \cdot (1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{x} + o(\frac{1}{x}))) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\cancel{x} + \frac{1}{5} + o(1) - \cancel{x} + 1 - o(1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{6}{5} + o(1)) = \frac{6}{5}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[5]{x^5 + x^4} - \sqrt{x^2 - 2x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[5]{x^5} \cdot \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{x}}) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}} - |x| \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{x}}) \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\underbrace{x}_{-\infty} \cdot \underbrace{\sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}}}_0 + \underbrace{|x|}_{-\infty} \cdot \underbrace{\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}_0)$$

$$= -\infty \cdot 1 + (-\infty) \cdot 1 = -\infty$$

$\Gamma(*)$: $x \rightarrow -\infty$, па је од некег интервала $x < 0$ и $|x| = -x$

16. Успарујати $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{\cos \alpha x} - \sqrt[n]{\cos \beta x}}{x^2}$, где су $m, n \in \mathbb{N}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{\cos \alpha x} - \sqrt[n]{\cos \beta x}}{x^2} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1 - \frac{(\alpha x)^2}{2} + o((\alpha x)^2)} - \sqrt[n]{1 - \frac{(\beta x)^2}{2} + o((\beta x)^2)}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(\alpha^2 x^2))^{\frac{1}{m}} - (1 - \frac{\beta^2 x^2}{2} + o(\beta^2 x^2))^{\frac{1}{n}}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{-\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2))^{\frac{1}{m}} - (1 + \frac{-\beta^2 x^2}{2} + o(x^2))^{\frac{1}{n}}}{x^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{m} \cdot \left(-\frac{d^2 x^2}{2} + o(x^2)\right) + o\left(-\frac{d^2 x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \left(-\frac{\beta^2 x^2}{2} + o(x^2)\right) + o\left(-\frac{\beta^2 x^2}{2} + o(x^2)\right)\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{d^2 x^2}{2m} + o(x^2) + o(x^2) - \left(1 - \frac{\beta^2 x^2}{2n} + o(x^2) + o(x^2)\right)}{x^2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} - \frac{d^2 x^2}{2m} + o(x^2) - \cancel{1} + \frac{\beta^2 x^2}{2n} - o(x^2)}{x^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{d^2}{2m} + \frac{\beta^2}{2n} + o(1)\right) = \\
&= -\frac{d^2}{2m} + \frac{\beta^2}{2n}
\end{aligned}$$

Уточнение: $o\left(-\frac{d^2 x^2}{2} + o(x^2)\right) = o\left(-\frac{d^2}{2} x^2\right) + o(o(x^2)) = o(x^2) + o(x^2) = o(x^2), x \rightarrow 0$
 и $o\left(-\frac{\beta^2 x^2}{2} + o(x^2)\right) = o\left(-\frac{\beta^2}{2} x^2\right) + o(o(x^2)) = o(x^2) + o(x^2) = o(x^2), x \rightarrow 0$

17. Если $a, b, c > 0$. Упростите $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} &\stackrel{1^\infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{\ln \frac{a^x + b^x + c^x}{3}}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln \frac{a^x + b^x + c^x}{3}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln \frac{1 + x \ln a + o(x) + 1 + x \ln b + o(x) + 1 + x \ln c + o(x)}{3}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln \frac{3 + x(\ln a + \ln b + \ln c) + o(x)}{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln \left(1 + \frac{\ln(abc)}{3} x + o(x)\right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{\ln(abc)}{3} \cdot x + o(x) + o\left(\frac{\ln(abc)}{3} x + o(x)\right)\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(abc)}{3} + o(1)} = \\
&= e^{\frac{\ln(abc)}{3}} = \left(e^{\ln(abc)}\right)^{\frac{1}{3}} = (abc)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{abc}
\end{aligned}$$

18. Найти $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1 - \tan x} - \sqrt{1 + \tan x}}{\sin 2x}$.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1-\tan x} - \sqrt{1+\tan x}}{\sin 2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \left(\begin{array}{l} t = x - \pi, x = t + \pi \\ x \rightarrow \pi \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\tan(t+\pi)} - \sqrt{1+\tan(t+\pi)}}{\sin(2t+2\pi)} =$$

$\tan$ je π -periodična, a $\sin$ 2π -periodična

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\tan t} - \sqrt{1+\tan t}}{\sin 2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-(t+o(t))} - \sqrt{1+t+o(t)}}{2t+o(2t)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+(-t+o(t)))^{\frac{1}{2}} - (1+(t+o(t)))^{\frac{1}{2}}}{2t+o(t)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}(-t+o(t)) + o(-t+o(t)) - \left(1 + \frac{1}{2}(t+o(t)) + o(t+o(t))\right)}{2t+o(t)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{t}{2} + o(t) + o(t) - \left(1 + \frac{t}{2} + o(t) + o(t)\right)}{2t+o(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{t}{2} + o(t) - 1 - \frac{t}{2} - o(t)}{2t+o(t)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t + o(t)}{2t+o(t)} \stackrel{t \rightarrow 0}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-1 + o(1)}{2 + o(1)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Def. $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ gdje, $a \in A'$ i $g(x) \neq 0$ na nekoj okolini tačke a

$$f \ll g, x \rightarrow a \Leftrightarrow f = o(g), x \rightarrow a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Relaciju $\ll$ možemo „malo manje“ ili „manje nego bezbrojno“ i ona je transitivna ($f \ll g, g \ll h \Rightarrow f \ll h$).

T. (poređbena skala) $a > 1, d > 0, c > 1$ realni brojevi

$$\log_a x \ll x^d \ll c^x \ll x^x, x \rightarrow +\infty$$

T. $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}, a \in A'$ i postoje okolina U_a tačke a t.j. je $(\forall x \in U_a) f(x) \leq g(x)$ i pritom postoje $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ u $\mathbb{R}$. Tada je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

T. (o għer uovvijaġġja) $f, g, h: A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A'$, U_a je okkanna
 uovvja a u.g. $(\forall x \in U_a) f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ u iquintar je
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L \in \mathbb{R}$. Allura uovvja $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$
 jgħid li je L .

T. $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A'$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ u uovvja okkanna U_a uovvja
 a u.g. je fja g oiparviera na U_a . Allura je $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0$.

19. Uparvja: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$, d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x^2}{\sqrt{-x}}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^5 \cdot \sin \frac{1}{x}$,
 e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctg(\sin x + e^x)}{x^2}$.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\sin x}_{\text{oip.}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{0}} = 0$, jgħid li $|\sin x| \leq 1$ za che $x \in \mathbb{R}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x^2}{\sqrt{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\cos x^2}_{\text{oip.}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)}_{\text{0}} = 0$, jgħid li $|\cos x^2| \leq 1$ za che $x \in \mathbb{R}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x^5}_{\text{0}} \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\text{oip.}} = 0$, $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$ za che $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctg(\sin x + e^x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\text{0}} \cdot \underbrace{\arctg(\sin x + e^x)}_{\text{oip.}} = 0$, jgħid li
 $|\arctg(\sin x + e^x)| < \frac{\pi}{2}$

20. Hatt: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + \ln x + e^x - x + 2}{4e^x + 2x + 8 + \sin x}$, d) $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + \ln x + e^x - \sqrt{x} + 2}{4e^x + 2x + 8 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(\frac{x^3}{e^x} + \frac{\ln x}{e^x} + 1 - \frac{\sqrt{x}}{e^x} + \frac{2}{e^x} \right)}{e^x \left(4 + 2 \cdot \frac{x}{e^x} + \frac{8}{e^x} + \frac{\sin x}{e^x} \right)} = \frac{1}{4}$
 (Note: e^x is the "dominant" term)

где смо на основу табрљене сме закључи да иррши $\frac{x^3}{e^x}$, $\frac{\ln x}{e^x}$, и $\frac{x}{e^x}$ ите 0 кад $x \rightarrow +\infty$, док је $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{e^x} \cdot \frac{1}{e^x} = 0$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} \cdot e^{\frac{1}{x}} = \left(\begin{array}{l} t = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{t} \\ x \rightarrow 0+ \Rightarrow t \rightarrow +\infty \end{array} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^{\frac{1}{2}}} = +\infty,$$

јер на основу табрљене сме знамо да је $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{e^t} = 0+$.

Задатак: Икористићи изведене граничне вредности

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ и}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ на табрљенима извештемо табрљене основе меме.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(\begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow \infty \end{array} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left((1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \ln e = 1$$

ln је непрекидна
↓

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left(\begin{array}{l} t = e^x - 1 \Rightarrow e^x = 1 + t \Rightarrow x = \ln(1+t) \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow e^0 - 1 = 0 \end{array} \right) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \frac{1}{1} = 1$$

4) $a > 0$ реалан број

$$1^\circ a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 = \ln 1 = \ln a$$

$$2^\circ a \neq 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\ln a})^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \left(\begin{array}{l} t = x \ln a \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{\frac{t}{\ln a}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} \cdot \ln a = \ln a \end{aligned}$$

$$5) d \in \mathbb{R}$$

$$1^\circ d = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^d - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^0 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 = d$$

$$2^\circ d \neq 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^d - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\ln(1+x)})^d - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{d \ln(1+x)} - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{d \ln(1+x)} - 1}{d \ln(1+x)} \cdot \frac{d \ln(1+x)}{x} = 1 \cdot d \cdot 1 = d \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{d \ln(1+x)} - 1}{d \ln(1+x)} = \left(\begin{array}{l} t = d \ln(1+x) \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow d \cdot \ln 1 = 0 \end{array} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

Хајнсова теорема

T. (Хајне) $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ фја, $a \in A'$ и $L \in \mathbb{R}$. Важи:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \text{за сваки низ } (x_n) \text{ који су мањом у скупу } A \text{ каз}$$
$$\text{т.г. је } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ важи } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L.$$

Једна употреба Хајнсове теореме је доказивање да неки лимес $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ не постоји тако што изберемо два ниса (x_n) и (y_n) који су сви мањом разливити од a и примом да два ниса теже ка a , али нисом $f(x_n)$ и $f(y_n)$ не теже ка истој вредности.

1. Доказати да $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ не постоје.

Уозимо нисоме $x_n = 2n\pi$ и $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ и приметимо да

$$\text{је } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n\pi = 2\pi \cdot (+\infty) = +\infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n\pi + \frac{\pi}{2}) =$$

$$= 2\pi \cdot (+\infty) + \frac{\pi}{2} = +\infty + \frac{\pi}{2} = +\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin 2n\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) \overset{\text{sin је } 2\pi\text{-пермодиан}}{\downarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$0 \neq 1 \overset{\text{Хајне}}{\Rightarrow}$ не постоји $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos 2n\pi \overset{\text{cos је } 2\pi\text{-пермодиан}}{\downarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2n\pi + \frac{\pi}{2}) \overset{\text{cos je } 2\pi\text{-периодична}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

$1 \neq 0 \xRightarrow{\text{Кајне}}$ не постоји $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$.

Упоменат: Посматрањем нулова $x_n = -2n\pi$ и $y_n = -2n\pi + \frac{\pi}{2}$ на исти начин помоћу Кајневе теореме можемо доказати да ни $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$ ни $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x$ не постоје.

Следетни задатак представља уопштење претходног.

2. Нека је $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ неконстантна периодична фја. Доказати да не постоје $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Нека је $T > 0$ период фје f . Пошто она није константна, постоје $a, b \in \mathbb{R}$ т.д. је $f(a) \neq f(b)$.

Прво, нека су $x_n = a + nT$ и $y_n = b + nT$ фја ниса. Одмах видимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a + \underbrace{nT}_{+\infty}) = +\infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b + \underbrace{nT}_{+\infty}) = +\infty \text{ и}$$

чак иако је $x_n \neq +\infty \neq y_n$ за све $n \in \mathbb{N}$. Две црне

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a + nT) \overset{T\text{-периодична}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(a) = f(a) \text{ и}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b + nT) \overset{T\text{-периодична}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(b) = f(b). \text{ Уколико је } f(a) \neq f(b),$$

по Кајневој теорем закључујемо да не постоји $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Аналогно се доказује и да не постоји лимес $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, с

тврђава што је последица теореме $x_n = a - nT$ и $y_n = b - nT$ који теже ка $-\infty$.

Друга употреба Лајбле теореме је та што применом правилна Лопитаља можемо користити познате

развоје функција. Нпр. за $\cos(x_n)$ м.г. је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

$$\text{важи } e^{x_n} = 1 + x_n + o(x_n), \quad \cos x_n = 1 - \frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2),$$

$(1+x_n)^d = 1 + dx_n + o(x_n)$ за $d \in \mathbb{R}$ и два остала познати развоја кад $n \rightarrow \infty$.

3. Иако $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \cos 1 + 2 \cdot \cos \frac{1}{2} + \dots + n \cdot \cos \frac{1}{n}}{n^2}$.

Нас n^2 је сигурно расијати и тежи $+\infty$, па на основу

Лопиталове теореме имамо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \cos 1 + 2 \cdot \cos \frac{1}{2} + \dots + n \cdot \cos \frac{1}{n}}{n^2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{1 \cdot \cos 1} + \cancel{2 \cdot \cos \frac{1}{2}} + \dots + \cancel{n \cdot \cos \frac{1}{n}} + (n+1) \cdot \cos \frac{1}{n+1} - (\cancel{1 \cdot \cos 1} + \cancel{2 \cdot \cos \frac{1}{2}} + \dots + \cancel{n \cdot \cos \frac{1}{n}})}{(n+1)^2 - n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot \cos \frac{1}{n+1}}{n^2 + 2n + 1 - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot \cos \frac{1}{n+1}}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} \cdot \cos \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \cdot \cos \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \cos 0 = \frac{1}{2}$$

4. Иако $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{n^2}$ ако постоји.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{n} = \cos 0 = 1, \text{ па је } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{n^2} \text{ облика } 1^\infty.$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\ln(\cos \frac{1}{n})} \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \cdot \ln(\cos \frac{1}{n})} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \cdot \ln\left(1 + \underbrace{-\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\rightarrow 0}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \cdot \left(\underbrace{-\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\rightarrow 0} + o\left(\underbrace{-\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\rightarrow 0}\right)\right)} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \cdot \left(-\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2} + o(1)} = e^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

5. Упростите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} - \frac{1-n}{2n-1} \right)^{\frac{1}{\sin \frac{2}{n^2}}}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1-n}{2n-1} &= \frac{n+1}{2n+1} + \frac{n-1}{2n-1} = \frac{(n+1)(2n-1) + (n-1)(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} = \\
 &= \frac{2n^2 + 2n - n - 1 + 2n^2 - 2n + n - 1}{4n^2 - 1} = \frac{4n^2 - 2}{4n^2 - 1}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} - \frac{1-n}{2n-1} \right)^{\frac{1}{\sin \frac{2}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2 - 2}{4n^2 - 1} \right)^{\frac{1}{\sin \frac{2}{n^2}}} = "1^\infty"$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{\sin \frac{2}{n^2}} \cdot \ln \frac{4n^2 - 2}{4n^2 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{\sin \frac{2}{n^2}} \cdot \ln \left(1 + \frac{-1}{4n^2 - 1} \right)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{-\frac{1}{4n^2 - 1} + o\left(\frac{1}{4n^2 - 1}\right)}{\frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{-\frac{1}{4n^2 - 1} (1 + o(1))}{\frac{2}{n^2} (1 + o(1))}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{n^2 \cdot (1 + o(1))}{2(4n^2 - 1)} \cdot \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2(4 - \frac{1}{n^2})} \cdot \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)}} = e^{-\frac{1}{8}}$$

6. (Септембар 2 '21) Израчунајте $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sin \frac{1}{n}} - 1}{\ln(n+3) - \ln n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\sin \frac{1}{n}} - 1) = e^{\sin 0} - 1 = e^0 - 1 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(n+3) - \ln n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + \frac{3}{n}) = \ln 1 = 0$$

$\Rightarrow$ израчунати лимес је неопређеног облика $\frac{0}{0}$, па
ћемо користити познате резултате како бисмо
та израчунали

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sin \frac{1}{n}} - 1}{\ln(n+3) - \ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})} - 1}{\ln \frac{n+3}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{1} + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) + o(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})) - \cancel{1}}{\ln(1 + \frac{3}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})}{\frac{3}{n} + o(\frac{1}{n})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{\frac{1}{n}} (1 + o(1))}{\cancel{\frac{1}{n}} (3 + o(1))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + o(1)}{3 + o(1)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Непреривност функција

Def. $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ фја и $a \in A \cap A'$

Укажемо да је f непрекидна у тачки a ако је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
односно ако је $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$.

Уламентар: Укажемо је a изолована тачка скупа A тј.
 $a \in A \setminus A'$, тада је f сваког непрекидна у тачки a .

Т. $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ и $a \in A$. Тада важи:

f је непрекидна у тачки $a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A) |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
 $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A) x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$

Def. f је непрекидна на скупу A ако је непрекидна у свакој тачки скупа A .

Def. f је непрекидна десно у тачки a ако важи

$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$ тј. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x) x \in (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Def. f је непрекидна слева у тачки a ако важи

$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$ тј. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x) x \in (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Т. f је непрекидна у тачки a ако је непрекидна и слева и десно у тачки a .

Т. $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$ и f и g су непрекидне у тачки a .

Тада су и функције $f \pm g$, $\alpha \cdot f$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ непрекидне у тачки a , где је $\alpha \in \mathbb{R}$.

у услову $g(a) \neq 0$

T. $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, f непрекидна у a и g непрекидна у $f(a)$

$\Rightarrow g \circ f$ је непрекидна у тачки a

Заме, збир, разлика, производ, помножик и композиција непрекидних функција су такође непрекидне функције.

T. Све елементарне функције су непрекидне на свом домену.

T. Ако се функције f и g поклапају на отвореном интервалу (a, b) тј. $f(x) = g(x)$ за све $x \in (a, b)$ и g је непрекидна на (a, b) , тада је и f непрекидна на (a, b) .

Пример: Функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ збога се

$f(x) = \arctan(3x+1) - \ln(x^2+2) + x^3 e^x$ је непрекидна на целом $\mathbb{R}$ као композиција елементарних фја.

1. Истимати непрекидност фје $f(x) = |x|$ на свом домену.

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ тј. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

f је непрекидна на отвореном интервалу $(-\infty, 0)$, јер се на њему поклапа са непрекидном фјом $-x$, а непрекидна је и на отвореном интервалу $(0, +\infty)$, јер се на њему поклапа са непрекидном фјом x .

Истимати још непрекидност фје f у тачки $x=0$

тј. за нас важи $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ је непрекидна и у нули}$$

Дакле, f је непрекидна на целом $\mathbb{R}$.

Приметимо да смо код рачунања $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ користили фју $-x$, јер је $f(x) = -x$ на некој левој околини тачке 0 . Слично, за рачунање $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ користили смо фју x , јер се $f(x)$ поклапа са x на некој десној околини тачке 0 .

2. Истражити непрекидност функције $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ где

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Затим смо f као $f(x) = \begin{cases} -\frac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \end{cases}$

Прво, f је непрекидна на отвореним интервалима $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, јер је на тим интервалима

зато као композиција непрекинутих (тј. елементарних) фја. Истицајемо још непрекинутост фје f у тачки t ј. за x важи $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{\sin x}{x} \right) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \\ f(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ није непр. у тачки } 0$$

Зато, f је непрекидна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. Одредити константе $a, b \in \mathbb{R}$ (ако постоје) такве да функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $f(x) = \begin{cases} ax + \sqrt[3]{2x-1}, & x \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ b + \sin \pi x, & \text{иначе} \end{cases}$ буде непрекидна на $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} b + \sin \pi x, & x < -\frac{1}{2} \\ ax + \sqrt[3]{2x-1}, & x \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ b + \sin \pi x, & x > 0 \end{cases}$$

f је непрекидна на отвореним интервалима $(-\infty, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, 0)$ и $(0, +\infty)$ за било које вредности констаната a и b , јер је на њима дата као композиција непрекинутих (елементарних) фја. Истицајемо

још непрекинутост у тачкама $x = -\frac{7}{2}$ и $x = 0$.

непрекинутост у $-\frac{7}{2}$: $\lim_{x \rightarrow -\frac{7}{2}-} f(x) = f(-\frac{7}{2}) = \lim_{x \rightarrow -\frac{7}{2}+} f(x)$?

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\frac{7}{2}-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\frac{7}{2}-} (b + \sin \pi x) = b + \sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = b - \sin \frac{7\pi}{2} = b - \sin\left(2\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = \\ &= b - \sin \frac{3\pi}{2} = b - (-1) = b + 1\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{7}{2}+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{7}{2}+} (ax + \sqrt[3]{2x-1}) = -\frac{7}{2}a + \sqrt[3]{-8} = -\frac{7}{2}a - 2$$

$$f(-\frac{7}{2}) = a \cdot (-\frac{7}{2}) + \sqrt[3]{2 \cdot (-\frac{7}{2}) - 1} = -\frac{7}{2}a - 2$$

$\Rightarrow$ f ће бити непр. у тачки $-\frac{7}{2}$ ако је $b+1 = -\frac{7}{2}a - 2$

непрекинутост у 0 : $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (ax + \sqrt[3]{2x-1}) = a \cdot 0 + \sqrt[3]{2 \cdot 0 - 1} = 0 + (-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (b + \sin \pi x) = b + \sin 0 = b + 0 = b$$

$$f(0) = a \cdot 0 + \sqrt[3]{2 \cdot 0 - 1} = -1$$

$\Rightarrow$ f ће бити непр. у тачки 0 ако је $b = -1$

Дакле, мора бити $b+1 = -\frac{7}{2}a - 2$ и $b = -1$.

$$\Rightarrow -\frac{7}{2}a - 2 = -1 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{7}{2}a = 2 \quad | \cdot (-\frac{2}{7})$$

$$a = -\frac{4}{7}$$

За $a = -\frac{4}{7}$ и $b = -1$ је фја f непр. на $\mathbb{R}$.

4. Одредити константе $a, b \in \mathbb{R}$ (ако постоје) такве да функција $f: (-\frac{\pi}{3}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3} & , x \in (-\frac{\pi}{3}, 0) \\ ax + b & , 0 \leq x < 2 \\ 3x^2 - x - 7 & , x \geq 2 \end{cases}$$

буде непрекидно на $\mathbb{R}$.

f је непрекидна на отвореним интервалима $(-\frac{\pi}{3}, 0)$, $(0, 2)$ и $(2, +\infty)$ за било које вредности констаната a и b , јер је на њима зата као композиција непрекидних (елементарних) фја. Истицаемо још непрекидност у тачкама $x = 0$ и $x = 2$.

Непрекидност у 0: $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1 - (e^{\ln(\cos x)})^{\sin x}}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1 - e^{\sin x \cdot \ln(\cos x)}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1 - e^{\sin x \cdot \ln(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{\sin x \cdot \ln(1 + (\frac{-x^2}{2} + o(x^2)))}}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{\sin x \cdot (-\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)))}}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{(x + o(x)) \cdot (-\frac{x^2}{2} + o(x^2))}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)}}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - (1 + \frac{-x^3}{2} + o(x^3) + o(-\frac{x^3}{2} + o(x^3)))}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{2} + o(1) \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = a \cdot 0 + b = b$$

$$f(0) = a \cdot 0 + b = b$$

$\Rightarrow$ f tre limiti neip. y warchi 0 onka je $b = \frac{1}{2}$

непрерывности y 2: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + b) = a \cdot 2 + b = 2a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x^2 - x - 7) = 3 \cdot 2^2 - 2 - 7 = 3$$

$$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 - 7 = 3$$

$\Rightarrow$ f tre limiti neip. y warchi 0 onka je $2a + b = 3$

Дакле, мора бити $b = \frac{1}{2}$ и $2a + b = 3$.

$$\Rightarrow 2a + \frac{1}{2} = 3$$

$$\Rightarrow 2a = \frac{5}{2}$$

$$a = \frac{5}{4}$$

За $a = \frac{5}{4}$ и $b = \frac{1}{2}$ је фја f непр. на $(-\frac{\pi}{3}, +\infty)$.

5. Дана је фја $f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ са

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 3\pi x + e^{2x+3} + 1}{x^2 - 2} + a, & x \in (-\infty, -2) \\ \sqrt[3]{x+1} \cdot |x^2 + x|, & x \in [-2, 0] \\ \frac{\cos 3x + e^{x^2} - 2}{\ln(1+5x) \cdot \sin 2x} + b, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

Одредити константе $a, b \in \mathbb{R}$ такве да f буде непрекидна на $(-\infty, 1]$.

Прво, f је непрекидна на $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 1]$ за све вредности константи a и b , јер је на сваком од тих интервала дата као композиција елементарних и непрекидних фја (у првом задатку смо доказали да је апсолутна вредност непрекидна фја).

$\Rightarrow$ треба још испитати непрекидност у тачкама -2 и 0

$$\underline{x_0 = -2:} \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\cos 3\pi x + e^{2x+3} + 1}{x^2 - 2} + a$$

$$\parallel$$

$$\frac{\cos(-6\pi) + e^{-1} + 1}{4 - 2} + a = \frac{\cos 0 + \frac{1}{e} + 1}{2} + a = 1 + \frac{1}{2e} + a$$

$$f(-2) = \sqrt[3]{-2+1} \cdot |4-2| = (-1) \cdot 2 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt[3]{x+1} \cdot |x^2+x| = -1 \cdot 2 = -2$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2e} + a = -2 = -2$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -3 - \frac{1}{2e}}$$

$$\underline{x_0 = 0:} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{x+1} \cdot |x^2+x| \quad \begin{matrix} \parallel & \sqrt[3]{1 \cdot 0} \\ & \parallel \\ & 0 \end{matrix}$$

$$\parallel$$

$$\sqrt[3]{0+1} \cdot |0+0| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos 3x + e^{x^2} - 2}{\ln(1+5x) \sin 2x} + b \quad \text{"0/0"}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{(3x)^2}{2} + o(x^2) + 1 + x^2 + o(x^2) - 2}{(5x + o(x))(2x + o(x))} + b =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{9}{2}x^2 + x^2 + o(x^2)}{10x^2 + o(x^2)} + b = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{7}{2}x^2 + o(x^2) \stackrel{L: x^2}{\sim}}{10x^2 + o(x^2)} + b =$$

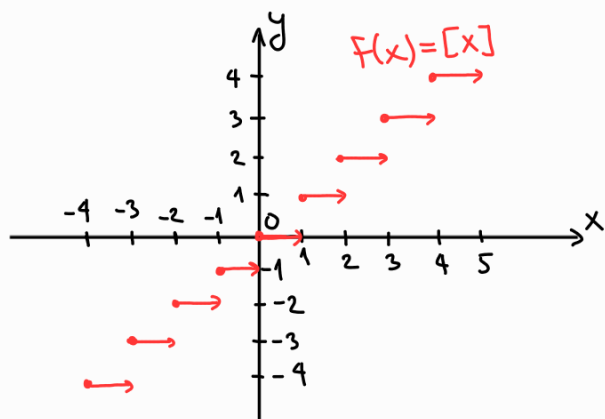
$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{7}{2} + o(1) \rightarrow 0}{10 + o(1) \rightarrow 0} + b = -\frac{7}{20} + b$$

$$\Rightarrow 0 = 0 = -\frac{7}{20} + b \Rightarrow \boxed{b = \frac{7}{20}}$$

За $a = -3 - \frac{1}{2e}$ и $b = \frac{7}{20}$ је f метр. на $(-\infty, 1]$.

6. Испитати непрекидност функције $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ гдје са

$$f(x) = [x] \quad (\text{цео део од } x).$$



$$f(x) = \begin{cases} \dots \\ 3, & x \in [3, 4) \\ 2, & x \in [2, 3) \\ 1, & x \in [1, 2) \\ 0, & x \in [0, 1) \\ -1, & x \in [-1, 0) \\ -2, & x \in [-2, -1) \\ -3, & x \in [-3, -2) \\ \dots \end{cases}$$

Приметимо да за свако $n \in \mathbb{Z}$ и $x \in [n, n+1)$ важи $f(x) = n$.

Значи, на сваком отвореном интервалу $(n, n+1)$, где $n \in \mathbb{Z}$, функција f је константна, па самим тим и непрекидна.

Дакле, f је непрекидна на унији свих ових интервала

тј. на скупу $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Испитујемо још непрекидност фј

f у целим бројним тачкама. Нека је $n \in \mathbb{Z}$ произвољно.

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = f(n) = \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) ?$$

Знамо да је $f(x) = n-1$ за све $x \in [n-1, n)$ и $f(x) = n$

за све $x \in [n, n+1)$. Зато је:

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} (n-1) = n-1, \quad \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} n = n \quad \text{и} \quad f(x) = n,$$

па f није непрекидна у тачки n . Дакле, f није метр.

ни у једној целим бројној тачки, па коначно имамо да

је непрекидна само на скупу $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

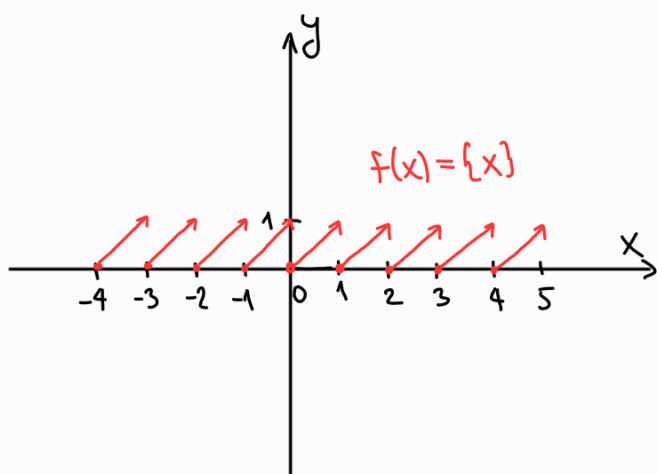
Упоменутар: Унако је у свим целобројним тачкама $n \in \mathbb{Z}$ важило $\lim_{x \rightarrow n+} f(x) = n = f(n)$, што је f непрекидна здесна у целобројним тачкама. А, пошто је f у тачкама изван $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ непрекидна (та је непрекидна и здесна у свима), што је f непрекидна здесна на целом $\mathbb{R}$.

Подсетимо се сада разломљеног дела броја x , у ознаци $\{x\}$, који смо дефинисали као $\{x\} = x - [x]$.

Из особина целог дела извели смо да је $0 \leq \{x\} < 1$ за свако $x \in \mathbb{R}$, па за фју разломљени део можемо сматрати да је демен $\mathbb{R}$, а подемен $[0, 1)$.

Затим, на основу доказане мишенице $[x+1] = [x] + 1$ имамо $\{x+1\} = x+1 - [x+1] = x+1 - ([x] + 1) = x - [x] = \{x\}$ за све $x \in \mathbb{R}$ што значи да је фја разломљени део 1-периодична фја.

7. Испитати непрекидност функције $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1)$ даје са $f(x) = \{x\}$.



$$f(x) = x - [x] = \begin{cases} \dots \\ x-3, & x \in [3, 4) \\ x-2, & x \in [2, 3) \\ x-1, & x \in [1, 2) \\ x, & x \in [0, 1) \\ x+1, & x \in [-1, 0) \\ x+2, & x \in [-2, -1) \\ x+3, & x \in [-3, -2) \\ \dots \end{cases}$$

Приметимо да за свако $n \in \mathbb{Z}$ и $x \in [n, n+1)$ важи $f(x) = x - n$. Значи, на сваком отвореном интервалу $(n, n+1)$, где $n \in \mathbb{Z}$, функција f је непрекидна као композиција непрекидних (елементарних). Дакле, f је непрекидна на унији свих ових интервала тј. на скупу $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Испитујемо још непрекидност фје f у целобројним тачкама. Нека је $n \in \mathbb{Z}$ произвољно.

$$\lim_{x \rightarrow n-} f(x) = f(n) = \lim_{x \rightarrow n+} f(x) ?$$

Знамо да је $f(x) = x - (n-1)$ за све $x \in [n-1, n)$ и $f(x) = x - n$ за све $x \in [n, n+1)$. Зато је:

$$\lim_{x \rightarrow n-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n-} (x - (n-1)) = n - (n-1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow n+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n+} (x - n) =$$

$$= n - n = 0, \quad f(n) = n - n = 0, \quad \text{та } f \text{ није непрекидна у}$$

тачки n . Дакле, f није непр. ни у једној целобројној

тачки, па коначно имамо да је непрекидна само

на скупу $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Слично као у 6. задатку закључујемо да

је и ова фја непрекидна здесна на $\mathbb{R}$.

8. Испитати непрекидност фје $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ гдје са

$$f(x) = [x] \ln x - \ln([x]!).$$

За све $n \in \mathbb{N}$ и $x \in [n, n+1)$ важи $f(x) = n \ln x - \ln(n!)$.

Значи, на сваком отвореном интервалу $(n, n+1)$, где $n \in \mathbb{Z}$, функција f је непрекидна као композиција непрекидних (елементарних). Дакле, f је непрекидна на унији свих ових интервала тј. на скупу $[1, +\infty) \setminus \mathbb{N}$. Испитујемо још непрекидност фјк f у тачкама где су природни бројеви.

Прво, испитујемо непрекидност у тачки 1. Тако је јачен фјк f ску $[1, +\infty)$, то се непрекидност у тачки 1 може испитивати само здека тј. да ли је

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1). \text{ Знамо да је } f(x) = 1 \cdot \ln x - \ln(1!) = \ln x$$

$$\text{за све } x \in [1, 2), \text{ та је } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \ln x = \ln 1 = 0 \text{ и}$$

$$f(1) = \ln 1 = 0, \text{ што значи да је } f \text{ непрекидна у тачки 1.}$$

Нека је сада $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$ произвољно.

$$\text{Знамо да је } f(x) = (n-1) \ln x - \ln((n-1)!) \text{ за све } x \in [n-1, n)$$

$$\text{и } f(x) = n \ln x - \ln(n!) \text{ за све } x \in [n, n+1). \text{ Зато је}$$

$$\lim_{x \rightarrow n-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n-} ((n-1) \ln x - \ln((n-1)!)) = (n-1) \ln n - \ln((n-1)!),$$

$$\lim_{x \rightarrow n+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n+} (n \ln x - \ln(n!)) = n \ln n - \ln(n!) \text{ и}$$

$$f(n) = n \ln n - \ln(n!).$$

$$\text{Тако је } n \ln n - \ln(n!) = n \ln n - \ln(n \cdot (n-1)!) = n \ln n - (\ln n + \ln((n-1)!)) =$$

$$= n \ln n - \ln n - \ln((n-1)!) = (n-1) \ln n - \ln((n-1)!), \text{ па је}$$

f непрекидна у тачки n .

Дакле, f је непрекидна у свим тачкама $n \in \mathbb{N}$, па је непрекидна на миталном скупу $[1, +\infty)$.

Упоменатар: Приметимо да је фја f непрекидна упркос томе што у кој функције функција $[x]$ која је прекидна у неким тачкама. Значи, за збир, разлику, производ, количник или композицију две или више прекидних функција не знамо унапред да ли је прекидна или непрекидна функција.

9. а) Одредити домен функције $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$.

услови: $1+x \geq 0$ због квадратног корена

$\sqrt[3]{1+x} - 1 \neq 0$ због имениоца

$$1+x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \Leftrightarrow x \in [-1, +\infty)$$

$$\sqrt[3]{1+x} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1+x} \neq 1 \Leftrightarrow 1+x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$$

$$\text{Дакле, } \text{Dom}(f) = [-1, 0) \cup (0, +\infty).$$

б) Да ли се функција f може дефинисати у тачки $x=0$ тако да буде непрекидна на $[-1, +\infty)$?

Ово питање заправо значи да ли постоји непрекидна фја $\tilde{f}: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ која се поклапа са f

на $\text{Dom}(f) = [-1, 0) \cup (0, +\infty)$. Другим речима, треба да испитамо да ли постоји константа $a \in \mathbb{R}$

таква да је фја
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [-1, 0) \cup (0, +\infty) \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

непрекидна.

Прво, $\tilde{f}$ је свакако непрекидна на интервалима $[-1, 0)$ и $(0, +\infty)$, јер се ту поклапа са f која је непрекидна као композиција елементарних фја.

Да би $\tilde{f}$ била непрекидна и у нули, мора бити

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{f}(x).$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \tilde{f}(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1+x)^{\frac{1}{3}} - 1} \stackrel{0}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \frac{1}{2}x + o(x) - 1}{1 + \frac{1}{3}x + o(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x}{2} + o(x)}{\frac{x}{3} + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{\frac{1}{3} + o(1)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Потпуно исто добијемо и $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{3}{2}$,

док је $\tilde{f}(0) = a$.

$\Rightarrow$ за $a = \frac{3}{2}$ је $\tilde{f}$ непрекидна на $[-1, +\infty)$

$\Rightarrow f$ се може дефинисати у нули са $\tilde{f}(0) = \frac{3}{2}$ и бити непрекидна на $[-1, +\infty)$

10. а) Одредити домен функције $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$.

Због имениоца разломка $\frac{1}{x-2}$ мора бити $x-2 \neq 0$,
односно $x \neq 2$. Дакле, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

б) Да ли се функција f може дефинисати у
тачки $x=2$ тако да буде непрекидна на $\mathbb{R}$?

Дакле, ипостављено да ли постоји константа $a \in \mathbb{R}$
тако да је фја $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ где са

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \\ a, & x = 2 \end{cases} \quad \text{непрекидна.}$$

Прво, $\tilde{f}$ је свакако непрекидна на интервалима
 $(-\infty, 2)$ и $(2, +\infty)$, јер се ту поклапа са f која је
непрекидна као композиција елементарних фја.

Да би $\tilde{f}$ била непрекидна и у тачки $x=2$, мора

$$\text{бити } \lim_{x \rightarrow 2-} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(2) = \lim_{x \rightarrow 2+} \tilde{f}(x).$$

$$\tilde{f}(2) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{0-}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{0+}} = e^{+\infty} = +\infty$$

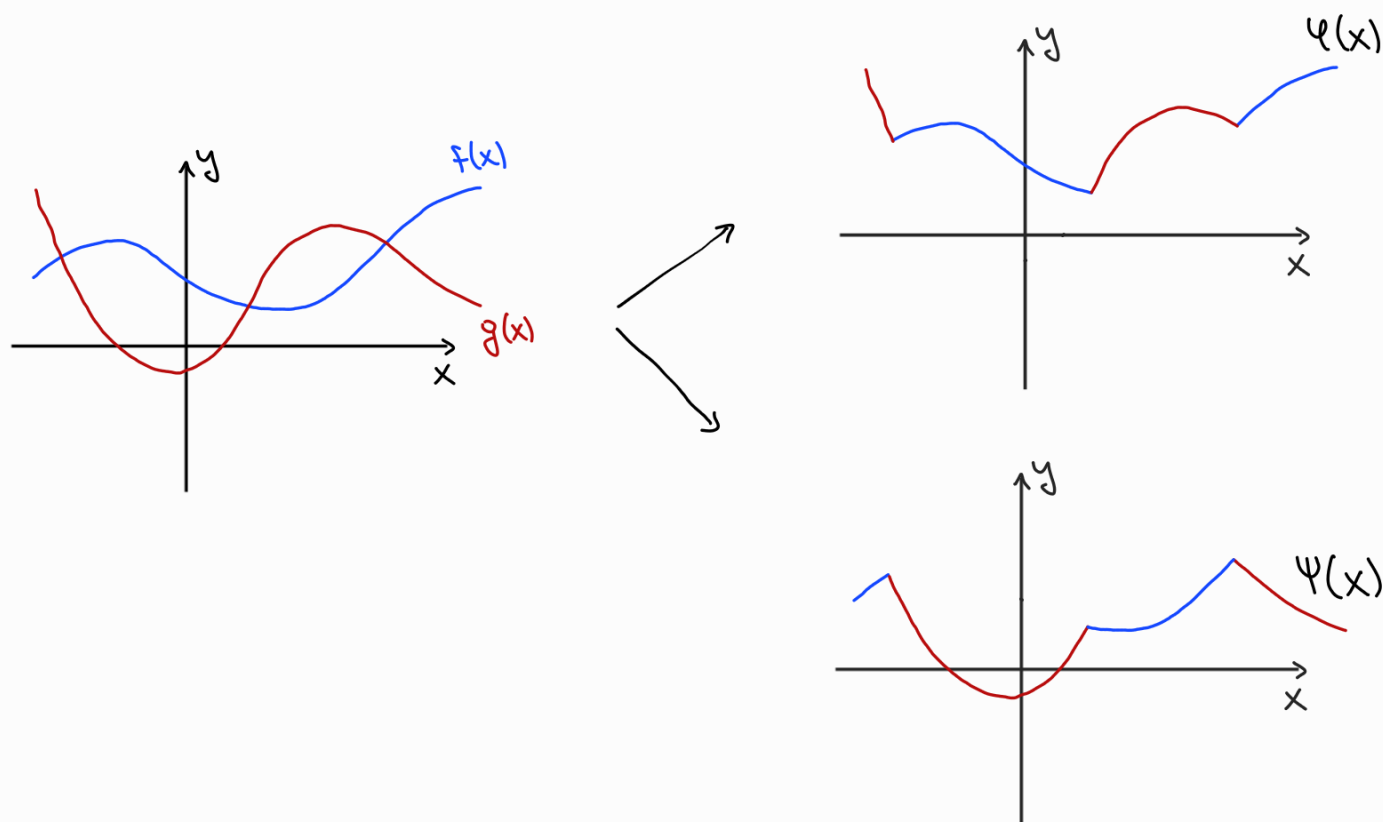
Пошто не постоји константа $a \in \mathbb{R}$ таква да је

$0 = a = +\infty$, то се f не може дефинисати

тако да буде непрекидна на $\mathbb{R}$.

11. Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$ и $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ две непрекидне функције

на скупу A . Успитати непрекинуту функцију
 $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{R}$ гласи са $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ и
 $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$.



Нека су $a, b \in \mathbb{R}$. Тада је $|a - b| = \begin{cases} a - b, & a \geq b \\ b - a, & a \leq b \end{cases}$. Зато је

$$\frac{a+b+|a-b|}{2} = \begin{cases} \frac{a+b+a-b}{2}, & a \geq b \\ \frac{a+b+b-a}{2}, & a \leq b \end{cases} = \begin{cases} a, & a \geq b \\ b, & a \leq b \end{cases} = \max\{a, b\} \text{ и}$$

$$\frac{a+b-|a-b|}{2} = \begin{cases} \frac{a+b-(a-b)}{2}, & a \geq b \\ \frac{a+b-(b-a)}{2}, & a \leq b \end{cases} = \begin{cases} b, & a \geq b \\ a, & a \leq b \end{cases} = \min\{a, b\}.$$

Одатле је $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$ и

$\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$, та су φ и ψ

непрестанно на А као композиције непрестаних фја.

Глобална својства непрекидних функција

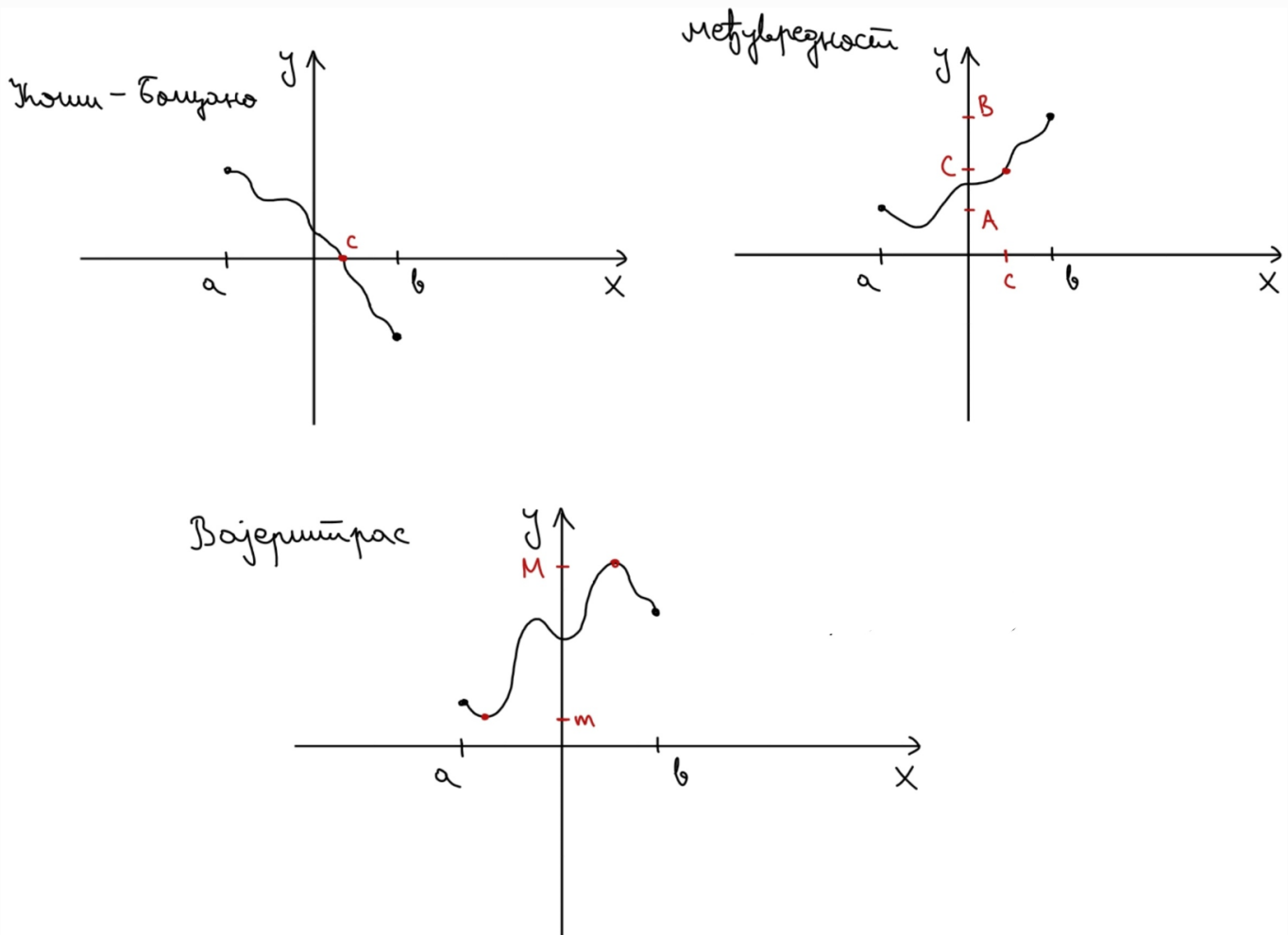
Дефиниција. Нека је $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ функција и $a \in A$ таква да је $f(a) = 0$. Кажемо да је тачка a нула функције f .

Следеће теореме говоре о томе која својства поседују непрекидне функције дефинисане на затвореном интервалу и биће нам врло корисне у наредним задацима.

Теорема [Коши–Болцано]: Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција таква да су вредности $f(a)$ и $f(b)$ супротног знака тј. важи $f(a) \cdot f(b) \leq 0$. Тада постоји $c \in [a, b]$ такво да је $f(c) = 0$.

Теорема [о међувредности]: Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција и $f(a) = A$ и $f(b) = B$. Тада за сваки реалан број C који је између бројева A и B (укључујући и њих) постоји $c \in [a, b]$ такво да је $f(c) = C$.

Теорема [Вајерштрас]: Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција. Тада је она ограничена и достиже свој минимум и максимум. Другим речима, постоје $m, M \in \mathbb{R}$ и $\alpha, \beta \in [a, b]$ такви да важи $m \leq f(x) \leq M$ за све $x \in [a, b]$ и $f(\alpha) = m$ и $f(\beta) = M$.



1. Доказати да једначина

$$7x^5 - 5x^3 + 3x - 2 = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

има бар једно решење на интервалу $(0, 1)$.

Решење: Идеја је да искористимо Коши–Болцанову теорему. Пошто помоћу ње можемо само да докажемо да нека функција има нулу, а не да постоји тачка у којој су две функције једнаке, посматраћемо помоћну функцију коју ћемо конструисати тако да чињеница да дата једначина има решење буде еквивалентна са чињеницом да та функција има нулу. Зато ћемо „пребацити” све на исту страну и посматрати функцију $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисану као $F(x) = 7x^5 - 5x^3 + 3x - 2 - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, која је непрекидна на целом $[0, 1]$ као композиција непрекидних функција. Имамо да је $F(0) = -2 - \sin \pi = -2 < 0$ и $F(1) = 7 - 5 + 3 - 2 - \sin \frac{\pi}{2} = 3 - 1 = 2 > 0$, па по Коши–Болцановој теореме постоји $c \in [0, 1]$ такво да је $F(c) = 0$, а тиме и $7c^5 - 5c^3 + 3c - 2 = \sin\left(\frac{\pi}{2}c\right)$, односно c је решење полазне једначине. Пошто је $F(0) \neq 0 \neq F(1)$, то је $0 \neq c \neq 1$, па имамо да $c \in (0, 1)$, што је и требало доказати.

2. Доказати да једначина $2^x = 5x$ има бар два решења на $[0, +\infty)$.

Решење: Слично као у претходном задатку, посматрамо функцију $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ дату са $F(x) = 2^x - 5x$ и желимо да докажемо да она има бар две нуле на $[0, +\infty)$, одакле ће директно следити тврђење задатка. Она је непрекидна на целом домену као композиција непрекидних функција. Имамо да је $F(0) = 1 - 0 = 1 > 0$ и $F(1) = 2 - 5 = -3 < 0$, па по Коши–Болцановој теореме постоји $x_1 \in [0, 1]$ такво да је $F(x_1) = 0$. Заправо, $x_1 \in (0, 1)$, јер је $F(0) \neq 0 \neq F(1)$. Даље, видимо да је $F(5) = 32 - 25 = 7 > 0$, па поново по Коши–Болцановој теореме постоји $x_2 \in [1, 5]$ такво да је $F(x_2) = 0$. Прецизније, $x_2 \in (1, 5)$, јер је $F(1) \neq 0 \neq F(5)$. Дакле, успели смо да нађемо две различите нуле функције F – једну на интервалу $(0, 1)$ и другу на $(1, 5)$, а самим тим и два различита решења полазне једначине.

3. Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција за коју је $f(f(3)) = 3$. Доказати да функција f има фиксну тачку тј. да постоји $d \in \mathbb{R}$ такво да је $f(d) = d$.

Решење: Водећи се истом идејом као у претходним задацима, дефинишемо функцију $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ са $F(x) = f(x) - x$. Довољно је показати да она има нулу, јер би то значило да постоји $d \in \mathbb{R}$ такво да је $f(d) - d = 0$, односно $f(d) = d$. Приметимо прво да је она непрекидна на целом $\mathbb{R}$ као композиција непрекидних функција. Имамо да је

$$F(3) = f(3) - 3,$$

док је

$$F(f(3)) = f(f(3)) - f(3) = 3 - f(3).$$

Како је $F(3) \cdot F(f(3)) = (f(3) - 3)(3 - f(3)) = -(f(3) - 3)^2 \leq 0$ тј. функција F у тачкама 3 и $f(3)$ узима вредности супротног знака, то постоји неко $d \in \mathbb{R}$ између 3 и $f(3)$ такво да је $F(d) = 0$, а тиме и $f(d) = d$, што је и требало доказати.

Коментар: Уколико је $f(3) = 3$, тврђење задатка одмах следи, јер је $d = 3$ фиксна тачка функције f . Због тога смо горе могли да кажемо да се тачка d налази између тачака 3 и $f(3)$, јер би се у случају када се њих две поклапају и она поклапала са њима.

4. Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција. Доказати да функција f у некој тачки достиже вредност $\frac{f(a) + f(b)}{2}$.

Решење: Доказаћемо да се број $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ налази између бројева $f(a)$ и $f(b)$ и искористити теорему о међувредности. Прво, уколико је $f(a) \leq f(b)$, имамо

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \geq \frac{f(a)+f(a)}{2} = f(a) \quad \text{и}$$

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \frac{f(b)+f(b)}{2} = f(b),$$

па је у овом случају заиста број $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ између бројева $f(a)$ и $f(b)$. У другом случају, уколико је $f(a) \geq f(b)$, имамо

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \geq \frac{f(b)+f(b)}{2} = f(b) \quad \text{и}$$

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \frac{f(a)+f(a)}{2} = f(a),$$

па поново имамо исти закључак. Дакле, у сваком случају је број $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ између бројева $f(a)$ и $f(b)$, па по теореме о међувредности постоји $c \in \mathbb{R}$ такво да је $f(c) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

5. Нека су $f, g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ непрекидне функције, при чему је g „на”. Доказати да постоји $c \in [a, b]$ такво да је $f(c) = g(c)$.

Решење: Посматрајмо помоћну функцију $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ дату са $F(x) = f(x) - g(x)$ и циљ је доказати да она има нулу. Функција F је очигледно непрекидна на целом $[a, b]$ као композиција непрекидних функција. Уколико бисмо успели да нађемо две тачке на интервалу $[a, b]$ у којима функција F узима вредности супротног знака, по Коши–Болцановој теореме би следило да између њих постоји нула функције F . Приметимо да због кодомена функција f и g је за свако $x \in [a, b]$ испуњено $a \leq f(x), g(x) \leq b$. Пошто је g „на”, то постоје $x_1, x_2 \in [a, b]$ такви да је $g(x_1) = a$ и $g(x_2) = b$. Тада је

$$F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = f(x_1) - a \geq a - a = 0$$

и

$$F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = f(x_2) - b \leq b - b = 0,$$

па је $F(x_1) \cdot F(x_2) \leq 0$ и по Коши–Болцановој теореме постоји c између x_1 и x_2 такво да је $F(c) = 0$, а тиме и $f(c) = g(c)$, што је и требало доказати. Дакле, овде смо циљано учили баш тачке x_1 и x_2 у којима функција g достиже вредности a и b , што су најмања и највећа вредност коју функција f може да достигне, па смо на основу тога могли да одредимо знак вредности $F(x_1)$ и $F(x_2)$.

Напомена: Последица овог задатка је да свака непрекидна функција $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ има фиксну тачку. Заиста, ако одаберемо да је $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ и $g(x) = x$, што јесте непрекидна и „на” функција, на основу претходног задатка имамо да постоји $c \in [a, b]$ такво да је $f(c) = c$.

6. Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна и ограничена функција. Доказати да постоји $c \in \mathbb{R}$ за које важи $f(c) = c^3$.

Решење: Уочимо функцију $F(x) = f(x) - x^3$ и докажимо да она има бар једну нулу. Имамо прво

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x^3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(f(x) \cdot \frac{1}{x^3} - 1 \right) = (+\infty)^3 \cdot (0 - 1) = +\infty \cdot (-1) = -\infty,$$

при чему смо знали да је $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \cdot \frac{1}{x^3} \right) = 0$, јер је функција f ограничена по услову задатка и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$. Пошто је $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ негативан (тј. $-\infty$), постоји тачка $a \in \mathbb{R}$ таква да је $F(a) < 0$. Заиста, уколико би за све $x \in \mathbb{R}$ било $F(x) \geq 0$, тада би важило и $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \geq 0$.

Слично, имамо

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(f(x) \cdot \frac{1}{x^3} - 1 \right) = (-\infty)^3 \cdot (0 - 1) = -\infty \cdot (-1) = +\infty,$$

где је $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) \cdot \frac{1}{x^3} \right) = 0$ на основу истог аргумента као и малопре, па пошто је $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ позитиван, то постоји $b \in \mathbb{R}$ такво да је $F(b) > 0$. Нашли смо тачке $a, b \in \mathbb{R}$ такве да је $F(a) < 0$ и $F(b) > 0$, па по Коши–Болцановој теореме постоји тачка c између њих (наравно, $c \in \mathbb{R}$) таква да је $F(c) = 0$, односно $f(c) = c^3$.

Напомена: Овде нисмо (као у претходним задацима) експлицитно пронашли две тачке у којима је функција F позитивна, односно негативна, већ смо до њих дошли тако што смо претходно израчунали неке лimese и видели да су они позитивни, односно негативни и тако закључили да ће и функција бити позитивна, односно негативна у некој тачки. Ту идеју ћемо користити и убудуће када буде погодно.

Коментар: Потпуно аналогно се може доказати и тврђење да за сваки непаран $n \in \mathbb{N}$ и сваку непрекидну и ограничену функцију $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ постоји $c \in \mathbb{R}$ такво да је $f(c) = c^n$.

7. Нека је $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција таква да је $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Доказати да је она ограничена.

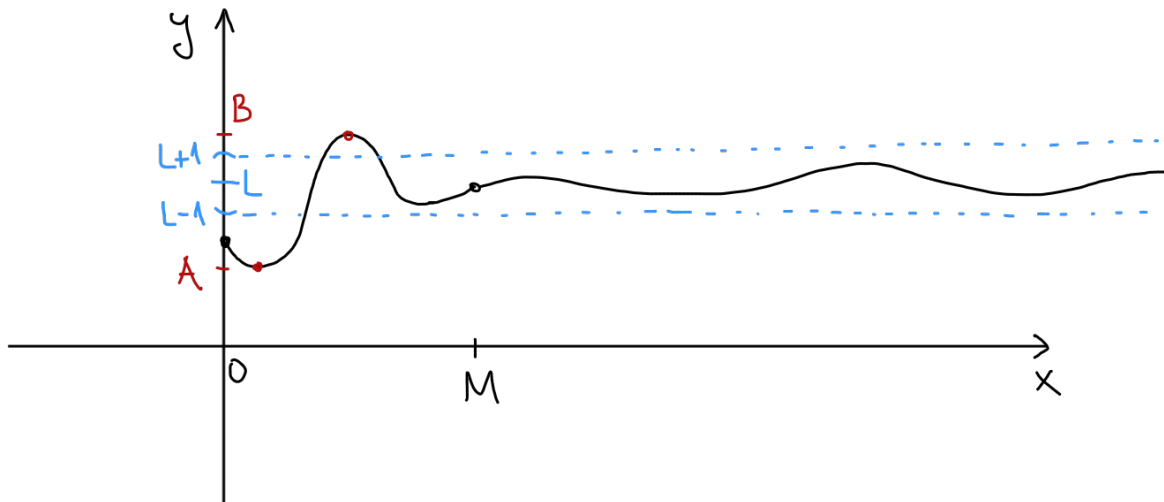
Решење: Из услова задатка да је $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ имамо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in [0, +\infty)) \quad x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Узмимо, на пример, $\varepsilon = 1$. Тада знамо да постоји $M \in \mathbb{R}$ (наравно $M \geq 0$ због домена функције) такво да за све $x > M$ важи $|f(x) - L| < 1$ тј. $f(x) \in (L-1, L+1)$. Дакле, функција f је ограничена на скупу $(M, +\infty)$ (одоздо са $L-1$ и одозго са $L+1$), па је треба још ограничити на интервалу $[0, M]$. Међутим, то знамо да важи на основу Вајерштрасове теореме тј. постоје реални бројеви A и B такви да је $A \leq f(x) \leq B$ за свако $x \in [0, M]$. Дакле, функција f је ограничена на скупу $[0, M]$ и на скупу $(M, +\infty)$, па ће она бити ограничена и на скупу $[0, +\infty)$. Прецизније, имамо да је

$$\min\{A, L-1\} \leq f(x) \leq \max\{B, L+1\}$$

за свако $x \in [0, +\infty)$, што је и требало доказати.



Коментар: Потпуно аналогно се може доказати и да ако је $a \in \mathbb{R}$ и непрекидна функција $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ таква да је $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$, тада је f ограничена на $[a, +\infty)$, а такође и да уколико је непрекидна функција $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ таква да је $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$, тада је f ограничена на $(-\infty, a]$. Сва ова тврђења можемо убудуће (и на писменом испиту) користити као позната.

8. (Јун 1 '23) Дата је функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ са

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x + \sqrt[3]{1+3x} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

а) Одредити константу $a \in \mathbb{R}$ такву да је функција f непрекидна на $\mathbb{R}$.

б) Испитати ограниченост функције f на $\mathbb{R}$ за вредности константе a из дела а).

а) f је за сваку вредност константе a непрекидна на скупу $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ као композиција, па остаје још да испитамо њену непрекидност у тачки 0.

$$f \text{ је некр. у } 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x + \sqrt[3]{1+3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x + (1+3x)^{\frac{1}{3}} - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x + o(x) + 1 + \frac{1}{3} \cdot 3x + o(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x + x + o(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (\pi + 1 + o(1)) = \pi + 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ је непрекидна у 0, па и на $\mathbb{R}$ ако је $a = \pi + 1$

$$\begin{aligned} \delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \pi x + \sqrt[3]{1+3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{x} + \frac{\sqrt[3]{1+3x}}{x} - \underbrace{\left(\frac{1}{x} \right)}_{+\infty} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\sin \pi x}_{\text{огр.}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{x} \right)}_0 + \frac{\sqrt[3]{1+3x}}{\sqrt[3]{x^3}} \right) = 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{1+3x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\underbrace{\frac{1}{x^3}}_0 + \underbrace{\frac{3}{x^2}}_0} = \\ &= \sqrt[3]{0+0} = 0 \end{aligned}$$

и на исти начин добијемо да је и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

f је непрекидна на $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \in \mathbb{R}$

7. задатак

$\Rightarrow f$ је ограничена на $(-\infty, 0]$ и на $[0, +\infty)$

$\Rightarrow f$ је ограничена на $\mathbb{R}$

9. (јул 2 '24)

Дана је функција $g(x) = \frac{\sqrt[3]{1-x^2} - \cos 3\pi x}{x^2}$.

а) [3] Израчунати $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)$.

б) [3] Израчунати $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

в) [3] Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

г) [2] Да ли је функција g монотона на интервалу $(0, +\infty)$?

д) [4] Доказати да функција g има бар две нуле.

Приметимо прво $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt[3]{1-x^2} - \cos 3\pi x}{x^2} = \frac{\sqrt[3]{1-9} - \cos 9\pi}{9} = \frac{\sqrt[3]{-8} - \cos \pi}{9} =$$

$$= \frac{-2 - (-1)}{9} = -\frac{1}{9} \text{ (ovo je zadržalo } g(3), \text{ jer je } g \text{ nep. u } 3)$$

$$\begin{aligned} \delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^2} - \cos 3\pi x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{x^2} - \frac{\cos 3\pi x}{x^2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt[3]{x^6}} - \underbrace{\cos 3\pi x}_{\text{osc.}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\downarrow 0} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^6}} - 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^4}} = \\ &= \sqrt[3]{0-0} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon) \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt[3]{1-x^2} - \cos 3\pi x}{x^2} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(1+(-x^2))^{\frac{1}{3}} - \cos 3\pi x}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 + \frac{1}{3} \cdot (-x^2) + o(x^2) - \left(1 - \frac{9\pi^2 x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \frac{x^2}{3} - 1 + \frac{9\pi^2 x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left(-\frac{1}{3} + \frac{9\pi^2}{2} + o(1) \right) = \frac{9\pi^2}{2} - \frac{1}{3} = \frac{27\pi^2 - 2}{6} \end{aligned}$$

i) $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) > 0$ и $g(3) < 0 \Rightarrow g(0+) > g(3) \Rightarrow g$ nije rastuća na $(0, +\infty)$

$g(3) = -\frac{1}{9}$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \Rightarrow g$ nije opadajuća na $(0, +\infty)$

$\Rightarrow$ funkcija g nije monotona

g) Приметимо да је фја g непрекидна на свом домену (као композиција), као и да је парна пошто је

$$g(-x) = \frac{\sqrt[3]{1-(-x)^2} - \cos(-3\pi x)}{(-x)^2} = \frac{\sqrt[3]{1-x^2} - \cos 3\pi x}{x^2} = g(x) \text{ за све } x \in D_g$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \frac{27\pi^2 - 2}{6}, \quad g(3) = -\frac{1}{9} < 0 \Rightarrow \text{Уолм-Болцано} \quad (\exists c \in (0, 3)) \quad g(c) = 0$$

g је парна $\Rightarrow g(-c) = g(c) = 0$ и $-c \in (-3, 0)$, па је $-c \neq c$

$\Rightarrow g$ има бар две нуле (c и $-c$)

Диференцијабилност функција

Дефиниција. Скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ је отворен ако за сваку његову тачку $a \in A$ постоји $\varepsilon > 0$ такво да је $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A$. Скуп $B \subseteq \mathbb{R}$ је затворен уколико је скуп $B^C = \mathbb{R} \setminus B$ отворен.

Отворени скупови у $\mathbb{R}$ су сви интервали облика (a, b) , уз могућност да буде $a = -\infty$ и $b = +\infty$, као и унија колико год (коначно или бесконачно) таквих интервала.

Дефиниција. Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$ отворен, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ функција и $a \in A$. Уколико постоји коначан

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

односно, након смене $h = x - a$, $h \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

кажемо да је функција f диференцијабилна у тачки a , тај лимес називамо (првим) изводом функције f у тачки a и обележавамо га са $f'(a)$. Дакле,

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Дефиниција. Функција f је диференцијабилна на скупу A уколико је диференцијабилна у свакој тачки скупа A .

Поновићемо сада пар примера са предавања како бисмо провежбали испитивање диференцијабилности и одређивање извода по дефиницији.

1. Одредити извод функције $f(x) = \sin x$.

Решење: Прво, домен функције f је цео скуп $\mathbb{R}$. Нека је $a \in \mathbb{R}$ произвољно. Имамо

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a + h) - \sin a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin a \cos h + \cos a \sin h - \sin a}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin a (\cos h - 1) + \cos a \sin h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin a \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \cdot \frac{\sin h}{h} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin a \cdot \frac{1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2) - 1}{h} + \cos a \cdot 1 \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin a \cdot \frac{-\frac{h^2}{2} + o(h^2)}{h} + \cos a \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin a \cdot \left(-\frac{h}{2} + o(h) \right) + \cos a \right) = \sin a \cdot 0 + \cos a = \cos a. \end{aligned}$$

Дакле, за свако $a \in \mathbb{R}$ је $f'(a) = \cos a$. Зато, за извод функције f имамо $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ тј. f је диференцијабилна на целом $\mathbb{R}$ и $f'(x) = \cos x$, што пишемо и као $(\sin x)' = \cos x$.

Коментар: Горе, у последњем реду израчунавања $f'(a)$ пошто $h \rightarrow 0$, важи $h = o(1)$, па је самим тим $\lim_{h \rightarrow 0} o(h) = \lim_{h \rightarrow 0} o(o(1)) = \lim_{h \rightarrow 0} o(1) = 0$. Убудуће ћемо то често користити – када се под „малим o ” јави израз који тежи нули, све то заједно такође тежи нули.

2. Нека је $k \in \mathbb{R}$ и $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $f(x) = x^k$. Одредити извод функције f .

Решење: Нека је $a \in (0, +\infty)$ произвољно. Имамо

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a + h)^k - a^k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(a \left(1 + \frac{h}{a}\right)\right)^k - a^k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^k \left(1 + \frac{h}{a}\right)^k - a^k}{h} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^k \left(\left(1 + \frac{h}{a}\right)^k - 1 \right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^k \left(1 + k \cdot \frac{h}{a} + o\left(\frac{h}{a}\right) - 1 \right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^k \left(k \cdot \frac{h}{a} + o(h) \right)}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} a^k \left(\frac{k}{a} + o(1) \right) = a^k \cdot \frac{k}{a} = k a^{k-1}.
\end{aligned}$$

Дакле, за све $a > 0$ је $f'(a) = k a^{k-1}$, па је функција $f(x) = x^k$ диференцијабилна на целом интервалу $(0, +\infty)$ и важи $(x^k)' = k x^{k-1}$.

Напомена: За неке вредности реалног броја k (рецимо када је k природан или цео или рационалан број) се домен функције f може проширити и на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ или $\mathbb{R}$, па се у конкретним случајевима може испитати у којим тачкама је ова функција диференцијабилна. Оно што знамо након овог задатка јесте да је она свакако диференцијабилна на $(0, +\infty)$ за све вредности реалног броја k .

3. Одредити извод функције $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ дате са $f(x) = \ln x$.

Решење: Нека је $a \in (0, +\infty)$ произвољно. Имамо

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(a+h) - \ln a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{a+h}{a}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{h}{a}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{a} + o\left(\frac{h}{a}\right)}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{a} + o(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a} + o(1) \right) = \frac{1}{a}.
\end{aligned}$$

Дакле, важи $f'(a) = \frac{1}{a}$ за све $a > 0$, па је функција $f(x) = \ln x$ диференцијабилна на целом интервалу $(0, +\infty)$ и важи $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

На следећој слици можемо видети таблицу извода елементарних функција, коју ћемо надаље јако често користити у задацима.

	Функција $f(x)$	Извод $f'(x)$	Важи за
1.	$c = \text{const}$	0	$x \in \mathbb{R}$
2.	x	1	$x \in \mathbb{R}$
3.	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$ $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q$ непарно, $x \neq 0$ $\alpha = \frac{p}{q} > 1, q$ непарно, $x \in \mathbb{R}$
4.	a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$
5.	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$
6.	$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
7.	$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
8.	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
9.	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
10.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
11.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
12.	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
13.	$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Специјално, из четвртог и петог реда у табели одабиром $a = e$ добијамо $(e^x)' = e^x$ за све $x \in \mathbb{R}$ и, као што смо мало пре извели, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ за све $x > 0$. Такође, уврстићемо неке често коришћене вредности за α у трећи ред табелице, па имамо

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}\right)' &= (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}, \\ \left(\frac{1}{x^2}\right)' &= (x^{-2})' = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}, \\ (\sqrt{x})' &= \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \\ (\sqrt[3]{x})' &= \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.\end{aligned}$$

Дефиниција: Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$ отворен, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ функција и $a \in A$. Уколико постоји коначан

$$\lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

односно, након смене $h = x - a$, $h \rightarrow 0-$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

кажемо да функција f има леви извод у тачки a и њега означавамо са $f'_-(a)$.

Слично, ако постоји коначан

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

односно, након смене $h = x - a$, $h \rightarrow 0+$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

кажемо да функција f има десни извод у тачки a и њега означавамо са $f'_+(a)$.

Теорема: Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$ отворен, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ и $a \in A$. Тада важи

f је диференцијабилна у $a \iff f$ има и леви и десни извод у a и они су једнаки и коначни.

Другима речима, $f'(a)$ постоји акко постоје коначни $f'_-(a)$ и $f'_+(a)$ и важи $f'_-(a) = f'_+(a)$.

Теорема: Нека се функције f и g поклапају на отвореном скупу A тј. важи $f(x) = g(x)$ за све $x \in A$. Ако је f диференцијабилна у тачки $a \in A$, тада је и g диференцијабилна у a и важи $f'(a) = g'(a)$. Наравно, ако је f диференцијабилна на целом A , g је такође диференцијабилна на A и важи $f'(x) = g'(x)$ за свако $x \in A$.

Теорема: Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$ отворен, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ и $a \in A$. Уколико је f диференцијабилна у тачки a , тада је f и непрекидна у a .

Дакле, неопходни услов да функција буде диференцијабилна у некој тачки, јесте да буде непрекидна у тој тачки. Зато, приликом испитивања диференцијабилности функције треба прво проверити да ли је она непрекидна. Ако у некој тачки није непрекидна, одмах следи закључак да у њој није ни диференцијабилна.

Међутим, овај услов није довољан тј. могуће је да функција буде непрекидна у некој тачки, а да не буде диференцијабилна у њој, што можемо видети и у следећем задатку.

4. Испитати диференцијабилност функције $f(x) = |x|$ у тачки 0.

Решење: Од раније знамо да је функција f непрекидна на целом свом домену тј. скупу $\mathbb{R}$, па самим тим и у нули. Израчунаћемо леви и десни извод функције f у нули и упоредити их. Имамо

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

и

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1,$$

па како је $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, то f није диференцијабилна у нули.

Навешћемо сада две важне теореме које нам дају формуле за рачунање збира, разлике, производа, количника и композиције диференцијабилних функција. Убудуће ћемо рачунати изводе функција користећи њих, јер би по дефиницији углавном било сувише компликовано.

Теорема [извод збира, разлике, производа и количника]: Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$ отворен и $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ функције које су диференцијабилне у тачки $a \in A$. Тада важи:

- 1) функција $f + g$ је диференцијабилна у тачки a и важи $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
- 2) за произвољно $\lambda \in \mathbb{R}$ функција λf је диференцијабилна у тачки a и важи $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$;
- 3) функција fg је диференцијабилна у тачки a и важи $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;
- 4) ако је $g(a) \neq 0$, функција $\frac{f}{g}$ је диференцијабилна у тачки a и важи

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Ове формуле се, подразумевајући тачку у којој се рачуна извод, краће могу записати као

$$(f + g)' = f' + g', \quad (\lambda f)' = \lambda f', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Примери:

$$(4x^2 - \cos x)' = 4(x^2)' - (\cos x)' = 4 \cdot 2x - (-\sin x) = 8x + \sin x,$$

$$(xe^x)' = (x)' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x + 1)e^x,$$

$$\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{2 - \ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{2 - \ln x}{2x^{\frac{3}{2}}},$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \end{aligned}$$

Теорема [извод композиције тј. сложене функције]: Нека су $A, B \subseteq \mathbb{R}$ отворени и $g : A \rightarrow B$ и $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ функције такве да је g диференцијабилна у тачки $a \in A$ и f диференцијабилна у тачки $b = g(a)$. Тада је и њихова композиција тј. функција $f \circ g : A \rightarrow \mathbb{R}$ такође диференцијабилна у тачки a и важи

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) = f'(b) \cdot g'(a).$$

Пример: Желимо да израчунамо извод функције $h(x) = \sin(x^2)$. Уколико дефинишемо функције $g(x) = x^2$ и $f(x) = \sin x$, видимо да важи $h = f \circ g$. Из таблице извода знамо $f'(x) = \cos x$ и $g'(x) = 2x$ за свако $x \in \mathbb{R}$, па су функције f и g су диференцијабилне на целом $\mathbb{R}$, а онда је

по теореме и функција h такође диференцијабилна на целом $\mathbb{R}$ као њихова композиција и за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(g(x)) \cdot 2x = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cos(x^2).$$

Убудуће не морамо овако експлицитно уводити функције чија је композиција једнака функцији чији извод рачунамо, већ то можемо усмено радити. У том случају бисмо писали

$$(\sin(x^2))' = \cos(x^2) \cdot (x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cos(x^2).$$

Слично, имамо

$$\begin{aligned} (\ln(x^2 + x + 1))' &= \frac{1}{x^2 + x + 1} \cdot (x^2 + x + 1)' = \frac{1}{x^2 + x + 1} \cdot (2x + 1) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}, \\ \left(\arctg\left(\frac{1}{x}\right)\right)' &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x^2 + 1}, \\ \left(\operatorname{arccctg} \frac{2x}{1-x^2}\right)' &= -\frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} \cdot \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)' = -\frac{1}{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2) - 2x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \\ &= -\frac{2-2x^2+4x^2}{(1-x^2)^2+4x^2} = -\frac{2(1+x^2)}{1-2x^2+x^4+4x^2} = -\frac{2(1+x^2)}{1+2x^2+x^4} = -\frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{2}{1+x^2}, \\ \left(\sqrt{3+\sqrt{\sin x}}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{\sin x}}} \cdot (3+\sqrt{\sin x})' = \frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{\sin x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{4\sqrt{3+\sqrt{\sin x}}\sqrt{\sin x}}. \end{aligned}$$

Можемо извести правила и за извод збира и производа више од две диференцијабилне функције. Рецимо, за три диференцијабилне функције f, g и h имамо

$$(f + g + h)' = ((f + g) + h)' = (f + g)' + h' = f' + g' + h' \quad \text{и}$$

$$(fgh)' = ((fg)h)' = (fg)'h + (fg)h' = (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

Аналогно се за $n \in \mathbb{N}$ диференцијабилних функција $f_1, f_2, \dots, f_n$ може извести

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)' = f_1' + f_2' + \dots + f_n' \quad \text{и}$$

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot \dots \cdot f_n + \dots + f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n'.$$

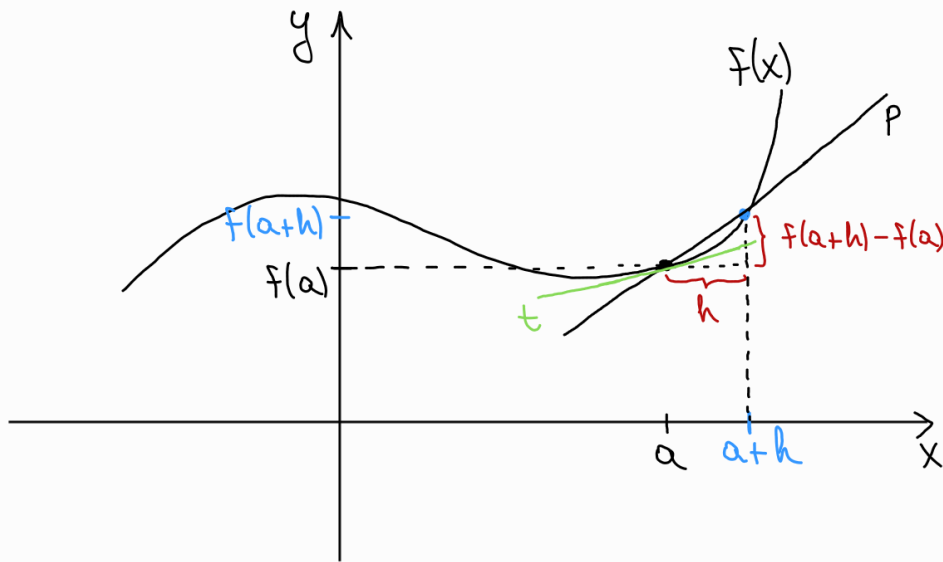
Пример: $(x^2 \cdot e^x \cdot \ln x)' = 2x \cdot e^x \cdot \ln x + x^2 \cdot e^x \cdot \ln x + x^2 \cdot e^x \cdot \frac{1}{x} = 2xe^x \ln x + x^2 e^x \ln x + xe^x =$
 $= xe^x(2 \ln x + x \ln x + 1).$

Пример: Посматрајмо функцију $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ дату са $f(x) = x^x$. Она није ни степена ни експоненцијална функција, јер су овде и основа и изложилац функције које зависе од x , па за израчунавање њеног извода не можемо директно користити ни трећи ни четврти ред из таблице извода. Идеја је да прво израз из функције f запишемо са основом e , па се онда њен извод лако може рачунати као извод сложене функције. Како је $x = e^{\ln x}$, то је $x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$ и

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = e^{x \ln x} \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = e^{x \ln x} (\ln x + 1).$$

Ово ћемо увек радити када рачунамо извод функције која је у облику степена, а притом и основа и изложилац зависе од променљиве x .

Геометријска интерпретација првог услова



Коefицијент правца праве p је $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Уколико је h све мање, тачка $(a+h, f(a+h))$ је на графику све ближа тачки $(a, f(a))$, па је и права p све ближа тангенти t на график функције f у тачки $(a, f(a))$. Зато, након пуштања да $h \rightarrow 0$ тачка $(a+h, f(a+h))$ „постоје“ тачка $(a, f(a))$, а онда права p „постоје“ тангенту t и коef. правца праве p „постоје“ коef. правца праве t .

Закључак, коefицијент правца тангенте t у тачки $(a, f(a))$ је $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$.

Што значи да (јединствена) тангента на график функције f у тачки $(a, f(a))$ постоји ако је функција f диференцијабилна у тачки a и у том случају

је коефицијент правца тангенте једнак $f'(a)$.

5. Наћи тангенту на график функције

$f(x) = 3x^2 + e^x - x$ у тачки чија је x -координата једнака 1.

$$a=1 \Rightarrow f(a) = 3 \cdot 1^2 + e^1 - 1 = 2 + e$$

$$t: y = kx + n$$

знамо да је $k = f'(1)$

$$f'(x) = (3x^2 + e^x - x)' = 3 \cdot 2x + e^x - 1 = 6x + e^x - 1$$

$$\Rightarrow k = f'(1) = 6 \cdot 1 + e^1 - 1 = 5 + e \Rightarrow t: y = (5 + e)x + n$$

$$\text{знамо } (1, 2 + e) \in t \Rightarrow 2 + e = (5 + e) \cdot 1 + n$$

$$\Rightarrow n = -3$$

Дакле, тражена тангента има једначину

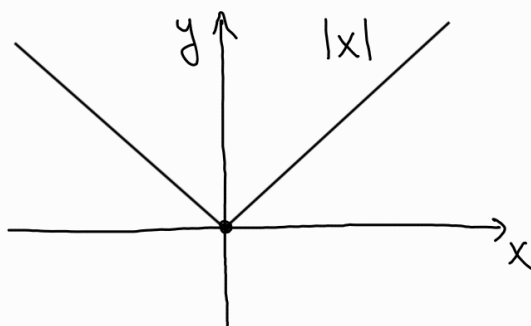
$$y = (5 + e)x - 3.$$

Упоменутар: За фју $f(x) = |x|$ смо у 4. задатку видели

да није диференцијабилна у нули, што се на

њеном графику илустрије тако што у тачки $(0, 0)$

има „шиш“, па нема тангенту у тој.



У наредним задацима бавићемо се испитивањем диференцијабилности функције на неком скупу. Углавном ће функција бити изражена помоћу елементарних функција и рачунаћемо њен извод користећи правила диференцирања. У тачкама у којима је он дефинисан наша функција је диференцијабилна, док у тачкама где није дефинисан морамо по дефиницији испитати њену диференцијабилност.

6. Испитати диференцијабилност функције $f(x) = |x|$.

Решење: Прво, знамо од раније да је ова функција непрекидна на свом домену тј. скупу $\mathbb{R}$, па можемо прећи на испитивање диференцијабилности. Запишимо је у погоднијем облику тј.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Пошто за све $x \in (-\infty, 0)$ важи $f(x) = -x$, то је $f'(x) = (-x)' = -1$ за све $x < 0$. Слично, пошто је $f(x) = x$ за све $x \in (0, +\infty)$, то је и $f'(x) = 1$ за све $x > 0$. Дакле, f је диференцијабилна на интервалима $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ и важи

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Преостаје још тачка 0, међутим, њу смо већ испитали у 4. задатку и видели да у њој функција f није диференцијабилна. Дакле, f је диференцијабилна на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

7. Испитати диференцијабилност функције $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дате са $f(x) = x \cdot |x|$.

Решење: Прво, f је непрекидна на скупу $\mathbb{R}$ као композиција непрекидних функција (раније смо доказали да је апсолутна вредност непрекидна функција). Можемо је записати у облику

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

За све $x \in (-\infty, 0)$ имамо $f(x) = -x^2$, па је и $f'(x) = (-x^2)' = -2x$. Израз $-2x$ је заиста дефинисан на $(-\infty, 0)$, па је f диференцијабилна на овом интервалу и притом је на њему $f'(x) = -2x$. Слично, за све $x \in (0, +\infty)$ је $f(x) = x^2$, па имамо $f'(x) = (x^2)' = 2x$. Како је израз $2x$ дефинисан на том отвореном интервалу, то је f диференцијабилна на њему и ту важи $f'(x) = 2x$. Дакле, f је диференцијабилна на интервалима $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ и важи

$$f'(x) = \begin{cases} -2x, & x < 0, \\ 2x, & x > 0. \end{cases}$$

Преостаје да испитамо још диференцијабилност у тачки 0. Имамо

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h^2 - 0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-h) = 0$$

и

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h = 0,$$

па пошто су леви и десни извод једнаки, f је диференцијабилна у нули. Дакле, f је диференцијабилна на целом $\mathbb{R}$.

Коментар: Приметимо да је функција f диференцијабилна иако је задата као производ једне диференцијабилне функције и друге функције која није диференцијабилна. Значи, када у некој

функцији као израз фигурише функција која није диференцијабилна, не можемо одмах закључити за полазну функцију да такође није диференцијабилна, већ то морамо испитати у конкретном случају.

8. Одредити константе $a, b \in \mathbb{R}$ такве да функција f буде диференцијабилна на скупу $\mathbb{R}$, при чему је

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{-bx} + a, & x < 0, \\ x^3 + bx, & x \geq 0. \end{cases}$$

Решење: Прво, f мора бити непрекидна на $\mathbb{R}$. Она је непрекидна на отвореним интервалима $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ као композиција непрекидних функција за све вредности бројева a и b , па треба проверити још непрекидност у тачки 0. Имамо да је

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x \cdot e^{-bx} + a) = 0 \cdot e^{-b \cdot 0} + a = 0 + a = a,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + bx) = 0^3 + b \cdot 0 = 0 \quad \text{и} \\ f(0) &= 0^3 + b \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

па је f непрекидна у нули акко је $a = 0$. Дакле, надаље је

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{-bx}, & x < 0, \\ x^3 + bx, & x \geq 0. \end{cases}$$

На интервалу $(-\infty, 0)$ имамо $f(x) = x \cdot e^{-bx}$, па је и

$$f'(x) = (x \cdot e^{-bx})' = 1 \cdot e^{-bx} + x \cdot (e^{-bx})' = e^{-bx} + x \cdot e^{-bx} \cdot (-bx)' = e^{-bx} + x \cdot e^{-bx} \cdot (-b) = e^{-bx}(1 - bx).$$

Како је израз $e^{-bx}(1 - bx)$ дефинисан за све $x \in (-\infty, 0)$, то је f диференцијабилна на том интервалу. Затим, за све $x \in (0, +\infty)$ је $f(x) = x^3 + bx$, па је и

$$f'(x) = (x^3 + bx)' = 3x^2 + b.$$

Израз $3x^2 + b$ је дефинисан на целом интервалу $(0, +\infty)$, па је самим тим f диференцијабилна на њему. Значи, f је свакако диференцијабилна на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ и важи

$$f(x) = \begin{cases} e^{-bx}(1 - bx), & x < 0, \\ 3x^2 + b, & x > 0, \end{cases}$$

па треба још испитати диференцијабилност у нули. Имамо да је

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h \cdot e^{-bh} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h e^{-bh}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} e^{-bh} = e^{-b \cdot 0} = e^0 = 1$$

$$\text{и } f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^3 + bh - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(h^2 + b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (h^2 + b) = 0^2 + b = b,$$

па је f диференцијабилна у нули акко је $f'_-(0) = f'_+(0)$ тј. $b = 1$.

Дакле, за $a = 0$ и $b = 1$ функција f је диференцијабилна на $\mathbb{R}$.

9. Испитати диференцијабилност функције $f(x) = \sqrt[3]{x}$ на њеном домену.

Решење: Домен ове функције је цео скуп $\mathbb{R}$. Имамо

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Израз $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ дефинисан је за све $x \neq 0$, па одмах имамо да је функција f диференцијабилна на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ и да је $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ на том скупу. Тачку 0 ћемо морати да испитамо по дефиницији. Имамо

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(0+)^2}} = \frac{1}{0+} = +\infty,$$

па пошто десни извод у нули није коначан, то f није диференцијабилна у тој тачки. Дакле, f је диференцијабилна на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

10. Испитати диференцијабилност функције $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ на њеном домену.

Решење: За почетак ћемо утврдити домен ове функције. С обзиром да се јавља квадратни корен, мора важити $1 - e^{-x^2} \geq 0$ тј. $e^{-x^2} \leq 1$. Пошто је $\ln x$ строго растућа функција, након логаритмовања обе стране последње је еквивалентно са $-x^2 \leq 0$ тј. $x^2 \geq 0$, што је тачно за свако $x \in \mathbb{R}$. Значи, домен ове функције је цео скуп $\mathbb{R}$. Сада рачунамо њен извод и проверавамо где је он дефинисан.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{-x^2}}} \cdot (1 - e^{-x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{-x^2}}} \cdot (-e^{-x^2} \cdot (-x^2)') = \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{-x^2}}} \cdot (-e^{-x^2} \cdot (-2x)) = \\ &= \frac{2xe^{-x^2}}{2\sqrt{1 - e^{-x^2}}} = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}. \end{aligned}$$

Израз $\frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}$ је дефинисан за све x за које је $1 - e^{-x^2} \geq 0$ и $\sqrt{1 - e^{-x^2}} \neq 0$, што је еквивалентно са $1 - e^{-x^2} > 0$ односно $e^{-x^2} < 1$. Слично као малопре, логаритмовањем добијамо $-x^2 < 0$ тј. $x^2 > 0$, а то је тачно за све $x \in \mathbb{R}$, осим за $x = 0$. Дакле, овим смо добили да је f диференцијабилна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, па треба још испитати диференцијабилност у тачки 0. Имамо да је

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{1 - e^{-h^2}} - \sqrt{1 - e^0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{1 - e^{-h^2}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{1 - e^{-h^2}}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{1 - (1 + (-h^2) + o(-h^2))}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{h^2 + o(h^2)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{h^2} \sqrt{1 + o(1)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{|h| \sqrt{1 + o(1)}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h \sqrt{1 + o(1)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} -\sqrt{1 + o(1)} = -\sqrt{1 + 0} = -1 \\ \text{и } f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1 - e^{-h^2}} - \sqrt{1 - e^0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1 - e^{-h^2}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1 - e^{-h^2}}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1 - (1 + (-h^2) + o(-h^2))}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{h^2 + o(h^2)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{h^2} \sqrt{1 + o(1)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|h| \sqrt{1 + o(1)}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h \sqrt{1 + o(1)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \sqrt{1 + o(1)} = \sqrt{1 + 0} = 1 \end{aligned}$$

па пошто је $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, функција f није диференцијабилна у нули. Дакле, она је диференцијабилна на скупу $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

11. Определите константы $\alpha, \beta, \mu, \delta \in \mathbb{R}$ такие, чтобы f была

$$f(x) = \begin{cases} e^{\alpha x} + \beta, & x \leq 0 \\ x^2 + x + 1, & 0 < x \leq 2 \\ \mu x + \delta, & x > 2 \end{cases} \quad \text{была дифференцируема на } \mathbb{R}.$$

Прежде всего, f должна быть непрерывна на $\mathbb{R}$.

f является непрерывной на $(-\infty, 0)$, на $(0, 2)$ и

на $(2, +\infty)$ как композиция непрерывных ф-х.

Непрерывность в 0: $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (e^{\alpha x} + \beta) = e^{\alpha \cdot 0} + \beta = 1 + \beta$$

$$f(0) = e^{\alpha \cdot 0} + \beta = 1 + \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x^2 + x + 1) = 0^2 + 0 + 1 = 1$$

$$\Rightarrow \text{должно быть } 1 + \beta = 1 + \beta = 1$$

т.е. $\beta = 0$

Непрерывность в 2: $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x^2 + x + 1) = 2^2 + 2 + 1 = 7$$

$$f(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (\mu x + \delta) = 2\mu + \delta$$

$$\Rightarrow \text{должно быть } 7 = 7 = 2\mu + \delta$$

тј. $2\mu + \delta = 7$

Дакле, да би f била непрекидна на $\mathbb{R}$, мора бити $\beta = 0$ и $2\mu + \delta = 7$, па подразумевано да то важи наредбе.

за $x \in (-\infty, 0)$ имамо:

$$f(x) = e^{\alpha x} + \beta = e^{\alpha x} + 0 = e^{\alpha x}$$

$$f'(x) = e^{\alpha x} \cdot (\alpha x)' = \alpha e^{\alpha x} \text{ што је дефинисано за све } x \in (-\infty, 0)$$

$\Rightarrow f$ је диференцијабилна на $(-\infty, 0)$ за све вредности констаната $\alpha, \beta, \mu, \delta$

за $x \in (0, 2)$ имамо:

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = (x^2 + x + 1)' = 2x + 1 + 0 = 2x + 1 \text{ што је дефинисано за све } x \in (0, 2)$$

$\Rightarrow f$ је диференцијабилна на $(0, 2)$ за све вредности констаната $\alpha, \beta, \mu, \delta$

за $x \in (2, +\infty)$ имамо:

$$f(x) = \mu x + \delta$$

$$f'(x) = (\mu x + \delta)' = \mu \cdot 1 + 0 = \mu \text{ што је дефинисано за све } x \in (2, +\infty)$$

$\Rightarrow f$ је диференцијабилна на $(2, +\infty)$ за

де вредности константа $\alpha, \beta, \mu, \delta$

$$\text{Значи, } f'(x) = \begin{cases} \alpha e^{\alpha x}, & x < 0 \\ 2x+1, & x \in (0, 2) \\ \mu, & x > 2 \end{cases}.$$

Испитијемо још тачке 0 и 2.

диференцијабилност у 0: $f'_-(0) = f'_+(0)$?

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{\alpha h} + \beta - (e^0 + \beta)}{h} \stackrel{\beta=0}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{\alpha h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{1} + \alpha h + o(h) - \cancel{1}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (\alpha + o(1)) = \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 + h + 1 - (e^0 + \beta)}{h} \stackrel{\beta=0}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 + h + \cancel{1} - \cancel{1}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} (h+1) = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ мора бити $\alpha=1$

диференцијабилност у 2: $f'_-(2) = f'_+(2)$?

$$f'_-(2) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(2+h)^2 + (2+h) + 1 - (2^2 + 2 + 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{4 + 4h + h^2 + 2 + h + 1 - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{5h + h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} (5 + h) = 5$$

$$f'_+(2) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mu \cdot (2+h) + \delta - (2^2 + 2 + 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2\mu + \mu h + \delta - 7}{h} \stackrel{2\mu + \delta = 7}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mu h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \mu = \mu$$

$\Rightarrow$ мора бити $\mu = 5$

Дакле, f је диференцијабилна на $\mathbb{R}$ ако је

$$\begin{array}{l} \beta = 0 \\ 2\mu + \delta = 7 \\ \alpha = 1 \\ \mu = 5 \end{array} \rightarrow \delta = -3 \quad \text{тј.} \quad \alpha = 1, \beta = 0, \mu = 5 \text{ и } \delta = -3.$$

Сада ћемо навести једну лему која ће нам нешто бити веома корисна приликом израчунавања левог и десног извода f -је у конкретној тачки како смо већ видели да то рачунамо по дефиницији. Њу смо могли да користимо и у претходно израђеним задацима, али није било неопходно.

Лема: Нeka је $a \in \mathbb{R}$. Ако је f диференцијабилна

на некој десној околини $(a, a+\delta)$ тачке a и постоји $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x) = D \in \overline{\mathbb{R}}$, тада је $F'_+(a) = D$.

Слично, ако је фја f диференцијабилна на некој левој околини $(a-\delta, a)$ тачке a и постоји $\lim_{x \rightarrow a-} f'(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$, тада је $F'_-(a) = L$.

12. Дана је функција $f: (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ са

$$f(x) = \begin{cases} \pi\sqrt{3+x} + c, & x \in (-3, 1] \\ 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \ln(x^2+1), & x > 1 \end{cases}$$

а) Одредити константу $c \in \mathbb{R}$ такву да f буде непрекидна.

б) Испитати диференцијабилност функције f за добијену вредност константе c из дела а).

а) f је непрекидна на $(-3, 1)$ и на $(1, +\infty)$ као композиција непрекидних фја. Треба још испитати непрекидност у тачки 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (\pi\sqrt{3+x} + c) = \pi \cdot \sqrt{3+1} + c = 2\pi + c$$

$$f(1) = \pi \cdot \sqrt{3+1} + c = 2\pi + c$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \left(8 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \ln(x^2+1) \right) = 8 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{1} + \ln(1^2+1) =$$

$$= 8 \cdot \arctan 1 + \ln 2 = 8 \cdot \frac{\pi}{4} + \ln 2 = 2\pi + \ln 2$$

$\Rightarrow f$ је непрекидна у сваком тачки ако је

$$2\pi + c = 2\pi + c = 2\pi + \ln 2 \text{ тј. ако је } c = \ln 2$$

За $c = \ln 2$ је f непрекидна на $(-3, +\infty)$.

$$\delta) \quad f(x) = \begin{cases} \pi\sqrt{3+x} + \ln 2, & x \in (-3, 1] \\ 8\arctan \frac{1}{x} + \ln(x^2+1), & x > 1 \end{cases}$$

за $x \in (-3, 1)$ имамо: $f(x) = \pi\sqrt{3+x} + \ln 2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\pi\sqrt{3+x} + \ln 2)' = \pi \cdot \frac{1}{2\sqrt{3+x}} \cdot \underbrace{(3+x)'}_1 + 0 = \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{3+x}} \text{ што је дефинисано за } \\ &\quad \text{све } x \in (-3, 1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ је диференцијабилна на $(-3, 1)$

за $x \in (1, +\infty)$ имамо: $f(x) = 8\arctan \frac{1}{x} + \ln(x^2+1)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(8\arctan \frac{1}{x} + \ln(x^2+1)\right)' = 8 \cdot \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' + \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2+1)' = \\ &= \frac{8}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{-8}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1} = \\ &= \frac{2x-8}{x^2+1} \text{ што је дефинисано за све } x \in (1, +\infty) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ је диференцијабилна на $(1, +\infty)$

Дакле, f је диференцијабилна на $(-3, 1) \cup (1, +\infty)$ и

$$\text{такође} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt{3+x}}, & x \in (-3, 1) \\ \frac{2x-8}{x^2+1}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Преба још испитати диференцијабилност у тачки 1.

$$f'_-(1) = f'_+(1) ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi}{2\sqrt{3+x}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3+1}} = \frac{\pi}{4} \xRightarrow{\text{лема}} f'_-(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-8}{x^2+1} = \frac{2 \cdot 1 - 8}{1^2 + 1} = -3 \xRightarrow{\text{лема}} f'_+(1) = -3$$

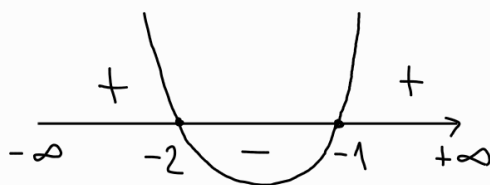
$$\frac{\pi}{4} \neq -3 \Rightarrow f \text{ није диференцијабилна у } 1$$

$\Rightarrow f$ је диференцијабилна на $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

13. (Септембар 2 '24) Испитати диференцијабилност функције $f(x) = (x+2)|x^2+3x+2|$ на интервалу $(-\infty, 0)$.

Најпре, f је непрекидна на $(-\infty, 0)$ као композиција непрекидних фја (доказали смо раније да је апсолутна вредност непрекидна фја), па можемо претћи на испитивање њене диференцијабилности. Пре тога ћемо је записати у потпунијем облику.

$$x^2+3x+2 = x^2+2x+x+2 = x(x+2)+x+2 = (x+1)(x+2)$$



$$\Rightarrow x^2+3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \vee x \geq -1$$

$$\Rightarrow |x^2+3x+2| = |(x+1)(x+2)| = \begin{cases} (x+1)(x+2), & x \in (-\infty, -2] \cup [-1, 0) \\ -(x+1)(x+2), & x \in (-2, -1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} (x+1)(x+2)^2, & x \in (-\infty, -2] \cup [-1, 0) \\ -(x+1)(x+2)^2, & x \in (-2, -1) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (x+1)(x+2)^2, & x \in (-\infty, -2] \\ -(x+1)(x+2)^2, & x \in (-2, -1) \\ (x+1)(x+2)^2, & x \in [-1, 0) \end{cases}$$

За $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0)$ имамо: $f(x) = (x+1)(x+2)^2$, та је

$f'(x) = 1 \cdot (x+2)^2 + (x+1) \cdot 2(x+2) \cdot 1 = (x+2)(x+2+2(x+1)) = (x+2)(3x+4)$ што је дефинисано за све $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0)$

$\Rightarrow f$ је диференцијабилна на скупу $(-\infty, -2) \cup (-1, 0)$

За $x \in (-2, -1)$: $f(x) = -(x+1)(x+2)^2$, та истим рачуном као малопре добијамо $f'(x) = -(x+2)(3x+4)$ што је дефинисано за све $x \in (-2, -1)$

$\Rightarrow f$ је диференцијабилна на $(-2, -1)$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} (x+2)(3x+4), & x \in (-\infty, -2) \\ -(x+2)(3x+4), & x \in (-2, -1) \\ (x+2)(3x+4), & x \in (-1, 0) \end{cases}$$

У тачкама -2 и -1 морамо посебно испитати диференцијабилност.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x+2)(3x+4) = 0 \cdot (-2) = 0 \stackrel{\text{Лема}}{\Rightarrow} f'_-(-2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} -(x+2)(3x+4) = -0 \cdot (-2) = 0 \xRightarrow{\text{Лема}} f'_+(-2) = 0$$

$\Rightarrow f$ је диференцијабилна у тачки -2 и $f'(-2) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} -(x+2)(3x+4) = -1 \cdot 1 = -1 \xRightarrow{\text{Лема}} f'_-(-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (x+2)(3x+4) = 1 \cdot 1 = 1 \xRightarrow{\text{Лема}} f'_+(-1) = 1$$

$\Rightarrow f$ није диференцијабилна у тачки -1

Закључак, f је диференцијабилна на $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

14. Иститати диференцијабилности функције $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ глате са

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} \cdot \operatorname{arctg}(x+1).$$

Прво, f је непрекидна као композиција непрекидних фја, па можемо претити на иститивање њене диференцијабилности.

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x+1)^{\frac{1}{3}} \cdot \operatorname{arctg}(x+1))' = \frac{1}{3} \cdot (x+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 1 \cdot \operatorname{arctg}(x+1) + (x+1)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1+(x+1)^2} \cdot 1 = \\ &= \frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}} + \frac{\sqrt[3]{x+1}}{1+(x+1)^2} \quad \text{што је дефинисано за све } x \neq -1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ је диференцијабилна на $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, а

тачку -1 ћемо посебно иститивати

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} \left(\frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}} + \frac{\sqrt[3]{x+1}}{1+(x+1)^2} \right) = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} + \frac{\sqrt[3]{0}}{1+0^2} = \frac{0}{0}$$

$$= \left(\begin{array}{l} t=x+1 \\ x \rightarrow -1- \Rightarrow t \rightarrow 0- \end{array} \right) = \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{2 \operatorname{arctg} t}{\sqrt[3]{t^2}} = \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{t + o(t)}{\sqrt[3]{t^2}} = \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow 0-} (\cancel{\sqrt[3]{t}} + o(\cancel{\sqrt[3]{t}})) =$$

$$= \frac{1}{3} (0+0) = 0 \quad \text{Лема} \Rightarrow f'_-(-1) = 0$$

Истим рачуном добијемо и $\lim_{x \rightarrow -1+} f'(x) = 0$, па је по леми
и $f'_+(-1) = 0$.

$\Rightarrow f$ је диференцијабилна и у тачки -1 , па је
диференцијабилна на целом $\mathbb{R}$.

15. Истимати диференцијабилност функције $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ где је $f(x) = [x]$ (цео део од x).

Сетимо се,

$$f(x) = \begin{cases} \dots \\ 3, & x \in [3, 4) \\ 2, & x \in [2, 3) \\ 1, & x \in [1, 2) \\ 0, & x \in [0, 1) \\ -1, & x \in [-1, 0) \\ -2, & x \in [-2, -1) \\ -3, & x \in [-3, -2) \\ \dots \end{cases}$$

Од раније знамо да је f непрекидна у свим цеобројним тачкама и да је непрекидна на скупу $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, па сигурно није ни диференцијабилна у цеобројним тачкама.

За свако $n \in \mathbb{Z}$ знамо да је f константна на отвореном интервалу $(n, n+1)$ тј. $f(x) = n$ за све $x \in (n, n+1) \Rightarrow f'(x) = (n)' = 0$ за све $x \in (n, n+1)$.

$\Rightarrow f$ је диференцијабилна на $(n, n+1)$ за свако $n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow f$ је диференцијабилна на унији свих ових интервала тј. на скупу $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ и извод јој је 0 у свакој тачки тог скупа.

16. Испитати диференцијабилност функције $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дате са $f(x) = [x] \cdot \sin^2(\pi x)$.

Решење: Испитаћемо прво непрекидност функције f . Знамо да за свако $n \in \mathbb{Z}$ и $x \in (n, n+1)$ важи $f(x) = n$, па самим тим и $f(x) = n \sin^2(\pi x)$. Дакле, f је непрекидна на свим отвореним интервалима $(n, n+1)$ као композиција непрекидних функција, па самим тим и на њиховој унији тј. скупу $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Проверићемо још да ли је f непрекидна и у целобројним тачкама. Нека је $n \in \mathbb{Z}$ произвољно. Знајући да је $f(x) = n$ за све $x \in [n, n+1)$ и $f(x) = n-1$ за све $x \in [n-1, n)$ имамо

$$\lim_{x \rightarrow n-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n-} ([x] \sin^2(\pi x)) = (n-1) \cdot \sin^2(n\pi) = (n-1) \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow n+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n+} ([x] \sin^2(\pi x)) = n \cdot \sin^2(n\pi) = n \cdot 0 = 0$$

$$\text{и } f(n) = [n] \sin^2(n\pi) = n \cdot 0 = 0,$$

па је f непрекидна у тачки n . Дакле, функција f је непрекидна и у свим целобројним тачкама, а тиме и на целом $\mathbb{R}$.

Прелазимо сада на испитивање диференцијабилности функције. Прво, за свако $n \in \mathbb{Z}$ знамо да је $f(x) = n \sin^2(\pi x)$ на отвореном интервалу $(n, n+1)$, па је

$$\begin{aligned} f'(x) &= (n \sin^2(\pi x))' = n \cdot 2 \sin(\pi x) \cdot (\sin(\pi x))' = 2n \sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x) \cdot (\pi x)' = \\ &= 2n \sin(\pi x) \cos(\pi x) \cdot \pi = 2n\pi \sin(\pi x) \cos(\pi x), \end{aligned}$$

што је дефинисано за све $x \in (n, n+1)$. Дакле, за свако $n \in \mathbb{Z}$ функција f је диференцијабилна на отвореном интервалу $(n, n+1)$ и притом је $f'(x) = 2n\pi \sin(\pi x) \cos(\pi x)$, па је f диференцијабилна и на унији ових интервала тј. на $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Остаје још да испитамо диференцијабилност функције f у целобројним тачкама. Нека је $n \in \mathbb{Z}$. Мало пре смо извели закључак да је $f'(x) = 2n\pi \sin(\pi x) \cos(\pi x)$ за $x \in (n, n+1)$ и $f'(x) = 2(n-1)\pi \sin(\pi x) \cos(\pi x)$ за $x \in (n-1, n)$. Сада имамо

$$\lim_{x \rightarrow n-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow n-} 2(n-1)\pi \sin(\pi x) \cos(\pi x) = 2(n-1) \cdot \pi \cdot \sin(n\pi) \cos(n\pi) = 2(n-1)\pi \cdot 0 \cdot (-1)^n = 0,$$

па је на основу Леме и $f'_-(n) = 0$. Слично је

$$\lim_{x \rightarrow n+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow n+} 2n\pi \sin(\pi x) \cos(\pi x) = 2n\pi \cdot \sin(n\pi) \cos(n\pi) = 2n\pi \cdot 0 \cdot (-1)^n = 0,$$

па је $f'_+(n) = 0$ на основу Леме. Пошто је $f'_-(n) = f'_+(n) = 0$, f је диференцијабилна и у тачки n , па самим тим и у свим целобројним тачкама.

Дакле, f је диференцијабилна на целом $\mathbb{R}$.

Коментар: Користили смо у рачуну познату чињеницу да је $\cos(n\pi) = (-1)^n$ за све $n \in \mathbb{Z}$.

Видели смо у неколико претходних задатака колико је користећи Лему било једноставно рачунати леви и десни извод у појединачим тачкама. Међутим, важно је напоменути да уколико, рецимо, одговарајући лимес $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$ у формулацији Леме не постоји, то не значи обавезно да не постоји ни $f'_+(a)$, већ га у том случају морамо рачунати по дефиницији. Слично важи и за лимес $\lim_{x \rightarrow a-} f'(x)$ и $f'_-(a)$. У наредном задатку ћемо демонстрирати такву ситуацију.

17. Испитати диференцијабилност функције $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дате са

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Испитићемо прво непрекидност фјк f .

$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ за $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, па је f непр.

на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ као композиција непр. фјка.

Проверимо још да ли је f непрекидна у 0 .

непрекидност у 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x^2}_0 \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\text{огр.}} = 0 \quad \text{и} \quad f(0) = 0$$

$\Rightarrow f$ је непр. и у нули

$\Rightarrow f$ је непр. на целом $\mathbb{R}$

Прелазимо сада на диференцијабилност.

за $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ имамо:

$$f(x) = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= 2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2} =$$

$$= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad \text{што је дефинисано}$$

за све $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$\Rightarrow f$ је диф. на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

диференцијабилност у 0:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cdot \sin \frac{1}{h}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\underbrace{h}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{h}}_{\text{огр.}} \right) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ је диф. у тачки 0

$\Rightarrow$ f је диф. на целом $\mathbb{R}$

За сво покушај за користиш Лему за разликује $f'_-(0)$ и $f'_+(0)$, имам Сучио:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(2 \underbrace{x}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\text{огр.}} - \cos \frac{1}{x} \right) = 0 - \lim_{x \rightarrow 0+} \cos \frac{1}{x} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0+} \cos \frac{1}{x}, \text{ а последњи лимес не постоји,}$$

јер је то $\cos(+\infty)$ (доказано раније помоћу Кошиеве теореме). Дакле, овде није Сучио могуће употребити Лему, већ сво по дефиницији испрвину $f'(0)$.

Основне теореме диференцијалног рачуна

Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$ непразан, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ функција и тачка $a \in A$. Ако постоји околина U те тачке таква да за свако $x \in U$ важи $f(x) \leq f(a)$, кажемо да функција f има локални максимум у тачки a . Слично, уколико постоји околина U тачке a таква да је $f(x) \geq f(a)$ за свако $x \in U$, кажемо да f има локални минимум у тачки a . Под локалним екстремумом подразумевамо било који локални максимум или локални минимум.

Наравно, функција може имати и више локалних максимума и више локалних минимума. На пример, функција $f(x) = \sin x$ у свакој тачки $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ за $k \in \mathbb{Z}$ има локални максимум и у њима узима своју максималну вредност 1, док у свим тачкама облика $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ за $k \in \mathbb{Z}$ има локални минимум и у њима узима своју минималну вредност -1.

С друге стране, функција $g(x) = x^3$ је строго растућа на целом $\mathbb{R}$, па она нема ни локалних максимума ни локалних минимума.

Теорема [Ферма]: Ако је функција f диференцијабилна у тачки a и у тој тачки има локални екстремум, тада је $f'(a) = 0$.

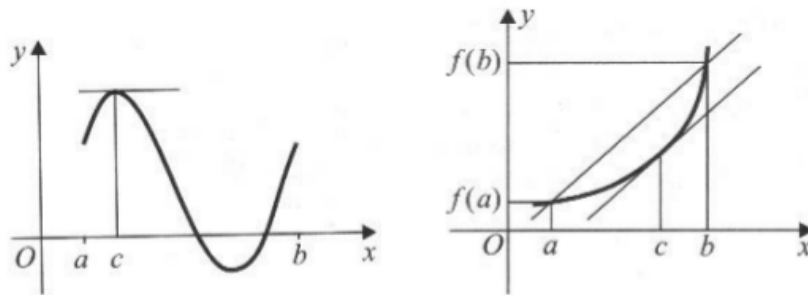
Напоменимо да ова теорема даје само један смер, односно да уколико важи $f'(a) = 0$, тачка a не мора бити локални екстремум функције f .

Теорема [Рол]: Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ функција која је непрекидна на $[a, b]$ и диференцијабилна на (a, b) и важи $f(a) = f(b)$. Тада постоји неко $c \in (a, b)$ такво да је $f'(c) = 0$.

Другим речима, постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је тангента на график функције f у тачки $(c, f(c))$ паралелна са x -осом.

Теорема [Лагранж]: Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ функција која је непрекидна на $[a, b]$ и диференцијабилна на (a, b) . Тада постоји неко $c \in (a, b)$ такво да је $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Дакле, постоји $c \in (a, b)$ таква да је тангента на график функције f у тачки $(c, f(c))$ паралелна са правом која пролази кроз тачке $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.



Геометријску интерпретацију ових теорема можемо видети на сликама изнад (Ролова – лево и Лагранжова – десно).

Навешћемо сада и две последице Лагранжове теореме које ће нам бити веома корисне у задацима.

Последица: Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ функција која је непрекидна на $[a, b]$ и диференцијабилна на (a, b) . Уколико је $f'(x) = 0$ за свако $x \in (a, b)$, тада је f константна функција тј. постоји $c \in \mathbb{R}$

такво да је $f(x) = c$ за све $x \in [a, b]$.

Последица: Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ функција која је непрекидна на $[a, b]$ и диференцијабилна на (a, b) . Уколико је $f'(x) \geq 0$ за свако $x \in (a, b)$, тада је f монотono растућа функција, док уколико је $f'(x) > 0$ за свако $x \in (a, b)$, f је строго растућа. Слично, ако је $f'(x) \leq 0$ за свако $x \in (a, b)$, f је монотono опадајућа функција, док уколико је $f'(x) < 0$ за свако $x \in (a, b)$, тада је f строго опадајућа.

Напомена: Ова тврђења важе и када се интервал $[a, b]$ заменимо са неким бесконачним интервалом попут $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ или читавим $\mathbb{R}$, али не важи када је домен функције f унија више дисјунктних интервала у шта ћемо се уверити у задацима.

1. Доказати да за све $x \in [-1, 1]$ важи $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Решење: Уочимо функцију $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Она је непрекидна као композиција елементарних функција. Треба доказати да је она константна, па ћемо израчунати њен први извод. За свако $x \in (-1, 1)$ имамо да је

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0,$$

па на основу једне од последица Лагранжове теореме имамо да је f константна функција на интервалу $[-1, 1]$. Да бисмо одредили ту константу, израчунаћемо вредност функције f у погодно одабраној тачки. Имамо да је $f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, па је зато $f(x) = \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ за свако $x \in [-1, 1]$.

2. Доказати да је $\arctg x + \arctg \frac{1}{x} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & x < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x > 0. \end{cases}$

Решење: Дефинишемо функцију $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ са $f(x) = \arctg x + \arctg \frac{1}{x}$. Она је непрекидна као композиција елементарних функција. Треба доказати да је она константна на интервалу $(-\infty, 0)$ и на интервалу $(0, +\infty)$, па ћемо израчунати њен први извод. Имамо да је

$$f'(x) = \left(\arctg x + \arctg \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \text{ за све } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty),$$

па је на основу једне од последица функција f константна на интервалу $(-\infty, 0)$ и константна на интервалу $(0, +\infty)$. Треба још одредити те константе што лако можемо учинити тако што израчунамо вредност функције f у неке две конкретне тачке које ћемо одабрати тако да нам буде што лакши рачун. Тако имамо да је

$$f(1) = \arctg 1 + \arctg \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

што заједно са претходним значи да је $f(x) = \arctg x + \arctg \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ за свако $x \in (0, +\infty)$. Слично је

$$f(-1) = \arctg(-1) + \arctg \frac{1}{-1} = -\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2},$$

па је зато $f(x) = \arctg x + \arctg \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ за свако $x \in (-\infty, 0)$.

Напомена: Приметимо да иако је извод функције f једнак нули у свакој тачки њеног домена $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, она ипак није константна на целом домену, јер је он унија два интервала, али је на сваком од тих интервала константна.

У наредним задацима бавићемо се испитивањем монотоности функција, одређивањем њихових (локалних и глобалних) екстремума, као и применом наведеног у доказивању неједнакости и одређивању броја решења једначине на неком скупу. Пре тога, навешћемо важну неједнакост доказану на предавањима која ће нам убудуће бити корисна.

Теорема: За све $x \in \mathbb{R}$ важи неједнакост $|\sin x| \leq |x|$, при чему једнакост важи акко је $x = 0$.

Специјално, за $x \in (0, \pi]$ важи $\sin x < x$, док за $x \in [-\pi, 0)$ важи $-\sin x < -x$, односно $\sin x > x$.

3. Испитати монотоност функције $f(x) = x \ln x$ на свом домену и одредити њене локалне екстремуме.

$f(x) = x \ln x$ непрекидна као композиција елементарних фја

Због $\ln x$ мора бити $x > 0$, па је $D_f = (0, +\infty)$.

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

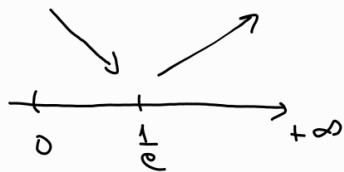
$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

e^x је растућа фја

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\text{и слично имамо } f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow f \nearrow \text{ на } \left[\frac{1}{e}, +\infty\right) \text{ и } f \searrow \text{ на } \left(0, \frac{1}{e}\right]$$



$\Rightarrow f$ има локални минимум у тачки $\frac{1}{e}$

Штавише, ова је и глобални минимум тј. минимум на целом D_f .

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}, \text{ па смо овим доказом и за је}$$

$$f(x) = x \ln x \geq -\frac{1}{e} \text{ за све } x > 0.$$

4. Доказати да за све $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ важи $\tan x > x$.

Пошто је $\operatorname{tg} x > x$ еквивалентно са $\operatorname{tg} x - x > 0$,
 размислимо функцију $f: [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x - x$ која
 је непрекидна као композиција и истинитим њеној
 монотоности.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} > 0 \text{ за све } x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow f \nearrow \text{ строго на } [0, \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow (\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})) f(x) > f(0) = \operatorname{tg} 0 - 0 = 0$$

$$\Rightarrow (\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})) \operatorname{tg} x > x$$

5. Доказати да је $e^x \geq 1 + x$ за све $x \in \mathbb{R}$.

Пошто је $e^x \geq 1 + x$ еквивалентно са $e^x - 1 - x \geq 0$,
 размислимо функцију $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \underbrace{e^x - 1 - x}_{\text{непр.}}$ и
 истинитим њеној монотоности.

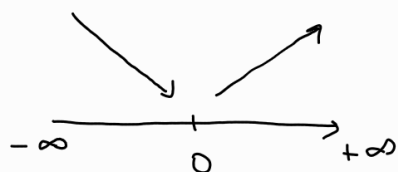
$$f'(x) = e^x - 1$$

$\ln x$ је растућа фја

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > \ln 1 = 0$$

$$\text{и слично } f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow f \nearrow \text{ на } [0, +\infty) \text{ и } f \searrow \text{ на } (-\infty, 0)$$



$\Rightarrow f$ има локални, а и глобални минимум у

$$\text{пошто } 0 \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \geq f(0)$$

$$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) e^x - 1 - x \geq e^0 - 1 - 0$$

$$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) e^x - 1 - x \geq 0$$

$$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) e^x \geq 1 + x$$

6. Доказати да за све $x > -1$ важи $\ln(1+x) \leq x$.

Како и овде можемо узети фју
 $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x) - x$ и испитати њену
 монотоност, лине је да само искористимо
 неједнакост доказану у претходном задатку.

$$(\forall x \in \mathbb{R}) e^x \geq 1 + x \quad / \quad \ln$$

$$(\forall x > -1) x \geq \ln(1+x)$$

морам смо да претпоставимо $x > -1$ како би било $1+x > 0$
 и $\ln(1+x)$ дефинисано

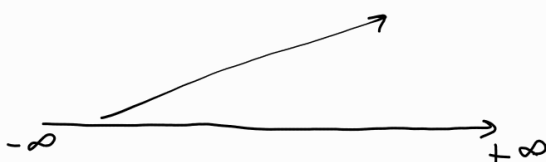
7. Доказати да је $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ за све $x \geq 0$.

Узимамо фју $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ која је непр.
 као композиција и испитајмо њену монотоност.

5. задатак

$$f'(x) = e^x - 1 - \frac{2x}{2} = e^x - 1 - x \geq 0 \quad \text{за све } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f \nearrow \text{ на } \mathbb{R}$$



$$\Rightarrow (\forall x \in [0, +\infty)) \quad f(x) \geq f(0)$$

$$\Rightarrow (\forall x \in [0, +\infty)) \quad e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \geq e^0 - 1 - 0 - \frac{0^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow (\forall x \in [0, +\infty)) \quad e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Коментар: Овде смо добили $f'(x) = e^x - 1 - x$ и на основу претходно урађеног задатка знам да је он увек неотрицан. Међутим, да је f' била фја којој не бисмо умели непосредно да испитамо знак (тј. одредимо када је позитивна а када негативна), учини бисмо нову функцију $g(x) = f'(x)$ и испитали прво њену монотоност (рачунајући $g'(x)$), а онда и знак.

8. Доказати да једначина $\ln x = \frac{1}{x^2}$ има тачно једно решење.

Решење: Приметимо прво да због дефинисаности израза који се појављују у једначини мора бити $x > 0$ и $x^2 \neq 0$, што је еквивалентно са $x > 0$. Посматрајмо функцију $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ дату са $f(x) = \ln x - \frac{1}{x^2}$. Треба доказати да она има тачно једну нулу на свом домену, јер је то еквивалентно са чињеницом да полазна једначина има тачно једно решење. Прво ћемо показати да она уопште има нулу и то стандардно радимо користећи Коши–Болцанову теорему. Функција f је непрекидна као композиција елементарних функција и имамо да је

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\ln x - \frac{1}{x^2} \right) = \ln(0+) - \frac{1}{0+} = -\infty - (+\infty) = -\infty,$$

па постоји неко $a > 0$ такво да је $f(a) < 0$. Слично,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - \frac{1}{x^2} \right) = \ln(+\infty) - \frac{1}{+\infty} = 0 + \infty - 0 = +\infty,$$

па онда постоји неко $b > 0$ такво да је $f(b) > 0$. По Коши–Болцановој теореме имамо да сигурно постоји неко c између тачака a и b такво да је $f(c) = 0$.

Могли смо и друкчије: $f(1) = \ln 1 - 1 = -1$ и $f(e) = \ln e - \frac{1}{e^2} = 1 - \frac{1}{e^2} = \frac{e^2 - 1}{e^2} > 0$, јер је $e^2 > 1$ пошто $e \in (2, 3)$, па функција f има нулу на интервалу $(1, e)$.

Да бисмо доказали да је ова нула добијена из Коши–Болцанове теореме јединствена, испитаћемо монотоност функције f . Имамо да је

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \left(-\frac{2}{x^3} \right) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} > 0 \quad \text{за свако } x > 0,$$

па је f строго растућа на целом свом домену. То значи да за свако $x \in (0, c)$ важи $f(x) < f(c) = 0$, док за свако $x \in (c, +\infty)$ важи $f(x) > f(c) = 0$, па она има само једну нулу и то је управо c .

Решење претходног задатка можемо да генерализујемо и тако одредимо колико нека непрекидна функција има нула на свом домену испитујући монотоност функције и користећи Коши–Болцанову теорему. Ако је функција f строго растућа или строго опадајућа на интервалу $[a, b]$, на исти начин као у претходном задатку можемо показати да тада она може имати највише једну нулу на том интервалу. Уколико је $f(a) = 0$, та нула је управо тачка a , док уколико је $f(b) = 0$, нула је тачка b . Уколико је $f(a) > 0$ и $f(b) > 0$, тада је и $f(x) > 0$ за свако $x \in [a, b]$, јер је ова функција строго растућа или строго опадајућа, па она не може имати ниједну нулу на том интервалу. Слично, уколико је $f(a) < 0$ и $f(b) < 0$, тада је $f(x) < 0$ за свако $x \in [a, b]$, па ова функција нема ниједну нулу на том интервалу. Коначно, уколико је $f(a)f(b) < 0$, по Коши–Болцановој теорему, функција f има нулу на интервалу $[a, b]$ која је јединствена због претходне дискусије.

9. Одредити број решења једначине $2\arctan x = x + \frac{1}{2}$.

Приметимо да је ова јна дефинисана на $\mathbb{R}$, па посматрамо фју $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2\arctan x - x - \frac{1}{2}$.

Она је непрекидна као композиција елементарних фја и њене нуле су управо решења ове јне.

Испитујемо прво монотоност фје f .

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x^2+1} - 1 = \frac{2-x^2-1}{x^2+1} = \frac{1-x^2}{x^2+1} = \frac{(1-x)(1+x)}{x^2+1}$$

$$1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$1+x > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

$$1+x^2 > 0 \text{ важи за свако } x \in \mathbb{R}$$

	$-\infty$	-1	1
$1-x$	+	+	-
$1+x$	-	+	+
x^2+1	+	+	+
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

$\Rightarrow f \searrow$ строго на $(-\infty, -1]$,

$f \nearrow$ строго на $[-1, 1]$ и

$f \searrow$ строго на $[1, +\infty)$

$\Rightarrow f$ има највише једну нулу на $(-\infty, -1]$, највише једну

нулу на $[-1, 1]$ и највише једну
нулу на $[1, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 \arctan x - x - \frac{1}{2}) = 2 \arctan(-\infty) - (-\infty) - \frac{1}{2} = \\ = 2 \cdot (-\frac{\pi}{2}) + \infty - \frac{1}{2} = +\infty > 0 \Rightarrow (\exists a \in (-\infty, -1)) f(a) > 0$$

$$f(-1) = 2 \arctan(-1) - (-1) - \frac{1}{2} = 2 \cdot (-\frac{\pi}{4}) + 1 - \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1-\pi}{2} < 0$$

Уточиш-Болцано
 $\Rightarrow (\exists c_1 \in (a, -1)) f(c_1) = 0$ тј. $(\exists c_1 \in (-\infty, -1)) f(c_1) = 0$

Дакле, f има нулу c_1 на интервалу $(-\infty, -1)$ и
она је јединствена, јер f строго опада на
 $(-\infty, -1)$.

$$f(-1) = \frac{1-\pi}{2} < 0$$

$$f(1) = 2 \arctan 1 - 1 - \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} = \frac{\pi-3}{2} > 0$$

Уточиш-Болцано
 $\Rightarrow (\exists c_2 \in (-1, 1)) f(c_2) = 0$

Дакле, f има нулу c_2 на интервалу $(-1, 1)$ и она
је јединствена, јер f строго расте на $(-1, 1)$.

$$f(1) = \frac{\pi-3}{2} > 0$$

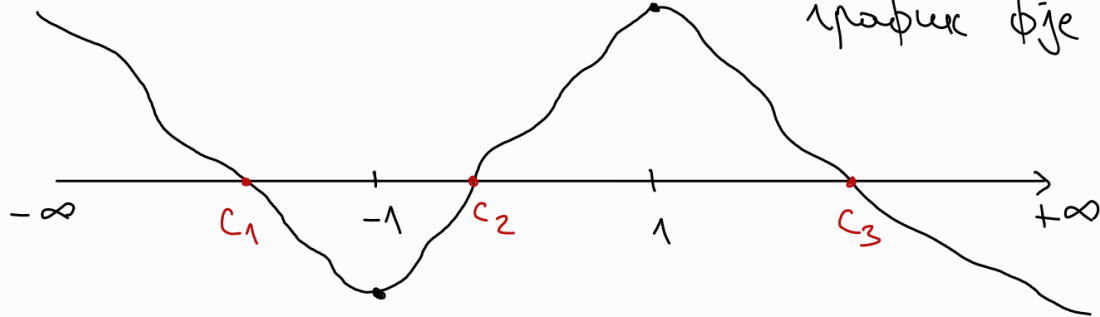
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 \arctan x - x - \frac{1}{2}) = 2 \arctan(+\infty) - (+\infty) - \frac{1}{2} = \\ = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \infty - \frac{1}{2} = -\infty < 0 \Rightarrow (\exists b \in (1, +\infty)) f(b) < 0$$

Утврђено - Болцано $\Rightarrow (\exists c_3 \in (1, +\infty)) f(c_3) = 0$ иј. $(\exists c_3 \in (1, +\infty)) f(c_3) = 0$

Дакле, f има нулу c_3 на интервалу $(1, +\infty)$ и она је јединствена, јер f строго опада на $(1, +\infty)$.

Укупно, доказом смо да f има тачно три нуле $c_1 \in (-\infty, -1)$, $c_2 \in (-1, 1)$ и $c_3 \in (1, +\infty)$, па једначина има тачно три решења.

добили смо да овако „оштришике“ изгледа график f је f



10. Нема је f ја $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $f(x) = x^3 - 3x + 1$. У зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$ одредити број решења једначине $f(x) = a$.

Испитати моноитоност f је f како смо смо могли „оштришике“ да скицамо њен график.

f је нестремна на $\mathbb{R}$ као композиција

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

$$x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

	$-\infty$	-1	1
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$\Rightarrow f \nearrow$ сепара на $(-\infty, -1]$,

$f \searrow$ сепара на $[-1, 1]$ и

$f \nearrow$ сепара на $[1, +\infty)$

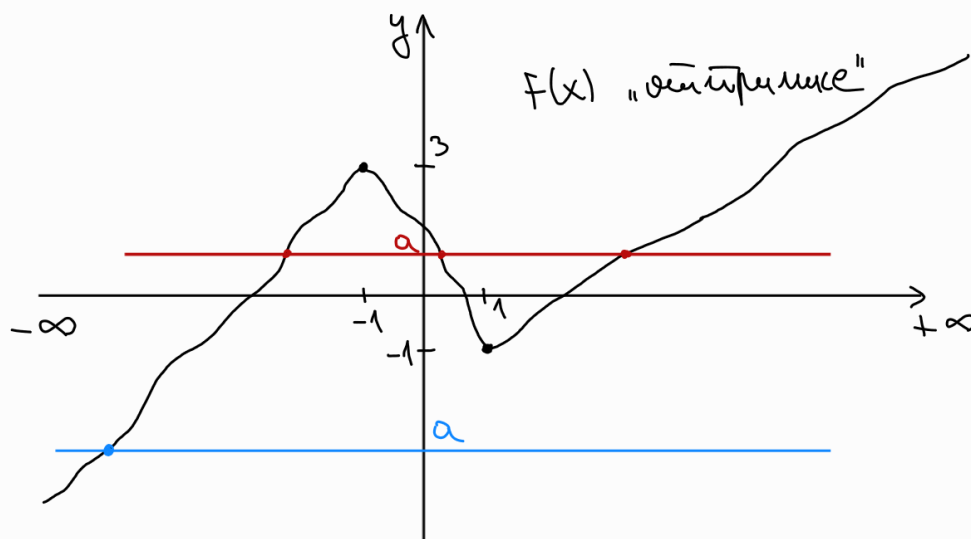
Устимотирамо постојаност фје f
на крајевима оних интервала.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = (-\infty)^3 \cdot 1 = -\infty$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 1 = 3$$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = (+\infty)^3 \cdot 1 = +\infty$$



Решено је да $f(x)=a$ имамо као пресеке тачке графика фје f и хоризонталне праве $y=a$.

Зато имамо:

1° $a > 3$: $f(x)=a$ има једно решење

2° $a = 3$: $f(x)=a$ има два решења

3° $a \in (-1, 3)$: $f(x) = a$ има три решења

4° $a = -1$: $f(x) = a$ има два решења

5° $a < -1$: $f(x) = a$ има једно решење

11. Нека је функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна и постоји тачка $a \in \mathbb{R}$ таква да је $f(a) = 0$.

Доказати да постоји $c \in \mathbb{R}$ таква да је $c \cdot f'(c) + f(c) = 0$.

Преба доказати да функција $x \cdot f'(x) + f(x)$ има нулу.

Иако смо до сада то радим помоћу теореме

Роли-Болцана, овој пути не можемо помоћу ње, јер

не знамо да ли је фја $x \cdot f'(x) + f(x)$ непрекидна (знамо

да је f диференцијабилна, па је фја f' сваког дефи-

нисана, али немамо информацију да ли је она и

непрекидна). Зато је овде идеја да уочимо неку

функцију мије извод има везе са функцијом

$x \cdot f'(x) + f(x)$ и на њу применимо неку од основних

теорема диференцијалног рачуна.

Уочава је $x \cdot f'(x) + f(x) = x \cdot f'(x) + 1 \cdot f(x) =$

$= x \cdot f'(x) + (x)' \cdot f(x) = (x \cdot f(x))'$, дефинишемо

фју $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ са $g(x) = x \cdot f(x)$. Ова фја је диферен-

уједина на $\mathbb{R}$, јер је $g'(x) = x f'(x) + f(x)$ за све $x \in \mathbb{R}$.

Имамо да је $g(0) = 0 \cdot f(0) = 0$ и $g(a) = a \cdot f(a) = a \cdot 0 = 0$,
тако ћемо размотрити два случаја.

1° $a \neq 0$

$g(a) = g(0) \Rightarrow$ можемо применити Роулову теорему на
интервал $[0, a]$ или $[a, 0]$ у зависности
од тога да ли је $a > 0$ или $a < 0$

$\Rightarrow$ постоји c између 0 и a т.ј. је $g'(c) = 0$
т.ј. $c \cdot f'(c) + f(c) = 0$, што се и тражило

2° $a = 0$

$\Rightarrow f(0) = 0$

$\Rightarrow 0 \cdot f'(0) + f(0) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow$ можемо узети $c = 0$

и важи тврђење задатка

12. (Септембар 1 '21) Нeka је $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна ф-ја т.ј. је $f(1) = 7$, $f(4) = 6$, $f(9) = 5$ и $f(16) = 3$. Докажити да постоји $c > 0$ т.ј. је

$$f'(c)\sqrt{c} = -\frac{1}{2\sqrt{c}} f(c).$$

И овде је идеја да пошмо неку поодну ф-ју и применимо одговарајућу теорему.

Треба доказати да за неку $c > 0$ важи $f'(c)\sqrt{c} = -\frac{1}{2\sqrt{c}} f(c)$,
односно да ф-ја $f'(x)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} f(x)$ има нулу. Тако је

$$f'(x)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} f(x) = f'(x)\sqrt{x} + (\sqrt{x})' f(x) = (f(x)\sqrt{x})', \text{ зоручено}$$

фју $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)\sqrt{x}$. Она је диференцијабилна на $(0, +\infty)$, јер за свако $x > 0$ важи

$$g'(x) = f'(x)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} f(x), \text{ па је и непрекидна на } (0, +\infty).$$

Понаоже, важи и $g(4) = f(4) \cdot \sqrt{4} = 6 \cdot 2 = 12$ и

$$g(16) = f(16) \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12, \text{ па како је } g \text{ непрекидна}$$

на $[4, 16]$, диференцијабилна на $(4, 16)$ и $g(4) = g(16)$,

по Ролловој теорем постоји $c \in (4, 16)$ т.г. је

$$g'(c) = 0 \text{ тј. } f'(c)\sqrt{c} + \frac{1}{2\sqrt{c}} f(c) = 0. \text{ Са тим тим је}$$

$$f'(c)\sqrt{c} = -\frac{1}{2\sqrt{c}} f(c), \text{ што је и требало доказати.}$$

13. (Јун 2 '21) Нeka су $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидне функције, диференцијабилне на (a, b) такође га је $f(a)g(b) = f(b)g(a)$ и $f(x)g(x) \neq 0$ за свако $x \in [a, b]$.

Доказати да постоји $c \in (a, b)$ т.г. је $\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{g'(c)}{g(c)}$.

Имамо да је

$$\begin{aligned} \frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{g'(c)}{g(c)} \quad / \cdot \underbrace{f(c)g(c)}_{\neq 0} &\Leftrightarrow f'(c)g(c) = f(c)g'(c) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f'(c)g(c) - f(c)g'(c) = 0, \end{aligned}$$

та заправо треба доказати да је $f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$ има нулу.

Израз $f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$, као и пре, није услед неке друге фје, али се јавља у уследу фје $\frac{f(x)}{g(x)}$, јер је

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}, \text{ та зато посматрамо}$$

фју $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ дефинишу са $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Она је

добро дефинисана на интервалу $[a, b]$, јер је у

услову задатка $g(x) \neq 0$ за све $x \in [a, b]$, та не

дозвољује дељење нулом. Фја h је непрекидна

на $[a, b]$ као композиција, а и диференцијабилна

на (a, b) , јер је $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ за све

$x \in (a, b)$.

добро дефинисано за све $x \in (a, b)$

Приметимо да још важи и

$$f(a)g(b) = f(b)g(a) \quad / : \underbrace{(g(a)g(b))}_{\neq 0} \Rightarrow \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)} \Rightarrow h(a) = h(b),$$

та се може применити Ролаова теорема на фју h .

Дакле, постоји $c \in (a, b)$ т.г. је $h'(c) = 0$ тј.

$$\frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2} = 0. \text{ Одатле је } f'(c)g(c) - f(c)g'(c) = 0,$$

та и $f'(c)g(c) = f(c)g'(c)$ и понављамо $\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{g'(c)}{g(c)}$.

14. (Јун 1 '22) Нека је $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција која је диференцијабилна на $(0,1)$ и за коју важи $f(0)=0$.

Доказати да постоји $c \in (0,1)$ такво да је

$$f(1)(f(1)-1) = f'(c)(2f(c)-1).$$

Имамо да је $f(1)(f(1)-1) = f'(c)(2f(c)-1) \Leftrightarrow f(1)^2 - f(1) = 2f(c)f'(c) - f'(c)$.

$f(1)^2 - f(1)$ је вредност фј $f(x)^2 - f(x)$ у тачки 1, док је

$2f(c)f'(c) - f'(c)$ вредност услед $(f(x)^2 - f(x))' = 2f(x)f'(x) - f'(x)$

у тачки c , па ћемо увести фј $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ са

$$g(x) = f(x)^2 - f(x).$$

g је непр. на $[0,1]$ као композиција и диференцијабилна на $(0,1)$, јер је израз $g'(x) = 2f(x)f'(x) - f'(x)$

добро дефинисан за све $x \in (0,1)$.

$$\stackrel{\text{Лагранж}}{\Rightarrow} (\exists c \in (0,1)) \quad g'(c) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0}$$

$$g(1) = f(1)^2 - f(1), \quad g(0) = f(0)^2 - f(0) \stackrel{\text{услов задатка}}{=} 0^2 - 0 = 0$$

$$\Rightarrow g'(c) = \frac{f(1)^2 - f(1) - 0}{1} \Rightarrow 2f(c)f'(c) - f'(c) = f(1)^2 - f(1)$$

$$\Rightarrow f(1)(f(1)-1) = f'(c)(2f(c)-1) \quad \text{за нека } c \in (0,1)$$

У наредним задацима доказиваћемо неједнакости (тј. вршити процене) користећи Лагранжову теорему. Израз $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ који се јавља у њој ћемо често писати у еквивалентном облику $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ на који ћемо примењивати апсолутну вредност и уколико можемо да ограничимо први извод функције f на интервалу (a, b) , моћи ћемо онда да ограничимо и израз $f(b) - f(a)$.

15. Доказати да важи:

- а) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$, за све $x, y \in \mathbb{R}$;
- б) $\left| \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \right| \leq |x - y|$, за све $x, y > 0$;
- в) $\left| \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} - \frac{y}{1+e^{\frac{1}{y}}} \right| \geq \frac{|x-y|}{4}$ за све $x, y \geq 1$;
- г) $|\arctg x - \arctg y| \leq |x - y|$, за све $x, y \in \mathbb{R}$;
- д) $\frac{1}{a+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) < \frac{1}{a}$, за све $a > 0$;
- ђ) $\ln\left|\frac{x^x}{y^y}\right| \leq 2026|x - y|$, за све $x, y \in [e^{2024}, e^{2025}]$.

Решење: а) Нека су $x, y \in \mathbb{R}$ произвољни. Приметимо да уколико је $x = y$, ова неједнакост тривијално важи као $0 \leq 0$, па зато можемо претпоставити да је $x \neq y$. Пошто је неједнакост симетрична по x и y (тј. ако заменимо места x и y добије се иста неједнакост) можемо без умањења општости додатно претпоставити да је $x > y$. Нека је функција $f : [y, x] \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $f(t) = \sin t$. Пошто процењујемо израз $|f(x) - f(y)|$, можемо искористити Лагранжову теорему чије услове функција f задовољава, јер је непрекидна на $[y, x]$ као елементарна функција и диференцијабилна на (y, x) , јер је $f'(t) = \cos t$ за све $t \in (y, x)$. Зато постоји $c \in (y, x)$ такво да је $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$ тј. $\sin x - \sin y = \cos c \cdot (x - y)$. Сада имамо да је

$$|\sin x - \sin y| = |\cos c| \cdot |x - y| \leq 1 \cdot |x - y| = |x - y|,$$

јер је $|\cos c| \leq 1$ за свако $c \in (y, x)$, што је и требало доказати.

б) Нека су $x, y > 0$ произвољни. Слично као и малопре, можемо претпоставити да је $x > y > 0$ и увести функцију $f : [y, x] \rightarrow \mathbb{R}$ са $f(t) = \frac{1}{1+t}$ која је непрекидна на $[x, y]$ као композиција непрекидних функција и диференцијабилна на (y, x) , јер је $f'(t) = -\frac{1}{(1+t)^2} \cdot (1+t)' = -\frac{1}{(1+t)^2}$, што је дефинисано на целом интервалу (y, x) (знамо да су $x, y > 0$, па и за свако $t \in (y, x)$ важи $t > 0$). Зато, по Лагранжовој теорему постоји $c \in (y, x)$ (а самим тим је $c > 0$) такво да је $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$ тј.

$$\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} = -\frac{1}{(1+c)^2} \cdot (x - y),$$

одакле имамо

$$\left| \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \right| = \left| -\frac{1}{(1+c)^2} \right| \cdot |x - y| = \frac{1}{(1+c)^2} \cdot |x - y| \leq \frac{1}{(1+0)^2} \cdot |x - y| \leq 1 \cdot |x - y| = |x - y|,$$

што је и требало доказати. Приметимо да смо могли и без Лагранжове теореме да докажемо ову неједнакост за све $x, y > 0$ на следећи начин:

$$\left| \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \right| = \left| \frac{1+y-(1+x)}{(1+x)(1+y)} \right| = \left| \frac{y-x}{(1+x)(1+y)} \right| = \frac{|y-x|}{(1+x)(1+y)} \leq \frac{|x-y|}{(1+0) \cdot (1+0)} = |x-y|.$$

в) Нека су $x, y \geq 1$ произвољни. Као и у претходним деловима можемо претпоставити да је $x > y \geq 1$ и посматрати функцију $f: [y, x] \rightarrow \mathbb{R}$ дату са $f(t) = \frac{t}{1+e^{\frac{1}{t}}}$ која је непрекидна на $[y, x]$ као композиција непрекидних функција и диференцијабилна на (y, x) , јер је

$$f'(t) = \left(\frac{t}{1+e^{\frac{1}{t}}} \right)' = \frac{1 \cdot \left(1+e^{\frac{1}{t}}\right) - t \cdot \left(e^{\frac{1}{t}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)\right)}{\left(1+e^{\frac{1}{t}}\right)^2} = \frac{1+e^{\frac{1}{t}} + \frac{1}{t} \cdot e^{\frac{1}{t}}}{\left(1+e^{\frac{1}{t}}\right)^2},$$

што је дефинисано на целом интервалу (y, x) (знамо да је $x, y \geq 1$, па је и $t > 1 > 0$). Применом Лагранжове теореме на функцију f имамо да постоји $c \in (y, x)$, а самим тим и $c > 1$, такво да важи $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$ тј.

$$\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} - \frac{y}{1+e^{\frac{1}{y}}} = \frac{1+e^{\frac{1}{c}} + \frac{1}{c} \cdot e^{\frac{1}{c}}}{\left(1+e^{\frac{1}{c}}\right)^2} \cdot (x - y),$$

одакле је

$$\left| \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} - \frac{y}{1+e^{\frac{1}{y}}} \right| = \left| \frac{1+e^{\frac{1}{c}} + \frac{1}{c} \cdot e^{\frac{1}{c}}}{\left(1+e^{\frac{1}{c}}\right)^2} \right| \cdot |x - y| = \frac{1+e^{\frac{1}{c}} + \frac{1}{c} \cdot e^{\frac{1}{c}}}{\left(1+e^{\frac{1}{c}}\right)^2} \cdot |x - y|.$$

Сада, знајући да је $c > 1$ процењујемо

$$\frac{1+e^{\frac{1}{c}} + \frac{1}{c} \cdot e^{\frac{1}{c}}}{\left(1+e^{\frac{1}{c}}\right)^2} > \frac{1+e^{\frac{1}{c}} + 0}{\left(1+e^{\frac{1}{c}}\right)^2} = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{c}}}.$$

Даље, из $c > 1$ следи да је $\frac{1}{c} < \frac{1}{1} = 1$ и $e^{\frac{1}{c}} < e^1 = e$, па је зато

$$\frac{1}{1+e^{\frac{1}{c}}} > \frac{1}{1+e} > \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

и коначно

$$\left| \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} - \frac{y}{1+e^{\frac{1}{y}}} \right| = \frac{1+e^{\frac{1}{c}} + \frac{1}{c} \cdot e^{\frac{1}{c}}}{\left(1+e^{\frac{1}{c}}\right)^2} \cdot |x - y| > \frac{1}{4} |x - y|,$$

што се и тражило.

г) Нека су $x, y \in \mathbb{R}$ произвољни. Пошто у случају $x = y$ неједнакост тривијално важи, можемо надаље претпоставити да је $x > y$ и посматрати функцију $f: [y, x] \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисану са $f(t) = \arctg t$. Она је непрекидна на $[y, x]$ као елементарна функција, а и диференцијабилна на (y, x) , јер је $f'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ дефинисано за све $t \in (y, x)$. Применом Лагранжове теореме на њу, имамо да за неко $c \in (y, x)$ важи $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$ тј.

$$\arctg x - \arctg y = \frac{1}{1+c^2}(x - y),$$

одакле је

$$|\arctg x - \arctg y| = \left| \frac{1}{1+c^2}(x - y) \right| = \frac{1}{1+c^2}|x - y| \leq \frac{1}{1+0} \cdot |x - y| = |x - y|.$$

д) Нека је $a > 0$ произвољно. Пошто је $\ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) = \ln \frac{a+1}{a} = \ln(a+1) - \ln a$, уочићемо функцију $f: [a, a+1] \rightarrow \mathbb{R}$ дату са $f(x) = \ln x$, да би тада израз $\ln\left(1 + \frac{1}{a}\right)$, који процењујемо, био једнак управо $f(a+1) - f(a)$. Ова функција је непрекидна као елементарна и диференцијабилна, јер је $f'(x) = \frac{1}{x}$ дефинисано за све $x \in (a, a+1)$, па применом Лагранжове теореме добијемо да

постоји $c \in (a, a+1)$ такво да је $f(a+1) - f(a) = f'(c)(a+1-a)$ тј.

$$\ln\left(\frac{a+1}{a}\right) = \frac{1}{c} \cdot 1 = \frac{1}{c}.$$

Из $c \in (a, a+1)$ тј. $a < c < a+1$ следи $\frac{1}{a} > \frac{1}{c} > \frac{1}{a+1}$, а зато је и $\frac{1}{a+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) < \frac{1}{a}$.

ђ) Нека су $x, y \in [e^{2024}, e^{2025}]$ произвољни. Пошто за $x = y$ неједнакост тривијално важи, можемо надаље претпоставити да је $x > y$. Како је $\ln \frac{x^x}{y^y} = \ln(x^x) - \ln(y^y) = x \ln x - y \ln y$, дефинишемо функцију $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ са $f(t) = t \ln t$. Она је непрекидна као композиција елементарних функција и диференцијабилна, јер је за свако $t > 0$ дефинисано $f'(t) = 1 \cdot \ln t + t \cdot \frac{1}{t} = \ln t + 1$. Можемо зато применити Лагранжову теорему на функцију f и интервал $[y, x]$ и закључити да постоји $c \in (y, x)$ такво да је $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$ тј.

$$x \ln x - y \ln y = (\ln c + 1)(x - y), \text{ па одатле и}$$

$$|x \ln x - y \ln y| = |(\ln c + 1)(x - y)| = |\ln c + 1| \cdot |x - y|.$$

Како $c \in (y, x)$ и по услову задатка је $x, y \in [e^{2024}, e^{2025}]$, то је и $c \in (e^{2024}, e^{2025})$ тј. $e^{2024} < c < e^{2025}$. Одатле имамо $2024 < \ln c < 2025$, па и $2025 < \ln c + 1 < 2026$ и коначно $|\ln c + 1| = \ln c + 1 < 2026$.

Када то заменимо у горњу неједнакост, добијамо

$$\ln \left| \frac{x^x}{y^y} \right| = |x \ln x - y \ln y| = |\ln c + 1| \cdot |x - y| < 2026|x - y|,$$

што је и требало доказати.

16. (Јун 1 '21) Нека је $M > 0$ реалан број и $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција која је диференцијабилна на $(0, 2)$ и таква да је $f(0) = f(2) = M$ и $|f'(x)| \leq M$ за свако $x \in (0, 2)$.
- а) Доказати да је $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ за све $x, y \in [0, 2]$.
- б) Доказати да је $f(x) \geq 0$ за све $x \in [0, 2]$.

- а) Нека су $x, y \in [0, 2]$ произвољни. Ако је $x = y$ одмах имамо $|f(x) - f(y)| = 0$, $M \cdot |x - y| = M \cdot 0 = 0$ и $|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|$, па надаље (истим разлогом као у претходном задатку) можемо претпоставити да је

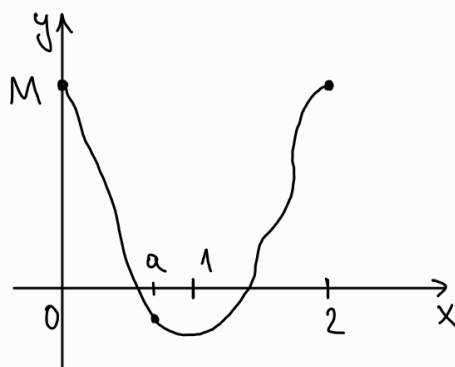
$$x > y.$$

$$\text{Лагранж} \Rightarrow (\exists c \in (y, x)) \quad f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = \underbrace{|f'(c)|}_{\leq M} \cdot |x - y| \leq M|x - y|$$

δ) Претпоставимо супротно тј. да постоји неко $a \in [0, 2]$ т.г. је $f(a) < 0$. Имамо је $M > 0$, што је $f(a) \neq f(0)$ и $f(a) \neq f(2)$, та је $a \neq 0$ и $a \neq 2$ и зато је $a \in (0, 2)$. Размислимо гледа сликају и показати постоји део а) за који не може бити.

$$1^\circ a \in (0, 1]$$



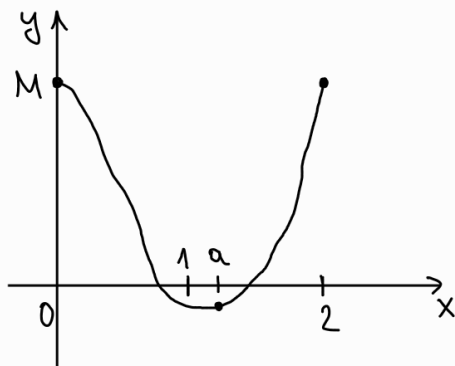
$$a) \Rightarrow |f(0) - f(a)| \leq M \cdot |0 - a| \quad (*)$$

$$\text{Али, како је } f(0) - f(a) = M - \underbrace{f(a)}_0 > M > 0, \text{ што је}$$

$$|f(0) - f(a)| = f(0) - f(a) > M, \text{ јер је } M \cdot |0 - a| = M \cdot |a| = M \cdot a \leq M \cdot 1 = M$$

$$\Rightarrow |f(0) - f(a)| > M \geq M|0 - a| \text{ што је у контрадикцији са } (*)$$

$$2^\circ a \in (1, 2)$$



$$a) \Rightarrow |f(2) - f(a)| \leq M \cdot |2 - a| \quad (*)$$

Ali, kako je $f(2) - f(a) = M - \underbrace{f(a)}_0 > M > 0$, što je

$$|f(2) - f(a)| = f(2) - f(a) > M, \text{ gde je } M \cdot |2 - a| \stackrel{a < 2}{=} M \cdot (2 - a) \stackrel{a > 1}{<} M \cdot (2 - 1) = M$$

$\Rightarrow |f(2) - f(a)| > M > M|2 - a|$ što je u kontradikciju sa $(*)$

Dakle, naša pretpostavka nije dobra, pa je $f(x) \geq 0$ za sve $x \in [0, 2]$.

Асимптотне функције

Def. Нека је функција f дефинисана на некој околној тачке $+\infty$ тј. на неком скупу $(t, +\infty)$ за $t \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Уколико постоје бројеви $a, b \in \mathbb{R}$ т.ј. је

$f(x) = ax + b + o(1), x \rightarrow +\infty$, кажемо да је права $y = ax + b$ асимптота фје f кад $x \rightarrow +\infty$. Ако је $a = 0$ тј.

$f(x) = b + o(1), x \rightarrow +\infty$, права $y = b$ је хоризонтална асимптота (ХА) фје f , док ако је $a \neq 0$, у питању је коса асимптота (КА).

На исти начин дефинишемо хоризонталну и косу асимптоту фје f кад $x \rightarrow -\infty$.

Упоменутар: Кад $x \rightarrow +\infty$, фја f може имати или хоризонталну или косу или може због тога да нема асимптоту (не може имати и хоризонталну и косу, јер би то значило и да је $a = 0$ и $a \neq 0$ у дефиницији). Исто важи и када $x \rightarrow -\infty$. Може се десити да фја f има исту праву за асимптоту и када $x \rightarrow +\infty$ и када $x \rightarrow -\infty$, али такође и да то буду две различите праве.

Т. Права $y = b$ је хоризонтална асимптота фје f кад $x \rightarrow +\infty$ (односно $x \rightarrow -\infty$) ако је $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$

(односно ато је $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$).

Доказ: ($\Rightarrow$): Нема је тачна $y=b$ XA фје f кад $x \rightarrow +\infty$.

$$\Rightarrow f(x) = b + o(1), x \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (b + o(1)) = b + 0 = b \quad \checkmark$$

($\Leftarrow$): Нема је $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - b) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) - b = o(1), x \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow f(x) = b + o(1), x \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow y=b \text{ је XA фје } f \text{ кад } x \rightarrow +\infty \quad \checkmark$$

Идентичан је доказ када $x \rightarrow -\infty$.

Дакле, када је $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$, фја f има XA $y=b$ кад $x \rightarrow +\infty$ (и самим тим нема KA кад $x \rightarrow +\infty$), фок y супротном f нема XA кад $x \rightarrow +\infty$. Све исто важи и за $x \rightarrow -\infty$.

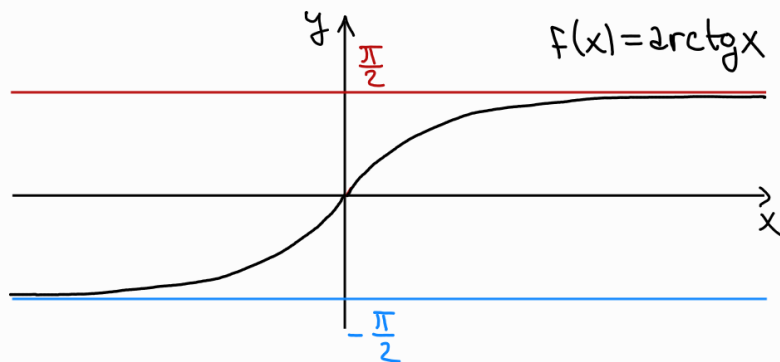
Пример: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$ је ХА фје f кад $x \rightarrow +\infty$

и $y = -\frac{\pi}{2}$ је ХА фје f кад $x \rightarrow -\infty$

Наравно, зато f нема КА кад $x \rightarrow \pm \infty$.



Видимо како је фја f све ближе својим асимптотима како $x \rightarrow +\infty$ односно $x \rightarrow -\infty$. Хоризонталне асимптоте имају коеф. правца једнак нули, па „леже“ хоризонтално у координатној равни што оправдава њихов назив.

Испитивање егзистенције ХА и КА можемо радити по дефиницији користећи разлике елементарних фја, а можемо и помоћу следеће теореме која даје „формуле“ за рачунање коефицијената a и b асимптоте $y = ax + b$.

Т. Нeka је функција f дефинисана на некој околној тачке $+\infty$. Тада је права $y = ax + b$, где $a, b \in \mathbb{R}$, асимптота фје f кад $x \rightarrow +\infty$ ако је $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$ и при том $a, b \in \mathbb{R}$. Аналогно тврђење

кашту и када $x \rightarrow -\infty$.

Доказ: $(\Rightarrow)$: Нека је $y=ax+b$ асимптота фје f кад $x \rightarrow +\infty$,
тоге су $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow f(x) = ax + b + o(1), x \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + b + o(1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a + \frac{b}{x} + \frac{o(1)}{x} \right) =$$
$$= a + \frac{b}{+\infty} + \frac{0}{+\infty} = a + 0 + 0 = a \quad \text{и}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b + o(1) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (b + o(1)) = b \quad \checkmark$$

$(\Leftarrow)$: Нека су $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) - ax - b = o(1), x \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow f(x) = ax + b + o(1), x \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow y = ax + b \text{ је асимптота фје } f \text{ кад } x \rightarrow +\infty \quad \checkmark$$

Идејтиком је доказ када $x \rightarrow -\infty$.

Дакле, асимптоте фје f кад $x \rightarrow +\infty$ можемо испитати
и тако што прво израчунамо $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Ако он не
постоји у $\overline{\mathbb{R}}$, f нема ни XA ни KA кад $x \rightarrow +\infty$. Ако је
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$, права $y = L$ је XA фје f кад $x \rightarrow +\infty$.

Ако $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}$, f нема ХА кад $x \rightarrow +\infty$

и преовладава над асимптотоме КА. Ако је $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$,

где $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, и $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$, где $b \in \mathbb{R}$, права

$y = ax + b$ је КА фје f кад $x \rightarrow +\infty$. Уколико $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

не постоји, једнак је 0 или $\pm\infty$ или $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$

не постоји или је једнак $\pm\infty$, f нема КА кад $x \rightarrow +\infty$.

Аналогно се испитују асимптоте и кад $x \rightarrow -\infty$.

Пример: Испитујемо ХА и КА фје $f: (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$
гдје са $f(x) = (x+1) \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

I начин $e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), x \rightarrow \pm\infty$

$$\Rightarrow f(x) = (x+1)\left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x+1 + o(1) + 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$\downarrow$
0, па је $o(1)$

$$= x+2 + o(1), x \rightarrow \pm\infty$$

$\Rightarrow y = x+2$ је КА фје f и кад $x \rightarrow +\infty$ и кад $x \rightarrow -\infty$

$\Rightarrow f$ нема ХА

II начин $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x}} = (+\infty+1) \cdot e^{\frac{1}{+\infty}} = +\infty \cdot e^0 =$
 $= +\infty \cdot 1 = +\infty \Rightarrow f$ нема ХА кад $x \rightarrow +\infty$

Испитујемо КА кад $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot e^{\frac{1}{x}} = (1+0) \cdot e^0 = 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1) \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cancel{x+1} + \cancel{o(1)} + 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - x \right) = 2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow b = 2 \Rightarrow y = x + 2 \text{ je KA fje } f \text{ kao } x \rightarrow +\infty$$

Слично је и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x}} = (-\infty+1) \cdot e^{\frac{1}{-\infty}} = -\infty \cdot e^0 =$

$$= -\infty \cdot 1 = -\infty \Rightarrow f \text{ нема XA kao } x \rightarrow -\infty$$

Истим путем KA kao $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}} =$$

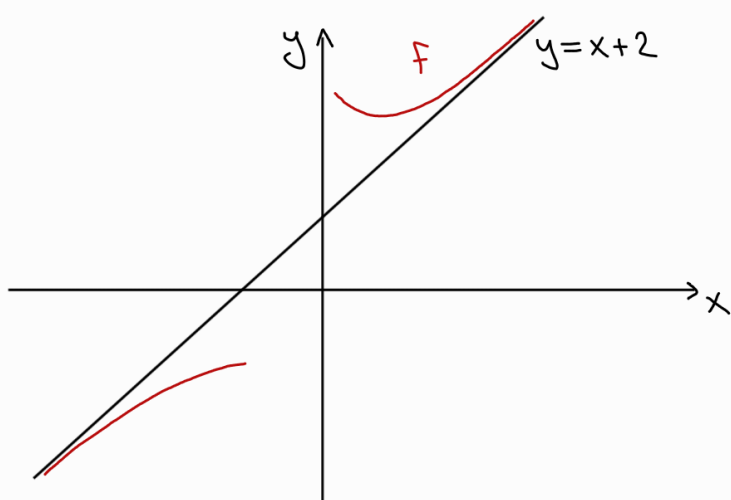
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot e^{\frac{1}{x}} = (1+0) \cdot e^0 = 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left((x+1) \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\cancel{x+1} + \cancel{o(1)} + 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - x \right) = 2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow b = 2 \Rightarrow y = x + 2 \text{ je KA fje } f \text{ kao } x \rightarrow -\infty$$



f се приближава асимптоти $y = x + 2$ кад $x \rightarrow +\infty$ и кад $x \rightarrow -\infty$.

Пример: Утврђујемо ХА и КА фје $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ гдје са

$$f(x) = x^2 - 3x + 5.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right) = (+\infty)^2 \cdot 1 = +\infty$$

$\Rightarrow f$ нема ХА кад $x \rightarrow +\infty$

Утврђујемо КА кад $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 5}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 3 + \frac{5}{x} \right) = +\infty - 3 + 0 = +\infty$$

$\Rightarrow f$ нема ни КА кад $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right) = (-\infty)^2 \cdot 1 = +\infty$$

$\Rightarrow f$ нема ХА кад $x \rightarrow -\infty$

Утврђујемо КА кад $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 5}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - 3 + \frac{5}{x} \right) = -\infty - 3 + 0 = -\infty$$

$\Rightarrow f$ нема ни КА каз $x \rightarrow -\infty$

Дакле, f уопште нема ни ХА ни КА.

Пример: Успитијемо ХА и КА фје $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ гате са $f(x) = \sqrt{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \Rightarrow f \text{ нема ХА каз } x \rightarrow +\infty$$

Успитијемо сада КА каз $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$\Rightarrow f$ нема ни КА каз $x \rightarrow +\infty$

Дакле, f уопште нема ни ХА ни КА.

Деф. Нема је $a \in \mathbb{R}$ и $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$. Ако божу бар један

од услова: 1° $(\exists \delta > 0) (a - \delta, a) \subseteq D_f$ и $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}$,

2° $(\exists \delta > 0) (a, a + \delta) \subseteq D_f$ и $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}$,

кажемо да је права $x = a$ (која је паралелна са y -осом и "лежи" вертикално у координатној равни) вертикална асимптота (ВА) функције f .

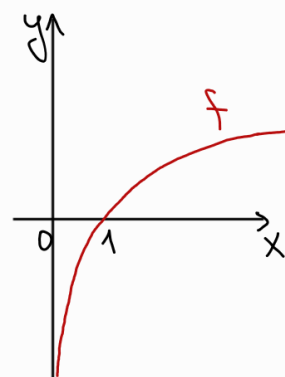
Тада је f непрекидна на свом домену D_f , њене вертикалне асимптоте идентификујемо тако што прво одредимо све коначне рубне тачке домена D_f , односно све тачке из $\mathbb{R}$ које су тачке нагомиланја D_f и при том не припадају D_f . Ове тачке се лако „мињају“ из домена, што ћемо видети у примерима и задацима.

Затим, за сваку одабру тачку a израчунамо $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ (или само један од њих ако само један има смисла) и ако је бар један од њих лимес бесконачан, права $x=a$ јесте ВА фје f . У супротном, права $x=a$ није ВА ове фје.

Пример: Одредимо ВА фје $f(x) = \ln x$.

Знамо да је $D_f = (0, +\infty)$, па је 0 једина коначна тачка домена која му не припада.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \ln(0^+) = -\infty, \text{ док } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x),$$



наравно, нема смисла због домена

$\Rightarrow$ права $x=0$ тј. y -оса је ВА фје f , и то са десне стране

Пример: Одредимо ВА фје $f(x) = \tan x$.

$$\text{Знамо да је } D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right), \text{ па}$$

је члана тачка облика $\frac{\pi}{2} + k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$, тачна потомила-
вања домена D_f која му не припада.

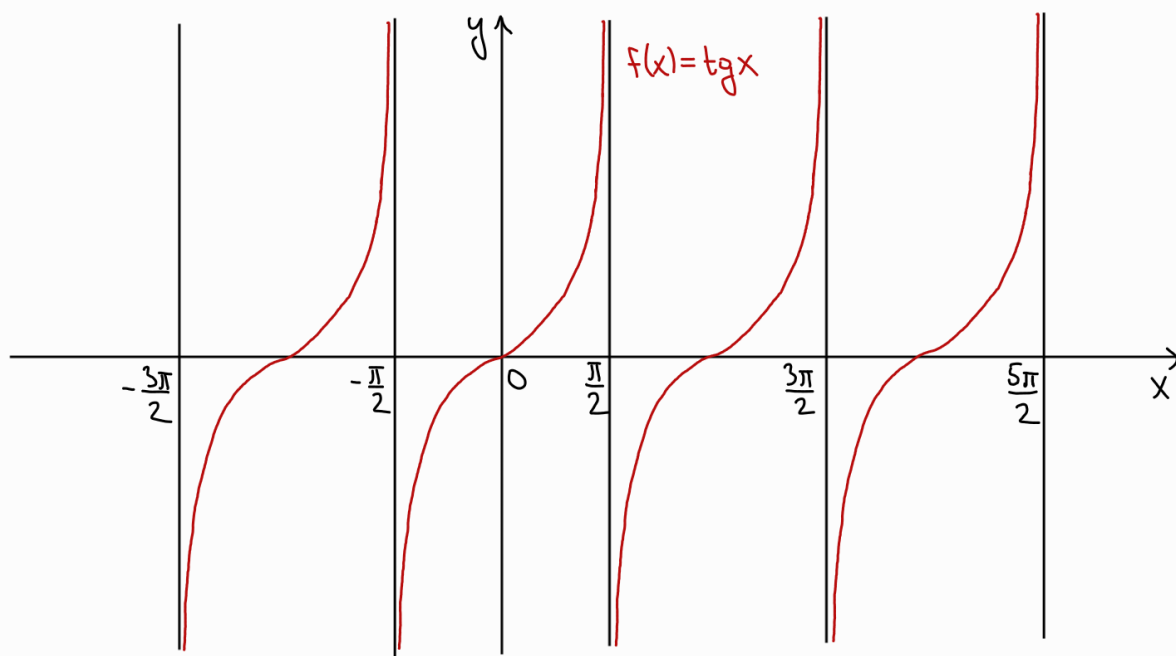
tg је π -перидична

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^+} \operatorname{tg} x \stackrel{\downarrow}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

tg је π -перидична

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^-} \operatorname{tg} x \stackrel{\downarrow}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Дакле, члана тачка $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$, је ВА фје f ,
и то са обе стране. По видимо и на њеном графику.

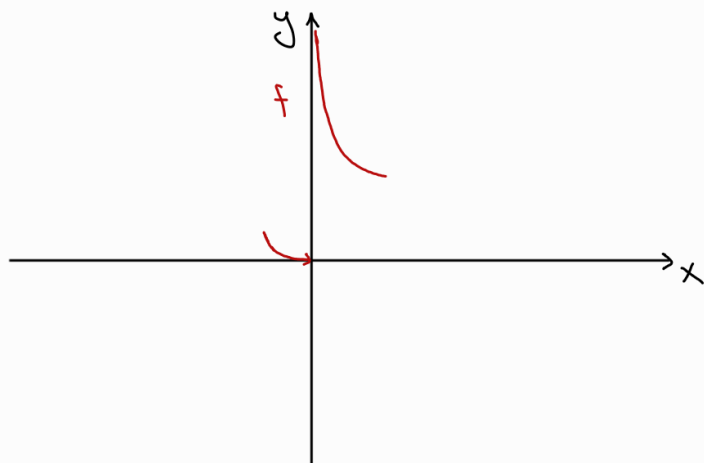


Пример: Бет смо испитали ХА и КА фје $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$, а
сада ћемо испитати њене ВА. Још је $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,
0 је једина коначна тачка потомилавања скупа D_f која
му не припада, па је тачка $x=0$ једина кандидати за ВА.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)e^{\frac{1}{x}} = 1 \cdot e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1)e^{\frac{1}{x}} = 1 \cdot e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0+$$

$\Rightarrow$ права $x=0$ је ВА фје f са десне стране



1. Определити асимптоте фје $f(x) = \arctan \frac{x+1}{2x-3} - \frac{x}{2}$.

Прво одређујемо D_f .

$$\text{Услов: } 2x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\} = (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\arctan \left(\frac{x+1}{2x-3} \right) - \frac{x}{2} \right) = \arctan \frac{1}{2} - (+\infty) = -\infty$$

$\Rightarrow$ кад $x \rightarrow +\infty$ немамо хоризонталну асимптоту, па
испробујемо криву

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan \frac{x+1}{2x-3} - \frac{x}{2}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan \frac{x+1}{2x-3}}{x} - \frac{1}{2} = \frac{\arctan \frac{1}{2}}{+\infty} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\arctan \frac{x+1}{2x-3} - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \frac{x+1}{2x-3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \frac{1 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{3}{x}} = \arctan \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow y = -\frac{x}{2} + \arctan \frac{1}{2}$ je KA fje f kao $x \rightarrow +\infty$

Na isti način se dobije da f nema KA kao $x \rightarrow -\infty$ i da je $y = -\frac{x}{2} + \arctan \frac{1}{2}$ KA fje f i kao $x \rightarrow +\infty$.

Jedini kandidati za VA je pravac $x = \frac{3}{2}$, jer je $\frac{3}{2}$ jedina konačna tačka nultilokusa D_f koja mu ne pripada.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} \left(\arctan \frac{x+1}{2x-3} - \frac{x}{2} \right) = \arctan \frac{\frac{5}{2}}{0^+} - \frac{3}{4} =$$

$$= \arctan(+\infty) - \frac{3}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} \left(\arctan \frac{x+1}{2x-3} - \frac{x}{2} \right) = \arctan \frac{\frac{5}{2}}{0^-} - \frac{3}{4} =$$

$$= \arctan(-\infty) - \frac{3}{4} = -\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \in \mathbb{R}$$

Dakle, pravac $x = \frac{3}{2}$ nije VA fje f, leti se f približava tački $(\frac{3}{2}, -\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4})$ sa leve i tački $(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4})$ sa desne strane.

2. Определить асимптоты ф-е $f(x) = \ln \frac{|2x-1|-1}{2x-1} - 2x$.

1) общий

$$\text{Условие: } \underbrace{2x-1 \neq 0}_{\Downarrow} \quad \text{и} \quad \frac{|2x-1|-1}{2x-1} > 0$$

$$x \neq \frac{1}{2}$$

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & x > \frac{1}{2} \\ 1-2x, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$1^\circ x > \frac{1}{2}$$

$$\frac{|2x-1|-1}{2x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1-1}{2x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x-2}{2x-1} > 0 \Leftrightarrow 2x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$x > \frac{1}{2} \wedge x > 1 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$$

$$2^\circ x < \frac{1}{2}$$

$$\frac{|2x-1|-1}{2x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x-1}{2x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{2x-1} > 0 \Leftrightarrow -2x < 0 \quad | :(-2) \Leftrightarrow x > 0$$

$$x < \frac{1}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, \frac{1}{2})$$

$\Rightarrow D_f = (0, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$ и найдем все пределы ф-е

$$f(x) = \begin{cases} \ln \frac{-2x}{2x-1} - 2x, & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ \ln \frac{2x-2}{2x-1} - 2x, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

2) асимптоты

Вертикальные: рассмотрим $0+, \frac{1}{2}-, 1+$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\ln \frac{|2x-1|-1}{2x-1} - 2x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \ln \frac{1-2x-1}{2x-1} - 2 \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow 0+} \ln \frac{-2x}{2x-1} =$$

$$= \ln \frac{0-}{-1} = \ln(0+) = -\infty \Rightarrow \text{вертикальная А.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}-} \left(\ln \frac{|2x-1|-1}{2x-1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}-} \ln \frac{-2x}{2x-1} - 2 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \ln \frac{-1}{0^-} - 1 = \ln(+\infty) - 1 = +\infty - 1 = +\infty \Rightarrow \text{јесне } \text{B.A.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \left(\ln \frac{|2x-1|-1}{2x-1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow 1+} \ln \frac{2x-2}{2x-1} - 2 =$$

$$= \ln \frac{0+}{1} - 2 = \ln(0+) - 2 = -\infty \Rightarrow \text{јесне } \text{B.A.}$$

Дакле, уредне $x=0$ (са десне стране), $x=\frac{1}{2}$ (са леве)
и $x=1$ (са десне) су БА фје f .

Дакле, ХА и КА можемо испитивати само за $x \rightarrow +\infty$.

горизонтална: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{|2x-1|-1}{2x-1} - 2x \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{2x-2}{2x-1} - 2x \right) = 0 - 2 \cdot (+\infty) = -\infty$$

$\Rightarrow$ не постоји Х.А.

нормална: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{2x-2}{2x-1} - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln \frac{2x-2}{2x-1}}{x} - 2 \right) =$

$$= \frac{0}{+\infty} - 2 = -2 \Rightarrow a = -2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{2x-2}{2x-1} - 2x + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{2x-2}{2x-1} =$$

$$= \ln 1 = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow b = 0$$

$\Rightarrow y = -2x$ је КА фје f кад $x \rightarrow +\infty$

3. Одредити асимптоте фје $f(x) = \ln(1+e^x) - \frac{2e^x}{1+e^x}$.

Прво ћемо мало трансформисати израз којим је дата фја f .

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+e^x) - \frac{2e^x}{1+e^x} = \ln(1+e^x) - 2 \cdot \frac{e^x+1-1}{1+e^x} = \\ &= \ln(1+e^x) - 2 \left(1 - \frac{1}{1+e^x}\right) = \ln(1+e^x) - 2 + \frac{2}{1+e^x} \end{aligned}$$

Пошто је $e^x > 0$ за све $x \in \mathbb{R}$, то је и $1+e^x > 0$ за све $x \in \mathbb{R}$, па је $D_f = \mathbb{R}$. Зато f нема ВА, па испитујемо ХА и КА кад $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$.

За $x \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\ln(\overset{0}{\underset{\nearrow 0}{e^x}} + 1) - 2 + \frac{2}{\underset{\searrow 0}{e^x} + 1} \right) = \\ &= \ln 1 - 2 + \frac{2}{1} = 0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\Rightarrow y = 0$ је ХА кад $x \rightarrow -\infty$

$\Rightarrow$ не постоји КА кад $x \rightarrow -\infty$

За $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(\overset{+\infty}{\underset{\nearrow +\infty}{e^x}} + 1) - 2 + \frac{2}{\underset{\searrow +\infty}{e^x} + 1} \right) = \\ &= \ln(+\infty) - 2 + \frac{2}{+\infty} = +\infty \Rightarrow \text{не постоји} \\ &\quad \text{ХА кад } x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x+1) - 2 + \frac{2}{e^x+1}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(e^x+1)}{x} - \frac{2}{x} + \frac{2}{x(e^x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x(1+\frac{1}{e^x}))}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^x + \ln(1+\frac{1}{e^x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(1+\frac{1}{e^x})}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{e^x})}{x} \right) = 1 + \frac{\ln 1}{+\infty} = 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(e^x+1) - 2 + \frac{2}{e^x+1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(e^x(1+\frac{1}{e^x})) - 2 - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \ln(1+\frac{1}{e^x}) - 2 - x \right) = -2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = x - 2 \text{ je KA dje } f \text{ kas } x \rightarrow +\infty$$

Лопиталова правила

Раније смо се приликом израчунавања лимеса често сусретали са неодређеним облицима $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ и тада смо их трансформишући одговарајуће изразе и користећи развоје елементарних функција сводили на одређене облике и лако израчунавали. Следећа теорема говори о још једном начину за израчунавање лимеса у којима се појављују ова два неодређена облика.

Теорема [Лопиталова правила]: Нека су $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ и $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилне функције, при чему је $g'(x) \neq 0$ за свако $x \in (a, b)$ и нека постоји $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L_1 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тада, уколико је $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$ или $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \pm\infty = \lim_{x \rightarrow a+} g(x)$, важи $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L_1$.

Слично, уколико је $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ и важи неки од услова $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} g(x) = 0$ или

$\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \pm\infty = \lim_{x \rightarrow b-} g(x)$, имамо да је $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = L_2$.

Дакле, када радимо са неодређеним изразима облика $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, можемо користити Лопиталова правила, док када радимо са неодређеним изразима облика $0 \cdot \infty$, $+\infty - (+\infty)$, $-\infty - (-\infty)$, 1^∞ , $(+\infty)^0$, 0^0 и сличне, морамо прво да их трансформишемо у неки од облика $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, па тек онда можемо применити Лопиталова правила.

1. Израчунати $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Решење: Знамо да је $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, па можемо применити Лопиталово правило. Пошто је

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0,$$

то је и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Убудуће, како бисмо скратили запис, када примењујемо Лопиталова правила, писаћемо изнад знака једнакости Л.п. и то ћемо читати као „лева страна је једнака десној уколико десна страна постоји”. На пример, претходни задатак бисмо могли записати на следећи начин:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{Л.п.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Лопиталова правила можемо и више пута узастопно применити – ако након једне примене Лопиталовог правила поново добијемо неки од неодређених облика $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, можемо опет применити Лопиталово правило. Илустрацију тога можемо видети у наредном задатку.

2. Израчунати $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{e^x}$.

Решење: Приметимо прво да је $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$, па је тражени лимес облика $\frac{\infty}{\infty}$ и можемо да применимо Лопиталово правило. Имамо да је

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{e^x} \stackrel{\text{Л.п.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{e^x}.$$

Како је $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$, поново примењујући Лопиталово правило имамо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{e^x} \stackrel{\text{Л.п.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^2}{e^x},$$

што је опет облика $\frac{\infty}{\infty}$, јер је $\lim_{x \rightarrow +\infty} 12x^2 = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$. Када опет применимо Лопиталово правило, добијамо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^2}{e^x} \stackrel{\text{Л.п.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{24x}{e^x},$$

па и даље имамо облик $\frac{\infty}{\infty}$. Коначно, када још једном применимо Лопиталово правило добијамо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{24x}{e^x} \stackrel{\text{Л.п.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{24}{e^x} = \frac{24}{+\infty} = 0,$$

па је и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0$. Дакле, овде смо наставили да примењујемо Лопиталово правило све док најзад нисмо дошли до одређеног облика у лимесу и могли директно да га израчунамо. Убудуће ћемо ово краће писати на следећи начин:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{e^x} \stackrel{\text{Л.п.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{e^x} \stackrel{\text{Л.п.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^2}{e^x} \stackrel{\text{Л.п.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{24x}{e^x} \stackrel{\text{Л.п.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{24}{e^x} = \frac{24}{+\infty} = 0,$$

уз обавезну проверу у сваком кораку да је пре примене Лопиталовог правила био облик $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

У претходна два задатка смо заправо демонстрирали извођење поредбене скале тј. да уколико су $a > 1$, $k > 0$ и $c > 1$ реални бројеви, важи

$$\log_a x \ll x^k \ll c^x, \quad x \rightarrow +\infty,$$

па надаље можемо упоредо користити поредбену скалу и Лопиталова правила у зависности од тога шта нам буде погодније.

Подсетник: У поредбеној скали смо имали и да је $c^x \ll x^x$, $x \rightarrow +\infty$, што се једноставније изводи директно, без коришћења Лопиталових правила:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c^x}{x^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{c}{x} \right)^x = 0^{+\infty} = 0.$$

3. Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0+} (x \ln x)$.

Решење: Како је $\lim_{x \rightarrow 0+} x = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = -\infty$, ово је израз облика $0 \cdot \infty$, па ћемо га трансформисати тако да можемо да применимо Лопиталово правило. Да бисмо од производа направили количник, морамо један од израза „спустити” у именилац. Када бисмо „спустили” логаритам, добили бисмо облик $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}}$ који је облика $\frac{0}{0}$, па се на њега може применити Лопиталово правило. Међутим, након његове примене, имали бисмо

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} \stackrel{\text{Л.п.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\frac{-1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x \ln^2 x),$$

што је компликованије него полазни лимес. Зато ћемо у оваквим ситуацијама избегавати да логаритам „спуштамо” у именилац, већ ћемо то урадити са функцијом x . Имамо да је

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{Л.п.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0.$$

4. Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$.

Решење: Приметимо да се у овом лimesу појављује неодређени облик 0^0 , па не можемо одмах да применимо Лопиталово правило. Прво ћемо, као и раније, пребацити израз чији лimes рачунамо на основу e , па искористити непрекидност експоненцијалне функције. Имамо да је

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0+} (e^{\ln x})^x = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \ln x}.$$

Сада још треба израчунати лimes $\lim_{x \rightarrow 0+} (x \ln x)$ што смо заправо урадили у претходном задатку, те знамо да је он једнак 0. Одатле је $\lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$, па је и $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = 1$.

5. Да ли се функција $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $f(x) = \frac{x^x - 1}{x \ln x}$ може додефинисати тако да буде непрекидна на $[0, 1]$?

Решење: Пошто је функција f свакако непрекидна на $(0, 1)$ као композиција елементарних функција, треба још утврдити да ли постоје и коначни су $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$. Израчунаћемо прво $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$. Како је на основу претходног задатка $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = 1$, то је $\lim_{x \rightarrow 0+} (x^x - 1) = 1 - 1 = 0$, а уз то је и $\lim_{x \rightarrow 0+} (x \ln x) = 0$ на основу четвртог задатка, па можемо применити Лопиталово правило. Имамо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^x - 1}{x \ln x} &\stackrel{\text{Л.П.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(x^x - 1)'}{(x \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{((e^{\ln x})^x - 1)'}{1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(e^{x \ln x} - 1)'}{\ln x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)'}{\ln x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1)}{\ln x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \ln x} = e^0 = 1, \end{aligned}$$

при чему смо на крају опет искористили чињеницу доказану у четвртом задатку – да је $\lim_{x \rightarrow 0+} (x \ln x) = 0$.

Даље, како је $\lim_{x \rightarrow 1-} (x^x - 1) = 1^1 - 1 = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 1-} (x \ln x) = 1 \cdot \ln 1 = 0$, можемо и приликом израчунавања $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ користити Лопиталово правило. Идентичним рачуном као малопре добијемо

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^x - 1}{x \ln x} \stackrel{\text{Л.П.}}{=} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x^x - 1)'}{(x \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1-} e^{x \ln x} = e^{1 \cdot \ln 1} = e^0 = 1.$$

Дакле, функција f се може додефинисати до непрекидне функције $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ дате са

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ f(x), & x \in (0, 1); \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

6. Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$.

Решење: Пошто је $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{0_{\pm}} = \pm\infty$ у зависности од тога да ли $x \rightarrow 0+$ или $x \rightarrow 0-$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0_{\pm}} = \pm\infty$, опет, у зависности од тога да ли $x \rightarrow 0+$ или $x \rightarrow 0-$, то је овај лimes облика $+\infty - (+\infty)$ или $-\infty - (-\infty)$, па га прво морамо трансформисати тако да можемо применити Лопиталово правило. Имамо да је

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x},$$

па сада можемо применити Лопиталово правило пошто је $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cos x - \sin x) = 0 \cdot 1 - 0 = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin x) = 0 \cdot 0 = 0$. Имамо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \stackrel{\text{Л.П.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x - \sin x)'}{(x \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) - \cos x}{1 \cdot \sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x}.$$

Сада, још једном ћемо применити Лопиталово правило, јер имамо да је $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin x) = 0 \cdot 0 = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + x \cos x) = 0 + 0 \cdot 1 = 0$. Зато је

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x} \stackrel{\text{Л.П.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \sin x)'}{(\sin x + x \cos x)'} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = - \frac{0 + 0 \cdot 1}{1 + 1 - 0 \cdot 0} = 0,$$

па је и $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right) = 0$.

7. Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$.

Решење: Прво морамо видети ког је облика овај лимес, па рачунамо $\lim_{x \rightarrow 0} (x \operatorname{ctg} x)$. Имамо да је

$\lim_{x \rightarrow 0} (x \operatorname{ctg} x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot \cos x \right) = 1 \cdot \cos 0 = 1$, па је зато и $\lim_{x \rightarrow 0} (x \operatorname{ctg} x - 1) = 1 - 1 = 0$, а и $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^2 = 0$. Дакле, лимес који треба да израчунамо је облика $\frac{0}{0}$, па можемо применити Лопиталово правило. Зато је

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2} \stackrel{\text{Л.П.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \operatorname{ctg} x + x \cdot \frac{-1}{\sin^2 x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{x}{\sin^2 x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x \sin x - x}{\sin^2 x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin x - x}{2x \sin^2 x}.$$

Сада, пошто је $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x \sin x - x) = 1 \cdot 0 - 0 = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin^2 x = 2 \cdot 0 \cdot 0^2 = 0$, применићемо поново Лопиталово правило. Зато је

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin x - x}{2x \sin^2 x} &\stackrel{\text{Л.П.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x - 1}{2(1 \cdot \sin^2 x + x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x - (1 - \cos^2 x)}{2 \sin x (\sin x + 2x \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x - \sin^2 x}{2 \sin x (\sin x + 2x \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 x}{2 \sin x (\sin x + 2x \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\sin x + 2x \cos x}. \end{aligned}$$

И последњи лимес је облика $\frac{0}{0}$, јер је $\lim_{x \rightarrow 0} (-\sin x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + 2x \cos x) = 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$, па још једном применом Лопиталовог правила коначно имамо да је

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\sin x + 2x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{\cos x + 2(1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{3 \cos x - 2x \sin x} = \frac{-1}{3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0} = -\frac{1}{3},$$

што значи да је и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2} = -\frac{1}{3}$.

8. Нека је $a > 0$ реалан број. Израчунати $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$.

Решење: Приметимо да је $\lim_{x \rightarrow a} (a^x - x^a) = a^a - a^a = 0$ и $\lim_{x \rightarrow a} (x - a) = a - a = 0$, па можемо применити Лопиталово правило. Зато је

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} \stackrel{\text{Л.П.}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x \ln a - a x^{a-1}}{1} = \lim_{x \rightarrow a} (a^x \ln a - a x^{a-1}) = a^a \ln a - a \cdot a^{a-1} = a^a \ln a - a^a = a^a (\ln a - 1).$$

9. Нека је $a > 0$ реалан број. Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$.

Решење: Прво, приметимо да је $\lim_{x \rightarrow 0} ((a+x)^x - a^x) = (a+0)^0 - a^0 = 1 - 1 = 0$, као и да је $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, па је овај лимес облика $\frac{0}{0}$, те можемо применити Лопиталово правило. Имамо да је

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} \stackrel{\text{Л.П.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((a+x)^x - a^x)'}{(x^2)'}$$

Да не бисмо компликовали запис, израчунаћемо $((a+x)^x)'$ посебно:

$$\begin{aligned} ((a+x)^x)' &= \left((e^{\ln(a+x)})^x \right)' = (e^{x \ln(a+x)})' = e^{x \ln(a+x)} \cdot (x \ln(a+x))' = \\ &= e^{x \ln(a+x)} \cdot \left(1 \cdot \ln(a+x) + x \cdot \frac{1}{a+x} \cdot 1 \right) = e^{x \ln(a+x)} \cdot \left(\ln(a+x) + \frac{x}{a+x} \right). \end{aligned}$$

Зато је

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} \stackrel{\text{Л.П.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(a+x)} \cdot \left(\ln(a+x) + \frac{x}{a+x} \right) - a^x \ln a}{2x}.$$

Даље, пошто је

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{x \ln(a+x)} \cdot \left(\ln(a+x) + \frac{x}{a+x} \right) - a^x \ln a \right) = e^{0 \cdot \ln a} \cdot \left(\ln a + \frac{0}{a} \right) - a^0 \ln a = 1 \cdot \ln a - 1 \cdot \ln a = 0$$

и $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$, поново ћемо применити Лопиталово правило, јер имамо лимес облика $\frac{0}{0}$. Имамо

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(a+x)} \cdot \left(\ln(a+x) + \frac{x}{a+x} \right) - a^x \ln a}{2x} \stackrel{\text{Л.П.}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(e^{x \ln(a+x)} \right)' \cdot \left(\ln(a+x) + \frac{x}{a+x} \right) + e^{x \ln(a+x)} \cdot \left(\ln(a+x) + \frac{x}{a+x} \right)' - a^x \ln a \cdot \ln a}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(e^{x \ln(a+x)} \right)' \cdot \left(\ln(a+x) + \frac{x}{a+x} \right) + e^{x \ln(a+x)} \cdot \left(\frac{1}{a+x} \cdot 1 + \frac{1 \cdot (a+x) - x \cdot 1}{(a+x)^2} \right) - a^x \ln^2 a \right). \end{aligned}$$

Од малопре имамо израчунато $\left(e^{x \ln(a+x)} \right)' = e^{x \ln(a+x)} \left(\ln(a+x) + \frac{x}{a+x} \right)$, па када то уврстимо у претходни израз, добијамо да је

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{x \ln(a+x)} \cdot \left(\ln(a+x) + \frac{x}{a+x} \right)^2 + e^{x \ln(a+x)} \cdot \left(\frac{1}{a+x} + \frac{a}{(a+x)^2} \right) - a^x \ln^2 a \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{0 \cdot \ln a} \cdot \left(\ln a + \frac{0}{a} \right)^2 + e^{0 \cdot \ln a} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{a}{a^2} \right) - a^0 \cdot \ln^2 a \right) = \frac{1}{2} \left(\ln^2 a + \frac{2}{a} - \ln^2 a \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{a} = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

10. Израчунати $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctg x \right)^x$

Решење: Приметимо прво да је $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctg x \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$, те је овај лимес облика 1^∞ , па га морамо трансформисати пре него што применимо Лопиталово правило. Имамо да је

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctg x \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\ln\left(\frac{2}{\pi} \arctg x\right)} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln\left(\frac{2}{\pi} \arctg x\right)},$$

па желимо прво да израчунамо $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \left(\frac{2}{\pi} \arctg x \right) \right)$, што је лимес облика $\infty \cdot 0$, па ћемо „спустити” x у именилац и добити лимес облика $\frac{0}{0}$ на који можемо да применимо Лопиталово правило. Имамо да је

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \left(\frac{2}{\pi} \arctg x \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{2}{\pi} \arctg x \right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{Л.П.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\frac{2}{\pi} \arctg x} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{\arctg x \cdot (x^2 + 1)} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\arctg x} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{\pi} = -1 \cdot \frac{2}{\pi} = -\frac{2}{\pi}, \end{aligned}$$

па је $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctg x \right)^x = e^{-\frac{2}{\pi}}$.

11. Успоредити $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$.

$\lim_{x \rightarrow 1} (2-x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \pm \infty$ у зависности од тога

да ли $x \rightarrow 1^-$ или $x \rightarrow 1^+$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$ је облика 1^∞

Зато је $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(e^{\ln(2-x)} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \cdot \ln(2-x)}$,

тако треба успоредити управо $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \cdot \ln(2-x)$, који је

облика $\infty \cdot \ln 1$ тј. $\infty \cdot 0$. Зато треба „скупити“ $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$

у имениоцу и применити Лопиталово правило.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \cdot \ln(2-x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}} \quad \begin{matrix} \text{"0/0"} \\ \text{Л.П.} \end{matrix}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2-x} \cdot (-1)}{-\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi x}{2}} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{-1}{2-1}}{-\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{-\frac{\pi}{2 \cdot 1^2}} = \frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} e^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \cdot \ln(2-x)} = e^{\frac{2}{\pi}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} = e^{\frac{2}{\pi}}$$

12. Успоредити $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin 2x = \sin \pi = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$ је облика ∞^0

Зато је $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (e^{\ln(\operatorname{tg} x)})^{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} e^{\sin 2x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)}$

та треба изразити у облику $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin 2x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)$, који је облика $0 \cdot \ln(+\infty)$ тј. $0 \cdot \infty$. Зато треба „скупити“ $\sin 2x$ у именилац и применити Лопиталово правило.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin 2x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\frac{1}{\sin 2x}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\sin^2 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\cancel{\cos x}}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos^2 x}}}{\frac{-2 \cos 2x}{(2 \sin x \cos x)^2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\cancel{\sin x} \cancel{\cos x}}}{\frac{-2 \cos 2x}{4 \sin^2 x \cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2 \sin x \cos x}{-2 \cos 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2 \sin x \cos x}{-\cos 2x} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}}{-\cos \pi} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 0}{-(-1)} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} e^{\sin 2x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)} = e^0 = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x} = 1$$

Услов да имес мора бити у облику $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ је врло важан, јер у супротном применом Лопиталовог правила можемо добити потребан резултат. Пример за то је следећи задатак.

13. (Септембар 1 '24) Израчунати $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^3 x}$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan^2 x = (\pm \infty)^2 = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x} \text{ је облика } 1^{+\infty}$$

$$\text{Зато је } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (e^{\ln(\sin x)})^{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{\tan^2 x \ln(\sin x)}$$

Тада треба изразити у облику $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan^2 x \cdot \ln(\sin x)$, који је облика $\infty \cdot \ln 1$ тј. $\infty \cdot 0$. Зато треба "скупити" $\tan^2 x$ у именилац и применити Лопиталово правило.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan^2 x \cdot \ln(\sin x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\tan^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\cot^2 x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \stackrel{\text{Л.П.}}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{2 \cot x \cdot \frac{-1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{\cot x}}{\frac{-2 \cancel{\cot x}}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{-2} = \frac{1^2}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{\tan^2 x \ln(\sin x)} = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

14. (Септембар 2 '23) Изражити $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{\ln 2x}$.

$$\text{Уламо } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{\ln 2x} = \frac{2 \cdot 1 - 2}{\ln 2} = \frac{0}{\ln 2} = 0.$$

Применом Лопиталовог правила (што није оправдано)

$$\text{добили бисмо } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{\ln 2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-2)'}{(\ln 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{\frac{1}{2x} \cdot 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (2x) = 2, \text{ што није тачно.}$$

Пакотје, некад се лимес не може израчунати помоћу лопиталовог правила, што не значи обавезно да он не постоји, већ се мора употребити друга техника.

15. Израчунати $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \overset{+\infty}{\underbrace{x}} \left(1 + \overset{0 \text{ као "0 \cdot \infty"}}{\underbrace{\frac{\sin x}{x}}} \right) = +\infty \cdot 1 = +\infty \quad \text{и}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sin x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \overset{+\infty}{\underbrace{x}} \left(1 - \overset{0}{\underbrace{\frac{\sin x}{x}}} \right) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

$\Rightarrow$ може се применити лопиталово правило на почетни лимес

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} \stackrel{\text{л.п.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}, \text{ што не}$$

постоји у $\mathbb{R}$, јер $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ не постоји

Међутим, ово не значи да не постоји ни $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$,

јер лопиталово правило може да је

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x - \sin x)'}$$

ако лимес на десној страни

постоји (а он у овом случају не постоји). Зато морамо

да решимо задатак на други начин:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{\sin x}{\cancel{x}}\right)}{\cancel{x} \left(1 - \frac{\sin x}{\cancel{x}}\right)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Погледајмо се (неких) важних лимеса:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \text{где је } a > 0 \text{ реалан број,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^d - 1}{x} = d, \quad \text{где је } d \in \mathbb{R}.$$

Њих можемо извести и помоћу Лопиталових правила.

$$\text{На пример, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{\text{Л.П.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(-\sin x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \stackrel{\text{Л.П.}}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^d - 1}{x} \stackrel{\text{Л.П.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d(1+x)^{d-1} \cdot 1}{1} = d \cdot 1^{d-1} = d.$$

Из ових основних лимеса смо потом извели развоје

елементарних фја попут: $\sin x = x + o(x)$, $x \rightarrow 0$ и

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $x \rightarrow 0$ које смо користили у исправља-

вању лимеса.

$$\text{Пример: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x + o(x))}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} \stackrel{\text{Л.П.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

Међутим, ми смо у следећем примеру неможемо моћи да израдимо на исти начин.

Пример: Наћи $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

Ако покушамо са идејом из претходног примера, имамо

$$\text{Дакле: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^3}.$$

После тога ми смо не можемо израчунати, јер информација да се у бројоцима налази фја из окупља $o(x)$ није довољно прецизна да бисмо одредили $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^3}$.

Закључавајући, од раније знамо да је и $x^2 = o(x)$, $x \rightarrow 0$,

$x^3 = o(x)$, $x \rightarrow 0$ и $x^4 = o(x)$, $x \rightarrow 0$. Међутим,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x = 0, \quad \text{тако видимо да се } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^3} \text{ не може}$$

тачно одредити.

Од раније знамо да је $\lim_{x \rightarrow a} o(1) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow a} o(f(x)) = 0$,

где $a \in \mathbb{R}$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, аи имеем $\lim_{x \rightarrow a} o(f(x))$ не

можемo изрaчунати уколико је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, а

овде се упросто то десило пошто је

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} o\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ и } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Ово ће говори о томе да неке имее не можемo изрaчунати поштоу да сада нам познатих развоја елементарних фја. Међутим можемo их изрaчунати поштоу Лопиталових правила или Тејлорови (односно Маклоренови) полиноми, што нам је једна од наредних тема. Зато је

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \\ &= -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Изводи вишег реда. Тејлоров и Маклоренов полином

Нека је $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ и $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ функција. Уколико је f диференцијабилна, тада је њен први извод $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ добро дефинисана функција на интервалу (a, b) . Уколико је функција f' диференцијабилна у некој тачки $x \in (a, b)$, њен извод $(f')'(x)$ у тој тачки називамо другим изводом функције f у тачки x (или њеним изводом другог реда у тој тачки), обележавамо га са $f''(x)$ и кажемо да је функција f двапут диференцијабилна у тачки x . Даље, уколико је функција f' диференцијабилна на интервалу (a, b) , њен извод називамо другим изводом функције f , означавамо га са $f'' = (f')'$ и кажемо да је функција f двапут диференцијабилна на овом интервалу. На сличан начин дефинишемо и трећи извод функције f као извод функције f'' уколико је она диференцијабилна и означавамо га са $f^{(3)} = f''' = (f'')'$, а такође и n -ти извод функције f , у ознаци $f^{(n)}$ за произвољно $n \in \mathbb{N}$. Под нултим изводом функције f подразумевамо њу саму тј. $f^{(0)} = f$.

Дакле, за све $n \in \mathbb{N}_0$ важи $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Када кажемо да је функција f n пута диференцијабилна (за неко $n \in \mathbb{N}$), подразумевамо да постоји њен извод реда n (а самим тим и сви њени изводи реда мањег од n).

1. Израчунати други извод функције $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$.

Решење: Најпре ћемо израчунати први извод ове функције тј. f' , а потом и њен други извод f'' као извод првог извода. Имамо да је

$$f'(x) = (x\sqrt{x^2 + 1})' = 1 \cdot \sqrt{x^2 + 1} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 + 1 + x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Даље је

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = \left(\frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)' = \frac{4x \cdot \sqrt{x^2 + 1} - (2x^2 + 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x}{(\sqrt{x^2 + 1})^2} = \frac{4x\sqrt{x^2 + 1} - \frac{(2x^2 + 1)x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{\frac{4x(x^2 + 1) - (2x^2 + 1)x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{4x^3 + 4x - 2x^3 - x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x^3 + 3x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

2. Израчунати n -ти извод функције $f(x) = a^x$, при чему је $a > 0$ и $a \neq 1$ реалан број и $n \in \mathbb{N}$ произвољан природан број.

Решење: Израчунаћемо првих неколико извода како бисмо покушали да утврдимо неку правилност. За $n = 1$ знамо да је $f'(x) = a^x \ln a$. Даље, за $n = 2$ је $f''(x) = (a^x \ln a)' = a^x \ln a \cdot \ln a = a^x \ln^2 a$. За $n = 3$ имамо да је $f'''(x) = (a^x \ln^2 a)' = a^x \ln a \cdot \ln^2 a = a^x \ln^3 a$. Настављајући овај поступак видимо да са сваким новим диференцирањем „искочи” по један чинилац $\ln a$, па закључујемо да је $f^{(n)}(x) = a^x \ln^n a$ за све $n \in \mathbb{N}$.

Коментар: Специјално, за $a = e$ имамо да је $\ln^n e = 1^n = 1$, па за функцију $f(x) = e^x$ знамо да је $f^{(n)}(x) = e^x$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

3. Израчунати n -ти извод функције $f(x) = \sin x$ за произвољно $n \in \mathbb{N}$.

Решење: Опет ћемо израчунати првих неколико извода ове функције како бисмо утврдили неку правилност. Имамо да је

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = (\cos x)' = -\sin x, \quad f'''(x) = (-\sin x)' = -\cos x,$$

$$f^{(4)}(x) = (-\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x = f(x),$$

па одатле видимо да је

$$f^{(5)} = (f^{(4)})' = f', \quad f^{(6)} = (f^{(5)})' = (f')' = f'', \quad f^{(7)} = (f^{(6)})' = (f'')' = f''',$$

$$f^{(8)} = (f^{(7)})' = (f''')' = f^{(4)} = f, \quad f^{(9)} = (f^{(8)})' = f'$$

и тако даље. Дакле, у низу извода $\{f^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ видимо да се чланови f', f'', f''' и f наизменично понављају, па је овај низ периодичан са периодом 4. Одатле је је

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} f(x) = \sin x, & n = 4k, \quad k \in \mathbb{N}; \\ f'(x) = \cos x, & n = 4k + 1, \quad k \in \mathbb{N}_0; \\ f'''(x) = -\sin x, & n = 4k + 2, \quad k \in \mathbb{N}_0; \\ f^{(4)}(x) = -\cos x, & n = 4k + 3, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

4. Израчунати n -ти извод функције $f(x) = x^\alpha$ за произвољно $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решење: Нека је $\alpha \in \mathbb{R}$ произвољно. И овде можемо израчунати првих неколико извода и пробати да изведемо закључак у генералном случају. Имамо да је $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, $f''(x) = (\alpha x^{\alpha-1})' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, $f'''(x) = (\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2})' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$ итд. Видимо да са сваким новим диференцирањем се степен смањи за један и испред „искочи” по један нови чинилац који је за један мањи од претходног чиниоца. Зато можемо закључити да је

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-(n-1))x^{\alpha-n} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. У случају када је $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$, последњи израз даље не можемо средити (а и нема потребе), док је у случају $\alpha \in \mathbb{N}_0$ интересантно посматрати шта ће бити $f^{(n)}$ почев од $n = \alpha$.

Прво, за $\alpha = 0$ је $f(x) = x^0 \equiv 1$ константна функција, па је $f^{(n)}(x) \equiv 0$ за све $n \in \mathbb{N}$.

Уколико је $\alpha = m \in \mathbb{N}$, горе изведена формула $f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1)x^{m-n}$ наравно важи за све $n \in \mathbb{N}$, али видимо да за $n = m$ је $f^{(n)}(x) = f^{(m)}(x) = m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-m+1)x^{m-m} = m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot 1 \equiv m!$ и онда је $f^{(n)}(x) \equiv 0$ за све $n > m$.

Пример: За полином $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, који је степена n , имамо да је

$$p'(x) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)' = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1,$$

што је полином степена $n-1$. Дакле, када диференцирамо полином степена n , тај степен му се смањи за један, па поновним диференцирањем за још један и тако, након n диференцирања ћемо добити полином степена 0 тј. константу. Та константа потиче од диференцирања монома $a_n x^n$ n пута, јер су сви остали мономи у овом полиному степена мањег од n и постају 0 након n диференцирања. На основу четвртог задатка је $(a_n x^n)^{(n)} = n! a_n$, па је и $p^{(n)}(x) \equiv n! a_n$, одакле видимо да се коефицијент a_n може изразити као $a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}$. Наравно, сваким новим диференцирањем полинома $p(x)$, добићемо нулу тј. важи $p^{(k)}(x) \equiv 0$ за свако $k > n$.

Навешћемо сада једну теорему која ће нам бити погодна када треба да израчунамо n -ти извод функције не рачунајући редом све изводе реда мањег од n .

Теорема: Нека је $n \in \mathbb{N}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ функције које су n пута диференцијабилне. Тада су и функције λf , $f + g$ и $f \cdot g$ такође n пута диференцијабилне и важи:

$$1) (\lambda f)^{(n)}(x) = \lambda f^{(n)}(x),$$

$$2) (f + g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x),$$

$$3) \text{ [Лајбницова формула] } (f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x) = \\ = \binom{n}{0} f(x) g^{(n)}(x) + \binom{n}{1} f'(x) g^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} f''(x) g^{(n-2)}(x) + \dots + \binom{n}{n} f^{(n)}(x) g(x).$$

На пример, за $n = 1$ Лајбницова формула даје познато правило диференцирања производа

$$(f(x) \cdot g(x))' = \binom{1}{0} f^{(0)}(x) g^{(1)}(x) + \binom{1}{1} f^{(1)}(x) g^{(0)}(x) = f(x) g'(x) + f'(x) g(x),$$

за $n = 2$ имамо

$$(f(x) \cdot g(x))'' = \binom{2}{0} f(x) g''(x) + \binom{2}{1} f'(x) g'(x) + \binom{2}{2} f''(x) g(x) = f(x) g''(x) + 2f'(x) g'(x) + f''(x) g(x)$$

и тако даље.

5. Израчунати шести извод функције $h(x) = (5x^2 - 2x + 1)e^x$, а потом и $f^{(6)}(0)$.

Решење: Функција h је заправо производ функција $f(x) = 5x^2 - 2x + 1$ и $g(x) = e^x$, па можемо искористити Лајбницову формулу за рачунање њеног шестог извода. Дакле, важи

$$h^{(6)}(x) = (f(x) \cdot g(x))^{(6)} = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(6-k)}(x).$$

Видимо да нам је за тај рачун неопходно да знамо шта су изводи функција f и g закључно са редом 6. Пошто је функција f полином степена 2 знамо да је $f^{(k)}(x) \equiv 0$ за свако $k > 2$ па само треба израчунати шта су јој први и други извод, те имамо да је $f'(x) = 10x - 2$ и $f''(x) \equiv 10$. То значи да су у суми у Лајбницовој формули само прва три сабирка различита од нуле. Из другог задатка знамо да је $g^{(k)}(x) = e^x$ за свако $k \in \mathbb{N}$. Када уврстимо ово у Лајбницову формулу имамо да је

$$h^{(6)}(x) = \binom{6}{0} f(x) g^{(6)}(x) + \binom{6}{1} f'(x) g^{(5)}(x) + \binom{6}{2} f''(x) g^{(4)}(x) = \\ = 1 \cdot (5x^2 - 2x + 1) \cdot e^x + 6 \cdot (10x - 2) \cdot e^x + 15 \cdot 10 \cdot e^x = (5x^2 + 58x + 139)e^x.$$

Сада, за $x = 0$ лако добијамо да је

$$f^{(6)}(0) = (5 \cdot 0^2 + 28 \cdot 0 + 139) \cdot e^0 = 139.$$

Тејлоров и Маклоренов полином

Раније смо неке елементарне функције апроксимирали полиномима првог или другог степена и оценили грешку апроксимације (тј. одступање вредности функције од полинома) помоћу асимптотске релације o . Конкретно, за $\alpha \in \mathbb{R}$ имали смо да кад $x \rightarrow 0$, између осталог, важи

$$e^x = 1 + x + o(x), \quad \sin x = x + o(x), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \ln(1+x) = x + o(x), \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x).$$

Природно се поставља питање да ли је могуће ове (а и друге) функције апроксимирати и полинонима већих степена како би апроксимација била што прецизнија, односно одступање што мање. Одговор на ово питање је потврђан, а степен полинома којим можемо апроксимирати функцију f ће зависити од тога колико пута је она диференцијабилна на околини тачке око које вршимо њену апроксимацију.

Нека је $n \in \mathbb{N}$, $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ и $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција која је n пута диференцијабилна на некој околини тачке $a \in (\alpha, \beta)$. Тада, полином

$$T_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

називамо Тејлоровим полиномом функције f реда (или степена) n са центром у тачки a . Специјално, уколико је $a = 0$, полином

$$M_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

називамо Маклореновим полиномом функције f реда (или степена) n .

Израз $R_{n,a}(x) = f(x) - T_{n,a}(x)$ називамо остатком Тејлоровог полинома функције f реда n са центром у тачки a , док је $R_n(x) = f(x) - M_n(x)$ остатак Маклореновог полинома функције f реда n . Наредне теореме говоре управо о томе како се ови остаци могу записати, односно оцени.

Теорема [остатак у Пеановом облику]: Нека је функција f n пута диференцијабилна на некој околини тачке a и нека је дефинисан $f^{(n+1)}$ на тој околини. Тада, за остатак Тејлоровог полинома важи $R_{n,a}(x) = o((x-a)^n)$, $x \rightarrow a$ тј.

$$\begin{aligned} f(x) &= T_{n,a}(x) + o((x-a)^n) = \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a, \end{aligned}$$

а када је $a = 0$, за остатак Маклореновог полинома имамо $R_n(x) = o(x^n)$, $x \rightarrow 0$ тј.

$$f(x) = M_n(x) + o(x^n) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

Теорема [остатак у Лагранжовом облику]: Нека је функција f n пута диференцијабилна на некој околини тачке a и нека је дефинисан $f^{(n+1)}$ на тој околини. Тада, за сваку тачку x из те околине постоји тачка ξ између a и x (не укључујући их) таква да за остатак Тејлоровог полинома важи $R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ тј.

$$\begin{aligned} f(x) &= T_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \end{aligned}$$

док у случају $a = 0$ за сваку тачку x из те околине постоји ξ између 0 и x (не укључујући их) такво да за остатак Маклореновог полинома важи $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ тј.

$$f(x) = M_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Дакле, уколико су одговарајући услови испуњени, на довољно малој околини тачке a функцију f можемо апроксимирати њеним Тејлоровим (или Маклореновим за $a = 0$) полиномом са центром у тој тачки. Када функцију f апроксимирамо у околини неке тачке својим Тејлоровим или

Маклореновим полиномом, кажемо да смо је развили у њен одговарајући Тејлоров или Маклоренов полином. У задацима ћемо најчешће приликом рачунања лimesа користити Маклоренов полином са остатком у Пеановом облику, а понекад и са остатком у Лагранжовом облику када желимо да утврдимо колико апроксимацијом одступамо од стварне вредности функције.

Пре него што пређемо на задатке, за произвољно $n \in \mathbb{N}$ наводимо на предавањима изведене Маклоренове развоје реда n неких елементарних функција са остатком у Пеановом облику. Њих надаље сматрамо познатим и користимо их и на колоквијумима без доказа.

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0, \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0, \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0, \quad \alpha \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

при чему је, подсетимо се, $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-(n-1))}{n!}$ за свако $\alpha \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$.

Такође, напоменимо још да се у Маклореновом полиному непарних функција јављају само мономи са непарним степенима, док се код парних функција јављају само мономи са парним степенима. Зато је, на пример, развој функције $\sin x$ у Маклоренов полином реда 3 исти као њен развој у Маклоренов полином реда 4, односно важи $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $x \rightarrow 0$, али и $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $x \rightarrow 0$.

Када нам се у задацима тражи да развијемо неку функцију у Маклоренов полином, обично то можемо радити на два начина. Први је директно рачунање извода те функције до одговарајућег реда и убацивање у формулу за Маклоренов полином, док је друга коришћење претходно наведених познатих развоја и њихово комбиновање уколико је то могуће.

1. Одредити Тејлоров полином функције $f(x) = \arctg x$ реда 2 у тачки $a = 3$.

Решење: Тражени полином је

$$T_{2,3}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 = \arctg 3 + f'(3) \cdot (x-3) + \frac{f''(3)}{2}(x-3)^2,$$

па треба још само израчунати $f'(3)$ и $f''(3)$. Како је $f'(x) = (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$, то је $f'(3) = \frac{1}{1+3^2} = \frac{1}{10}$. Даље, имамо да је

$$f''(x) = \left(\frac{1}{1+x^2} \right)' = -\frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

па је $f''(3) = -\frac{6}{10^2} = -\frac{3}{50}$. Дакле, тражени полином је

$$T_{2,3}(x) = \arctg 3 + \frac{1}{10}(x-3) - \frac{3}{100}(x-3)^2$$

и знамо да важи

$$\arctg x = \arctg 3 + \frac{1}{10}(x-3) - \frac{3}{100}(x-3)^2 + o((x-3)^2), \quad x \rightarrow 3.$$

2. Определити Маклоренов полином 5. степена фје

$$f(x) = \operatorname{arctg} x.$$

$$M_5(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$

$$f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\frac{2 \cdot (x^2+1)^2 - 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = -\frac{2(x^2+1)(x^2+1-4x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

$$\Rightarrow f'''(0) = \frac{2 \cdot (-1)}{1^2} = -2$$

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= 2 \cdot \frac{6x(x^2+1)^3 - (3x^2-1) \cdot 3(x^2+1)^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^6} = 2 \cdot \frac{6x(x^2+1)^2(x^2+1-(3x^2-1))}{(x^2+1)^6} = \\ &= \frac{12x(-2x^2+2)}{(x^2+1)^4} = \frac{24x-24x^3}{(x^2+1)^4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0 \end{aligned}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{(24-72x^2)(x^2+1)^4 - (24x-24x^3) \cdot 4(x^2+1)^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^8} \Rightarrow f^{(5)}(0) = \frac{24-0}{1} = 24$$

$$\text{Дакле, } M_5(x) = 0 + \frac{1}{1}x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{-2}{6}x^3 + \frac{0}{24}x^4 + \frac{24}{120}x^5 =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \text{ је Маклоренов полином 5. степена фје}$$

$$\operatorname{arctg} x.$$

3. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Одредити Мајоренов полином реда n где је $f(x) = e^x$.

Овде нам је циљ да демонстрирамо извођење једног од познатих резултата.

У претходној лекцији смо доказали да је $f^{(k)}(x) = e^x$ за све $k \in \mathbb{N}$, па је зато и $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_n(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \\ &= 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n = \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

4. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Одредити Мајоренов полином реда n где је $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Из познатог резултата за $(1+x)^d$ за $d = -1$ имамо:

$$f(x) = (1+x)^{-1} = 1 + \binom{-1}{1}x + \binom{-1}{2}x^2 + \binom{-1}{3}x^3 + \dots + \binom{-1}{n}x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$$

Израчунајмо сада $\binom{-1}{k}$ за произвољно $k \in \mathbb{N}$.

$$\binom{-1}{k} = \frac{-1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot \dots \cdot (-k)}{k!} = \frac{(-1)^k \cdot k!}{k!} = (-1)^k$$

$$\Rightarrow M_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n.$$

5. Развити фјз $f(x) = \ln(1+x^2)$ у Маклоренов полином

6. степена са остатком у Пеановом облику.

За бисмо искористили познати развој, уместо смену $t=x^2$. Пошто $t=x^2 \rightarrow 0$, кад $x \rightarrow 0$, имамо да је

$$\ln(1+x^2) = \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6), x \rightarrow 0.$$

Приметимо да је $\ln(1+t)$ преко развија до 3. степена, јер је $t=x^2$, па смо тиме добили развој до мога x^6 .

Иако бисмо кратили запис, убрзате нећемо екстремно уложити смену, већ ћемо је усмено разумевати и проверити да заиста идемо 0 кад $x \rightarrow 0$ како би смо оправдано користили развоје из таблице.

У овом задатку, запис би био следећи:

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{3} + o((x^2)^3) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6), x \rightarrow 0.$$

6. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Развити фје $f(x) = \frac{1}{1+x}$ и $g(x) = \frac{1}{1-x}$ у Маклоренов полином реда n са остатком у Пеановом облику.

Us 4. Zagretna leti znano ga je

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

Sada, ako vidimo za fju $g(x)$ ga je

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= (1-x)^{-1} = (1+(-x))^{-1} = 1 - (-x) + (-x)^2 - (-x)^3 + \dots + (-1)^n (-x)^n + o((-x)^n) = \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

7. Razvijte fju $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ u Maclorinov polinom

5. stepena sa ostatkom u Peanovom obliku.

Želimo ga koristiti razloje iz tablice, ali moramo biti oprezni: ako je $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5), x \rightarrow 0$,

$$\text{ne bismo } \sin(x + \frac{\pi}{3}) = (x + \frac{\pi}{3}) - \frac{(x + \frac{\pi}{3})^3}{6} + \frac{(x + \frac{\pi}{3})^5}{120} + o((x + \frac{\pi}{3})^5), \quad x \rightarrow 0,$$

jer $x + \frac{\pi}{3} \not\rightarrow 0$, kad $x \rightarrow 0$. Zato ćemo prvo zapisati fju

f u pogodnijem obliku, tako da možemo koristiti

poznate razloje. Uzmemo ga je

$$\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x =$$

$$= \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + \frac{\sqrt{3}x^4}{48} + \frac{x^5}{240} + o(x^5), x \rightarrow 0.$$

8. Razvijte f-jz $f(x) = \sqrt{x+4}$ u Maclorinov polinom 3. stepena sa ostatkom u Peanovom obliku.

$$\begin{aligned} \text{Imamo da je: } \sqrt{x+4} &= \sqrt{4(1+\frac{x}{4})} = \sqrt{4} \cdot (1+\frac{x}{4})^{\frac{1}{2}} = \\ &= 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{4} + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{\frac{1}{2}}{3}\right) \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^3 + o\left(\left(\frac{x}{4}\right)^3\right)\right) = \\ &= 2 \left(1 + \frac{x}{8} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2}}{2!} \cdot \frac{x^2}{16} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2}}{3!} \cdot \frac{x^3}{64} + o(x^3)\right) = \\ &= 2 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{64} + \frac{x^3}{512} + o(x^3), x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Možemo smo kod iskaza $\sqrt{4+x} = (4+x)^{\frac{1}{2}}$ morali prvo da izvučemo 4 kako bi u izrazu ostala giba sabirka od kojih je jedan 1, a drugi $\frac{x}{4}$ koji teži 0 kad $x \rightarrow 0$ i tako analogno upotrebu poznatih razvoja.

9. Razvijte f-jz $f(x) = \sqrt{x^2+4}$ u obliku

$$f(x) = a_1x + a_2 + \frac{a_3}{x} + \frac{a_4}{x^2} + \frac{a_5}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), x \rightarrow +\infty \text{ u}$$

$$f(x) = b_1x + b_2 + \frac{b_3}{x} + \frac{b_4}{x^2} + \frac{b_5}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), x \rightarrow -\infty.$$

Tako je sada x^2 "javni" sabirak od 4 (jer teži ka $+\infty$ kad $x \rightarrow \pm\infty$) kada ćemo izvući kako bismo

мојм да искористимо познати развој. Зато је

$$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{x^2(1+\frac{4}{x^2})} = \sqrt{x^2} \cdot \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = |x| \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{x^2} + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{4}{x^2}\right)^2 + o\left(\left(\frac{4}{x^2}\right)^2\right)\right) =$$

$x \rightarrow +\infty$, па можемо сматрати $x > 0$, па $|x| = x$

$$= x \left(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2}}{2!} \cdot \frac{16}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) = x + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), x \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow a_1=1, a_2=0, a_3=2, a_4=0, a_5=-2$$

Слично, кад $x \rightarrow -\infty$ имамо

$$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{x^2(1+\frac{4}{x^2})} = \sqrt{x^2} \cdot \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = |x| \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{x^2} + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{4}{x^2}\right)^2 + o\left(\left(\frac{4}{x^2}\right)^2\right)\right) =$$

$x \rightarrow -\infty$, па можемо сматрати $x < 0$, па $|x| = -x$

$$= -x \left(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2}}{2!} \cdot \frac{16}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) = -x - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), x \rightarrow -\infty$$

$$\Rightarrow b_1=-1, b_2=0, b_3=-2, b_4=0, b_5=2$$

10. Развити фју $f(x) = e^{1+2x^2}$ у Маклоренов полином

6. степена са остацима у Тейлоровом облику.

Пошто $1+2x^2 \neq 0$, кад $x \rightarrow 0$, може ћемо трансформисати

фју f тако да смо мојм да искористимо познате развоје. Имамо да је

$$e^{1+2x^2} = e^1 \cdot e^{2x^2} = e \cdot \left(1 + 2x^2 + \frac{(2x^2)^2}{2!} + \frac{(2x^2)^3}{3!} + o((2x^2)^3)\right) =$$

$$= e \left(1 + 2x^2 + 2x^4 + \frac{4x^6}{3} + o(x^6)\right) = e + 2ex^2 + 2ex^4 + \frac{4e}{3}x^6 + o(x^6), x \rightarrow 0.$$

11. Razvijati fiju $f(x) = \frac{1}{x+5}$ u Maclorinov polinom

3. stepena sa ostatkom u Teorovom obliku.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+5} &= (x+5)^{-1} = \left(5\left(1+\frac{x}{5}\right)\right)^{-1} = 5^{-1} \cdot \left(1+\frac{x}{5}\right)^{-1} = \\&= \frac{1}{5} \left(1 + (-1) \cdot \frac{x}{5} + \binom{-1}{2} \cdot \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \binom{-1}{3} \cdot \left(\frac{x}{5}\right)^3 + o\left(\left(\frac{x}{5}\right)^3\right)\right) = \\&= \frac{1}{5} \left(1 - \frac{x}{5} + (-1)^2 \cdot \frac{x^2}{25} + (-1)^3 \cdot \frac{x^3}{125} + o(x^3)\right) = \\&= \frac{1}{5} - \frac{x}{25} + \frac{x^2}{125} - \frac{x^3}{625} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0\end{aligned}$$

U izrazu $(x+5)^{-1}$ izvukli smo 5 jer je „jaki“ od x koji
tjemo 0 kako bismo omotili sebi upotrebu poznatog
razvoja.

12. Odrediti konstante $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ takve da je

$$\frac{1}{x+5} = a_1 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{x^2} + \frac{a_4}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

$$\frac{1}{x+5} = (x+5)^{-1} = \left(x\left(1+\frac{5}{x}\right)\right)^{-1} = x^{-1} \cdot \left(1+\frac{5}{x}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{x} \left(1 + (-1) \cdot \frac{5}{x} + \binom{-1}{2} \cdot \left(\frac{5}{x}\right)^2 + o\left(\left(\frac{5}{x}\right)^2\right)\right) = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{5}{x} + (-1)^2 \cdot \frac{25}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

razvijati smo ovaj dio do $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, jer se on množi sa $\frac{1}{x}$, pa smo
tjeme dobili razvoj do $o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

$$= \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{25}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow a_1=0, a_2=1, a_3=-5, a_4=25$$

Ovo tjemo je manje x bismo „jaki“ od 5 (jer $x \rightarrow \pm\infty$),

па смо ћета извући како бисмо могли да искористимо познати развој.

13. Развити функцију $f(x) = \ln(x + e^2)$ у Маклоренов полином реда 3 са остатком у Пеановом облику.

Решење: Како је сабирак e^2 „јачи“ од x (јер $x \rightarrow 0$), њега ћемо извући да бисмо могли да применимо познати развој. Зато је

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x + e^2) = \ln\left(e^2 \left(\frac{x}{e^2} + 1\right)\right) = \ln(e^2) + \ln\left(1 + \frac{x}{e^2}\right) = 2 + \left(\frac{x}{e^2} - \frac{\left(\frac{x}{e^2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x}{e^2}\right)^3}{3} + o\left(\left(\frac{x}{e^2}\right)^3\right)\right) = \\ &= 2 + \frac{x}{e^2} - \frac{x^2}{2e^4} + \frac{x^3}{3e^6} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0, \end{aligned}$$

јер $\frac{x}{e^2} \rightarrow 0$ кад $x \rightarrow 0$, па смо смели да користимо познати развој за логаритам.

14. Развити фјз $f(x) = \frac{\cos 2x}{x^2 + 9}$ у Маклоренов полином
4. степена са остатком у Пеановом облику.

Користећи идеје из претходних задатака имамо да је

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\cos 2x}{x^2 + 9} = \cos 2x \cdot \frac{1}{9\left(\frac{x^2}{9} + 1\right)} = \frac{1}{9} \underbrace{\cos 2x \cdot \left(1 + \frac{x^2}{9}\right)^{-1}}_{\text{развијамо оба члана до } x^4} = \\ &= \frac{1}{9} \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + o((2x)^4)\right) \cdot \left(1 + (-1) \cdot \frac{x^2}{9} + \binom{-1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{9}\right)^2 + o\left(\left(\frac{x^2}{9}\right)^2\right)\right) = \\ &= \frac{1}{9} \left(1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{9} + \frac{x^4}{81} + o(x^4)\right) = \\ &= \frac{1}{9} \left(1 - \frac{x^2}{9} + \frac{x^4}{81} + o(x^4) - 2x^2 + \frac{2x^4}{9} - \frac{2x^6}{81} + o(x^6) + \frac{2x^4}{3} - \frac{2x^6}{27} + \frac{2x^8}{243} + \right. \\ &\quad \left. + o(x^8) + o(x^4) + o(x^6) + o(x^8) + o(x^8)\right) = \\ &\quad \underbrace{o(x^4)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{9} \left(1 - \frac{19x^2}{9} + \frac{73x^4}{81} + o(x^4) \right) = \frac{1}{9} - \frac{19x^2}{81} + \frac{73x^4}{729} + o(x^4), x \rightarrow 0$$

Коментар: Убедете се да применимо развој до степена

4. степена приликом множења израза $1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$ и $1 - \frac{x^2}{9} + \frac{x^4}{81} + o(x^4)$ не морамо писати свих 16 сабирака, већ само оне релевантне. Другим речима, де мономе нији је степен већи од 4, као и $o(x^5)$, $o(x^6)$ итд. не морамо писати, већ ћемо их де обухватити помоћу једног сабирака $o(x^4)$.

15. Развити фјз $f(x) = \operatorname{tg} x$ у Мајоренов полином

5. степена са остатком у Тетеновом облику.

I начин: Непосредним рачуном имамо да је:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}, \quad f'''(x) = \frac{2(2 \sin^2 x + 1)}{\cos^4 x},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{8 \sin x (\sin^2 x + 2)}{\cos^5 x}, \quad f^{(5)}(x) = \frac{8(2 \sin^4 x + 11 \sin^2 x + 2)}{\cos^6 x}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!} x^5 + o(x^5), x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} x = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \frac{1}{3} x^3 + 0 \cdot x^4 + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5) =$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5), x \rightarrow 0$$

II начин: Топриштинено понаше развоје.

развијемо $\sin x$ и $\cos x$ до x^5

$$f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} =$$
$$= \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)}_{\text{ова је већи полином 5. степена}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^{-1}}_{\text{ова треба да развијемо у полином 5. степена}}, x \rightarrow 0$$

Умало га је

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^{-1} = \left(1 + \underbrace{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)}_0\right)^{-1} =$$

$$= 1 + (-1) \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_1 \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 + o(x^5), x \rightarrow 0$$

За одмах појаснимо: у претходном развоју нисмо писали мањ $\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^3$, јер како су две сабирке у заграда степена веће или једнаке од 2, након степеновања са 3 ће две мањ или тог израса бити степена веће или једнаке од 6 и самим тим поћи под $o(x^5)$. Исто важи и за две следеће мањке тог развоја - и они поћи под $o(x^5)$.

Сада се враћамо сретљивому томе развоју.

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^{-1} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) \cdot \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)}_{\frac{x^4}{4} + o(x^5)} + o(x^5) =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^5) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5), x \rightarrow 0$$

Заменом у почетни развој фјс f имамо

$$f(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right) =$$

$$= x + \frac{x^3}{2} + \frac{5x^5}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5), x \rightarrow 0$$

16. Развити фјз $f(x) = e^{2x-x^2}$ у Маклоренов полином

4. степена са остатком у Пеановом облику.

Имамо да је

$$f(x) = e^{2x-x^2} = 1 + (2x-x^2) + \frac{(2x-x^2)^2}{2!} + \frac{(2x-x^2)^3}{3!} + \frac{(2x-x^2)^4}{4!} + o(x^4), x \rightarrow 0$$

Није било потребе за писањем чланова $(2x-x^2)^5$, $(2x-x^2)^6$ итд. зато што сви чланови који се у њима појављују су степена бар 5 и потпадају под $o(x^4)$.

Дакле, како је

$$(2x-x^2)^2 = 4x^2 - 4x^3 + x^4,$$

$$\begin{aligned}(2x-x^2)^3 &= (2x-x^2) \cdot (2x-x^2)^2 = (2x-x^2) \cdot (4x^2 - 4x^3 + x^4) = \\ &= 8x^3 - 8x^4 - 4x^4 + o(x^4) = 8x^3 - 12x^4 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2x-x^2)^4 &= (2x-x^2) \cdot (2x-x^2)^3 = (2x-x^2) \cdot (8x^3 - 12x^4 + o(x^4)) = \\ &= 16x^4 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0,\end{aligned}$$

то је

$$\begin{aligned}f(x) &= 1 + (2x-x^2) + \frac{4x^2 - 4x^3 + x^4}{2} + \frac{8x^3 - 12x^4 + o(x^4)}{6} + \frac{16x^4 + o(x^4)}{24} + o(x^4) = \\ &= 1 + 2x + x^2 - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^4}{6} + o(x^4), \quad x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

17. Развити фјз $f(x) = \ln(\cos x)$ у Маклоренов полином
6. степена са остатком у Пеановом облику.

Јако је f континуирана где фје, развучено урло
„узгупраиу“ фјз уј. $\cos x$ го 6. степена, па
потом и миналу фјз f .

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6), \quad x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right) =$$

$$= \ln\left(1 + \left(\underbrace{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)}_0\right)\right) = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)$$

$$- \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)^3}{3} + o(x^6), x \rightarrow 0$$

Сви мономи у изразу $-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$ су степи или једнаки од 2, па степени степи или једнаки од 4 тако израза садрже мономе степена степи или једнаки од 8 и самим тим потпадају под $o(x^6)$.

Сада, из

$$\begin{aligned} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)^2 &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right) \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right) = \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{48} - \frac{x^6}{48} + o(x^6) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + o(x^6), x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)^3 &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)^2 \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right) = \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + o(x^6)\right) \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right) = -\frac{x^6}{8} + o(x^6), x \rightarrow 0, \end{aligned}$$

коначно имамо да је

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right) - \frac{\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + o(x^6)}{2} + \frac{-\frac{x^6}{8} + o(x^6)}{3} + o(x^6) = \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

18. Развити функцију $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ у Маклоренов полином другог степена са остатком у Пеановом облику.

Решење: Записаћемо прво дату функцију у погоднијем облику тј.

$$f(x) = \left(e^{\ln(1+x)}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)}.$$

Као и у претходном задатку, за почетак ћемо развити „унутрашњу” функцију тј. функцију $\ln(1+x)$, па онда и читаву функцију f . Поставља се питање до ког реда треба развити $\ln(1+x)$. Ако бисмо пробали до другог реда тј. до x^2 (с обзиром да се у задатку тражи развој за функцију f до другог реда), имали бисмо

$$f(x) = e^{\frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} = e^{1 - \frac{x}{2} + o(x)}, \quad x \rightarrow 0,$$

што нам није довољно прецизно, јер имамо $o(x)$ уместо $o(x^2)$ (видимо да се члан x^2 скратио са $\frac{1}{x}$ и тако смо изгубили жељену прецизност процене). Развићемо зато функцију $\ln(1+x)$ до трећег степена тј. до x^3 , па ће нам и након множења са $\frac{1}{x}$ остати у експоненту квадратни полином и прецизност од $o(x^2)$. Дакле, имамо да је

$$f(x) = e^{\frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)} = e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = e \cdot e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}, \quad x \rightarrow 0.$$

Сада остаје да развијемо $e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}$ у Маклоренов полином реда 2 користећи познати развој за експоненцијалну функцију и чињеницу да $\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \rightarrow 0$ кад $x \rightarrow 0$. Зато је

$$e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = 1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) + \frac{\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^2}{2!} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

при чему нам даљи чланови у овом развоју нису потребни, јер трином $-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$ степенован природним бројем већим од два садржи само мономе степена већег или једнаког од 3 и зато потпада под $o(x^2)$. Како је

$$\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^2 = \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \cdot \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{4} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

то је

$$e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = 1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) + \frac{\frac{x^2}{4} + o(x^2)}{2} + o(x^2) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0$$

и коначно

$$f(x) = e \cdot \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} + o(x^2)\right) = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

19. Развити функцију $f(x) = (1+x)^x$ у Маклоренов полином петог степена са остатком у Пеановом облику.

Решење: Као у претходном задатку, записаћемо прво дату функцију као

$$f(x) = \left(e^{\ln(1+x)}\right)^x = e^{x \ln(1+x)}.$$

Развићемо прво функцију $\ln(1+x)$ до четвртог степена, јер се она множи са x , па ћемо тако заправо добити изложилац развијен до петог степена. Дакле, важи $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$, $x \rightarrow 0$, те је

$$f(x) = e^{x \ln(1+x)} = e^{x \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)} = e^{x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + o(x^5)}, \quad x \rightarrow 0.$$

Сада ћемо развити последњи израз користећи познати развој за експоненцијалну функцију и чињеницу да $\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + o(x^5)\right) \rightarrow 0$ кад $x \rightarrow 0$. Зато је

$$f(x) = e^{x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + o(x^5)} = 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + o(x^5)\right) + \frac{\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + o(x^5)\right)^2}{2!} + o(x^5), \quad x \rightarrow 0,$$

при чему нам остали чланови у развоју нису потребни, јер израз $x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + o(x^5)$ степенован било којим природним бројем већим од два садржи само мономе степена већег или једнаког од 6, па потпада под $o(x^5)$. Како је

$$\begin{aligned} \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + o(x^5)\right)^2 &= \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + o(x^5)\right) \cdot \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + o(x^5)\right) = \\ &= x^4 - \frac{x^5}{2} - \frac{x^5}{2} + o(x^5) = x^4 - x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0, \end{aligned}$$

то је

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + o(x^5)\right) + \frac{x^4 - x^5 + o(x^5)}{2} + o(x^5) = \\ &= 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} - \frac{3x^5}{4} + o(x^5), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

До сада смо у задацима само вежбали да развијамо функције у Тејлоров (односно Маклоренов) полином, а сада ћемо демонстрирати употребу тих развоја приликом рачунања лимеса. Почећемо од задатка за који смо раније рекли да га не можемо урадити апроксимацијом $\sin x = x + o(x)$, $x \rightarrow 0$, а потом смо га урадили помоћу Лопиталовог правила.

20. Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

Решење: Решаћемо сада овај задатак тако што функцију $\sin x$, која једина није полином од функција које се појављују у претходном лимесу, развијемо у Маклоренов полином (Маклоренов пошто $x \rightarrow 0$, у супротном бисмо користили Тејлоров полином или увели смену тако да нова променљива t тежи 0 и онда користили Маклоренов полином). Поставља се питање до ког члана (тј. степена) је треба развити. Када смо раније покушали до првог степена, односно уврстили $\sin x = x + o(x)$ у лимес који рачунамо, добили смо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^3}.$$

То је представљало проблем, јер смо у имениоцу имали функцију x^3 , а у бројиоцу неку функцију из скупа $o(x)$, што би могла бити било која од функција x^2, x^3, x^{100} и тако даље, а свака од тих функција подељена са x^3 даје различиту вредност лимеса кад x тежи 0. Дакле, није било довољно прецизно развити функцију $\sin x$ до првог члана и јасно нам је да пошто је у имениоцу x^3 , било би добро да и бројилац, односно функција $\sin x$, буду развијени до члана x^3 . Зато, користећи да је $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, $x \rightarrow 0$ имамо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{6} + o(1)\right) = -\frac{1}{6}.$$

21. (Септембар 1 2021) Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x) + \sqrt{1+x^2} - 1}{x^4}$.

Решење: Како је $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(\cos x) + \sqrt{1+x^2} - 1) = \ln(1) + \sqrt{1} - 1 = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 = 0$, то је овај лимес неодређеног облика $\frac{0}{0}$. Иако би се овај задатак могао решавати помоћу Лопиталовог правила (његовом узастопном примени неколико пута), идеја је да овај лимес израчунамо помоћу развоја функција у Маклоренов полином (јер $x \rightarrow 0$). Прво морамо да одлучимо коју ћемо функцију до ког степена развити. Како је у имениоцу „најјачи” (а и једини) члан x^4 , почетна идеја нам је да изразе у бројиоцу развијемо до четвртог степена. Дакле, желимо да одредимо Маклоренове полиноме реда 4 за функције $\ln(\cos x)$ и $\sqrt{1+x^2}$.

Како смо у 17. задатку већ одредили Маклоренов полином функције $\ln(\cos x)$ шестог степена, не морамо га сада поново рачунати, већ коришћењем тог резултата знамо да је $\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$, $x \rightarrow 0$. Даље, за функцију $\sqrt{1+x^2}$ користећи познати развој и чињеницу да $x^2 \rightarrow 0$ кад $x \rightarrow 0$ имамо да је

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2} &= (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)(x^2)^2 + o((x^2)^2) = \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2}}{2!}x^4 + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4), \quad x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Одатле је

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x) + \sqrt{1+x^2} - 1}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) + 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) - 1}{x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-5x^4}{24} + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{5}{24} + o(1) \right) = -\frac{5}{24}.\end{aligned}$$

22. (Септембар 1 2024) Израчунати $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \sqrt{1-x^2} + \frac{3}{2}x \operatorname{tg} x}{x^2(e^{5x^2} - 1)}$.

Решење: Како је $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos 2x - \sqrt{1-x^2} + \frac{3}{2}x \operatorname{tg} x \right) = \cos 0 - \sqrt{1} + \frac{3}{2} \cdot 0 \cdot \operatorname{tg} 0 = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} x^2(e^{5x^2} - 1) = 0 \cdot (e^0 - 1) = 0$, то је тражени лимес облика $\frac{0}{0}$. Као и у претходним задацима, идеја је да све функције које се појављују развијемо у њихове Маклоренове полиноме. Кренућемо од имениоца, јер је он једноставнији, како бисмо одредили до ког степена ћемо развијати функције. Први члан у развоју функције e^{5x^2} је 1, па ће се он скратити када га уврстимо назад у функцију f и зато морамо имати бар још један члан у развоју функције e^{5x^2} . Дакле,

$$e^{5x^2} = 1 + 5x^2 + o(5x^2) = 1 + 5x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

па је

$$x^2(e^{5x^2} - 1) = x^2(1 + 5x^2 + o(x^2) - 1) = 5x^4 + o(x^4).$$

На овај начин смо функцију из имениоца развили до четвртог степена, па ћемо то урадити и са функцијама у бројиоцу. Имамо да је

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + o((2x)^4) = 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4), \quad x \rightarrow 0,$$

као и

$$\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = (1+(-x^2))^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot (-x^2) + \left(\frac{1}{2}\right)(-x^2)^2 + o((-x^2)^2) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4), \quad x \rightarrow 0.$$

Сада још и функцију $\frac{3}{2}x \operatorname{tg} x$ треба развити до четвртог степена, што значи да је функцију $\operatorname{tg} x$ довољно развити до трећег степена. У 15. задатку смо ову функцију развили до петог степена, па одатле знамо да је $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $x \rightarrow 0$. Коначно, можемо израчунати и тражени лимес

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4) - \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right) + \frac{3}{2}x \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)}{5x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{31x^4}{24} + o(x^4)}{5x^4 + o(x^4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 \left(\frac{31}{24} + o(1)\right)}{x^4 (5 + o(1))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{31}{24} + o(1)}{5 + o(1)} = \frac{31}{120}. \end{aligned}$$

23. (Септембар 0 2021) Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)}{\operatorname{tg} x - \sin x}$.

Решење: И овај лимес је облика $\frac{0}{0}$, јер је $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)) = \operatorname{tg}(\operatorname{tg} 0) - \sin(\sin 0) = \operatorname{tg} 0 - \sin 0 = 0 - 0 = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x - \sin x) = \operatorname{tg} 0 - \sin 0 = 0 - 0 = 0$. Зато ћемо развити све функције које се овде појављују у Маклоренов полином, али прво треба да одредимо до ког реда. Посматрајмо зато израз у имениоцу, јер је он једноставнији. Ако бисмо обе функције $\operatorname{tg} x$ и $\sin x$ развили до првог степена, имали бисмо (користећи резултат 15. задатка) да је $\operatorname{tg} x = x + o(x)$ и $\sin x = x + o(x)$ кад $x \rightarrow 0$ и зато је $\operatorname{tg} x - \sin x = o(x)$, $x \rightarrow 0$, што очигледно није довољно прецизно. Зато морамо развити ове функције бар до следећег члана, што је x^3 , са циљем да приликом њиховог одузимања не остане само $o(x^3)$, већ и неки „конкретни” сабирак (који није у облику мало o од неке функције). Како је $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $x \rightarrow 0$ и $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $x \rightarrow 0$, то је $\operatorname{tg} x - \sin x = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$, $x \rightarrow 0$, па смо развојем до трећег степена успели у својој намери. Дакле, моном x^3 је „најјачи” члан у имениоцу, па ћемо и функције у бројиоцу развити управо до x^3 . Пошто $\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \rightarrow 0$ кад $x \rightarrow 0$, имамо да је

$$\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + \frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^3}{3} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Овде смо стали са развојем, јер када се израз $x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ степењује природним бројем већим од 3, сви мономи који се у њему појављују ће бити степена бар четири и зато ће бити обухваћени са $o(x^3)$. Сада, из

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^3 &= \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) = \\ &= (x^2 + o(x^3)) \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) = x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

имамо

$$\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + \frac{x^3 + o(x^3)}{3} + o(x^3) = x + \frac{2x^3}{3} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

На сличан начин добијамо да је и

$$\begin{aligned} \sin(\sin x) &= \sin \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^3}{6} + o(x^3) = \\ &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{x^3 + o(x^3)}{6} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Коначно је

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)}{\operatorname{tg} x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{2x^3}{3} + o(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)}{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(1 + o(1))}{x^3\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)} = 2.\end{aligned}$$

24. Израчунати $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^x$.

Решење: Како је $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right) = \sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$, то је овај лимес неодређеног облика 1^∞ , те ћемо израз у њему трансформисати тако да му основа буде број e . Имамо да је

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\ln\left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln\left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)}.$$

Сада ћемо прво пронаћи $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)$ и искористити непрекидност експоненцијалне функције. Зато желимо да развијемо функције $\sin \frac{1}{x}$ и $\cos \frac{1}{x}$, а онда и $\ln\left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)$ помоћу познатих Маклоренових развоја до $o\left(\frac{1}{x}\right)$ како бисмо након множења са x добили развој до $o(1)$. Пошто $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ кад $x \rightarrow +\infty$, имамо да је

$$\sin \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{и} \quad \cos \frac{1}{x} = 1 + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

а онда и

$$\begin{aligned}\ln\left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right) &= \ln\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + 1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \ln\left(1 + \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) = \\ &= \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +\infty,\end{aligned}$$

јер $\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \rightarrow 0$ кад $x \rightarrow +\infty$. Из последњег је

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + o(1)) = 1$$

и коначно

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln\left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)} = e^1 = e.$$

25. (Септембар 2 2024) Одредити константу $a \in \mathbb{R}$ (уколико постоји) такву да буде непрекидна функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)|x^2 + 3x + 2| + a, & x \leq 0; \\ \frac{6 \ln(1 + 2x^2) - \sqrt[3]{1 + 12x^2} + \cos 4x}{x(x - \arctg x)}, & x > 0. \end{cases}$$

Решење: Приметимо прво да је функција f за сваку вредност константе a добро дефинисана и непрекидна на интервалима $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ као композиција непрекидних функција, па треба још испитати непрекидност у тачки 0. Да би била непрекидна у њој, мора важити $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$. Једноставним рачуном видимо да је $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} ((x+2)|x^2 + 3x + 2| + a) = 2 \cdot |2| + a = 4 + a$ и да је $f(0) = 2 \cdot |2| + a = 4 + a$, па остаје још да израчунамо $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{6 \ln(1 + 2x^2) - \sqrt[3]{1 + 12x^2} + \cos 4x}{x(x - \arctg x)}$ и изједначимо га са $4 + a$. Како је тај лимес неодређеног

облика $\frac{0}{0}$, јер је $\lim_{x \rightarrow 0^+} (6 \ln(1+2x^2) - \sqrt[3]{1+12x^2} + \cos 4x) = 6 \ln 1 - \sqrt[3]{1} + \cos 0 = 0 - 1 + 1 = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \arctg x) = 0 \cdot (0 - \arctg 0) = 0$, желимо да све функције које се у њему јављају развијемо у њихове Маклоренове полиноме. На основу имениоца, који је једноставнији од бројиоца, одредићемо до ког степена развијамо функције. Из другог задатка видимо да је у развоју функције $\arctg x$ први члан x тј. да важи $\arctg x = x + o(x)$, $x \rightarrow 0$, па када то уврстимо у функцију f , имали бисмо да је $x - \arctg x = x - (x + o(x)) = o(x)$, $x \rightarrow 0$ што није довољно прецизно. Зато морамо развити функцију $\arctg x$ бар до још једног члана, те имамо из другог задатка да је $\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $x \rightarrow 0$ и самим тим

$$x(x - \arctg x) = x \left(x - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \right) = x \left(\frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) = \frac{x^4}{3} + o(x^4), \quad x \rightarrow 0.$$

Сада прелазимо на функције у бројиоцу. Како $2x^2 \rightarrow 0$, $12x^2 \rightarrow 0$ и $4x \rightarrow 0$ кад $x \rightarrow 0$, имамо да је

$$\ln(1+2x^2) = 2x^2 - \frac{(2x^2)^2}{2} + o(x^4) = 2x^2 - 2x^4 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0, \quad \text{затим}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1+12x^2} &= (1+12x^2)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} \cdot 12x^2 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (12x^2)^2 + o(x^4) = 1 + 4x^2 + \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{3}}{2} \cdot 144x^4 + o(x^4) = \\ &= 1 + 4x^2 - 16x^4 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0 \quad \text{и} \end{aligned}$$

$$\cos 4x = 1 - \frac{(4x)^2}{2!} + \frac{(4x)^4}{4!} + o(x^4) = 1 - 8x^2 + \frac{32x^2}{3} + o(x^4), \quad x \rightarrow 0.$$

Зато је

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6 \ln(1+2x^2) - \sqrt[3]{1+12x^2} + \cos 4x}{x(x - \arctg x)} = \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6(2x^2 - 2x^4 + o(x^4)) - (1 + 4x^2 - 16x^4 + o(x^4)) + 1 - 8x^2 + \frac{32x^2}{3} + o(x^4)}{\frac{x^4}{3} + o(x^4)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{44x^4}{3} + o(x^4)}{\frac{x^4}{3} + o(x^4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 \left(\frac{44}{3} + o(1) \right)}{x^4 \left(\frac{1}{3} + o(1) \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{44}{3} + o(1)}{\frac{1}{3} + o(1)} = \frac{\frac{44}{3}}{\frac{1}{3}} = 44. \end{aligned}$$

Дакле, функција f је непрекидна у тачки 0 (а самим тим и на целом скупу $\mathbb{R}$) акко је $4 + a = 44$, односно акко је $a = 40$.

26. (Јун 1 2023) Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} + \sin^2 x - \cos^2 x}{\cos(\sin x) - \cos x}$.

Решење: Како је и $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{-2x^2} + \sin^2 x - \cos^2 x) = e^0 + \sin^2 0 - \cos^2 0 = 1 + 0 - 1 = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(\sin x) - \cos x) = \cos(\sin 0) - \cos 0 = \cos 0 - 1 = 1 - 1 = 0$, то је тражени лимес неодређеног облика $\frac{0}{0}$. Да бисмо га израчунали, развићемо све функције у Маклоренов полином, па још треба да одредимо до ког степена ћемо развијати. Пошто се бројилац може погодено трансформисати као

$$e^{-2x^2} + \sin^2 x - \cos^2 x = e^{-2x^2} - (\cos^2 x - \sin^2 x) = e^{-2x^2} - \cos 2x,$$

размотрићемо Маклоренове полиноме парних функција e^{-2x^2} и $\cos 2x$ и до ког степена им се евентуално поклапају чланови у развоју како бисмо развили бар до једног члана више. Како је $e^{-2x^2} = 1 + (-2x^2) + o(x^2) = 1 - 2x^2 + o(x^2)$, $x \rightarrow 0$ и $\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + o(x^2) = 1 - 2x^2 + o(x^2)$, $x \rightarrow 0$, не можемо ове функције развити само до другог степена, већ бар до наредног, што је четврти степен пошто су оне парне. Имамо да је

$$e^{-2x^2} = 1 + (-2x^2) + \frac{(-2x^2)^2}{2!} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0 \quad \text{и}$$

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4), \quad x \rightarrow 0,$$

па пошто примећујемо разлику код монома x^4 у развоју ове две функције, ту ћемо стати са развојем. Сада ћемо развити и функције из имениоца до четвртог степена. Прво имамо да је

$$\cos(\sin x) = \cos\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) = 1 - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4}{4!} + o(x^4), \quad x \rightarrow 0.$$

Овде смо стали са развојем, јер трином $x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ степенован природним бројем већим од 4 садржи само чланове који су $o(x^4)$. Сада рачунамо

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) = x^2 - \frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{6} + o(x^4) = \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4), \quad x \rightarrow 0 \quad \text{и} \\ \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = \\ &= \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) \cdot \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) = x^4 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0, \quad \text{па када то уврстимо горе, добијамо} \\ \cos(\sin x) &= 1 - \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)}{2!} + \frac{x^4 + o(x^4)}{4!} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Коначно, једноставно имамо и $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, па користећи све ове развоје добијамо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} + \sin^2 x - \cos^2 x}{\cos(\sin x) - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - \cos 2x}{\cos(\sin x) - \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4) - \left(1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)\right)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4x^4}{3} + o(x^4)}{\frac{x^4}{6} + o(x^4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 \left(\frac{4}{3} + o(1)\right)}{x^4 \left(\frac{1}{6} + o(1)\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3} + o(1)}{\frac{1}{6} + o(1)} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{6}} = 8. \end{aligned}$$

Помоћу Хајнеове теореме можемо „пренети” Маклоренове развоје на низове и на тај начин рачунати њихове лимесе. Ако је (x_n) реалан низ такав да је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, тада, примера ради, важе следећи развоји

$$e^{x_n} = 1 + x_n + \frac{x_n^2}{2!} + \frac{x_n^3}{3!} + o(x_n^3), \quad \cos x_n = 1 - \frac{x_n^2}{2!} + \frac{x_n^4}{4!} + o(x_n^4), \quad \ln(1 + x_n) = x_n - \frac{x_n^2}{2} + \frac{x_n^3}{3} + o(x_n^3), \quad n \rightarrow \infty.$$

27. (Јун 2 2024) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[-2n^2 + n^3 \left(\sin \frac{3}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \right) \right]$.

Решење: У овом лимесу се јавља неодређени израз $\infty \cdot 0$, јер је $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{3}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \right) = \sin 0 \cdot \ln(1 + 0) + \ln(1 + 0 - 0) = 0 \cdot 0 + 0 = 0$. Зато ћемо низове $\sin \frac{3}{n}$, $\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ и $\ln \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right)$ развити помоћу познатих Маклоренових развоја и то са прецизношћу $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ будући да се сви они множе са n^3 како бисмо на крају имали оптималну прецизност од $o(1)$. Имамо да је

$$\sin \frac{3}{n} = \frac{3}{n} - \frac{\left(\frac{3}{n}\right)^3}{3!} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{3}{n} - \frac{9}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

јер $\frac{3}{n} \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$; затим

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

јер $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$ и најзад

$$\ln\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^3}{3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

јер $\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right) \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$. У последњем развоју смо били свесни чињенице да степеновањем бинома $\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}$ природним бројем већим од 3 ћемо добити само сабирке облика $\frac{1}{n^k}$ и $o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ за $k > 3$ који су заправо $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ кад $n \rightarrow \infty$. Даље, лако видимо да је

$$\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^2 = \frac{4}{n^2} - \frac{4}{n^3} + \frac{1}{n^4} = \frac{4}{n^2} - \frac{4}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

и

$$\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^3 = \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right) \cdot \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^2 = \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right) \cdot \left(\frac{4}{n^2} - \frac{4}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{8}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

па је

$$\ln\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{\frac{4}{n^2} - \frac{4}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{2} + \frac{\frac{8}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{14}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Сада можемо све ово уврстити у почетни лимес и добити да је

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-2n^2 + n^3 \left(\sin \frac{3}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \right) \right] = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-2n^2 + n^3 \left(\left(\frac{3}{n} - \frac{9}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{14}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \right] = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-2n^2 + n^3 \left(\frac{3}{n^2} - \frac{3}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{14}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \right] = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-2n^2 + n^3 \left(\frac{2}{n} + \frac{19}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-2n^2 + 2n^2 + \frac{19}{6} + o(1) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{19}{6} + o(1) \right] = \frac{19}{6}. \end{aligned}$$

28. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\sqrt[n]{e} + 1}{\sqrt[n]{e} - 1} - 2n \right)$.

Решење: Пошто је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{e} + 1}{\sqrt[n]{e} - 1} = \frac{(1+) + 1}{(1+) - 1} = \frac{2}{0+} = +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n = +\infty$, у овом лимесу у загради имамо неодређени облик $(+\infty) - (+\infty)$. Зато ћемо развити израз $\sqrt[n]{e}$ помоћу познатог Маклоре-новог развоја, али ћемо пре тога трансформисати низ чији лимес одређујемо како бисмо лакше проценили до ког члана ћемо развијати. Имамо да је

$$\begin{aligned} n \left(\frac{\sqrt[n]{e} + 1}{\sqrt[n]{e} - 1} - 2n \right) &= n \cdot \frac{\sqrt[n]{e} + 1 - 2n(\sqrt[n]{e} - 1)}{\sqrt[n]{e} - 1} = n \cdot \frac{-(2n-1)\sqrt[n]{e} + 2n+1}{\sqrt[n]{e} - 1} = \\ &= \frac{-(2n^2 - n)\sqrt[n]{e} + 2n^2 + n}{\sqrt[n]{e} - 1} = \frac{-(2n^2 - n)e^{\frac{1}{n}} + 2n^2 + n}{e^{\frac{1}{n}} - 1}. \end{aligned}$$

Израз $e^{\frac{1}{n}}$ у имениоцу је довољно развити до другог члана (јер се први члан у развоју скрати) и тада је

$$e^{\frac{1}{n}} - 1 = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

пошто $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$. Дакле, у имениоцу је „најјачи” члан $\frac{1}{n}$ и прецизност од $o\left(\frac{1}{n}\right)$, па је циљ да и у бројиоцу остваримо такву ситуацију. Међутим, у бројиоцу се $e^{\frac{1}{n}}$ множи са $2n^2 - n$, што је полином другог степена, па ћемо зато ту $e^{\frac{1}{n}}$ развити са прецизношћу $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Дакле, искористићемо да је

$$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{3!} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

и добити да је онда

$$\begin{aligned} -(2n^2 - n)e^{\frac{1}{n}} + 2n^2 + n &= -(2n^2 - n) \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) + 2n^2 + n = \\ &= -2n^2 - 2n - 1 - \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + n + 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + 2n^2 + n = \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

при чему смо искористили да је $\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \rightarrow \infty$. Коначно, сада је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\sqrt[n]{e} + 1}{\sqrt[n]{e} - 1} - 2n \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-(2n^2 - n)e^{\frac{1}{n}} + 2n^2 + n}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{6} + o(1) \right)}{\frac{1}{n} (1 + o(1))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6} + o(1)}{1 + o(1)} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

29. (Јун 2 2021) Нека је низ (x_n) дат са $x_1 > 0$ произвољно и $x_{n+1} = \sqrt[4]{1 + 4x_n} - 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је овај низ конвергентан и израчунати му граничну вредност, а потом израчунати и $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$.

Решење: У лекцији *Рекурентно задати низови* смо већ урадили први део овог задатка. Тада смо прво доказали да је низ (x_n) одоздо ограничен нулом, затим и да је опадајући помоћу Бернулијеве неједнакости и коначно да је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Сада ћемо урадити други део задатка.

У циљу израчунавања лимеса $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$ прво ћемо стандардно израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx_n}$. Применом Штолцове теореме (низ $y_n = n$ је строго растући и тежи $+\infty$) имамо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}}{n + 1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n x_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - \sqrt[4]{1 + 4x_n} + 1}{x_n (\sqrt[4]{1 + 4x_n} - 1)}.$$

Последњи лимес је облика $\frac{0}{0}$, јер је $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - \sqrt[4]{1 + 4x_n} + 1) = 0 - \sqrt[4]{1 + 4 \cdot 0} + 1 = 0 - 1 + 1 = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n (\sqrt[4]{1 + 4x_n} - 1)) = 0 \cdot (\sqrt[4]{1 + 4 \cdot 0} - 1) = 0 \cdot 0 = 0$. Зато ћемо развити низ $\sqrt[4]{1 + 4x_n}$ помоћу познатог Маклореновог развоја, јер $x_n \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$. У имениоцу је довољно развити га до другог члана, јер се први скрати, па имамо да је

$$\begin{aligned} x_n (\sqrt[4]{1 + 4x_n} - 1) &= x_n \left((1 + 4x_n)^{\frac{1}{4}} - 1 \right) = x_n \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 4x_n + o(4x_n) - 1 \right) = \\ &= x_n (x_n + o(x_n)) = x_n^2 + o(x_n^2), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

те смо на овај начин израз у имениоцу развили са прецизношћу од $o(x_n^2)$. Идеја је да то урадимо и у бројиоцу, па ћемо ту израз $\sqrt[4]{1 + 4x_n}$ развити до трећег члана тј. до x_n^2 . Важи

$$\begin{aligned} x_n - \sqrt[4]{1 + 4x_n} + 1 &= x_n - (1 + 4x_n)^{\frac{1}{4}} + 1 = x_n - \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 4x_n + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot (4x_n)^2 + o((4x_n)^2) \right) + 1 = \\ &= x_n - \left(1 + x_n - \frac{3}{32} \cdot 16x_n^2 + o(x_n^2) \right) + 1 = \frac{3}{2} x_n^2 + o(x_n^2), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Када уврстимо ове резултате у лимес који смо горе започели да рачунамо, добијамо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - \sqrt[4]{1+4x_n} + 1}{x_n(\sqrt[4]{1+4x_n} - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2}x_n^2 + o(x_n^2)}{x_n^2 + o(x_n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2(\frac{3}{2} + o(1))}{x_n^2(1 + o(1))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2} + o(1)}{1 + o(1)} = \frac{3}{2},$$

па је коначно $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \frac{2}{3}$.

Последњи задатак у овој лекцији је само за оне читаоце који желе да знају више и не спада у задатке који могу доћи на испиту, али представља занимљиву и врло практичну примену Тејлоровог односно Маклореновог полинома у апроксимацији функција.

30. Развити функцију $f(x) = \sqrt{x}$ у Тејлоров полином другог степена са центром у тачки $a=16$ са остатком у Лагранжовом облику. Израчунати полином приближну вредност броја $\sqrt{16,1}$ и оцијенити њено одступање од стварне вредности.

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},$$
$$f'''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{-3}{2} \cdot x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow f(16) = 4, \quad f'(16) = \frac{1}{2} \cdot 4^{-1} = \frac{1}{8}, \quad f''(16) = -\frac{1}{4} \cdot 4^{-3} = -\frac{1}{256}$$

$$\Rightarrow T_2(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 =$$

$$= f(16) + \frac{f'(16)}{1} \cdot (x-16) + \frac{f''(16)}{2} \cdot (x-16)^2 =$$

$$= 4 + \frac{1}{8} \cdot (x-16) - \frac{1}{512} \cdot (x-16)^2 \quad \text{је Тејлоров полином}$$

реда 2 где f са центром у тачки 16

$$\Rightarrow \text{кожи } f(x) = T_2(x) + R_2(x) =$$

$$= 4 + \frac{1}{8} \cdot (x-16) - \frac{1}{512} \cdot (x-16)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!} (x-16)^3, \text{ за неко } \xi \text{ између } 16 \text{ и } x$$

Знамо да је $f(x) \approx T_2(x)$, па је

$$\begin{aligned} f(16,1) &= \sqrt{16,1} \approx T_2(16,1) = 4 + \frac{1}{8} \cdot 0,1 - \frac{1}{512} \cdot 0,1^2 = \\ &= 4 + \frac{0,1}{8} - \frac{0,01}{512} = 4 + 0,0125 - 0,00001953125 = \\ &= 4,01248046875. \end{aligned}$$

Сада ћемо оценили одступање ове апроксимације од стварне вредности што је заправо $|f(16,1) - T_2(16,1)| =$

$$= |R_2(16,1)| = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} (16,1-16)^3 \right| = \left| \frac{f'''(\xi)}{6} \cdot 0,1^3 \right| = \frac{|f'''(\xi)|}{6000} \text{ за неко}$$

ξ између 16 и 16,1. Иако не знамо колико је тачно

ξ , већ само да је $\xi \in (16, 16,1)$, који ћемо

$M = \sup_{x \in (16, 16,1)} |f'''(x)|$ и бити $|f'''(\xi)| \leq M$, што ће нам бити

довољно за оцenu одступања.

$$f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8x^{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}, \text{ што је опадајућа и по-}$$

зителна фја на $(16, 16,1)$, јер је именилац $8x^2\sqrt{x}$

растајућа фја

$$\Rightarrow M = \sup_{x \in (16, 16,1)} |f'''(x)| = \sup_{x \in (16, 16,1)} f'''(x) = \lim_{x \rightarrow 16+} f'''(x) =$$

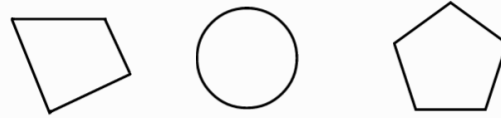
$$= \lim_{x \rightarrow 16^+} \frac{3}{8x^2\sqrt{x}} = \frac{3}{8 \cdot 256 \cdot 4} = \frac{3}{8192}$$

$$\Rightarrow |R_2(16,1)| = \frac{|f'''(\xi)|}{6000} \leq \frac{M}{6000} = \frac{\frac{3}{8192}}{\frac{6000}{2000}} = \frac{1}{16384000}$$

Према томе, наша апроксимација сигурно не одступа за више од $\frac{1}{16384000}$ од стварне вредности броја $\sqrt{16,1}$. И заиста, помоћу калкулатора се може израчунати да је $\sqrt{16,1} = 4,01248052954777...$ и да наша апроксимација одступа за нешто мање од $\frac{1}{16384000}$.

Конвексност и конкавност функција

За фигуру $\Phi \subset \mathbb{R}^2$ кажемо да је конвексна ако за сваке две тачке A и B које јој припадају важи да свака тачка дужи AB такође припада тој фигури. На наредној слици можемо видети примере конвексних и неконвексних фигура.



конвексне фигуре

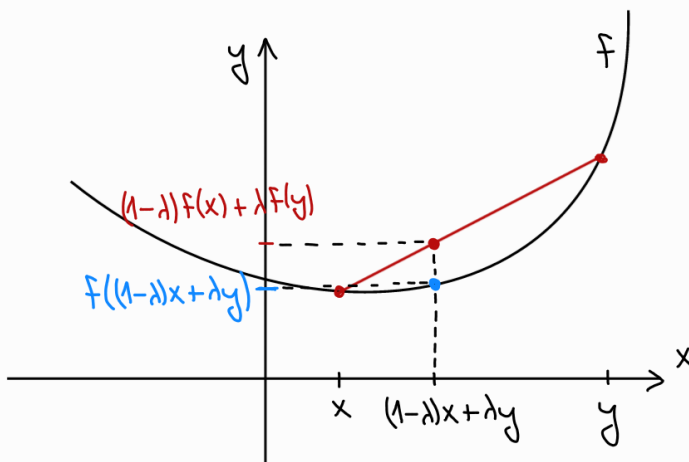


неконвексне фигуре

Дефиниција: За функцију $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ кажемо да је конвексна ако за све $x, y \in (a, b)$ и свако $\lambda \in [0, 1]$ важи $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

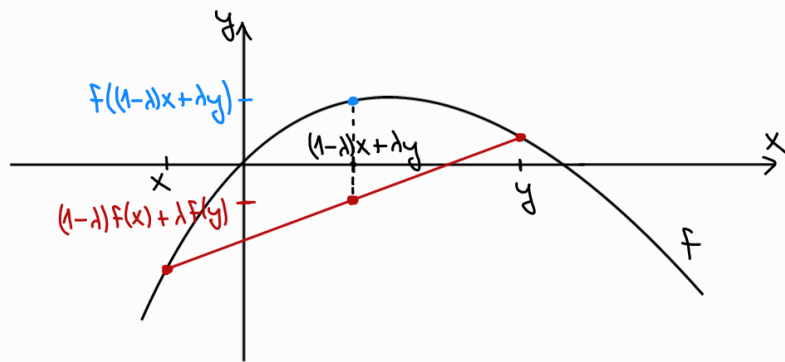
С друге стране, функција $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ је конкавна ако за све $x, y \in (a, b)$ и свако $\lambda \in [0, 1]$ важи $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

Са предавања знамо да конвексна функција има такав назив зато што је фигура сачињена од тачака у равни које се налазе изнад њеног графика конвексна. Другим речима, дуж која спаја било које две тачке са графика функције се у целости налази изнад њега и илустрацију те чињенице видимо на наредној слици.



f је конвексна, па је црвена дуж изнад графика

Такође, фигура сачињена од тачака у равни које се налазе испод графика конкавне функције је конвексна, односно дуж која спаја било које две тачке са графика се у целости налази испод њега, као што можемо видети на слици испод.



f је конкавна, па је црвена дуж испод графика

Укажио је функција (двојуги) диференцијабилна, доста једноставно се може идентифицирати њена конвексност односно конкавност.

Т. Нека је функција $f:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна.

Тада је f конвексна ако је f' растућа функција.

Слично, f је конкавна ако је f' опадајућа функција.

Т. Нека је функција $f:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ двојуги диференцијабилна. Тада је f конвексна ако је $f'(x) \geq 0$

за све $x \in (a,b)$. Слично, f је конкавна ако

је $f'(x) \leq 0$ за све $x \in (a,b)$.

Деф. Нека је $f:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ функција и $c \in (a,b)$. Укажемо

да је тачка c пребожна тачка функције f ако

важи бар један од следећих два услова:

(1) f је конвексна на некој левој околини $(c-\delta_1, c)$ тачке

c , а конкавна на некој њеној десној околини $(c, c+\delta_2)$;

(1) f је конкавна на некој левој околини $(c-\delta_1, c)$ тачке c , а конвексна на некој њеној десној околини $(c, c+\delta_2)$.

1. Истпитати конвексност функције $f(x) = \ln x$.

Доказати неједнакости $\ln x \geq \ln 2 \cdot x - \ln 2$ за све $x \in [1, 2]$

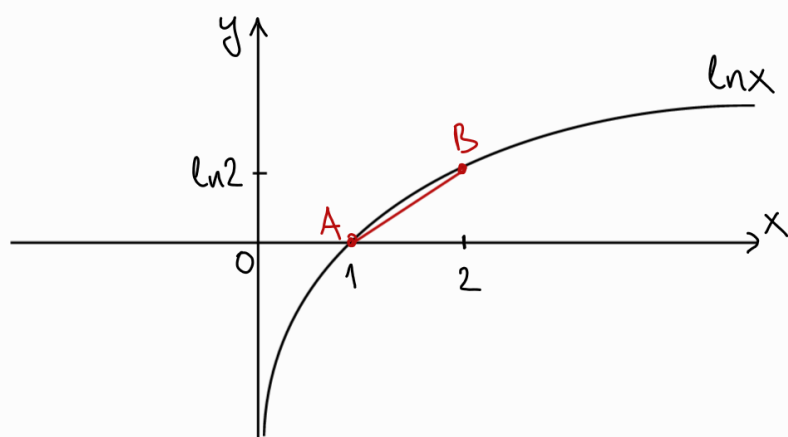
и $\ln(1+x) \geq \ln 2 \cdot x$ за све $x \in [0, 1]$.

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \text{ за све } x \in (0, +\infty)$$

$\Rightarrow f$ је конкавна на $(0, +\infty)$

$\Rightarrow f$ је конкавна и на $[1, 2]$

$\Rightarrow$ дуж мије су крајње тачке $A(1, \overset{0}{\ln 1})$ и $B(2, \ln 2)$
је истог графика фје f



Одредимо једначину праве кроз тачке A и B .

$$y = kx + n$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= k \cdot 1 + n \Rightarrow k + n = 0 \\ \ln 2 &= k \cdot 2 + n \Rightarrow 2k + n = \ln 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow k = \ln 2, n = -\ln 2$$

$\Rightarrow$ права кроз A и B има јзну $y = \ln 2 \cdot x - \ln 2$

Ова твђења се за $x \in [1, 2]$ показују истог графика фје f , па је зато $\ln 2 \cdot x - \ln 2 \leq f(x)$ тј.

$$\ln x \geq \ln 2 \cdot x - \ln 2 \text{ за све } x \in [1, 2].$$

Сменом $t = x - 1$ тј. $x = 1 + t$ добијемо $t \in [0, 1]$ и

$$\ln(1+t) \geq \ln 2 \cdot (1+t) - \ln 2 = \ln 2 \cdot t \text{ за све } t \in [0, 1].$$

2. Испитати конвексност функције $f(x) = \sin x$.

Доказати да важи $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ за све $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x$$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(2k-1)\pi, 2k\pi]$$

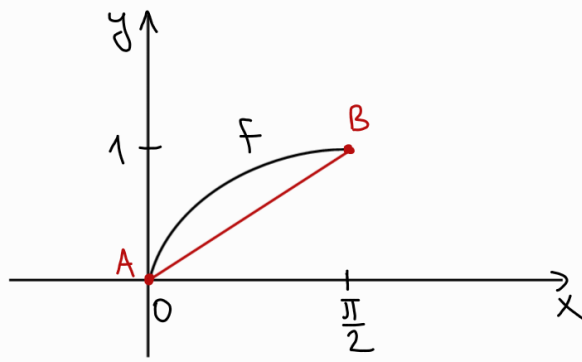
$$f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow -\sin x \leq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$$

Дакле, f је конвексна на сваком интервалу облика $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ за $k \in \mathbb{Z}$, а конкавна на сваком интервалу облика $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ за $k \in \mathbb{Z}$.

Пошто знамо да је f конкавна на $[0, \frac{\pi}{2}] \subseteq [0, \pi]$.

$\Rightarrow$ дуж мије су крајње тачке $A(0, \overset{0}{\underset{0}{\sin}})$ и $B(\frac{\pi}{2}, \overset{1}{\underset{\frac{\pi}{2}}{\sin}})$

је истог графика фје f



Одредимо једначину праве кроз тачке A и B.

$$y = kx + n$$

$$0 = k \cdot 0 + n \Rightarrow n = 0$$

$$1 = k \cdot \frac{\pi}{2} + n \Rightarrow k \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow k = \frac{2}{\pi}$$

$\Rightarrow$ права кроз A и B има јму $y = \frac{2}{\pi}x$.

Она се налази испод графика фје f за $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

та је $\frac{2}{\pi}x \leq f(x)$ тј. $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ за све $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Коментар: Можемо приметити да су све тачке облика $k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$, превојне тачке фје f.

Остатак ове лекције у коме наводимо Јенсенову неједнакост као генерализацију неједнакости из дефиниције конкавних односно конвексних функција и изводимо неједнакости између бројевних средина помоћу ње је само за оне читаоце који желе да знају више.

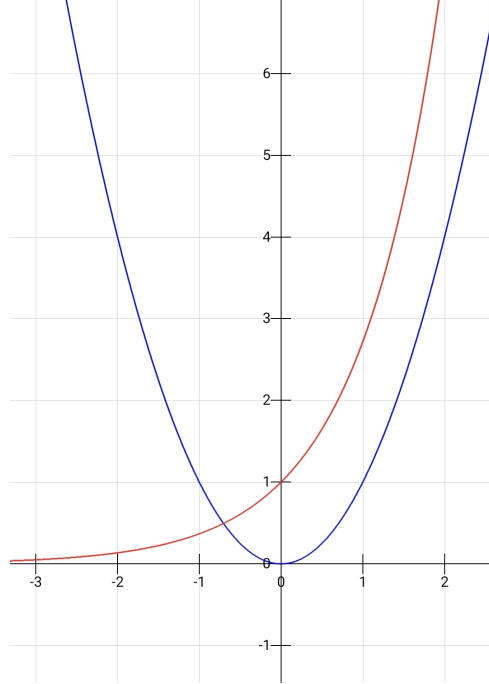
Теорема [Јенсенова неједнакост]: Нека је $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна функција. Тада за сваки природан број n и све $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ важи

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

Аналогно, уколико је $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ конкавна функција, тада за сваки природан број n и све $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ важи

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

Посматрајмо функције $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дате са $f(x) = x^2$ и $g(x) = e^x$. Како је $f''(x) = (x^2)'' = (2x)' = 2 > 0$ и $g''(x) = (e^x)'' = (e^x)' = e^x > 0$ за све $x \in \mathbb{R}$, то су функције f и g конвексне на скупу $\mathbb{R}$. На слици испод можемо видети и њихове графике (плавом бојом за функцију f , а црвеном за функцију g) и уверити се да су фигуре сачињене од тачака изнад графика ове две функције заиста конвексне.



Применом Јенсенове неједнакости на функцију f добијамо да за све $n \in \mathbb{N}$ и $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ важи

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2 \leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n},$$

одакле се кореновањем обе стране (чиме се не мења знак неједнакости) добија

$$\frac{|x_1 + x_2 + \dots + x_n|}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}},$$

а како је за свако $t \in \mathbb{R}$ испуњено $t \leq |t|$, то имамо да важи

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \frac{|x_1 + x_2 + \dots + x_n|}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

Овим смо доказали да је $A_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} = K_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Применимо сада Јенсенову неједнакост на функцију g и добијамо да за све $n \in \mathbb{N}$ и $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ важи

$$e^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}} \leq \frac{e^{x_1} + e^{x_2} + \dots + e^{x_n}}{n},$$

односно

$$\sqrt[n]{e^{x_1} \cdot e^{x_2} \cdot \dots \cdot e^{x_n}} \leq \frac{e^{x_1} + e^{x_2} + \dots + e^{x_n}}{n}.$$

Увођењем смене $e^{x_1} = y_1 > 0$, $e^{x_2} = y_2 > 0$, ..., $e^{x_n} = y_n > 0$ добијамо

$$\sqrt[n]{y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n} \leq \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n},$$

односно $G_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \leq A_n(y_1, y_2, \dots, y_n)$ за све позитивне реалне бројеве $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Сада, применом АГ неједнакости на бројеве $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$, где су $x_1, x_2, \dots, x_n$ позитивни реални бројеви, добијамо

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n} \quad \text{тј.}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n}.$$

Обе стране ове неједнакости су позитивне, па када узмемо њихове реципрочне вредности, знак неједнакости ће се променити и добићемо

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}},$$

односно $G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq H_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за све позитивне реалне бројеве $x_1, \dots, x_n$.

На овај начин смо доказали познату неједнакост између бројевних средина

$$H_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq A_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq K_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

за свако $n \in \mathbb{N}$ и све позитивне реалне бројеве $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Испитивање тока и скицирање графика функција

До сада смо у задацима одређивали домен функција, њихове нуле и знак, испитивали њихове асимптоте, њихову непрекидност и диференцијабилност, као и монотоност и конвексност односно конкавност (укључујући одређивање локалних екстремума и превојних тачака). Чак смо у неким ситуацијама, након испитивања понеких од претходно наведених елемената, умели и да оквирно скицирамо график функције. У овом одељку ћемо за сваку функцију детаљно испитати све те елементе (кажемо да смо тада детаљно испитали њен ток) и потом скицирати њен график користећи добијене резултате. Каткад ћемо након скицираног графика са њега моћи да „прочитамо” неке чињенице и одговоримо на постављена потпитања везана за посматрану функцију. Пре него што пређемо на задатке, навешћемо кораке које је потребно урадити да бисмо детаљно испитали ток функције f и скицирали њен график:

1) Домен функције

Одређујемо домен функције тј. највећи подскуп скупа $\mathbb{R}$ на ком су дефинисани сви изрази који се појављују у датој функцији.

2) Нуле и знак функције

Решавањем једначине $f(x) = 0$ (када је то могуће) налазимо нуле ове функције, а потом решавањем неједначина $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$ одређујемо скупове на којима је функција позитивна односно негативна.

3) Специјална својства функције

Испитујемо да ли је функција парна, непарна или периодична како бисмо олакшали себи посао у испитивању даљих корака.

4) Непрекидност и диференцијабилност функције

Прво испитујемо непрекидност функције на свом домену на стандардни начин. Затим рачунамо $f'(x)$ и закључујемо да је функција диференцијабилна у свим тачкама у којима је он дефинисан, а потом у тачкама у којима није дефинисан га рачунамо по дефиницији и утврђујемо да ли је функција у њима диференцијабилна.

5) Монотоност функције и локални екстремуми

Одређујемо скупове на којима је функција растућа односно опадајућа, најчешће решавањем неједначина $f'(x) \geq 0$ односно $f'(x) \leq 0$ у оним тачкама у којима је она диференцијабилна. Потом утврдимо по дефиницији да ли функција има локалне екстремуме.

6) Конвексност и конкавност функције

Одређујемо скупове на којима је функција конвексна односно конкавна, најчешће решавањем неједначина $f''(x) \geq 0$ односно $f''(x) \leq 0$ тамо где је она двапут диференцијабилна, а потом испитујемо по дефиницији егзистенцију превојних тачака функције.

7) Асимптоте функције

Као и раније, записивањем домена функције као уније више дисјунктних интервала до-

бијамо кандидате за асимптоте функције. Потом испитамо вертикалне, хоризонталне и косе асимптоте користећи дефиниције и раније доказана тврђења.

8) График функције

Све претходно испитане елементе уносимо на график тј. у координатни систем и на тај начин заокружујемо читав поступак.

Напоменимо да се не морамо нужно држати баш овог редоследа; на пример, често се асимптоте функције испитују одмах након непрекидности и диференцијабилности, па тек након њих се испитују монотоност, конвексност итд. У зависности од конкретног задатка радићемо оним редоследном који нам је најпогоднији.

Пређимо сада на задатке како бисмо увежбали описану технику.

1. Испитати знак и скицати график функције

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}. \text{ Да ли је } f \text{ „на“?}$$

1) домен

услови: i) $\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} > 0$ (због логаритма)

ii) $x \neq 0$ као именилац разломка $\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

i) Да бисмо решили неједнакост $\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} > 0$, засебно ћемо испитати знак бројоца и имениоца.

обе стране су ненегативне, па можемо квадрирати

$$\sqrt{x^2+1}-1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > 1 \stackrel{\downarrow}{\Leftrightarrow} x^2+1 > 1 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Дакле, $\sqrt{x^2+1}-1 > 0$ за све $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, док

је $\sqrt{x^2+1}-1 = 0$ за $x=0$. Уз то, лако видимо

да је $x > 0$ за $x \in (0, +\infty)$ и $x < 0$ за $x \in (-\infty, 0)$.

$\sqrt{x^2+1}-1$	$-\infty$	$+$	0	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$	$-$	$-$	$+$	$+$

 $\Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$

Услови i) и ii) заједно дају $x \in (0, +\infty)$, па је
зато $D_f = (0, +\infty)$.

2) Нуле и знак

Уочавамо да је могуће елементарно решити једначину

$$\sqrt{x^2+1} + \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = 0 \text{ или неједначине}$$

$$\sqrt{x^2+1} + \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} > 0 \text{ и } \sqrt{x^2+1} + \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} < 0, \text{ јер се}$$

у њима појављује збир различитих типова функција,

па не можемо директно одредити нуле и знак ове

функције, па ћемо то урадити касније, тек кад

скицамо њен график.

3) Специјална својства

f не може бити ни парна ни непарна, јер

њен домен није симетричан скуп. Такође, не

може бити ни периодична, јер ниједна нела-

лимина точка не припада њеном домену.

Унапријед ћемо видети да постоји $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}$, а

раније смо доказали помоћу Лајблове теореме да

периодичне фје немају лимес у $\overline{\mathbb{R}}$ кад $x \rightarrow \pm \infty$. По

је још један начин да закључимо да f није периодична.

4) Непреривност и диференцијабилност

f је непрекидна на D_f као композиција елементарних фја.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x + \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} +$$

$$+ \frac{\cancel{x}}{\sqrt{x^2+1}-1} \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x \cdot x - (\sqrt{x^2+1}-1) \cdot 1}{x^2} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2+1} + 1}{x(\sqrt{x^2+1}-1)} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x^2 - (x^2+1) + \sqrt{x^2+1}}{x\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}-1)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}}-1}{x\sqrt{x^2+1}(\cancel{\sqrt{x^2+1}}-1)} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}, \text{ што је дефи-}$$

нисано за све $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$ је диференцијабилна на целом домену

5) Монотоност и локални екстремуми

Бети знамо да је $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ за све $x \in D_f$,
та и истинјемо знак израза $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ за све $x \in D_f$.

$$x \in D_f \Rightarrow x \in (0, +\infty) \Rightarrow \underline{x > 0} \Rightarrow \underline{\sqrt{x^2+1} > \sqrt{0+1} = 1 > 0}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} > 0 \text{ за свако } x \in D_f$$

$$\Rightarrow f \nearrow \text{ строго на } D_f = (0, +\infty)$$

$$\Rightarrow f \text{ нема локалних екстремума}$$

6) Угнблксности и конкавности

Прво рачунамо $f''(x)$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x \cdot x - \sqrt{x^2+1} \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2+1}}{x^2} = \\ &= \frac{x^2 - (x^2+1)}{x^2 \sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{x^2 \sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

$$x^2 > 0 \text{ и } \sqrt{x^2+1} > 0 \text{ за све } x \in (0, +\infty)$$

$$\Rightarrow f''(x) < 0 \text{ за све } x \in (0, +\infty)$$

$$\Rightarrow f \text{ је конкавна на целом домену } (0, +\infty),$$

та нема прелојних тачака

7) Асимптоте

$$D_f = (0, +\infty)$$

$\Rightarrow$ за BA једино можемо истраживати тачку $x=0$
и ње са десне стране, а XA и KA само када
 $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{x^2+1} + \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \\
 &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 1}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1}{x} = \\
 &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{x}{2} + o(x) \right) = \\
 &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(x \left(\frac{1}{2} + o(1) \right) \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x + \ln \left(\frac{1}{2} + o(1) \right) \right) = \\
 &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x + \ln \frac{1}{2} \right) = 1 + (-\infty) + \ln \frac{1}{2} = -\infty
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ тачка $x=0$ (тј. y-оса) је BA фјк f са
десне стране

Истраживамо тачку XA када $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + \ln \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \frac{1}{x} \right) \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + \ln \left(\frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} - \frac{1}{x} \right) \right) \stackrel{x \rightarrow +\infty, \text{тако можемо сматрати}}{=} \text{га је } x > 0 \text{ и } |x|=x \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + \ln \left(\frac{x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} - \frac{1}{x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + \ln \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} \right) \right) =
 \end{aligned}$$

$$= \sqrt{+\infty} + \ln(\sqrt{1}-0) = +\infty + \ln 1 = +\infty + 0 = +\infty$$

$\Rightarrow f$ нема KA каг $x \rightarrow +\infty$

Испитујемо сада KA каг $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \frac{\ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} + \frac{\ln 1}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}} + 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \\ &= \sqrt{1+0} = 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow a=1 \end{aligned}$$

1, годинам
максиме

0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} - x \right) =$$

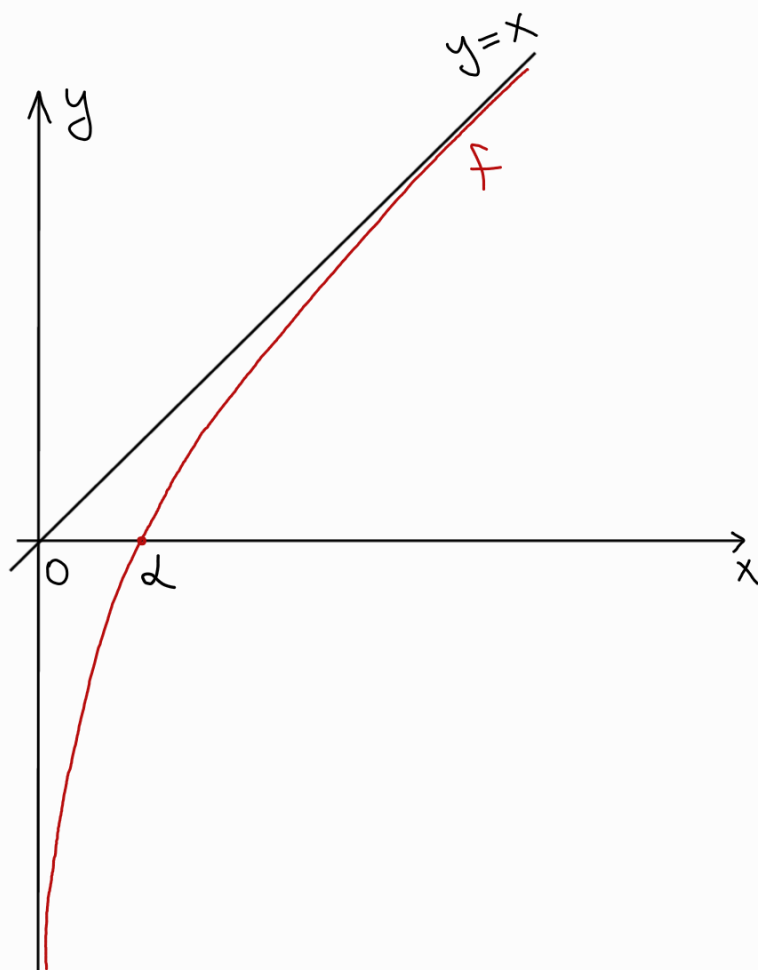
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} + \ln 1 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) \quad " \infty - \infty "$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{1}{+\infty + (+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow b=0$$

$\Rightarrow$ права $y = 1 \cdot x + 0$ тј. $y = x$ је KA фје f
каг $x \rightarrow +\infty$

8) График



2) Нуле и знак

Јако је f непрекидна на $(0, +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, на основу Џоши-Болцанове теореме f има нулу $\alpha \in (0, +\infty)$. Из мишљења да f строгото расте следи да је ова нула јединствена.

$$\Rightarrow f(x) = 0 \quad \text{за} \quad x = \alpha$$

$$f(x) > 0 \quad \text{за} \quad x \in (\alpha, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \text{ за } x \in (-\infty, a)$$

Пакотје, из $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ и

непрекидности фје f , по теорему о међуљег-
ности за свако y између $-\infty$ и $+\infty$ (тј.

за свако $y \in \mathbb{R}$) постоји $x \in D_f$ т.ј. је $f(x) = y$

$\Rightarrow f$ јесте „на“

2. (Септембар 1 '24)

Дана је функција $f(x) = \ln(1+e^x) - \frac{2e^x}{1+e^x}$.

а) Истичати ток и скицати график фје f .

б) Да ли је функција f ограничена на свом
домени? А на интервалу $(-\infty, 0]$?

а) Пре него што пређемо на истраживање фје f ,
можемо је трансформисати и записати у
погоднијем облику за рад са њом.



$$2. \quad f(x) = \ln(1+e^x) - \frac{2e^x}{1+e^x}$$

$$f(x) = \ln(1+e^x) - 2 \cdot \frac{e^x + 1 - 1}{e^x + 1} =$$

$$= \ln(e^x + 1) - 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{e^x + 1}\right) =$$

$$= \ln(e^x + 1) - 2 + \frac{2}{e^x + 1}$$

1) домен

услови: $e^x + 1 > 0$ и $e^x + 1 \neq 0$

што је испуњено за све $x \in \mathbb{R}$ (због $e^x > 0$)

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

2) монотоност и знак: касније

3) парност/непарност и периодичност: касније

4) непрекидност и диференцијабилност

f је непр. на $\mathbb{R}$ као композиција непр. ф-ја

$$f'(x) = \frac{1}{1+e^x} \cdot e^x + 2 \cdot \frac{-1}{(e^x+1)^2} \cdot e^x =$$

$$= \frac{e^x \cdot 1 \cdot (e^x+1)}{e^x+1} - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - 2e^x}{(e^x+1)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x} - e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(e^x - 1)}{(e^x+1)^2} \quad - \text{ дефинисано за } x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f$ је диференцијабилна на $\mathbb{R}$

5) монотоност и лок. екстремуми

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2}$$

e^x и $(e^x + 1)^2$ су позитивни за свако $x \in \mathbb{R}$

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

$e^x - 1$	$-\infty$	0	
	$-$	$+$	
$f'(x)$	$-$	$+$	

$\Rightarrow f \searrow$ на $(-\infty, 0)$

$f \nearrow$ на $(0, +\infty)$

f има лок. минимум у
тачки $x = 0$

$$\begin{aligned} f(0) &= \ln(1+1) - 2 + \frac{2}{1+1} = \\ &= \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

6) конвексност, монотоност и екстремне тачке

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{e^{2x} - e^x}{(e^x + 1)^2} \right)' = \frac{(e^{2x} \cdot 2 - e^x) \cdot (e^x + 1)^2 - (e^{2x} - e^x) \cdot 2(e^x + 1)e^x}{(e^x + 1)^4} \\ &= \frac{\cancel{e^x + 1}((2e^{2x} - e^x) \cdot \cancel{e^x + 1} - 2e^x(e^{2x} - e^x))}{(e^x + 1)^{4-3}} = \\ &= \frac{\cancel{2e^{3x}} - e^{2x} + 2e^{2x} - e^x - \cancel{2e^{3x}} + 2e^{2x}}{(e^x + 1)^3} = \frac{3e^{2x} - e^x}{(e^x + 1)^3} = \end{aligned}$$



$$= \frac{e^x (3e^x - 1)}{(e^x + 1)^3}$$

e^x и $(e^x + 1)^3$ су позитивни за све $x \in \mathbb{R}$

$$3e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x > \ln \frac{1}{3} \Leftrightarrow x > -\ln 3$$

$3e^x - 1$	$-\infty$	$-\ln 3$	
	-	+	$\Rightarrow f$ је конкавна на $(-\infty, -\ln 3)$
$f''(x)$	-	+	f је конвексна на $(-\ln 3, +\infty)$

у $x = -\ln 3$ је асимптотичка тачка

$$\begin{aligned} f(-\ln 3) &= \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) - 2 + \frac{2}{\frac{1}{3} + 1} = \\ &\stackrel{f(\ln \frac{1}{3})}{=} \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

7) асимптоте

BA не постоје, јер је $D_f = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{за } x \rightarrow -\infty: \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\ln(\overset{\rightarrow 0}{e^x} + 1) - 2 + \frac{2}{\underset{\rightarrow 0}{e^x} + 1} \right) = \\ &= \ln 1 - 2 + \frac{2}{1} = 0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\Rightarrow y = 0$ је ХА кад $x \rightarrow -\infty$

$\Rightarrow$ не постоји КА кад $x \rightarrow -\infty$

$$3a \quad x \rightarrow +\infty: \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(e^x + 1) - 2 + \frac{2}{e^x + 1} \right) =$$

$$= \ln(+\infty) - 2 + \frac{2}{+\infty} = +\infty \Rightarrow \text{не существует} \\ \text{КА как } x \rightarrow +\infty$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1) - 2 + \frac{2}{e^x + 1}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(e^x + 1)}{x} - \frac{2}{x} + \frac{2}{x(e^x + 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x (1 + \frac{1}{e^x}))}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^x + \ln(1 + \frac{1}{e^x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(1 + \frac{1}{e^x})}{x} =$$

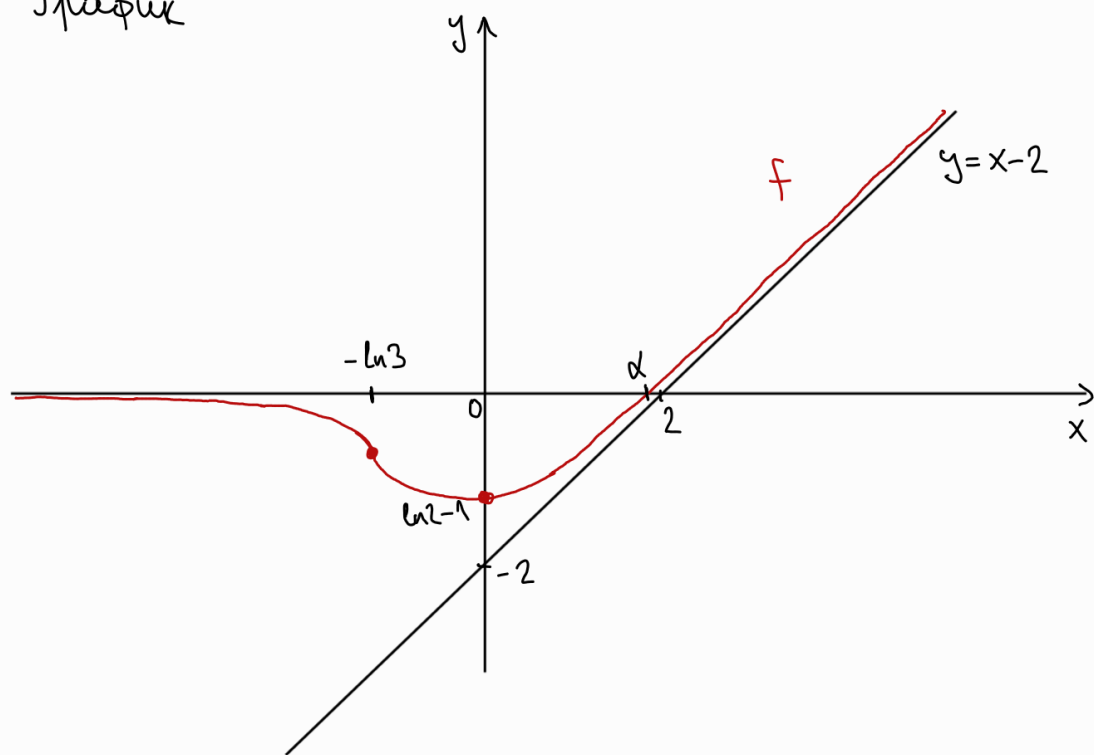
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{e^x})}{x} \right) = 1 + \frac{\ln 1}{+\infty} = 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(e^x + 1) - 2 + \frac{2}{e^x + 1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x (1 + \frac{1}{e^x})) - 2 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(1 + \frac{1}{e^x}) - 2 - x) = -2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = x - 2 \text{ je KA fje } f \text{ как } x \rightarrow +\infty$$

8) График



2) Нуле и знак

Унапред је $f(0) = \ln 2 - 1 < 0$ (јер $\ln 2 < \ln e = 1$) и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$,
 по по Уломи-Болцановој теорему f има бар једну
 нулу $\alpha \in (0, +\infty)$, јер је непрекидна. Штавише, ова нула
 је јединствена на интервалу $(0, +\infty)$, јер је f на
 њему строго растућа. Због $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $f(0) < 0$, можемо
 да је f строго опадајућа на $(-\infty, 0)$ и позитивна
 у околини $-\infty$, имамо да је f негативна на $(-\infty, 0]$.

Закључак: f има једну нулу α и притома је $\alpha > 0$

$$f(x) > 0 \text{ за } x \in (\alpha, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \text{ за } x \in (-\infty, \alpha)$$

3) Парности, непарности и периодичности

f има тачно једну нулу α , па не може бити периодична (иначе би зато имала бесконачно много нула).

Понаоже, $f(\alpha) = 0$ и $f(-\alpha) \neq 0$ (јер $-\alpha$ није нула f је f), па је $f(-\alpha) \neq \pm f(\alpha)$. Зато f није ни парна ни непарна.

б) Јако је $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, па не постоји $M \in \mathbb{R}$ т.д. је $f(x) \leq M$ за све $x \in \mathbb{R}$, па f није ограничена на $D_f = \mathbb{R}$.

С друге стране, пошто је f строго опадајућа на $(-\infty, 0]$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$ и $f(0) = \ln 2 - 1$, па је f ограничена на $(-\infty, 0]$ (одозго са $\ln 2 - 1$, а одоздо са 0).

3. а) Истипати ток и скицати график функције

$$f(x) = \frac{x \ln x}{3 \ln x - 1}.$$

б) Одредити површину троугла који закљача тангентна на график функције f у тачки чија је x координата $\frac{1}{e}$ са координатним осам.

а) 1) Домен

Услови: i) $x > 0$ због $\ln x$

ii) $3 \ln x - 1 \neq 0$ због именуоца

$$3 \ln x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \neq e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

Из i) и ii) добијамо $D_f = (0, \sqrt[3]{e}) \cup (\sqrt[3]{e}, +\infty)$.

2) Нуле и знак

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x \ln x}{3 \ln x - 1} = 0 \Leftrightarrow x \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = e^0 = 1$$

$0 \notin D_f$ и $1 \in D_f \Rightarrow x = 1$ је једина нула фје f

Да бисмо истипали знак фје f , истипатићемо знак израза x , $\ln x$ и $3 \ln x - 1$.

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > e^0 = 1$$

$$3\ln x - 1 \Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x > e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

x	0	1	$\sqrt[3]{e}$
$\ln x$	-	+	+
$3\ln x - 1$	-	-	+
$f(x)$	+	-	+

$$\sqrt[3]{e} > \sqrt[3]{1} = 1$$

$$\Rightarrow f(x) > 0 \text{ за } x \in (0, 1) \cup (\sqrt[3]{e}, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \text{ за } x \in (1, \sqrt[3]{e})$$

3) Специјална својства

D_f није симетричан $\Rightarrow f$ није ни парна ни непарна

f није ни периодична, јер има тачно једну нулу (алтернативно, D_f је ограничен одозго, па f није периодична).

4) Непрестанљивост и диференцијабилност

f је непрекидна на D_f као композиција елементарних фја

$$f'(x) = \frac{(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) \cdot (3\ln x - 1) - x \ln x \cdot 3 \cdot \frac{1}{x}}{(3\ln x - 1)^2} =$$

$$= \frac{(\ln x + 1) \cdot (3\ln x - 1) - 3\ln x}{(3\ln x - 1)^2} = \frac{3\ln^2 x - \ln x + 3\ln x - 1 - 3\ln x}{(3\ln x - 1)^2} =$$

$$= \frac{3\ln^2 x - \ln x - 1}{(3\ln x - 1)^2}, \text{ што је дефинисано за све } x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ је диференцијабилна на D_f

5) Монотоност и локални екстремуми

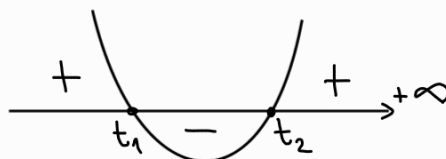
Испитујемо знак $f'(x) = \frac{3\ln^2 x - \ln x - 1}{(3\ln x - 1)^2}$ тако што

испитујемо знак бројоца, јер је именилац као квадрат позитиван.

Решавамо неједнакост $3\ln^2 x - \ln x - 1 > 0$:

смена $\ln x = t$

$$3t^2 - t - 1 > 0$$



$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6} \Rightarrow 3t^2 - t - 1 > 0 \Leftrightarrow t < \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \vee t > \frac{1 + \sqrt{13}}{6}$$

$$\Leftrightarrow \ln x < \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \vee \ln x > \frac{1 + \sqrt{13}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x < e^{\frac{1 - \sqrt{13}}{6}} \vee x > e^{\frac{1 + \sqrt{13}}{6}}$$

Јако је $\frac{1 - \sqrt{13}}{6} < 0 < \frac{1}{3}$ и $\frac{1 + \sqrt{13}}{6} > \frac{1 + 1}{6} = \frac{1}{3}$, јер је $\sqrt{13} > 1$,

можемо да направимо таблицу.

	0	$e^{\frac{1 - \sqrt{13}}{6}}$	$\sqrt[3]{e}$	$e^{\frac{1 + \sqrt{13}}{6}}$
$3\ln^2 x - \ln x - 1$	+	-	-	+
$(3\ln x - 1)^2$	+	+	+	+
$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$\Rightarrow f \nearrow$ на $(0, e^{\frac{1 - \sqrt{13}}{6}}]$ и $f \nearrow$ на $[e^{\frac{1 + \sqrt{13}}{6}}, +\infty)$,

$f \searrow$ на $[e^{\frac{1 - \sqrt{13}}{6}}, \sqrt[3]{e}]$ и $f \searrow$ на $[\sqrt[3]{e}, e^{\frac{1 + \sqrt{13}}{6}}]$

$\Rightarrow f$ има локални максимум у тачки $e^{\frac{1-\sqrt{13}}{6}}$ и
локални минимум у тачки $e^{\frac{1+\sqrt{13}}{6}}$

Вредности $f(e^{\frac{1-\sqrt{13}}{6}})$ и $f(e^{\frac{1+\sqrt{13}}{6}})$ могу нарочито лете,
иа их нећемо рачунати, али знамо да је

$f(e^{\frac{1-\sqrt{13}}{6}}) > 0$, јер је $e^{\frac{1-\sqrt{13}}{6}} < e^0 = 1$ и $f(e^{\frac{1+\sqrt{13}}{6}}) > 0$,

јер је $e^{\frac{1+\sqrt{13}}{6}} > e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$.

6) Утоњексност и конкавност

$$f''(x) = \left(\frac{3\ln^2 x - \ln x - 1}{(3\ln x - 1)^2} \right)' =$$

$\vdash (3\ln x - 1)$

$$= \frac{(3 \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x}) \cdot (3\ln x - 1)^2 - (3\ln^2 x - \ln x - 1) \cdot 2(3\ln x - 1) \cdot \frac{3}{x}}{(3\ln x - 1)^4} =$$

$$= \frac{\frac{6\ln x - 1}{x} \cdot (3\ln x - 1) - 6(3\ln^2 x - \ln x - 1) \cdot \frac{1}{x}}{(3\ln x - 1)^3} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \left((6\ln x - 1)(3\ln x - 1) - 18\ln^2 x + 6\ln x + 6 \right)}{(3\ln x - 1)^3} = \frac{18\cancel{\ln^2 x} - 9\ln x + 1 - 18\cancel{\ln^2 x} + 6\ln x + 6}{x(3\ln x - 1)^3} =$$

$$= \frac{7 - 3\ln x}{x(3\ln x - 1)^3}$$

$$7 - 3\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{7}{3} \Leftrightarrow x < e^{\frac{7}{3}}$$

$$(3\ln x - 1)^3 > 0 \Leftrightarrow 3\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x > e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

	0	$\sqrt[3]{e}$	$e^{\frac{1}{3}}$
$7-3\ln x$	+	+	-
$(3\ln x - 1)^3$	-	+	+
x	+	+	+
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

$\Rightarrow f$ je konvexna na $(\sqrt[3]{e}, e^{\frac{1}{3}})$
i konkavna na $(0, \sqrt[3]{e})$ i
na $(e^{\frac{1}{3}}, +\infty)$

$\Rightarrow f$ ima prelomnu tačku u $x = e^{\frac{1}{3}}$ i $f(e^{\frac{1}{3}}) = \frac{e^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3}}{3 \cdot \frac{1}{3} - 1} = \frac{7e^{\frac{1}{3}}}{18}$,

gde u $x = \sqrt[3]{e}$ nema prelomnu tačku, jer $\sqrt[3]{e} \notin D_f$

7) Asimptote

$D_f = (0, \sqrt[3]{e}) \cup (\sqrt[3]{e}, +\infty)$, pa za BA ispitujemo

$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{e}-} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{e}+} f(x)$, a KA i KKA ispitujemo samo kada $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x \ln x}{3 \ln x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x \cancel{\ln x}}{\cancel{\ln x} (3 - \frac{1}{\ln x})} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{3 - \frac{1}{\ln x} \rightarrow -\infty} =$$

$$= \frac{0}{3 - \frac{1}{-\infty}} = \frac{0}{3 - 0} = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{pravca } x=0 \text{ nije BA fje } f,$$

beti se grafik fje f približava tački $(0,0)$ sa
desne strane

U ovakvim situacijama preda nam i ugao (tj.
koeficijent pravca) pod kojim f "ulazi" u tačku
 $(0,0)$, odnosno $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\ln^2 x - \ln x - 1}{(3\ln x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{\ln^2 x} \left(3 - \frac{1}{\cancel{\ln x}} - \frac{1}{\cancel{\ln^2 x}} \right)}{\cancel{\ln^2 x} \left(3 - \frac{1}{\cancel{\ln x}} \right)^2} =$$

$$= \frac{3}{3^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow f \text{ улази у ову тачку са } \frac{1}{3} \text{ тј. улази асимптотички}$$

са десне стране у тачку $(0,0)$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{e}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{e}^-} \frac{x \ln x}{3\ln x - 1} = \frac{\sqrt[3]{e} \cdot \frac{1}{3}}{3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) - 1} = \frac{\sqrt[3]{e} \cdot \frac{1}{3}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{e}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{e}^+} \frac{x \ln x}{3\ln x - 1} = \frac{\sqrt[3]{e} \cdot \frac{1}{3}}{3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) - 1} = \frac{\sqrt[3]{e} \cdot \frac{1}{3}}{0^+} = +\infty$$

$\Rightarrow$ тачка $x = \sqrt[3]{e}$ је ВА фје f са обе стране

Сада испитивамо ХА и КА кад $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{3\ln x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \ln x}{\cancel{\ln x} \left(3 - \frac{1}{\cancel{\ln x}} \right)} = \frac{+\infty}{3 - \frac{1}{+\infty}} =$$

$$= \frac{+\infty}{3 - 0} = +\infty \Rightarrow f \text{ нема ХА кад } x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x \ln x}{3\ln x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{3\ln x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\ln x}}{\cancel{\ln x} \left(3 - \frac{1}{\cancel{\ln x}} \right)} =$$

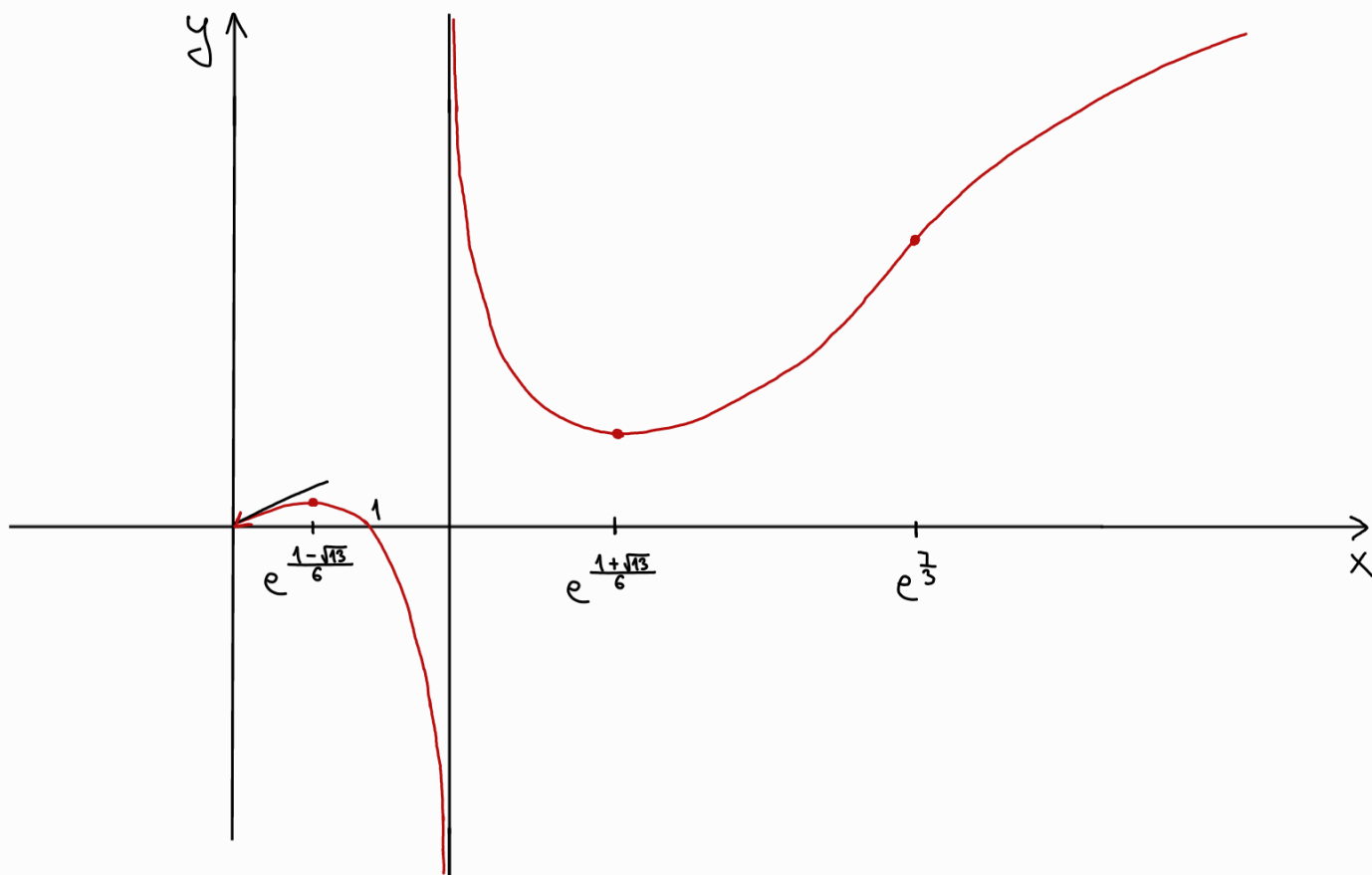
$$= \frac{1}{3 - \frac{1}{+\infty}} = \frac{1}{3 - 0} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x \ln x}{3\ln x - 1} - \frac{x}{3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x \ln x - x(3\ln x - 1)}{3(3\ln x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x \ln x - 3x \ln x + x}{3(3\ln x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{9\ln x - 3} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \text{д.у.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{9}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{9} = +\infty \notin \mathbb{R} \Rightarrow \text{не постоји ни КА кад } x \rightarrow +\infty$$

8) График



5) Определите уравнение $y=kx+n$ касательной t на график f в точке $x=\frac{1}{e}$.

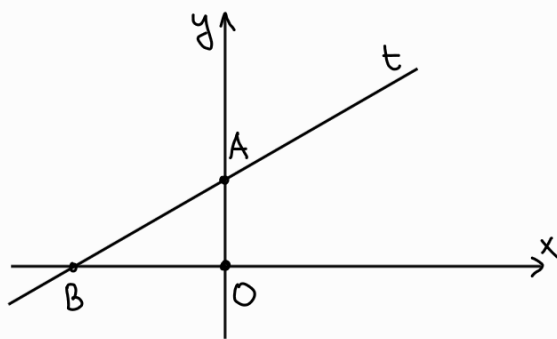
$$k = f'(\frac{1}{e}) = \frac{3\ln^2 \frac{1}{e} - \ln \frac{1}{e} - 1}{(3\ln \frac{1}{e} - 1)^2} = \frac{3 \cdot (-1)^2 - (-1) - 1}{(3 \cdot (-1) - 1)^2} = \frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow t: y = \frac{3}{16}x + n$$

$$f(\frac{1}{e}) = \frac{\frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e}}{3 \cdot \ln \frac{1}{e} - 1} = \frac{-\frac{1}{e}}{-4} = \frac{1}{4e}$$

$$(\frac{1}{e}, \frac{1}{4e}) \in t \Rightarrow \frac{1}{4e} = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{e} + n \Rightarrow n = \frac{1}{4e} - \frac{3}{16e} = \frac{1}{16e}$$

$$\Rightarrow t: y = \frac{3}{16}x + \frac{1}{16e}$$



$$A(0, \frac{1}{16e})$$

$$\frac{3}{16}x + \frac{1}{16e} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{16e} \cdot \frac{16}{3} = -\frac{1}{3e}$$

$$\Rightarrow B(-\frac{1}{3e}, 0)$$

$$P_{\triangle AOB} = \frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{\frac{1}{16e} \cdot \frac{1}{3e}}{2} = \frac{1}{96e^2}$$

4. (бро сликан задатку у јуну 2 '24)

Истимати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \sqrt[3]{|x|(x-2)^2}.$$

1) Домен

$D_f = \mathbb{R}$, јер нема никаквих услова из ограничења

2) Нуле и знак

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{|x|(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow |x|(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \vee (x-2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 2 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = 0 \vee x = 2}_{\text{где нуле је } f}$$

Дакле, за све $x \neq 0$ и $x \neq 2$ је $|x| > 0$ и $(x-2)^2 > 0$, па је и $|x|(x-2)^2 > 0$ и $f(x) = \sqrt[3]{|x|(x-2)^2} > 0$.

3) Специјална својства

f има тачно две нуле, па није периодична.

$f(2)=0$ и $f(-2)=\sqrt[3]{32} \Rightarrow f(-2) \neq \pm f(2) \Rightarrow f$ није ни парна ни непарна

4) Непреставност и диференцијабилност

f је непрекидна на D_f као композиција елементарних f_j

Пре него што претјемо на испитивање диференцијабилности, записате израз којим је дата f_j у погоднијем облику користити $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x(x-2)^2}, & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{-x(x-2)^2}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt[3]{x(x-2)^2}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{x(x-2)^2}, & x < 0 \end{cases}$$

Користити $(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$, имамо да је

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x(x-2)^2})' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2(x-2)^4}} \cdot (x(x-2)^2)' = \frac{1 \cdot (x-2)^2 + x \cdot 2(x-2) \cdot 1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot (x-2)^3 \cdot (x-2)}} =$$

$$= \frac{\cancel{(x-2)}(x-2+2x)}{3 \cdot \cancel{(x-2)} \cdot \sqrt[3]{x^2(x-2)}} = \frac{3x-2}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2(x-2)}} \quad \text{за све } x > 0 \text{ и } x \neq 2 \text{ (мора}$$

бити $x \neq 2$ да би именилац био дефинисан, док је

$$f'(x) = (-\sqrt[3]{x(x-2)^2})' = -\frac{3x-2}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2(x-2)}} \quad \text{за све } x < 0.$$

Одатиме видимо да је f диференцијабилна на $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$ и да је

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3x-2}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2(x-2)}} & , x \in (0, 2) \cup (2, +\infty) \\ -\frac{3x-2}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2(x-2)}} & , x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

а у тачкама $x=0$ и $x=2$ истражујемо диференцијабилност по дефиницији.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt[3]{h(h-2)^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt[3]{h(h-2)^2}}{\sqrt[3]{h^3}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \sqrt[3]{\frac{(h-2)^2}{h^2}} = \sqrt[3]{\frac{4}{0+}} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty \quad \text{и слично} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\sqrt[3]{-h(h-2)^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\sqrt[3]{-h(h-2)^2}}{\sqrt[3]{h^3}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \sqrt[3]{\frac{-(h-2)^2}{h^2}} = \sqrt[3]{\frac{-4}{0+}} = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty, \quad \text{иа } f \text{ није} \end{aligned}$$

диференцијабилна у тачки 0, бети у тачку $(0,0)$ улази вертикално са обе стране пошто су $f'_+(0)$ и $f'_-(0)$ бесконачни.

$$\begin{aligned} f'_+(2) &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt[3]{(2+h)(2+h-2)^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt[3]{(2+h)h^2}}{\sqrt[3]{h^3}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \sqrt[3]{\frac{2+h}{h}} = \sqrt[3]{\frac{2}{0+}} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty \quad \text{и слично је} \end{aligned}$$

$$f'_-(2) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\sqrt[3]{(2+h)(2+h-2)^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\sqrt[3]{(2+h)h^2}}{\sqrt[3]{h^3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{\frac{2+h}{h}} = \sqrt[3]{\frac{2}{0^-}} = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty, \text{ па } f \text{ није диферен-}$$

цијабилна ни у тачки 2 и у тачку (2,0) улази
вертикално са обе стране

Према томе, f је диференцијабилна само на интер-
 $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$.

5) Монотоност и локални екстремуми

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3x-2}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2(x-2)}} & , x \in (0, 2) \cup (2, +\infty) \\ -\frac{3x-2}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2(x-2)}} & , x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

$$1^\circ x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$3x-2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$$

$$\sqrt[3]{x^2(x-2)} > 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2}_{>0} (x-2) > 0 \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

	0	$\frac{2}{3}$	2
$3x-2$	-	+	+
$\sqrt[3]{x^2(x-2)}$	-	-	+
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

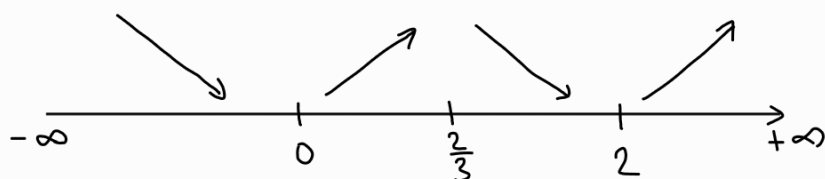
$$2^\circ x \in (-\infty, 0)$$

$$x < 0 \Rightarrow 3x-2 < -2 < 0, \quad x^2 > 0 \quad \text{и} \quad x-2 < -2 < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{3x-2}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2(x-2)}} < 0 \text{ za } x \in (-\infty, 0)$$

$$\Rightarrow f \searrow \text{ na } (-\infty, 0]$$

Далше, $f \nearrow$ на $(0, \frac{2}{3})$ и на $(2, +\infty)$, а $f \searrow$ на $(-\infty, 0]$ и на $(\frac{2}{3}, 2)$.



$\Rightarrow f$ има локалне минимуме у 0 и 2, $f(0) = 0 = f(2)$ и локални максимум у $\frac{2}{3}$, $f(\frac{2}{3}) = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \cdot (-\frac{4}{3})^2} = \sqrt[3]{\frac{32}{27}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{4}}{3}$.

6) Утоњексности и конкавности

За $x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$ је

$$f''(x) = \left(\frac{3x-2}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2(x-2)}} \right)' = \frac{1}{3} \cdot \left((3x-2) \cdot (x^2(x-2))^{-\frac{4}{3}} \right)' =$$

$$= \frac{1}{3} \left(3 \cdot (x^2(x-2))^{-\frac{4}{3}} + (3x-2) \cdot \frac{-1}{3} \cdot (x^2(x-2))^{-\frac{4}{3}} \cdot (2x(x-2) + x^2 \cdot 1) \right) =$$

$$= \frac{1}{3} (x^2(x-2))^{-\frac{4}{3}} \left(3x^2(x-2) - \frac{1}{3} (3x-2)(3x^2-4x) \right) =$$

$$= \frac{1}{9} (x^2(x-2))^{-\frac{4}{3}} \left(9x^2(x-2) - (3x-2)(3x^2-4x) \right) =$$

$$= \frac{1}{9} (x^2(x-2))^{-\frac{4}{3}} \left(9x^3 - 18x^2 - 9x^3 + 12x^2 + 6x^2 - 8x \right) =$$

$$= \frac{1}{9} (x^2(x-2))^{-\frac{4}{3}} \cdot (-8x) = -\frac{8x}{9 \cdot \sqrt[3]{(x^2(x-2))^4}} < 0$$

$\Rightarrow f$ је конкавна и на $(0,2)$ и на $(2,+\infty)$

За све $x \in (-\infty, 0)$ је

$$f''(x) = \left(-\frac{3x-2}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2(x-2)}} \right)' = - \left(-\frac{8x}{9 \cdot \sqrt[3]{(x^2(x-2))^4}} \right) = \frac{8x^{<0}}{9 \cdot \sqrt[3]{(x^2(x-2))^4}^{>0}} < 0$$

$\Rightarrow f$ је конкавна и на $(-\infty, 0)$

$\Rightarrow f$ је конкавна на целом домену

7) Асимптоте

$D_f = \mathbb{R}$, па нема ВА, тако да одмах прелазимо на испитивање ХА и КА код $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$

Уместо да рачунамо лимесе $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$,

проверимо да ли су коначни, а онда потенцијално рачунамо и $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, лакше нам је да

развијемо функцију f помоћу познатих Мајоренових

развоја у облику $f(x) = a_1 x + a_2 + \frac{a_3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \rightarrow -\infty$

односно $f(x) = b_1 x + b_2 + \frac{b_3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \rightarrow +\infty$.

За $x \rightarrow +\infty$ можемо сматрати да је $x > 0$ и $|x| = x$, па је

$$f(x) = \sqrt[3]{|x|(x-2)^2} = \sqrt[3]{x(x-2)^2} = x^{\frac{1}{3}} \cdot (x-2)^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}} \cdot \left(x\left(1-\frac{2}{x}\right)\right)^{\frac{2}{3}} =$$

$$= x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = x \left(1 + \frac{-2}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = x \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{x} + \left(\frac{\frac{1}{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{-2}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= x \left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{3}}{2!} \cdot \frac{4}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \underbrace{x - \frac{2}{3}}_{\text{KA}} - \frac{4}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Одгатак видимо не само да је права $y = x - \frac{2}{3}$ KA
 фје f кад $x \rightarrow +\infty$, већ и да јој се f приближава
 одозго пошто је $-\frac{4}{9x} < 0$ кад $x \rightarrow +\infty$.

Та исти начин за $x \rightarrow -\infty$ можемо сматрати да
 је $x < 0$ и $|x| = -x$, па је

$$f(x) = \sqrt[3]{|x|(x-2)^2} = \sqrt[3]{-x(x-2)^2} = -\sqrt[3]{x(x-2)^2} =$$

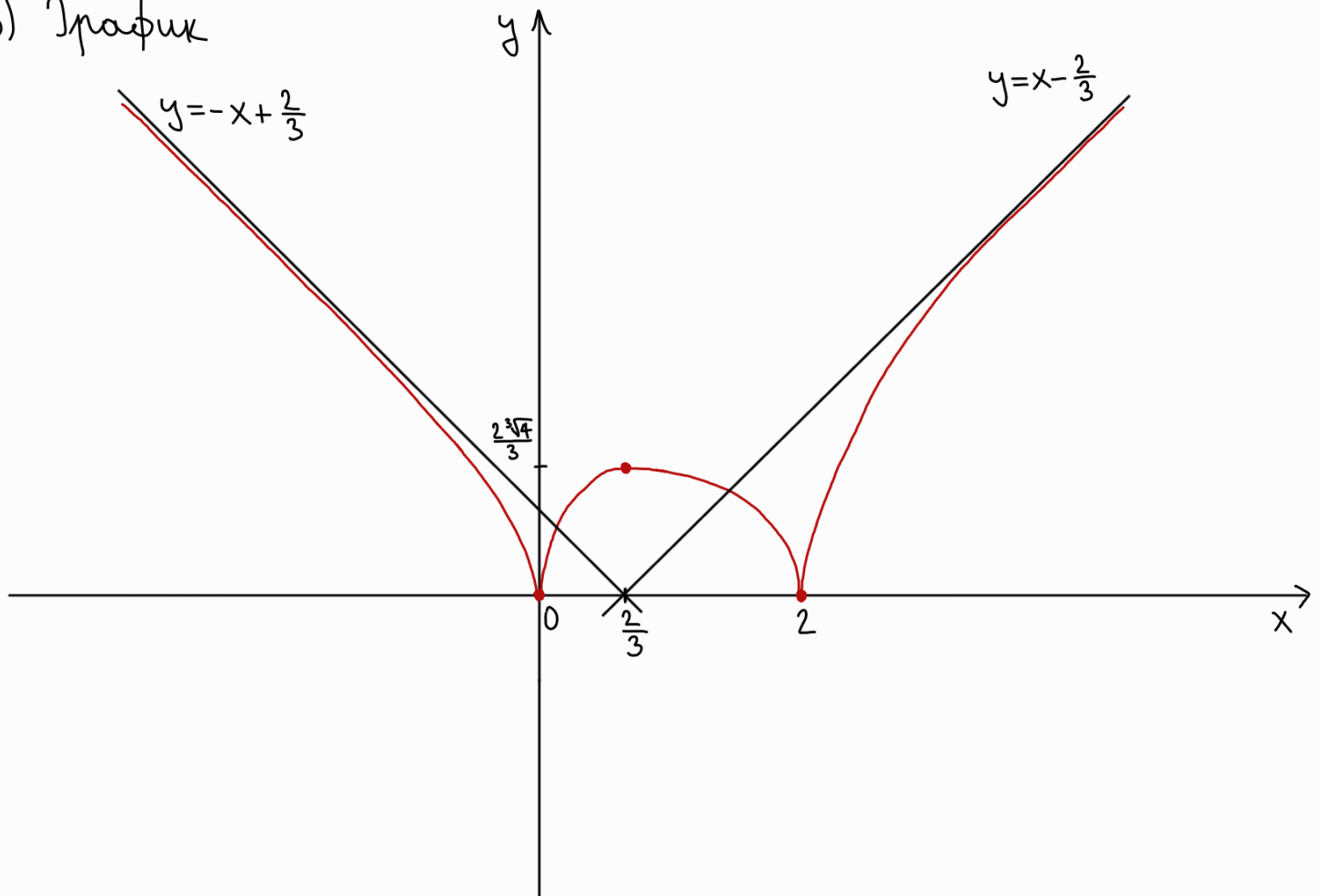
$$= -\left(x - \frac{2}{3} - \frac{4}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \underbrace{-x + \frac{2}{3}}_{\text{KA}} + \frac{4}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow -\infty$$

$\Rightarrow y = -x + \frac{2}{3}$ је KA фје f кад $x \rightarrow -\infty$ и f јој се
 приближава одоздо, јер је $\frac{4}{9x} < 0$ кад $x \rightarrow -\infty$

$\Rightarrow f$ нема KA

Заменица: Да бисмо одредили асимптоте фје f , довољно
 је било разбити је до $o(1)$, међутим, раздвајањем до $o\left(\frac{1}{x}\right)$
 смо одредили и да ли се f одозго или одоздо приближава
 својим асимптотима

8) График



5. (Јун 1 '24) Испитати ток и скицати график

функције $f(x) = \frac{x^2}{2x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

1) Домен

услови: $2x-1 \neq 0$ и $x \neq 0$ због имениоца

$$\Rightarrow x \neq \frac{1}{2} \text{ и } x \neq 0$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\} = (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$$

2) Нуле и знак

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \notin D_f$$

$\Rightarrow f$ нема нула

$$2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

x^2	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$
$2x-1$	$+$	$+$	$+$
$e^{-\frac{1}{x}}$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

$$\Rightarrow f(x) > 0 \text{ за } x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$$

$$\text{и } f(x) < 0 \text{ за } x \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$$

3) Специјална својства

D_f није симетричан $\Rightarrow f$ није ни парна ни непарна

Тачно две тачке (0 и $\frac{1}{2}$) не припадају D_f , па f не може бити периодична, јер би у ограниченом домену морало недостајати или бесконачно много тачака или ниједна тачка.

4) Непреривност и диференцијабилност

f је непрекидна на D_f као композиција елементарних фја

извод производа $\frac{x^2}{2x-1}$ и $e^{-\frac{1}{x}}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{2x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} \right)' = \frac{2x \cdot (2x-1) - x^2 \cdot 2}{(2x-1)^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x^2}{2x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{-1}{x^2} \right) =$$

$$= \frac{4x^2 - 2x - 2x^2}{(2x-1)^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{2x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x-1} \cdot \left(\frac{2x^2 - 2x}{2x-1} + 1 \right) =$$

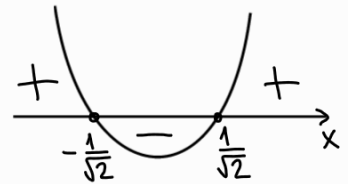
$$= \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x-1} \cdot \frac{2x^2 - 2x + 2x - 1}{2x-1} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x-1} \cdot \frac{2x^2 - 1}{2x-1} = \frac{2x^2 - 1}{(2x-1)^2} e^{-\frac{1}{x}} \text{ што је}$$

дефинисано за све $x \in D_f$, па је f диференцијабилна на целом свом домену

5) Монотоност и локални екстремуми

$$f'(x) = \frac{2x^2-1}{(2x-1)^2} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$2x^2-1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x > \frac{1}{\sqrt{2}}$$



	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$2x^2-1$	+	-	-	-	+
$(2x-1)^2$	+	+	+	+	+
$e^{-\frac{1}{x}}$	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	-	-	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ jer je } 2 = \sqrt{4} > \sqrt{2}$$

$\Rightarrow f \nearrow$ na $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ i na $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$,
 $\searrow$ na $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, na $(0, \frac{1}{2})$
i na $(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

$\Rightarrow f$ ima lokalni maksimum u tački $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ i lokalni minimum u tački $\frac{1}{\sqrt{2}}$

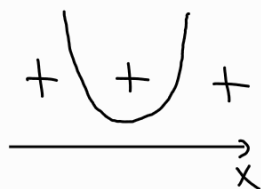
$$f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\frac{1}{2}}{-\sqrt{2}-1} \cdot e^{\sqrt{2}} = -\frac{e^{\sqrt{2}}}{2(\sqrt{2}+1)}, \quad f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}-1} \cdot e^{-\sqrt{2}} = \frac{e^{-\sqrt{2}}}{2(\sqrt{2}-1)}$$

6) Утоњексности и конкавности

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{2x^2-1}{(2x-1)^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} \right)' = \frac{4x(2x-1)^2 - (2x^2-1) \cdot 2(2x-1) \cdot 2}{(2x-1)^4} \cdot e^{-\frac{1}{x}} + \\ &+ \frac{2x^2-1}{(2x-1)^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4(2x-1)(x(2x-1) - (2x^2-1))}{(2x-1)^4} \cdot e^{-\frac{1}{x}} + \\ &+ \frac{2x^2-1}{x^2(2x-1)^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \frac{4(2x^2 - x - 2x^2 + 1)}{(2x-1)^3} \cdot e^{-\frac{1}{x}} + \frac{2x^2-1}{x^2(2x-1)^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{(2x-1)^2} \cdot \left(\frac{4(1-x)}{2x-1} + \frac{2x^2-1}{x^2} \right) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{(2x-1)^2} \cdot \frac{4x^2(1-x) + (2x^2-1)(2x-1)}{(2x-1)x^2} = \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{(2x-1)^2} \cdot \frac{4x^2 - 4x^3 + 4x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{(2x-1)x^2} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2(2x-1)^3} \cdot e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

$2x^2 - 2x + 1 > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, jer je $2 > 0$ i diskriminanta

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4 < 0$$



$$(2x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow 2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f''(x) > 0$ за $x > \frac{1}{2}$ иј. за $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ и

$f''(x) < 0$ за $x < \frac{1}{2}$ иј. за $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$

$\Rightarrow f$ је конвексна на $(\frac{1}{2}, +\infty)$, а конкавна на $(-\infty, 0)$ и $(0, \frac{1}{2})$, па нема прелојних тачака, јер $0, \frac{1}{2} \notin D_f$

7) Асимптоте

$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$, па за ВА испитујемо

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) \text{ и } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{2x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x}}) \stackrel{0 \cdot e^{+\infty} = 0 \cdot \infty}{=} \left(\begin{array}{l} t = -\frac{1}{x} \Rightarrow x = -\frac{1}{t} \\ x \rightarrow 0^- \Rightarrow t \rightarrow -\frac{1}{0^-} = +\infty \end{array} \right) =$$

$$= - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2} \cdot e^t = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^2} \stackrel{\text{скала}}{=} - (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \frac{0^2}{2 \cdot 0 - 1} \cdot e^{-\frac{1}{0^+}} = \frac{0}{-1} \cdot e^{-\infty} = 0 \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow$ права $x=0$ (иј. y-оса) је ВА фје f само са леве стране, јок f „улази“ у тачку

$(0,0)$ са десне стране под углом који ћемо
сада израчунавати

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2-1}{(2x-1)^2} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{2 \cdot 0^2 - 1}{(2 \cdot 0 - 1)^2} \cdot e^{-\frac{1}{0^+}} = \frac{-1}{1} \cdot e^{-\infty} =$$

$= -1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow f$ „углази“ хоризонтално са десне стране

у тачку $(0,0)$ тј. као да јој је тангентна x -оса

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{x^2}{2x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{4}}{2 \cdot (\frac{1}{2}) - 1} \cdot e^{-2} = \frac{\frac{e^{-2}}{4}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{x^2}{2x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{4}}{2 \cdot (\frac{1}{2}) - 1} \cdot e^{-2} = \frac{\frac{e^{-2}}{4}}{0^+} = +\infty$$

$\Rightarrow$ права $x = \frac{1}{2}$ је ВА фје f са обе стране

За бисмо испитали x_A и x_B фје f кад $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$, развучемо је помоћу познатих Мајоренових развоја.

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x^2}{2x(1-\frac{1}{2x})} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x}{2} \left(1 + \frac{-1}{2x} \right)^{-1} e^{-\frac{1}{x}} =$$

развучемо до $o(\frac{1}{x^2})$,
јер се множи са $\frac{x}{2}$

$$= \frac{x}{2} \left(1 - \frac{-1}{2x} + \frac{(-1)}{2!} \cdot \left(\frac{-1}{2x} \right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \cdot \left(1 + \frac{-1}{x} + \frac{\left(\frac{-1}{x} \right)^2}{2!} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) =$$

$$= \frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) =$$

$$= \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) =$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \pm \infty$$

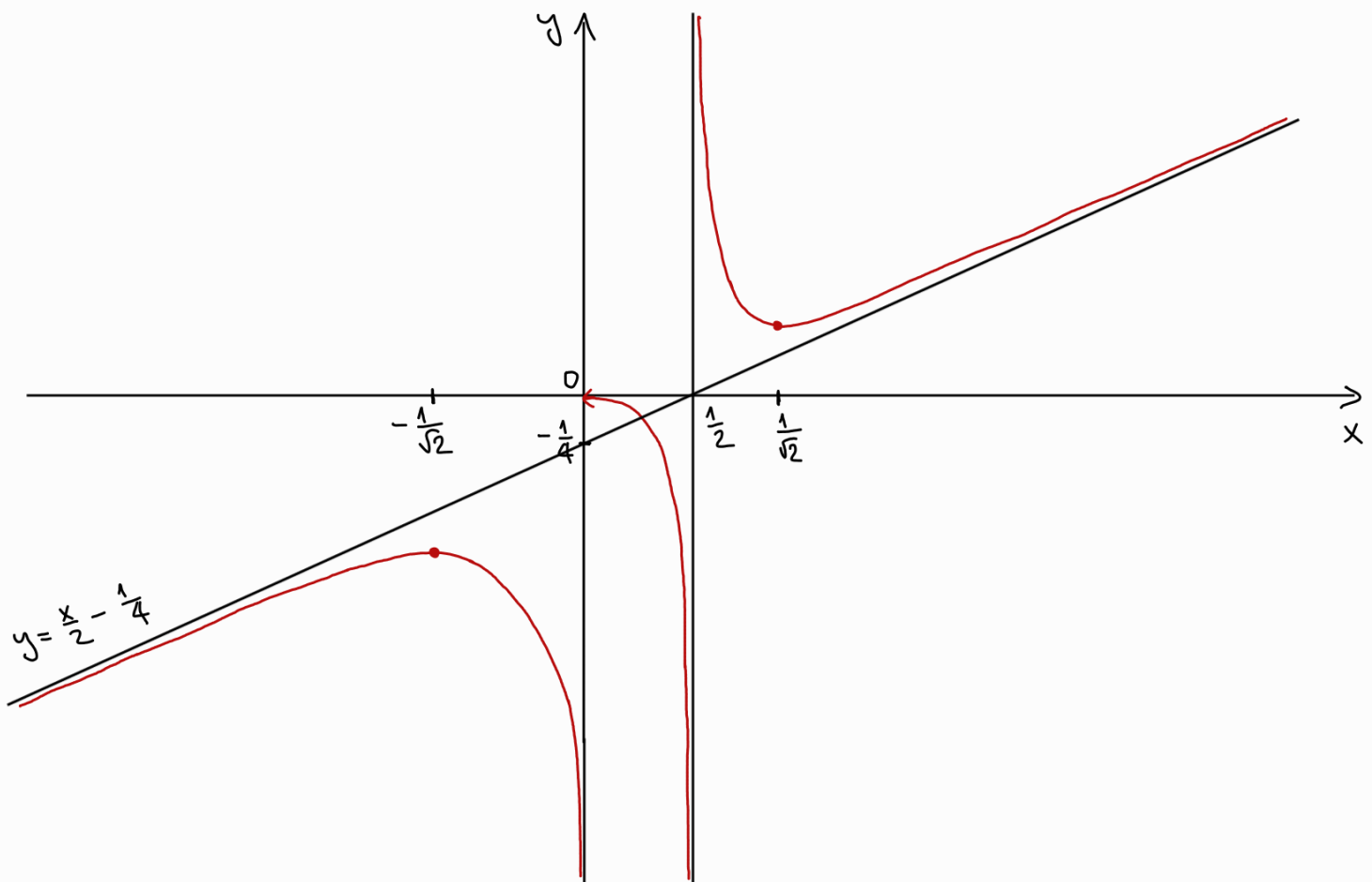
$\Rightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ је КА фје f и каг $x \rightarrow +\infty$ и каг $x \rightarrow -\infty$,

иа f нема ХА

f је ускаг КА каг $x \rightarrow +\infty$, јер је $\frac{1}{8x} > 0$

f је уског КА каг $x \rightarrow -\infty$, јер је $\frac{1}{8x} < 0$

8) График



6. (Септембар 1 '21)

Дана је функција $f(x) = \ln \frac{|2x-1|-1}{2x-1} - 2x$.

а) Истичати ток и скицати график функције.

б) У зависности од реалног параметра $a \in \mathbb{R}$ одредити број решења једначине $f(x) = a$.

а) 1) Дакле

услови: $2x-1 \neq 0$ због имениоца и $\frac{|2x-1|-1}{2x-1} > 0$ због логаритма

$$2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$$

$$\text{Важно: } |2x-1| = \begin{cases} 1-2x, & x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \\ 2x-1, & x \in (\frac{1}{2}, +\infty) \end{cases}$$

$$1^\circ x \in (-\infty, \frac{1}{2})$$

$$\text{решавамо } \frac{|2x-1|-1}{2x-1} > 0 :$$

$$\frac{|2x-1|-1}{2x-1} > 0 \Leftrightarrow |2x-1|-1 < 0 \Leftrightarrow 1-2x-1 < 0 \Leftrightarrow -2x < 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \text{ и } x > 0 \Leftrightarrow \underline{x \in (0, \frac{1}{2})}$$

$$2^\circ x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$$

$$\text{решавамо } \frac{|2x-1|-1}{2x-1} > 0 :$$

$$\frac{|2x-1|-1}{2x-1} > 0 \Leftrightarrow |2x-1|-1 > 0 \Leftrightarrow 2x-1-1 > 0 \Leftrightarrow 2x > 2 \Leftrightarrow x > 1$$

$$x \in (\frac{1}{2}, +\infty) \text{ и } x > 1 \Leftrightarrow \underline{x \in (1, +\infty)}$$

$$\text{Закључак, } D_f = (0, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty).$$

2) Нуле и знак

Остављамо за касније пошто не можемо да решимо једн $f(x)=0$ ни једне $f(x)>0$ и $f(x)<0$,

јер се у њима јавља разлика логаритамске и полиномске фје.

3) Специјална својства

D_f није симетричан $\Rightarrow f$ није ни парна ни непарна

f није ни периодична, јер D_f не садржи ниједну негативну тачку

4) Непреривност и диференцијабилност

f је непрекидна на D_f као композиција непр. фја

Пре него што испитамо и њену диференцијабилност, записате смо је у погоднијем облику.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \frac{|2x-1|-1}{2x-1} - 2x = \begin{cases} \ln \frac{2x-1-1}{2x-1} - 2x, & x \in (1, +\infty) \\ \ln \frac{1-2x-1}{2x-1} - 2x, & x \in (0, \frac{1}{2}) \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \ln \frac{2x-2}{2x-1} - 2x, & x \in (1, +\infty) \\ \ln \frac{-2x}{2x-1} - 2x, & x \in (0, \frac{1}{2}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{За } x \in (1, +\infty) \text{ је } f'(x) &= \frac{2x-1}{2x-2} \cdot \left(\frac{2x-2}{2x-1} \right)' - 2 = \\ &= \frac{\cancel{2x-1}}{2x-2} \cdot \frac{2(2x-1) - (2x-2) \cdot 2}{(2x-1)^2} - 2 = \frac{2(\cancel{2x-1} - \cancel{2x} + 2)}{(2x-2)(2x-1)} - 2 = \\ &= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(x-1)(2x-1)} - 2 = \frac{1}{2x^2 - 2x - x + 1} - 2 = \frac{1}{2x^2 - 3x + 1} - 2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1 - 2(2x^2 - 3x + 1)}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{-4x^2 + 6x - 1}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{-4x^2 + 6x - 1}{(x-1)(2x-1)} \text{ што је}$$

дефинисано за све $x \in (1, +\infty)$, па је f диференцијабилна на $(1, +\infty)$.

$$\text{За } x \in (0, \frac{1}{2}) \text{ је } f'(x) = \frac{2x-1}{-2x} \cdot \left(\frac{-2x}{2x-1}\right)' - 2 =$$

$$= - \frac{2x-1}{2x} \cdot \frac{-2(2x-1) - (-2x) \cdot 2}{(2x-1)^2} - 2 = - \frac{-4x+2+4x}{2x(2x-1)} - 2 =$$

$$= - \frac{2}{2x(2x-1)} - 2 = \frac{-1}{2x^2-x} - 2 = \frac{-1-2(2x^2-x)}{2x^2-x} =$$

$$= \frac{-4x^2+2x-1}{2x^2-x} = \frac{-4x^2+2x-1}{x(2x-1)} \text{ што је дефинисано}$$

за све $x \in (0, \frac{1}{2})$, па је f диференцијабилна на $(0, \frac{1}{2})$.

Закључе, f је диференцијабилна на целом домену

$$\text{и важи } f'(x) = \begin{cases} \frac{-4x^2+6x-1}{(x-1)(2x-1)}, & x \in (1, +\infty) \\ \frac{-4x^2+2x-1}{x(2x-1)}, & x \in (0, \frac{1}{2}) \end{cases}.$$

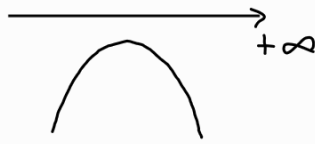
5) Монотоност и локални екстремуми

$$1^\circ \ x \in (0, \frac{1}{2})$$

$$f'(x) = \frac{-4x^2+2x-1}{x(2x-1)} > 0 \text{ за све } x \in (0, \frac{1}{2}), \text{ па } \underline{f \nearrow \text{ на } (0, \frac{1}{2})}$$

$$-4 < 0 \text{ и } D = 2^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-1) = 4 - 16 = -12 < 0, \text{ па је}$$

$$-4x^2+2x-1 < 0 \text{ за све } x \in \mathbb{R}$$

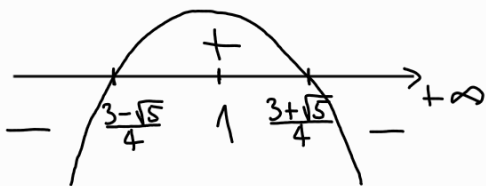


2° $x \in (1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{-4x^2 + 6x - 1}{(x-1)(2x-1)}$$

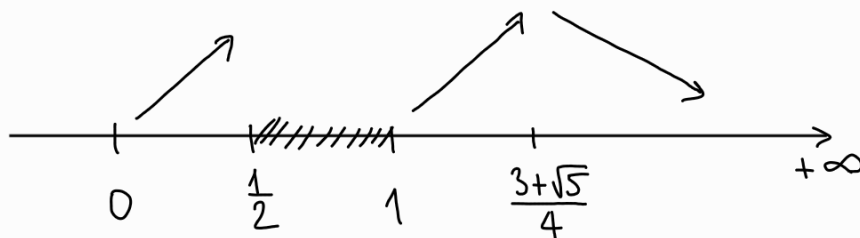
$\downarrow$ $\downarrow$
 0 $2 \cdot 1 - 1 = 1 > 0$

$$-4x^2 + 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 16}}{-8} = \frac{-6 \pm \sqrt{20}}{-8} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{5}}{-8} \stackrel{!(-2)}{=} \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$$



$$\frac{3-\sqrt{5}}{4} < \frac{3}{4} < 1, \quad \frac{3+\sqrt{5}}{4} > \frac{3+1}{4} = 1$$

	1	$\frac{3+\sqrt{5}}{4}$	
$-4x^2 + 6x - 1$	+	-	
$x - 1$	+	+	
$2x - 1$	+	+	
$f'(x)$	+	-	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	



$\Rightarrow f$ има локални максимум у тачки $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$ и

$$f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right) = \ln \left(\frac{2 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{4} - 2}{2 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{4} - 1} \right) - 2 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{4} < 0 - \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 0$$

6) Утоњексности и конкавности

Рачунамо $f''(x)$, али користити истојне облике за $f'(x)$

исправителіе у гелу 4):

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2-3x+1} - 2, & x \in (1, +\infty) \\ -\frac{1}{2x^2-x} - 2, & x \in (0, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

1° $x \in (1, +\infty)$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2x^2-3x+1} - 2 \right)' = -\frac{1}{(2x^2-3x+1)^2} \cdot (4x-3) = -\frac{4x-3}{(2x^2-3x+1)^2}$$

$4 \cdot 1 - 3 > 0$

$\Rightarrow f''(x) < 0$ за дие $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f$ је конкавна на $(1, +\infty)$

2° $x \in (0, \frac{1}{2})$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{2x^2-x} - 2 \right)' = -\frac{-1}{(2x^2-x)^2} \cdot (4x-1) = \frac{4x-1}{(2x^2-x)^2}$$

$$4x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$$

	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$4x-1$	-	+	
$(2x^2-x)^2$	+	+	
$f''(x)$	-	+	
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	

$\Rightarrow f$ је конкавна на $(0, \frac{1}{4})$ и
конвексна на $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ и има
превојну тачку у $\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{4}\right) &= \ln \frac{-2 \cdot \frac{1}{4}}{2 \cdot \frac{1}{4} - 1} - 2 \cdot \frac{1}{4} = \ln \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \\ &= \ln 1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

7) Асимптоте

$D_f = (0, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$, та за ВА испитујемо

$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}-} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)$, а ХА и КА можемо

испитивати само кад $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{-2x}{2x-1} - \underbrace{2x}_{0} \right) = \ln \frac{-2 \cdot 0^+}{2 \cdot 0 - 1} = \ln \frac{0^-}{-1} = \ln(0^+) = -\infty$$

$\Rightarrow$ права $x=0$ (верг. y-оса) је ВА фје f са десне стране

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \left(\ln \frac{-2x}{2x-1} - \underbrace{2x}_{\frac{1}{2}} \right) = \ln \frac{-2 \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot (\frac{1}{2}^-) - 1} - 1 = \ln \frac{-1}{0^-} - 1 = \\ &= \ln(+\infty) - 1 = +\infty - 1 = +\infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ права $x=\frac{1}{2}$ је ВА фје f са леве стране

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\ln \frac{2x-2}{2x-1} - 2x \right) = \ln \frac{2 \cdot (1^+) - 2}{2 \cdot 1 - 1} - 2 = \ln \frac{0^+}{1} - 2 = \\ &= \ln(0^+) - 2 = -\infty - 2 = -\infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ права $x=1$ је ВА фје f са десне стране

За бисмо испитали ХА и КА фје f , разлутимо је кад $x \rightarrow +\infty$ помоћу познатих Маклоренових развоја. Укад $x \rightarrow +\infty$ можемо сматрати $x > 1$, та

$$\text{је } f(x) = \ln \frac{2x-2}{2x-1} - 2x = \ln \frac{2x-2}{2x(1-\frac{1}{2x})} - 2x =$$

$$= \ln \left(\frac{2x-2}{2x} \cdot \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{-1} \right) - 2x = \ln \left(\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{-1}{2x}}_{0}\right)^{-1} \right) - 2x =$$

$$= \ln \left(\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{-1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \right) - 2x = \ln \left(\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \right) - 2x =$$

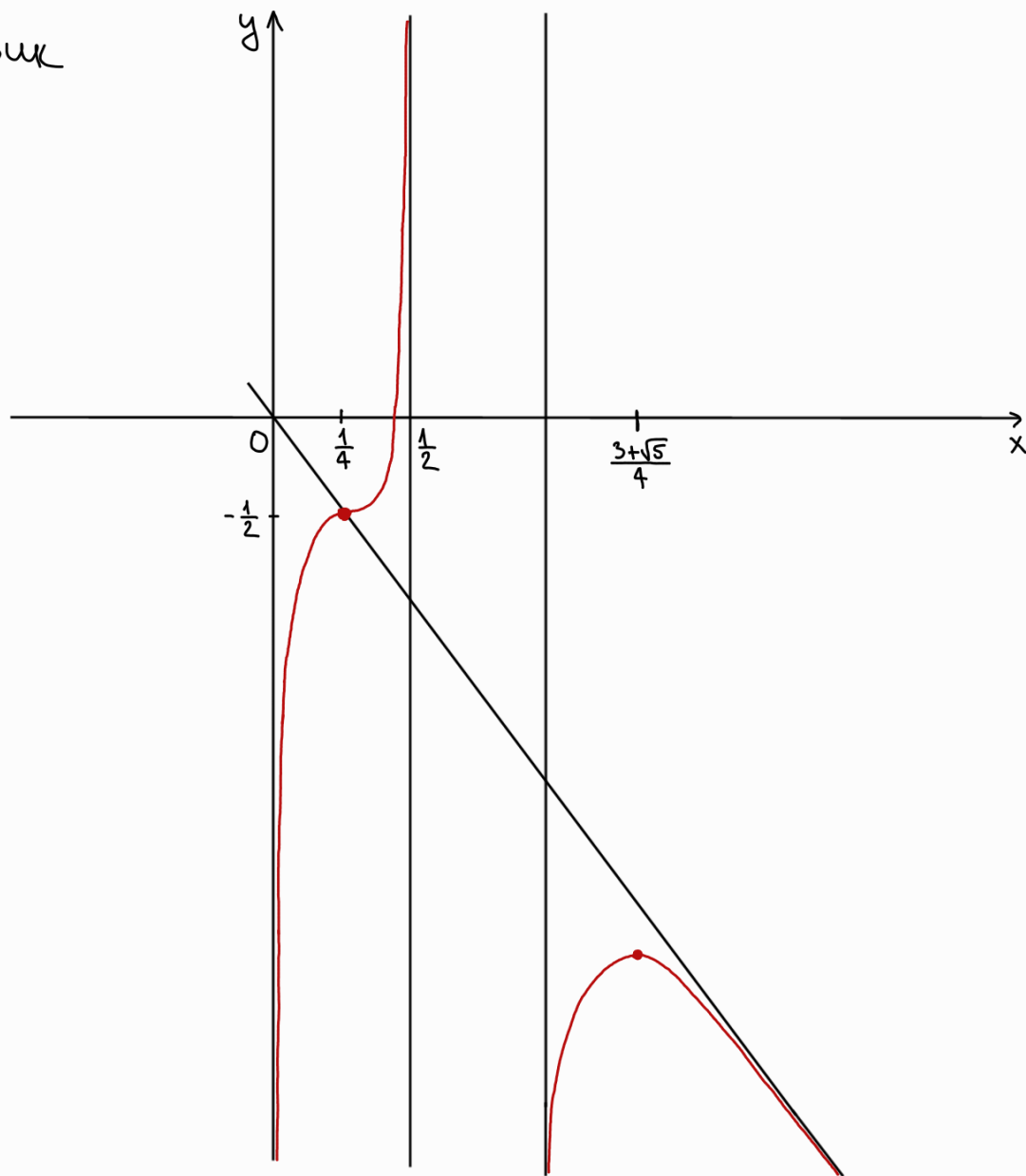
$$= \ln \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) - 2x = \ln \left(1 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) - 2x =$$

$$= \ln \left(1 + \underbrace{\frac{-1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}_{0} \right) - 2x = -\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 2x = -2x - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right), x \rightarrow +\infty$$

$\Rightarrow$ прорава $y = -2x$ је КА фје f кад $x \rightarrow +\infty$ и
 f јој се приближава са доње стране

$\Rightarrow f$ нема ХА

8) График



2) Нуле и знак

$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}-} f(x) = +\infty$, f непрекидна и

строго растућа $\Rightarrow f$ има тачно једну нулу α
на интервалу $(0, \frac{1}{2})$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow d \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

На интервалу $(1, +\infty)$ f достиже максимум у тачки

$\frac{3+\sqrt{5}}{4}$ и $f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right) < 0$, па је f негативна на интервалу $(1, +\infty)$

$\Rightarrow f$ има тачно једну нулу d и $d \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$,

$f(x) > 0$ за $x \in (d, \frac{1}{2})$ и $f(x) < 0$ за $x \in (0, d) \cup (1, +\infty)$

δ) Полазимо хоризонталне праве $y=a$ и бројимо колико пута сече график - то су укупно решења једначине $f(x)=a$.

1° $a > f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)$: 1 решење

2° $a = f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)$: 2 решења

3° $a < f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)$: 3 решења

7. (сличан Септембру 0 '21) Иститати ток и скизирати
график функције $f(x) = \arctg \frac{x+1}{|2x-3|} - \frac{x}{2}$.

1) Домен

услов: $|2x-3| \neq 0$ због имениоца

$$|2x-3| \neq 0 \Leftrightarrow 2x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\} = (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$$

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3, & x > \frac{3}{2} \\ 3-2x, & x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

arctg је непарна фја

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \arctg \frac{x+1}{2x-3} - \frac{x}{2}, & x > \frac{3}{2} \\ \arctg \frac{x+1}{3-2x} - \frac{x}{2}, & x < \frac{3}{2} \end{cases} = \begin{cases} \arctg \frac{x+1}{2x-3} - \frac{x}{2}, & x > \frac{3}{2} \\ -\arctg \frac{x+1}{2x-3} - \frac{x}{2}, & x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

2) Нуле и знак

Осталевамо за касније пошто не можемо да
решимо јну $f(x)=0$ ни нјне $f(x)>0$ и $f(x)<0$,
јер се у њима јавља разлика инверзне тригонометријске
и полиномске фје.

3) Специјална својства

D_f није симетричан и недостигаје му само једна тачка

$\Rightarrow f$ није ни парна ни непарна, а ни периодична
(да је периодична, домену или не би недостајала ниједна
тачка или би му недостајала бесконачно много тачака)

4) Непрестанљивост и диференцијабилност

f је непрекидна на D_f као композиција непр. фја

Сада рачунамо $f'(x)$ и испитујемо диференцијабилност
фје f .

$$1^\circ x > \frac{3}{2}$$

$$f'(x) = \left(\arctg \frac{x+1}{2x-3} - \frac{x}{2} \right)' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{2x-3} \right)^2} \cdot \left(\frac{x+1}{2x-3} \right)' - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{(x+1)^2}{(2x-3)^2}} \cdot \frac{1 \cdot (2x-3) - (x+1) \cdot 2}{(2x-3)^2} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{(2x-3)^2 + (x+1)^2}{(2x-3)^2}} \cdot \frac{\cancel{2x-3} - \cancel{2x} - 2}{(\cancel{2x-3})^2} - \frac{1}{2} = \frac{-5}{4x^2 - 12x + 9 + x^2 + 2x + 1} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{-5}{5x^2 - 10x + 10} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{x^2 - 2x + 2} - \frac{1}{2} = \frac{-2 - (x^2 - 2x + 2)}{2(x^2 - 2x + 2)} =$$

$$= \frac{-x^2 + 2x - 4}{2(x^2 - 2x + 2)} \quad \text{што је дефинисано за све } x > \frac{3}{2},$$

$$\text{јер је } x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$$

$$2^\circ x < \frac{3}{2}$$

из Горњеј, рачуна

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(-\operatorname{arctg} \frac{x+1}{2x-3} - \frac{x}{2} \right)' = -\frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{2x-3} \right)^2} \cdot \left(\frac{x+1}{2x-3} \right)' - \frac{1}{2} = \\
 &= -\frac{-1}{x^2 - 2x + 2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{x^2 - 2x + 2} - \frac{1}{2} = \frac{2 - (x^2 - 2x + 2)}{2(x^2 - 2x + 2)} = \\
 &= \frac{-x^2 + 2x}{2(x^2 - 2x + 2)} = \frac{-x(x-2)}{2(x^2 - 2x + 2)} \text{ што је дефинисано за све} \\
 &x < \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ је диференцијабилна на целом домену и

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x^2 + 2x - 4}{2(x^2 - 2x + 2)}, & x > \frac{3}{2} \\ \frac{-x(x-2)}{2(x^2 - 2x + 2)}, & x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

5) Монотоност и локални екстремуми

$$1^\circ \quad x > \frac{3}{2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x - 4}{2(x^2 - 2x + 2)} < 0$$

$$-1 < 0 \text{ и } D = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = 4 - 16 = -12 < 0 \Rightarrow -x^2 + 2x - 4 < 0 \text{ за } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0 \text{ за } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 \text{ за } \forall x > \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{f \nearrow \text{ на } \left(\frac{3}{2}, +\infty \right)}$$

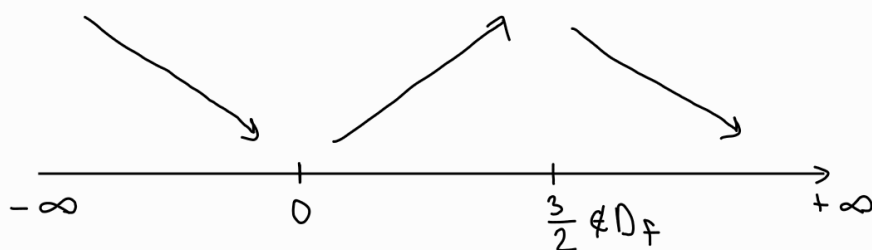
$$2^\circ \quad x < \frac{3}{2}$$

$$f'(x) = \frac{-x(x-2)}{2(x^2-2x+2)}$$

$$x-2 < \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2} < 0 \quad \text{за че } x \in (-\infty, \frac{3}{2})$$

	$-\infty$	0	$\frac{3}{2}$
$-x$	$+$	$-$	
$x-2$	$-$	$-$	
$2(x^2-2x+2)$	$+$	$+$	
$f'(x)$	$-$	$+$	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	

$\Rightarrow f \searrow$ на $(-\infty, 0)$ и
 $f \nearrow$ на $(0, \frac{3}{2})$



$\Rightarrow f$ има локален минимум у 0 и

$$f(0) = -\arctg \frac{1}{3} - \frac{0}{2} = -\arctg \frac{1}{3} < 0$$

6) Утоплексност и конкавност

Рауунамо $f''(x)$, ам кориситети истодне облик за $f'(x)$

израуунаите у делу 4):

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x^2-2x+2} - \frac{1}{2}, & x > \frac{3}{2} \\ \frac{1}{x^2-2x+2} - \frac{1}{2}, & x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$1^\circ \quad x > \frac{3}{2}$$

$$f''(x) = - \frac{-1}{(x^2 - 2x + 2)^2} \cdot (2x - 2) = \frac{2(x-1)^{\frac{3}{2}-1}}{(x^2 - 2x + 2)^2} > 0$$

$\Rightarrow f$ је конвексна на $(\frac{3}{2}, +\infty)$

$$2^\circ \quad x < \frac{3}{2}$$

$$f''(x) = - \frac{1}{(x^2 - 2x + 2)^2} \cdot (2x - 2) = - \frac{2(x-1)}{(x^2 - 2x + 2)^2} > 0$$

$$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$
$x-1$	$-$	$+$	
-2	$-$	$-$	
$(x^2 - 2x + 2)^2$	$+$	$+$	
$f''(x)$	$+$	$-$	
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	

$\Rightarrow f$ је конвексна на $(-\infty, 1)$,
 конкавна на $(1, \frac{3}{2})$ и у 1
 има тачку прелома

$$f(1) = -\arctg \frac{2}{-1} - \frac{1}{2} = \arctg 2 - \frac{1}{2} > 0$$

$$(\arctg 2 > \arctg 1 = \frac{\pi}{4} > \frac{1}{2})$$

7) Асимптоте

$D_f = (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$, па за ВА истрнујемо

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} \left(\arctg \frac{x+1}{3-2x} - \frac{x}{2} \right) = \arctg \frac{\frac{5}{2}}{0^+} - \frac{3}{4} = \arctg(+\infty) - \frac{3}{4} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} \left(\arctg \frac{x+1}{2x-3} - \frac{x}{2} \right) = \arctg \frac{\frac{5}{2}}{0^+} - \frac{3}{4} = \arctg(+\infty) - \frac{3}{4} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Тачка $x = \frac{3}{2}$ није ВА фје f , лети се приближава
тачки $(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4})$ и са леве и са десне стране, а
сада ћемо одредити и тог којим условима (односно
напомена).

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} \left(\frac{1}{x^2 - 2x + 2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\frac{9}{4} - 3 + 2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} \left(-\frac{1}{x^2 - 2x + 2} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{\frac{9}{4} - 3 + 2} - \frac{1}{2} = -\frac{4}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{13}{10}$$

Сада испитијемо ХА кад $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\arctg \frac{x+1}{2x-3} - \frac{x}{2} \right) = \arctg \frac{1}{2} - (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\arctg \frac{x+1}{3-2x} - \frac{x}{2} \right) = \arctg \left(-\frac{1}{2}\right) - (-\infty) = +\infty$$

$\Rightarrow f$ јошине нема ХА, па испитијемо КА

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctg \frac{x+1}{2x-3} - \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctg \frac{x+1}{2x-3}}{x} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\arctg \frac{1}{2}}{+\infty} - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - a_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\arctg \frac{x+1}{2x-3} - \frac{x}{2} - \left(-\frac{x}{2}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg \frac{x+1}{2x-3} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow b_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{x}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \text{ je KA kao } x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x+1}{3-2x} - \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x+1}{3-2x}}{x} - \frac{1}{2} =$$

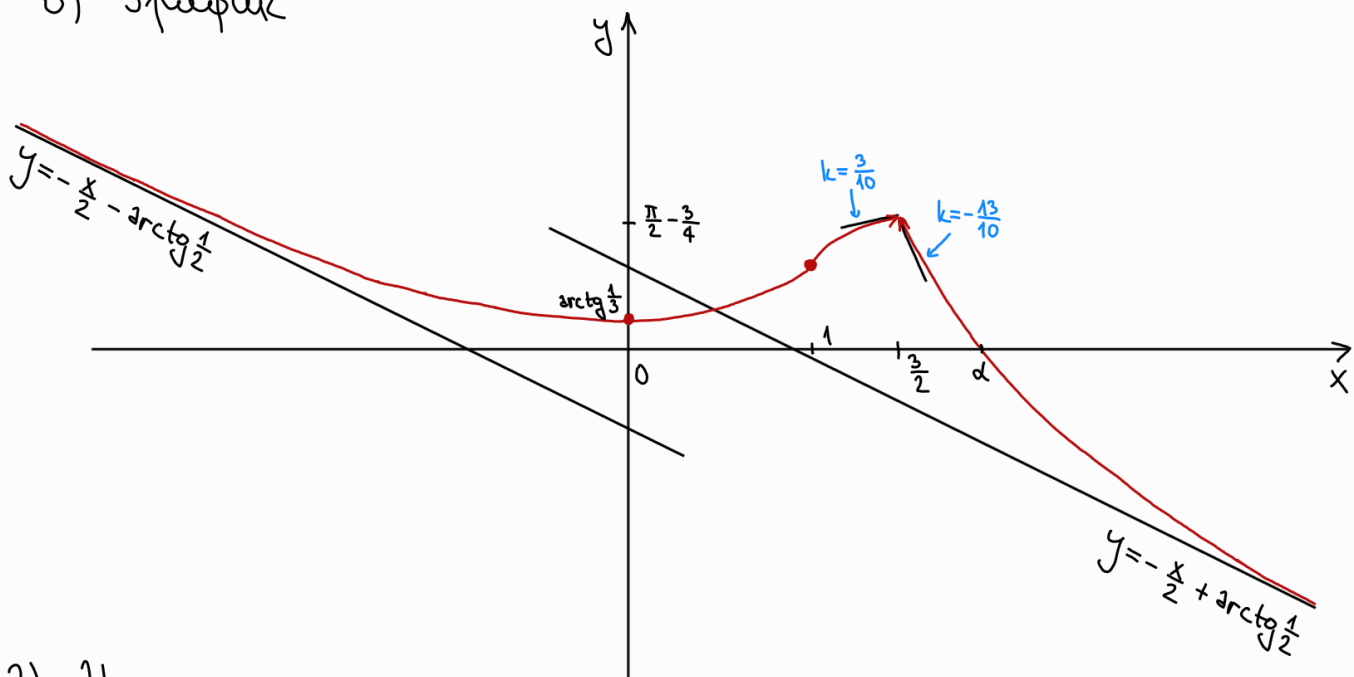
$$= \frac{-\operatorname{arctg} \frac{1}{2}}{-\infty} - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - a_2 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{x+1}{3-2x} - \frac{x}{2} - \left(-\frac{x}{2}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3-2x} =$$

$$= \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow b_2 = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{x}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \text{ je KA kao } x \rightarrow -\infty$$

8) График



2) Нуле и макс

На интервалу $(-\infty, \frac{3}{2})$ f достиже минимум у тачки 0 и важи $f(0) > 0$, па је f позитивна на том интервалу.

$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}+} f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ и f строго опада

на $(\frac{3}{2}, +\infty)$ и непрекидна је $\Rightarrow f$ има тачно једну нулу $\alpha \in (\frac{3}{2}, +\infty)$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \text{ за } x = \alpha$$

$$f(x) > 0 \text{ за } x \in (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \alpha)$$

$$f(x) < 0 \text{ за } x \in (\alpha, +\infty)$$

8. Испитати ток и скицirati график функције

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

1) Домен

услови: $x^2 - 4 \geq 0$ због корена и $\sqrt{x^2-4} \neq 0$ због имениоца



$$x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$\sqrt{x^2-4} \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

2) Нуле и знак

Најпре решавано јму $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin D_f$$

$\Rightarrow f$ нема нула

	$-\infty$	-2	2	
x	$-$	$/$	$/$	$+$
$\sqrt{x^2-4}$	$+$	$/$	$/$	$+$
$f(x)$	$-$	$/$	$/$	$+$

$\Rightarrow f(x) > 0$ за $x \in (2, +\infty)$ и
 $f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -2)$

3) Степенјална својства

D_f је симетричан и за свако $x \in D_f$ важи

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2 - 4}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} = -f(x), \text{ па је } f \text{ непарна фја.}$$

Лимес $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ постоји, јер је

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(1 - \frac{4}{x^2})}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} = \\ &\quad x \rightarrow +\infty, \text{ па је } x > 0 \text{ и } |x| = x \text{ од некоег прелазног} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \stackrel{\downarrow}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1, \end{aligned}$$

па f није периодична.

4) Непреривност и диференцијабилност

f је непрекидна на D_f као композиција непр. фја

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 - 4} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4}} \cdot 2x}{x^2 - 4} = \frac{\sqrt{x^2 - 4} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}}{x^2 - 4} = \frac{\cancel{x^2} - 4 - \cancel{x^2}}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4}} = \\ &= -\frac{4}{(x^2 - 4)^{\frac{3}{2}}} = -4(x^2 - 4)^{-\frac{3}{2}} \text{ што је дефинисано за све} \end{aligned}$$

$x \in D_f$, јер је тада $x^2 - 4 > 0$, па је f диференцијабилна на целом домену

5) Моноитоност и локални екстремуми

$$f'(x) = -\frac{4}{(x^2 - 4)^{\frac{3}{2}}} > 0, \text{ јер је } x^2 - 4 > 0 \text{ за све } x \in D_f$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 \text{ за свако } x \in D_f$$

$\Rightarrow f \searrow$ на $(-\infty, -2)$ и на $(2, +\infty)$ и нема локалних екстремума

6) Утоњексности и конкавности

$$f''(x) = \left(-4(x^2-4)^{-\frac{3}{2}} \right)' = -4 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) \cdot (x^2-4)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x = 12x(x^2-4)^{-\frac{5}{2}} =$$

$$= \frac{12x}{(x^2-4)^{\frac{5}{2}}} \underset{0}{\text{}}$$

због домена D_f

$$12x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in (2, +\infty)$$

	$-\infty$	-2	2	
$12x$	-		+	
$(x^2-4)^{\frac{5}{2}}$	+		+	
$f''(x)$	-		+	
$f(x)$	$\cap$		$\cup$	

$\Rightarrow f$ је конвексна на $(2, +\infty)$,
конкавна на $(-\infty, -2)$ и нема
превојних тачака

7) Асимптоте

$D_f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, па за БА испитујемо

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, а пошто је f непарна, довољно

је израчунати један од њих да бисмо израчунали
и други

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{2}{\sqrt{(4+)-4}} = \frac{2}{\sqrt{0^+}} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = - \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

$\Rightarrow$ правна $x=2$ је БА фје f са десне стране, а
права $x=-2$ са леве

Испитијемо ХА и КА кад $x \rightarrow +\infty$, па кад $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \cdot \sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1 \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ правна $y=1$ је ХА фје f кад $x \rightarrow +\infty$ и правна

$y=-1$ је ХА кад $x \rightarrow -\infty$

$\Rightarrow f$ нема КА

8) График

