НЕДЕЉА 1

Заснивање реалних бројева

Циљ ове лекције јесте да формално заснујемо поље реалних бројева $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ нам је познат као *скуп* бројева чије елементе можемо да сабирамо и множимо, односно знамо чему је једнако $\frac{1}{2}+5$, $(-\frac{3}{4})\cdot 17$. Такође смо могли приближно да одредимо чему је једнако $\sqrt{3}\approx 1,73205080757$ док је познато да је тај број решење једначине $x^2=3$. Али да бисмо формално засновали ово поље морамо скуп $\mathbb{R}$ да обогатимо додатним структурама.

Претпоставићемо да је читаоцу познат скуп *природних бројева* $\mathbb{N}$ чије елементе означавамо са $1,2,3,...$

$$\mathbb{N} := \{1,2,3,4,...\},$$

као и да су му познате операције сабирања и множења на овом скупу. Знамо да важе једнакости

$$1+2=3=2+1,\ 7\cdot 5=35=5\cdot 7.$$

Оне осликавају *комутативност* сабирања и множења, односно да није важан редослед којим сабирамо и множимо два природна броја. Поред тога, познато је да груписање сабирака и множиоца не мења резултат сабирања, односно множења. Ова својства називају се *асоцијативност* сабирања и асоцијативност множења. Сва претходна својства односила су се појединачне операције. Једнакост

$$8\cdot(4+5)=72=8\cdot 4+8\cdot 5$$

специјалан је случај својства *дистрибутивности* множења према сабирању.

Описане особине операција на скупу природних бројева можемо да запишемо као општа својства на следећи начин:

- $m+n=n+m$ (комутативност сабирања),
- $m\cdot n=n\cdot m$ (комутативност множења),
- $m+(n+v)=(m+n)+v$ (асоцијативност сабирања),
- $m\cdot(n\cdot v)=(m\cdot n)\cdot v$ (асоцијативност множења),
- $m\cdot(n+v)=m\cdot n+m\cdot v$ (дистрибутивност множења према сабирању),

при чему сваки исказ важи за све природне бројеве m,n,v.

Поступак записивања природних бројева у низ се не завршава у коначном броју корака, односно не можемо доћи до краја овог поступка $1,2,3,4,5,6,7,8,....$ Ако претпоставимо да смо у неком коначном кораку записали све природне бројеве, у кораку $n=14568930293$ на пример, додавањем јединице на овај број добијамо природан број $n+1=14568930294$ који није записан у претходним корацима. На тај начин можемо да закључимо да постоји бесконачно много природних бројева. Ова идеја преласка са n на $n+1$ крије се у принципу математичке индукције, једном од основних својстава скупа природних бројева.

ПРИНЦИП МАТЕМАТИЧКЕ ИНДУКЦИЈЕ:
Нека је $P(n)$ исказ који зависи од природног броја n. Ако важи

$$P(1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})\, P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

тада је исказ $P(n)$ тачан за све природне бројеве.

Задатак 1. Показати, користећи математичку индукцију, да су задовољени следећи идентитети

- $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$,
- $1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \forall n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,
- $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}$,
- $(1+p)^n \geq 1 + np, \forall n \in \mathbb{N}, p > -1$,
- $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \forall n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}$.

  Последњи идентитет се назива *биномном формулом* а изрази облика $\binom{n}{k}$ називају се *биномним коефицијентима.* Дефинишу се на следећи начин

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

  за природне бројеве n и k за које важи $k \leq n$.

Решење. Показаћемо први идентитет и тиме објаснити како се математичка индукција користи у доказивању идентитета који зависе од природних бројева. Дакле, циљ нам је да покажемо да једнакост

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

важи за сваки природан број n. Прво проверавамо да ли једнакост важи за $n = 1$. Овај корак у доказивању се назива *базом математичке индукције.* Лева и десна страна једнакости (1) за $n = 1$ дају идентитет

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

који је тачан. Тиме смо показали базу математичке индукције.

Следећи део доказа назива се *кораком математичке индукције.* У овом кораку показујемо да важи једнакост (1) за $n+1$ ако знамо да та једнакост важи за n. Другим речима, претпостављамо да важи $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (и та претпоставка се назива *индукцијском хипотезом*) и желимо да покажемо да важи $1 + 2 + ... + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Полазимо од леве стране последње једнакости и искористимо индукцијску хипотезу

$$\begin{aligned} 1 + 2 + ... + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Тиме смо добили једнакост коју је требало показати. ✓

Скупу природних бројева ћемо придруживати елемент 0 (нула) а проширени скуп ћемо означити са $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Циљ нам је да сабирамо и множимо елементе скупа $\mathbb{N}_0$ па дефинишемо сабирање и множење нулом на следећи начин

$$m + 0 = 0 + m = m, \forall m \in \mathbb{N}_0,$$

$$m \cdot 0 = 0 \cdot m = 0, \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Код биномне формуле примећујемо потребу да дефинишемо чему је једнак факторијел нуле, односно $0!$. По дефиницији узимамо да је $0! := 1$.

Од раније такође знамо да можемо да упоређујемо природне бројеве, знамо да је број 1 мањи од броја 2, број 2 мањи од броја 3, односно да је сваки број мањи од свог следбеника и већи од свог претходника. Знамо и да је број 6 мањи од броја 174 (ова неједнакост следи из општијег својства транзитивности релације). Интуитиван појам упоређивања два природна броја водиће нас до општијег појма релације $\leq$ на целом скупу реалних бројева.

Знамо да је $2+7=9$ а ову једнакост можемо да интерпетирамо и као чињеницу да једначина $x+7=9$ има решење по x у скупу $\mathbb{N}$ и то решење је $x=2$. Ако мало закомпликујемо ствар па посматрамо једначину $x+9=7$ знамо да она нема решење у скупу природних бројева. Потреба да решавамо једначине овог облика био је један од разлога да проширимо скуп природних бројева до скупа *целих бројева* који означавамо са $\mathbb{Z}$ а његове елементе са

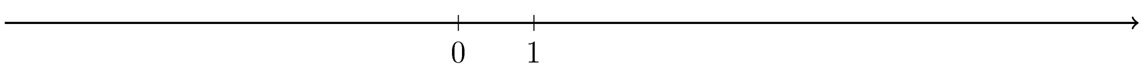
$$\mathbb{Z} := -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N} = \{... -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...\}.$$

Сабирање и множење можемо да проширимо и на скуп целих бројева (појам *проширимо* значи да дефинишемо збир два елемента из скупа $\mathbb{Z}$ тако да када специјално сабирамо два елемента из $\mathbb{N}$ резултат буде једнак ономе што знамо од раније).

Решавање једначина у којима се појављује операција множења довела је до потребе да проширимо скуп целих бројева. Једначина $(-6) \cdot x = 3$ нема решења у скупу целих бројева, односно ни један цео број x не задовољава горњу једначину. Проширивање скупа целих бројева до скупа *рационалних бројева* $\mathbb{Q}$ омогућило нам је решавање и једначина овог облика. Неформално речено скуп рационалних бројева једнак је скупу разломака, односно

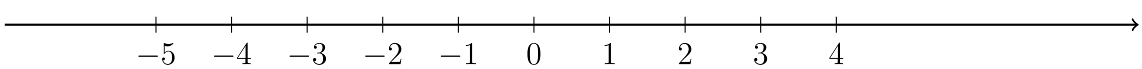
$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Посматрајући *бројевну праву* рационалним бројевима можемо да дамо и геометријску интерпретацију. На правој ћемо издвојити две тачке које ћемо означити бројевима 0 и 1 (видети Слику 1). На тај начин дужина сегмента између 0 и 1 постаје наша јединица дужине.



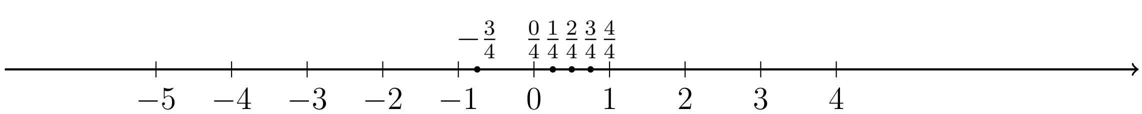
Слика 1. Бројевна права са означеним тачкама 0 и 1

Ако се корацима јединичне дужине крећемо десно од тачке 1 додајемо природне бројеве 2, 3, 4, ... Крећући се лево од тачке која је означена бројем 0 на бројевну праву додајемо негативне целе бројеве као што је приказано на Слици 2.



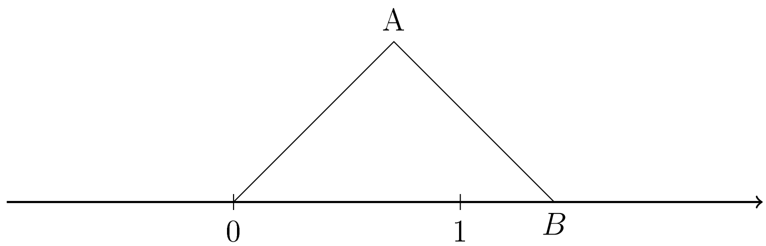
Слика 2. Бројевна права

Поделимо сваки сегмент дужине 1 на n једнаких делова. Тачке у овој подели одговарају рационалним бројевима чији је именилац једнак броју n (видети Слику 3 за $n=4$).



Слика 3. Бројевна права са означеним рационалним тачкама

Описани поступак сада урадимо за све природне бројеве n. На тај начин сваком рационалном броју придружујемо тачку на бројевној правој. Повећавањем броја n повећава се број подеоних тачака на сваком сегменту и оне постају гушће распоређене. Ипак, не одговара свакој тачки са бројевне праве неки рационалан број. Нацртајмо изнад бројевне праве једнокраки правоугли троугао чија је катета једнака мерној јединици 1. Троугао је постављен тако да се његова хипотенуза налази на бројевној правој (положај троугла је приказан на Слици 4). Како се



Слика 4. Правоугли троугао изнад бројевне праве

тачка B налази са десне стране тачке 0 координату тачке B на овој бројевној правој можемо да видимо и као њено растојање од тачке 0. То растојање је заправо дужина хипотенузе овог правоуглог троугла. Питагорина теорема нам каже да је квадрат дужине ове хипотенузе једнак збиру квадрата дужина катета, односно $1^2 + 1^2 = 2$. Након следећег задатка ће бити јасно да координата тачке B, односно дужина хипотенузе, не може бити ни један рационалан број.

Задатак 2. Показати да је квадрат рационалног броја увек различит од броја 2.
Решење. Претпоставимо супротно, *постоји рационалан број* $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *такав да важи* $x^2 = 2$. Претпоставимо да су p и q позитивни цели бројеви који су при томе узајамно прости $(p, q) = 1$, односно немају заједничких делитеља. Тада је

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2,$$
$$p^2 = 2q^2.$$

Одавде можемо да закључимо да је број p^2 паран односно да $2|p^2$. Тада је и сам број p паран (јер ако би он био непаран онда би и p^2 био непаран) па је облика $p = 2p_1$ за неки природан број p_1. Када све то вратимо у једнакост $p^2 = 2q^2$ добијамо

$$4p_1^2 = 2q^2.$$

Дељењем леве и десне стране последње једнакости бројем 2 долазимо до

$$2p_1^2 = q^2.$$

То значи да је број q^2 паран, па је тиме и број q паран. Закључак је да $2|p$ и $2|q$ што нас је довело до контрадикције јер су бројеви p и q узајамно прости а нашли смо њиховог заједничког делитеља, број 2. Закључак је да наша *претпоставка не важи*, односно не постоји рационалан број чији је квадрат једнак броју 2. ✓

Описана конструкција са правоуглим троуглом нам показује да на бројевној правој постоје тачке којима не можемо да доделимо рационалне координате, односно да није цела бројевна права састављена од рационалних тачака, Тачке које се налазе између рационалних тачака одговарају *ирационалним бројевима*. Додавањем ирационалних бројева на скуп рационалних бројева долазимо до скупа *реалних бројева* $\mathbb{R}$. Као што смо операције сабирања и множења проширивали са скупа $\mathbb{N}$ на скуп $\mathbb{N}_0$ па онда и на $\mathbb{Z}$ то исто можемо да урадимо и са релацијом $\leq$. Ако на горе описани начин сваку тачку на бројевној правој поистоветимо са елементом скупа $\mathbb{R}$ онда можемо да кажемо да је реалан број r мањи од реалног броја s ако се налази са његове леве стране на правој. У том случају пишемо $r \leq s$. Кажемо да је $r < s$ (и читамо r је *строго мање* од s) ако важи да је $r \leq s$ и $r \neq s$. Сви елементи (односно бројеви) који се налазе између r и s чине интервал са крајевима r и s. Интервале издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 3. *Интервали* у $\mathbb{R}$ су скупови следећег облика

- *отворен интервал* $(r, s) = \{x \in \mathbb{R} \mid r < x < s\}$,
- *затворен интервал* $[r, s] = \{x \in \mathbb{R} \mid r \leq x \leq s\}$,
- *полуотворени интервали* $[r, s) = \{x \in \mathbb{R} \mid r \leq x < s\}$, $(r, s] = \{x \in \mathbb{R} \mid r < x \leq s\}$.

$\Diamond$

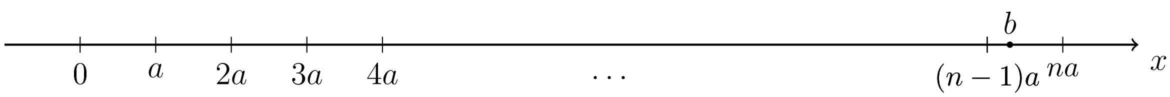
Тачка B са бројевне праве није једина тачка са ирационалним координатама, таквих тачака има бесконачно. Поред тога и рационалних бројева „има много” у скупу $\mathbb{R}$, односно ако узмемо два произвољна реална броја $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ таква да важи $r_1 < r_2$ тада можемо наћи неки рационалан број $q = \frac{m}{n}$ између њих, $r_1 < q < r_2$. Ово својство се назива *густином* скупа $\mathbb{Q}$ у скупу $\mathbb{R}$. Идеја доказа је да повећавањем имениоца n у броју q добијамо све ситнију поделу бројевне праве. Ако је подела довољно ситна сигурно ће неки рационалан број из те поделе да се нађе у интервалу (r_1, r_2). То значи да и у околини нуле постоји бесконачно много рационалних бројева. Односно, ако узмемо неки мали број ε (мале величине ћемо обично означавати са ε) тада можемо да нађемо рационалан број између нуле и ε. Колико год да смањујемо ε увек можемо да нађемо још мањи рационалан број.

Ове особине повезује Архимедова аксиома.

АРХИМЕДОВА АКСИОМА

$$(\forall\, a > 0)(\forall\, b)(\exists\, n \in \mathbb{N})\; n \cdot a > b.$$

Аксиома каже да колико год био велики број b ако довољан број пута саберемо број a са самим собом онда ћемо у неком тренутку прескочити број b (видети Слику 5).



Слика 5. За неки природан број n вредност $n \cdot a$ биће већа од броја b

Након што смо разумели потребу за увођењем ирационалних бројева можемо да објаснимо и њихову геометријску интерпретацију.

Посматрајмо следеће затворене интервале на реалној правој

$$I_1 = [1, 3],\ I_2 = \left[\frac{4}{3}, \frac{8}{5}\right], I_3 = \left[\frac{7}{5}, \frac{13}{9}\right], I_4 = \left[\frac{24}{17}, \frac{44}{31}\right], I_5 = \left[\frac{41}{29}, \frac{75}{53}\right], \ldots$$

који су приказани на Слици 6.
Набројани интервали су део низа интервала облика $I_n = [a_n, b_n]$ при чему је

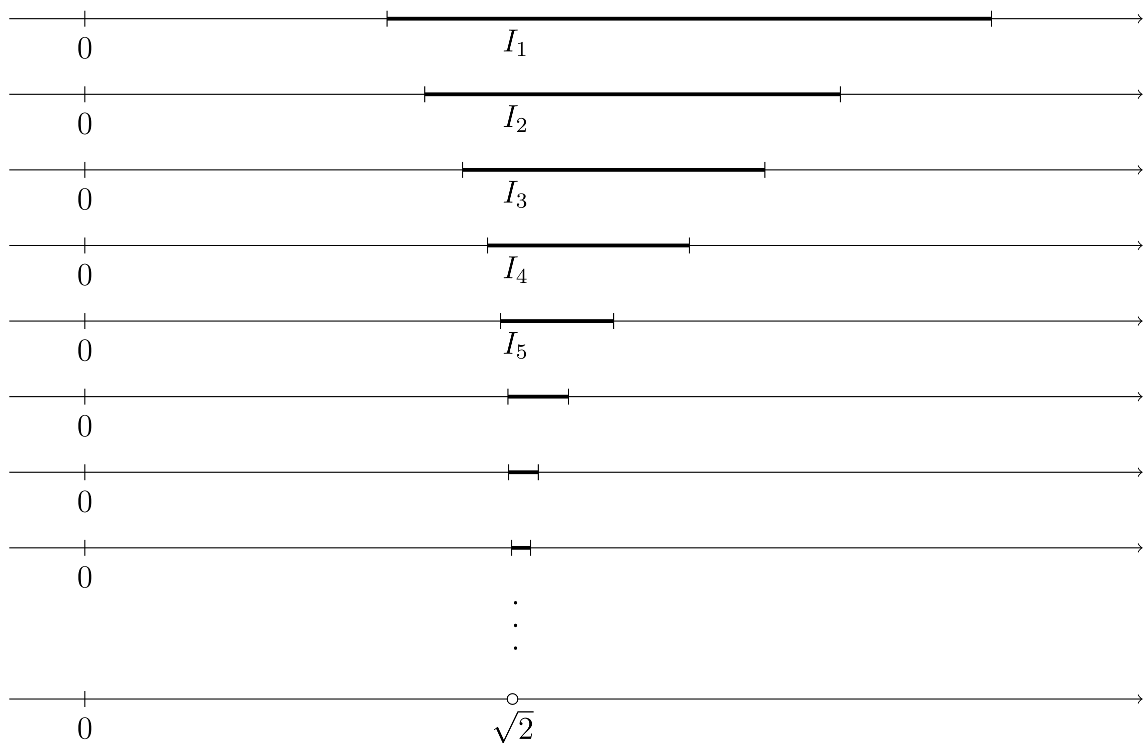
$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 2}{a_n + 2},\ b_{n+1} = \frac{2b_n + 2}{b_n + 2}, \tag{2}$$

и $a_1 = 1$, $b_1 = 3$. Можемо да приметимо да је сваки наредни интервал садржан у следећем интервалу, $I_n \subseteq I_{n+1}$, и да се њихова ширина смањује и постаје произвољно мала како расте индекс n. Са слике може да се уочи (а касније и рачунски покаже) да се само ирационалан број $\sqrt{2}$ налази у свим овим интервалима. Овај закључак, који је нама геометријски јасан, може и да се постулира као правило које увек важи. Пре него то искажемо као аксиому потребна нам је следећа дефиниција.

Дефиниција 4. Нека је дат низ непразних затворених интервала $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$. Овај низ називамо *низом уметнутих интервала* ако важи

$$I_{n+1} \subseteq I_n,$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. $\Diamond$



Слика 6. Низ затворених интервала који окружују ирационалан број $\sqrt{2}$

Пресек једне овакве бесоконачне фамилије скупова дефинише се као и коначан пресек

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x \in \mathbb{R} \mid (\forall\, n \in \mathbb{N})\; x \in I_n\}.$$

(КАН) КАНТОРОВА АКСИОМА
Сваки низ затворених уметнутих интервала има непразан пресек.

1. Поље реалних бројева

Сада ћемо интуитивну слику из уводног дела ове главе формализовати у циљу заснивања поља реалних бројева.

Дефиниција 5. Уређена шесторка $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ која задовољава следеће аксиоме

(A1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (асоцијативност сабирања)
(A2) $x + 0 = 0 + x = x$ (елемент 0 је неутрал за сабирање)
(A3) $(\forall\, x)(\exists\, y)\; x + y = y + x = 0$ (постојање *инверзног* елемента за сабирање, инверз од x означавамо са $-x$)
(A4) $x + y = y + x$ (комутативност сабирања)
(A5) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (асоцијативност множења)
(A6) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (елемент 1 је неутрал за множење)
(A7) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (дистрибутивност множења у односу на сабирање)
(A8) $x \cdot y = y \cdot x$ (комутативност множења)
(A9) $(\forall\, x \neq 0)(\exists\, y)\; x \cdot y = y \cdot x = 1$ (сваки елемент различит од нуле има *инверз у односу на множење*, тај инверз означавамо са x^{-1})
(A10) $0 \neq 1$ (нетривијалност)
(A11) $x \leq x$

(A12) $x \leq y \land y \leq z \Rightarrow x \leq z$
(A13) $x \leq y \land y \leq x \Rightarrow x = y$
(A14) $x \leq y \lor y \leq x$
(A15) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
(A16) $x \geq 0 \land y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$
(АРХ)
(КАН)

назива се *пољем реалних бројева.* ◊

Наведене аксиоме су занимљиве и појединачно, не само као целина. Оне карактеришу разне структуре које смо већ имали прилике да упознамо. Ако на неком скупу G постоје сабирање (односно операција $+$) и истакнути елемент 0 такви да тројка $(G, +, 0)$ задовољава аксиоме (A1), (A2) и (A3) онда се та структура назива групом. Ако додатно важи и (A4) онда се та структура назива комутативном или Абеловом групом. Скуп $\mathbb{E}$ на коме постоје операције $+$ и $\cdot$ и истакнути елементи 0 и 1 такви да важе аксиоме (A1)-(A8) и (A10) назива се комутативним прстеном са јединицом. Ако важи и аксиома (A9) онда кажемо да је $(\mathbb{E}, +, \cdot, 0, 1)$ поље.

Скуп $\mathbb{Q}$ задовољава аксиоме (A1)-(A16) па има структуру поља. У њему важи и Архимедова аксиома. Оно у чему се $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ разликују јесте што у пољу $\mathbb{Q}$ не важи Канторова аксиома. То се једноставно види посматрањем интервала $I_n \cap \mathbb{Q}$ где су I_n интервали конструисани у (2) и приказани на Слици 6.

Након увођења поља реалних бројева и описа својстава операција $+$, $\cdot$ и релације $\leq$ можемо да покажемо Бернулијеву неједнакост. Доказ тврђења нам показује да математичку индукцију можемо да искористимо и при доказивању неједнакости.

Тврђење 6. (Бернулијева неједнакост) За све природне бројеве n и реалне бројеве $\alpha > -1$ важи следећа неједнакост:

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

Доказ. За $n = 1$ неједнакост тривијално важи јер се своди на тврђење

$$(1 + \alpha)^1 \geq 1 + 1 \cdot \alpha.$$

Тиме смо показали базу индукције.

Корак индукције нам каже да проверимо да ли важи $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1+(n+1)\alpha$ ако знамо да неједнокст важи за природан број n. Кренимо од неједнакости која важи и помножимо леву и десну страну те неједнакости позитивним бројем $1 + \alpha$

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha \Big/ \cdot (1 + \alpha).$$

Добијемо неједнакост

$$(1 + \alpha)^{n+1} \geq (1 + n\alpha)(1 + \alpha) = 1 + (n + 1)\alpha + n\alpha^2 \geq 1 + (n + 1)\alpha,$$

чиме смо показали и индукцијски корак. □

2. Супремум и инфимум скупова у $\mathbb{R}$

Посматрањем релације $\leq$ на скупу реалних бројева можемо да закључимо да је она рефлексивна, транзитивна и антисиметрична, што следи из аксиома (A11), (A12) и (A13). За такве скупове кажемо да су уређени. У овом поглављу ћемо дефинисати појмове супремума и инфимума подскупова скупа реалних бројева и објаснити за коју класу подскупова постоје ови појмови.

Дефиниција 7. Нека је $S \subseteq \mathbb{R}$. Кажемо да је $x \in \mathbb{R}$ *мајоранта* (или *горње ограничење*) скупа S ако важи
$$(\forall\, s \in S)\ s \le x.$$
Скуп горњих ограничења скупа S означавамо са $S^{\le}$. Кажемо да је скуп S *ограничен одозго* ако важи $S^{\le} \ne \emptyset$ (односно ако S има бар једно горње ограничење). Кажемо да је x *максимум скупа* S ако важи $x \in S^{\le}$ и $x \in S$. Тада пишемо
$$x = \max S.$$
Кажемо да је $a \in \mathbb{R}$ *миноранта* (или *доње ограничење*) скупа S ако важи
$$(\forall\, s \in S)\ a \le s.$$
Скуп доњих ограничења скупа S означавамо са $S^{\ge}$. Кажемо да је скуп S *ограничен одоздо* ако важи $S^{\ge} \ne \emptyset$ (односно ако S има бар једно доње ограничење). Кажемо да је a *минимум скупа* S ако важи $a \in S^{\ge}$ и $a \in S$. Тада пишемо
$$a = \min S.$$
$\diamondsuit$

Приметимо да се максимум скупа S, ако постоји, налази у пресеку скупова S и $S^{\le}$. Слично, ако постоји минимум онда важи $\min S \in S \cap S^{\ge}$. Са друге стране горње и доње ограничење скупа не морају бити елементи самог скупа.

Ако је наш скуп S коначан и облика $S = \{s_1, s_2, ..., s_k\}$ тада ћемо његов максимум записивати и у облику $\max\{s_1, s_2, ..., s_k\}$, односно то ће бити највећи од наведених k бројева.

Пример 8. Посматрајмо $S_1 = [0, 2] \subseteq \mathbb{R}$ и $S_2 = (0, 2) \subseteq \mathbb{R}$. Тада је $S_1^{\le} = [2, +\infty)$, $S_1^{\ge} = (-\infty, 0]$, $\max S_1 = 2$ и $\min S_1 = 0$. Скуп S_2 има иста горња и доња ограничења као скуп S_1, $S_2^{\le} = [2, +\infty)$ и $S_2^{\ge} = (-\infty, 0]$ али скуп S_2 нема максимум и минимум. Непостојање ових елемената следи из чињеница да је $S_2 \cap S_2^{\le} = \emptyset$ и $S_2 \cap S_2^{\ge} = \emptyset$. $\sharp$

У претходном примеру су скупови S_1 и S_2 различити али имају особину да чим се крене лево од броја 2 (колико год био мали наш корак) наилазимо на елементе наших скупова, док са десне стране броја 2 не постоји ни један елемент тих скупова. Слично за број 0, десно од нуле имамо елементе скупова док их нема са леве стране нуле. Такве елементе издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 9. Нека је $S \subseteq \mathbb{R}$. *Супремум скупа* S је, ако постоји, најмање горње ограничење скупа S. Супремум скупа означава се са
$$\sup S := \min S^{\le}.$$
Инфимум скупа S је, ако постоји, највеће доње ограничење скупа S. Инфимум скупа означава се са
$$\inf S := \max S^{\ge}.$$
$\diamondsuit$

Приметимо да ако $\sup S \in S$ онда је то и његов максимум (ако скуп S има максимум тада има и супремум). Слично, ако $\inf S \in S$ онда је то и његов минимум.

Пример 10. За скуп $S = (5, 7]$ важи $S^{\le} = [7, +\infty)$, $S^{\ge} = (-\infty, 5]$ па постоје и супремум и инфимум скупа, $\sup S = 7$ и $\inf S = 5$. $\sharp$

Пример 11. Посматрамо скуп $S = [0, +\infty)$. Ако узмемо било који реалан број x тада је број $\max\{0, x + 1\}$ елемент скупа S који је већи од x што значи да x не може бити горње ограничење скупа S. Закључујемо да је $S^{\le} = \emptyset$ па супремум скупа S не постоји. Слично, скуп $T = (-\infty, -3)$ није ограничен са доње стране па овај скуп нема инфимум. $\sharp$

Задатак 12. Наћи супремуме и инфимуме следећих скупова:

- $S_1 = (5, 7)$,
- $S_2 = [5, 7)$,
- $S_3 = [5, 7]$,
- $S_4 = [0, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geq 0,\ r^2 \leq 2\}$,
- $S_5 = \left\{\frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{N}\right\}$,
- $S_6 = \left\{5 - \frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{N}\right\}$,
- $S_7 = \left\{\frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{N},\ n < m\right\}$.

Остављамо читаоцу да покаже у следеће карактеризације супремума и инфимума.

Задатак 13. Нека је $S \subseteq \mathbb{R}$. Тада важи

$$M = \sup S \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall\, s \in S)\ s \leq M \\ (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, s_0 \in S)\ M - \varepsilon < s_0, \end{cases}$$

$$m = \inf S \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall\, s \in S)\ m \leq s \\ (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, s_0 \in S)\ s_0 < m + \varepsilon. \end{cases}$$

У Примеру 11 смо видели да постоји подскуп скупа реалних бројева који нема супремум. Класу скупова за коју знамо да имају супремум издвајамо следећом аксиомом.

> (СУП) АКСИОМА СУПРЕМУМА
> Сваки непразан, одозго ограничен подскуп има супремум.

У пољу реалних бројева ће важити аксиома супремума.

Теорема 14. *Сваки непразан и одозго ограничен подскуп скупа реалних бројева има супремум.*

Доказ овог тврђења ћемо оставити читаоцу као задатак са издвојеним корацима.

Задатак 15. Нека је $S \subseteq \mathbb{R}$ непразан и одозго ограничен скуп. Означимо са s елемент скупа S, за који знамо да постоји, а са x једно његово горње ограничење.

- Показати да постоји природан број k такав да је $s + \frac{k}{2^2}$ горње ограничење скупа S.
- Посматрајмо низ бројева a_n и b_n дефинисан на следећи начин: $a_1 := s$, $b_1 := x$. Сваки следећи елемент се дефинише као $b_n := s + \frac{m_n}{2^n}$ где је m_n најмањи природан број k за који важи да је $s + \frac{k}{2^n}$ горње ограничење скупа S; $a_n := s + \frac{m_n - 1}{2^n}$. Показати да је $[a_n, b_n] \cap S \neq \emptyset$.
- Показати је $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, низ уметнутих интервала.
- Показати да се у пресеку $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ налази тачно један елемент s_0.
- Показати да је s_0 супремум скупа S.

Пролазећи кроз овај задатак показали смо да из Архимедове аксиоме (АРХ) и Канторове аксиоме (КАН) следи Аксиома супремума (СУП). Важиће и обрнуто, из Аксиоме супремума следе Архимедова и Канторова аксиома. То значи да смо у аксиоматском заснивању поља реалних бројева у Дефиницији 5 могли да кажемо да је то структура која задовољава (А1)-(А16), (СУП).

Својство аналогно Аксиоми супремума важи и за инфимум.

Теорема 16. *Сваки непразан и одоздо ограничен подскуп $T \subseteq \mathbb{R}$ има инфимум у $\mathbb{R}$.*

Сада можемо формално да дефинишемо број e који нам је од раније познат само као број са пуно децимала чија је приближна вредност

$$e \approx 2.71828.$$

Нека је

$$E = \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Скуп E је непразан јер $2 \in E$ и ограничен је одозго бројем 3 јер за произвољно $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!} \\
&\leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\
&= 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\
&= 2 + 1 - \frac{1}{n} < 3.
\end{aligned}$$

У првој једнакости смо искористили биномну формулу док прва неједнакост следи из

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \leq 1 \text{ и } k! \geq k(k-1).$$

Аксиома супремума нам каже да скуп E има супремум у скупу реалних бројева. Његов супремум је *Ојлеров број*

$$e := \sup E.$$

Овај број је ирационалан и *трансцедентан*[1].

Познавање појма супремума омогућава нам да формално дефинишемо чему је једнако $2^{\frac{1}{5}}$ или $2^{\sqrt{3}}$. До сада смо, као и за број e, ово могли да разумемо само као приближну вредност коју рачунамо на дигитрону

$$2^{\sqrt{3}} \approx 2^{1.7320508} \approx 3.321997.$$

Ми знамо да степенујемо природним бројем било који реалан број, на пример

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Број $2^{\frac{1}{5}}$ можемо да дефинишемо као јединствено позитивно решење једначине $x^5 = 2$ али поставља се питање зашто овакво решење постоји. До одговора на то питање долазимо помоћу супремума одговарајућег скупа.

Уопштено, нека је $a > 0$ произвољан реалан број и n произвољан природан број. Хоћемо да дефинишемо $\sqrt[n]{a}$ односно $a^{\frac{1}{n}}$. Посматрамо скуп

$$A = \{x \mid x \geq 0,\ x^n \leq a\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Овај скуп је непразан јер $0 \in A$ и ограничен је одозго бројем $\max\{1, a\}$. Ако је $a \geq 1$ тада $a \in A^{\leq}$ а ако је $a < 1$ тада $1 \in A^{\leq}$. Из аксиоме супремума следи да постоји супремум скупа A и тај супремум ће бити

$$\sqrt[n]{a} := \sup A.$$

Следећи задатак нам каже да ће $\sqrt[n]{a}$ (појам који је дефинисан као супремум скупа) заиста бити решење једначине $x^n = a$.

Задатак 17. Показати да важи $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Сада знамо да степенујемо позитивне реалне бројеве било којим рационалних бројем

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p,$$

[1] Број је трансцедентан ако није нула ни једног полинома са целобројним коефицијентима.

при чему је $x^p = (x^{-1})^{|p|}$ ако је p негативан цео број. Преостало нам је још да формално дефинишемо степеновање ирационалним бројем. Идеја је слична као кад смо степеновали са $\frac{1}{n}$, посматра се супремум одговарајућег скупа. На пример, дефиниција броја $2^{\sqrt{3}}$ би била

$$2^{\sqrt{3}} = \sup\{2^r \mid r \in \mathbb{Q},\ r < \sqrt{3}\}.$$

3. Проширени скуп реалних бројева

Проширење скупа $\mathbb{R}$ је скуп

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

Хоћемо да проширимо операције a и уређење на $\overline{\mathbb{R}}$. Релација $\leq$ и даље остаје релација тоталног поретка на $\overline{\mathbb{R}}$ при чему постулирамо да важи

$$-\infty < x < +\infty$$

за свако $x \in \mathbb{R}$. Операције проширујемо по следећим правилима

(1) $x + (+\infty) = +\infty$ за свако $-\infty < x \leq +\infty$,
(2) $x + (-\infty) = -\infty$ за свако $-\infty \leq x < +\infty$,
(3) $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$,
(4) $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ за свако $0 < x \leq +\infty$,
(5) $x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$ за свако $-\infty \leq x < 0$.

Изрази облика $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{1}{0}$, $(+\infty) - (+\infty)$, $+\infty + (-\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$,... остају неодређени па $\overline{\mathbb{R}}$ нема структуру поља као $\mathbb{R}$. Неодређеност ових облика биће мало јаснија после дефинисања појма лимеса функција.

Приметимо да проширивањем скупа реалних бројева има смисла дефинисати отворени интервал (r, s) или полуотворени интервал $(r, s]$ и када је његов леви крај r једнак вредности $-\infty$, али и даље интервали, дефинисани на овај начин, остају подскупови у $\mathbb{R}$. Слично, можемо да дефинишемо и интервале облика $(r, +\infty)$ и $[r, +\infty)$. Ако у дефиницији затвореног интервала допустимо да његови одговарајући крајеви буду $+\infty$ и $-\infty$ онда скуп $\overline{\mathbb{R}}$ можемо да запишемо и као $[-\infty, +\infty]$.

Напомена 18. Интервал I у скупу реалних бројева може да се карактерише као скуп са следећим својством: Ако $a, b \in I$ тада и свако c за које је $a < c < b$ важи $c \in I$. $\diamond$

4. Задаци

Задатак 19. Показати да за сваки природан број n важи $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$.

Задатак 20. Показати да је низ интервала $U_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \subseteq \mathbb{R}$ уметнут и да је њихов пресек празан скуп. Овај задатак показује да претпоставка о затворености интервала у Канторовој аксиома не може да се ослаби.

Задатак 21. Посматрајмо низ затворених уметнутих интервала

$$J_n = \left[\sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{2} + \frac{1}{n}\right] \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}.$$

Показати да је ово низ затворених уметнутих интервала чији је пресек празан скуп. Овај задатак нам показује да у пољу рационалних бројева не важи Канторова аксиома.

Задатак 22. Показати да, ако постоји, максимум скупа је јединствен. Слично за минимум, ако постоји минимум скупа онда је он јединствен.

Задатак 23. Нека је $S \subseteq \mathbb{R}$. Дефинишемо скуп
$$-S := \{-s \mid s \in S\} \subseteq \mathbb{R}.$$
Показати да важи $\sup(-S) = -\inf S$ и $\inf(-S) = -\sup S$.

ОБЛАСТ 2

Низови

Знамо од раније да је низ реалних бројева објекат који записујемо као

$$x = \{1, 2, 3, 8, ..., 59, 678, ...\}$$

или

$$a_n = \left\{\frac{1}{7}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{13}, \frac{1}{17}, ..., \sin 50, e^{67}, ..., \cos 900, \ln 150, ...\right\}.$$

Три тачке означавају да се овај поступак записивања чланова низа никада не завршава, другим речима то је бесконачан скуп елемената.

Некада низ задајемо и у следећем облику

$$x_n = \frac{3^n}{n!},\ n \in \mathbb{N}.$$

То је низ чији су чланови дати са $x_n = \left\{3, \frac{9}{2}, \frac{27}{6}, \frac{81}{24}, ...\right\}$.

Низ можемо да задамо и *рекурентно.* Ако задамо први члан низа а сваки наредни члан зависи од претходног члана онда кажемо да је тај низ задат рекурентно. Ако сваки елемент низа зависи од претходна два члана низа онда морамо да задамо прва два елемента низа. Примери рекурентних низова су

$$a_1 = 55,\ a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{5},\ n \in \mathbb{N},$$

и

$$b_1 = 3,\ b_2 = 5,\ b_{n+2} = e^{b_n} + \cos b_{n+1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Даћемо и формалну дефиницију низа мада ћемо интуитивну представу о низовима користити и касније.

Дефиниција 1. *Низ* реалних бројева је пресликавање $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Вредности

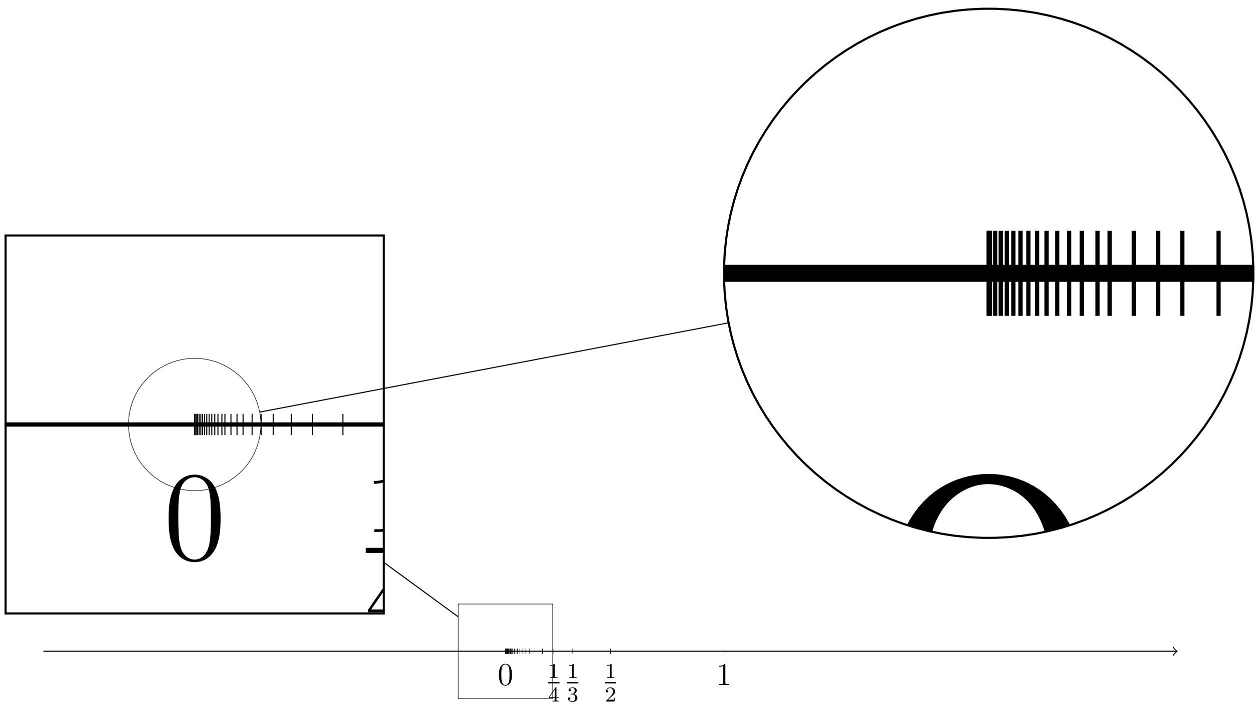
$$x(1), x(2), x(3), ..., x(54), x(55), ...$$

називамо члановима низа. Слику природног броја n при пресликавању x означавамо са $x(n)$ или x_n. Низ означавамо са $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, (x_n) или $\{x_n\}$. $\Diamond$

Када кажемо дат је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ подразумевамо да је заправо дато пресликавање $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ и да знамо чему је једнако $x(n)$ односно x_n за свако $n \in \mathbb{N}$.

С обзиром на то да радимо са реалним низовима чланове таквих низова можемо да нацртамо на бројевној правој. Ако нам је дат неки низ тада сваком елементу можемо да придружимо тачку на бројевној правој. Нас занима како су те тачке распоређене на овој правој. Нека је наш задатак да спроведемо неки физички екперимент, на пример меримо за колико времена куглица сиђе низ једну исту стрму раван а знамо да теоријска мерења кажу да би куглица требала да сиђе за време од $3s$. Време силаска t посматрамо као неки реалан број и у првом мерењу добијено време силаска означимо са t_1, следеће мерење нам дâ време t_2, затим t_3 и када бисмо могли овај поступак да радимо до у бесконачност добили бисмо низ реалних бројева $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Сваки елемент низ t_n означава време добијено у $n-$том мерењу. У почетку смо несигурни са штоперицом па нам рука не реагује на време када куглица дође до краја стрме равни. Како повећавамо број мерења то и ми постајемо сигурнији и измерено време t_n биће све ближе вредности од $3s$. То значи да се вредности t_n, нанете на бројевну праву, гомилају око броја 3, и како индекс n расте број t_n постаје све ближе вредности 3, некада чак може и да буде једнако вредности 3. Описано понашање низа, где се његове вредности гомилају око једног броја, желимо ближе да опишемо. Таква правилност у понашању нам омогућава да контролишемо распоред елемената низа на бројевној правој.

Посматрајмо сада конкретан низ $x_n = \frac{1}{n}$. Неки елементи низа приказани су на Слици 1. Када погледамо бројевну праву из далека, можемо да приметимо да су елементи низа нагомилани са десне стране тачке 0. Ако увећамо део праве око тачке нула кроз лупу (увећани правоугаоник на слици) приметићемо да су елементи низа густо распоређени око тачке нула а то се још боље види када још једном увећамо слику (увећани круг на слици).



Слика 1. Низ реалних бројева $\frac{1}{n}$ на реалној правој

1. Гранична вредност низа

1.1. Дефиниција. У овој глави ћемо дати прецизан математички опис понашања низова из уводног дела овог поглавља.

Дефиниција 2. Кажемо да низ реалних бројева (x_n) има *граничну вредност* (или *лимес*) x_∞ ако важи

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_\infty| < \varepsilon. \tag{1}$$

Тада пишемо

$$x_\infty = \lim_{n\to+\infty} x_n,$$

или

$$x_n \to x_\infty,\ n \to +\infty.$$

Ако низ има граничну вредност кажемо да је он *конвергентан*. У супротном, кажемо да низ *дивергира*. $\Diamond$

Неформалан опис исказа (1) смо већ видели. Како још да разумемо овај исказ? Он нам каже да када узмемо произвољан позитиван број (то је део исказа $\forall \varepsilon > 0$) онда ће бесконачно много чланова нашег низа бити у интервалу облика $(x_\infty - \varepsilon, x_\infty + \varepsilon)$ (интервали овог облика називају се отвореним околинама тачке x_∞ или ε-околинама тачке x_∞). Ми не знамо где се налазе чланови низа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n_0-2}, x_{n_0-1}$ док су сви остали чланови $x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots$ (којих има бесконачно много) у ε-околини тачке x_∞.

Сада ћемо дати примере конвергентних низова.

Пример 3. Сваки константан низ $x_n = C$, $n \in \mathbb{N}$, је конвергентан и његова гранична вредност једнака је тој константи C. $\sharp$

Напоменимо још једну битну особину конвергентних низова. Ако променимо коначно много чланова низа, конвергенција и гранична вредност тог низа се не мењају. Низ

$$x_n = \{0, 0, 0, 13, 0, -46, \underbrace{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots}_{\text{сви остали чланови једнаки су } 0}\}$$

је добијен тако што смо у константном низу чији су сви чланови једнаки нули променили четврти и шести члан. Тиме нисмо променили конвергенцију, и овај низ је конвергентан и његова гранична вредност једнака је 0.

Пример 4. Вратимо се на низ $x_n = \frac{1}{n}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Већ смо рекли да се елементи овог низа гомилају са десне стране тачке 0 на бројевној правој. Дакле очекујемо да је нула гранична вредност овог низа. То ћемо показати и по дефиницији.

Ако је $\varepsilon = 10$ онда се сви чланови низа налазе у околини $(-10, 10)$. Ако је $\varepsilon = \frac{1}{200}$ онда је одговарајуће n_0 из исказа (1) једнако вредности 201, односно у отвореној околини $(-\frac{1}{200}, \frac{1}{200})$ ће се налазити елементи $x_{201}, x_{202}, x_{203}, \ldots$ Вредности $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ одговара $n_0 = 1001$. На овом примеру видимо да како смањујемо вредност параметра ε индекс n_0 расте. Ако је $\varepsilon > 0$ произвољан број онда $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ задовољава услове исказа (1) (овде $[x]$ означава цео број такав да се x налази у полуотвореном интервалу $[[x], [x]+1)$ и назива се *целим делом* броја x). Дакле

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

$\sharp$

Сада ћемо дати и примере низова који нису конвергентни.

Пример 5. Показаћемо да низ $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, дивергира. Када распишемо првих неколико чланова низа видимо да је ово низ који садржи само вредности 1 и -1

$$a_n = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots\},$$

и вредности се не групишу ни око једне тачке већ у сваком кораку имамо скок елемената низа за вредност 2.

Претпоставимо да низ a_n конвергира и да је његова гранична вредност неко $a_\infty \in \mathbb{R}$. Разликоваћемо два случаја, $a_\infty = 1$ и $a_\infty \neq 1$.

Ако је $a_\infty = 1$ онда узмемо $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и нађемо $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је $|a_n - a_\infty| < \frac{1}{2}$ за све $n \geq n_0$. Када напишемо ову неједнакост за $n = 2n_0 + 1$ који је непаран број већи од n_0 долазимо до следећег

$$|(-1)^{2n_0+1} - 1| < \frac{1}{2},$$

односно $2 < \frac{1}{2}$ а то је контрадикција. Дакле вредност 1 не може да буде гранична вредност овог низа.

Остао нам је случај $a_\infty \neq 1$. Тада за $\varepsilon = \frac{|a_\infty - 1|}{2} > 0$ нађемо $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да важи $|a_n - a_\infty| < \varepsilon$ за све $n \geq n_0$. Распишемо претходну једнакост за вредност индекса $n = 2n_0$ који је паран и већи од n_0

$$|a_n - a_\infty| = |a_{2n_0} - a_\infty| = |(-1)^{2n_0} - a_\infty| = |1 - a_\infty| < \varepsilon.$$

Добили смо неједнакост $|1 - a_\infty| < \frac{|a_\infty - 1|}{2}$ што је контрадикција. Дакле ни једна вредност $a_\infty \neq 1$ не може да буде гранична вредност овог низа.

Наша претпоставка о конвергенцији не важи па је низ $(-1)^n$ дивергентан. ♯

Пример 6. Посматрајмо низ $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Када напишемо првих неколико чланова низа

$$x_n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

видимо да је сваки следећи елемент низа на растојању 1 од оног претходног. Значи у сваком кораку ми направимо скок за вредност 1 на десну страну. Јасно је да овде не можемо очекивати гомилање чланова око неке тачке, односно очекујемо да овај низ дивергира. Ми ћемо претпоставимо да низ конвергира ка некој граничној вредности $x_\infty \in \mathbb{R}$ а онда ћемо доћи до контрадикције. Дефиниција конвергенције каже да ће за $\varepsilon = \frac{1}{5}$ постојати $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је за све $n \geq n_0$ задовољена неједнакост $|x_n - x_\infty| < \frac{1}{5}$. Написаћемо ову неједнакост за две вредности индекса $n = n_0$ и $n = n_0 + 2$:

$$-\frac{1}{5} < x_{n_0} - x_\infty < \frac{1}{5},$$
$$-\frac{1}{5} < x_{n_0+2} - x_\infty < \frac{1}{5}.$$

Из прве неједнакости ћемо искористити следеће $-x_{n_0} < \frac{1}{5} - x_\infty$ док из друге неједнакости можемо да закључимо да је $x_{n_0+2} < \frac{1}{5} + x_\infty$. Када саберемо ове неједнакости долазимо до

$$x_{n_0+2} - x_{n_0} < \frac{2}{5}$$

а знамо да је $x_{n_0+2} - x_{n_0} = n_0 + 2 - n_0 = 2$. Дакле дошли смо до контрадикције. Наша претпоставка не важи па је низ $x_n = n$ дивергентан. Приметимо да доказ пролази и за друге вредности константе ε, ми смо овде одабрали $\frac{1}{5}$ а доказ пролази и за $\frac{1}{17}$ и за $\frac{1}{15}$. Заправо доказ пролази за било које $\varepsilon \in (0, 1)$. ♯

Ако се вратимо на претходни пример видимо да чланови низа расту када n расте (јер су и једнаки вредности n) и да иду у бесконачност. Тиме долазимо до потребе да проширимо појам граничне вредности тако да гранична вредност може да припада проширеном скупу реалних бројева, односно да може да узме вредности $+\infty$ или $-\infty$.

Дефиниција 7. Нека је дат низ реалних бројева (x_n). Кажемо да је $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ ако важи

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n > M.$$

Кажемо да је $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ ако важи

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n < M.$$

Ако је $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ онда кажемо да низ (x_n) *одређено дивергира* или *конвергира у проширеном смислу.* ♢

Сада можемо да закључимо да низ из Примера 7 има граничну вредност $+\infty$.

1.2. Својства. Формулисаћемо и доказаћемо нека својства конвергентних низова. Ако елементе низа можемо да лоцирамо на неком ограниченом делу бројевне праве онда кажемо да је тај низ ограничен. У том случају можемо лакше да испитујемо конвергенцију низа. Сада ћемо и формално дефинисати појам ограничености.

Дефиниција 8. Кажемо да је низ (x_n) *ограничен* ако постоји константа $M \in \mathbb{R}$ таква да је $|x_n| \le M$ за све $n \in \mathbb{N}$. Број M називамо *ограничењем низа* (x_n). Низ који није ограничен називамо *неограниченим низом.* $\Diamond$

Пример 9. Низ $x_n = \sin(n+9)$ је ограничен вредношћу 1, док је низ $y_n = 5n+17$ неограничен (то следи из Архимедове аксиоме). $\sharp$

Тврђење 10. Сваки конвергентан низ је ограничен.

Доказ. Нека је (x_n) конвергентан низ и нека је његова гранична вредност $x_\infty \in \mathbb{R}$. За $\varepsilon = \frac{1}{2}$ постојаће $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је $|x_n - x_\infty| < \frac{1}{2}$ за све $n \ge n_0$. Дакле следећи елементи низа

$$x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, x_{n_0+3}, x_{n_0+4}, \ldots$$

налазе се у ограниченом интервалу $(x_\infty - \frac{1}{2}, x_\infty + \frac{1}{2})$. Нека је

$$M_1 = \max\left\{\left|x_\infty - \frac{1}{2}\right|, \left|x_\infty + \frac{1}{2}\right|\right\}.$$

Тада је $|x_n| \le M_1$ за све $n \ge n_0$. Преостало нам је још коначно много чланова низа који можда нису ограничени вредношћу M_1. Како их има коначно много знамо шта је њихов максимум, па дефинишемо

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots |x_{n_0-1}|, M_1\}.$$

Овако дефинисано M је једно ограничење низа (x_n). $\square$

Претходно тврђење нам каже да из конвергенције низа следи његова ограниченост. Овде не важи импликација у супротном смеру. Односно, постоји низ који је ограничен а који не конвергира. Један такав низ је $a_n = (-1)^n$. Овај низ је ограничен вредношћу 1 и дивергентан је као што смо показали у Примеру 6.

Кажемо да је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *нула низ* ако је тај низ конвергентан и ако је његова гранична вредност једнака нули. Следећа лема нам каже да је неки низ нула низ ако и само ако је низ његових апсолутних вредности нула низ.

Лема 11. *Нека је* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *низ реалних бројева. Тада је* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ *ако и само ако је* $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = 0$.

Доказ. Доказ, који је врло једноставан, остављамо читаоцу уз сугестију да следећи идентитет има централно место у доказу:

$$|x_n - 0| = ||x_n| - 0|.$$

$\square$

Користећи претходну лему и Пример 4 једноставно закључујемо да је низ $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$ конвергентан и да је и његов лимес једнак нули

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Тврђење које следи описује како се лимес низа слаже са збиром, производом и количником низова.

Тврђење 12. Нека су $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентни низови. Тада важи следеће

- **(Линеарност лимеса)** Низ $(\lambda x_n + \mu y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је конвергентан за све реалне бројеве λ и μ и важи
$$\lim_{n\to+\infty}(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \lim_{n\to+\infty} x_n + \mu \lim_{n\to+\infty} y_n,$$
(другим речима лимес низа пролази кроз збир и множење реалном константом);
- Низ $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је конвергентан и важи
$$\lim_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n \cdot \lim_{n\to+\infty} y_n,$$
(лимес низа пролази кроз производ);
- Ако су чланови низа $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ различити од нуле и ако је $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n \neq 0$ тада је низ $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан и важи
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n},$$
(ако је лимес имениоца различит од нуле онда лимес пролази кроз количник).

Доказ. Показаћемо својство линеарности док доказ остале две особине остављамо читаоцу као вежбу. Граничне вредности низова ћемо означити са $x_\infty := \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ и $y_\infty := \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. Узмимо произвољно $\varepsilon > 0$. Претпоставићемо да је $\lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$. На основу конвергенције низова можемо да закључимо да ће постојати $n_1 \in \mathbb{N}$ такво да је
$$|x_n - x_\infty| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|},$$
за све $n \geq n_1$ и постојаће $n_2 \in \mathbb{N}$ такво да је
$$|y_n - y_\infty| < \frac{\varepsilon}{2|\mu|},$$
за све $n \geq n_2$. Ако са n_0 означимо максимум бројева n_1 и n_2 тада имамо следећи низ неједнакости за све $n \geq n_0$
$$\begin{aligned} |\lambda x_n + \mu y_n - (\lambda x_\infty + \mu y_\infty)| &\overset{(*)}{\leq} |\lambda x_n - \lambda x_\infty| + |\mu y_n - \mu y_\infty| = \\ &= |\lambda| \cdot |x_n - x_\infty| + |\mu| \cdot |y_n - y_\infty| < \\ &< |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} + |\mu| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\mu|} = \varepsilon. \end{aligned}$$
У кораку $(*)$ смо искористили неједнакост троугла која каже да је $|x+y| \leq |x| + |y|$ за све реалне бројеве x и y.

У случају да је $\lambda \neq 0$ и $\mu = 0$ постојаће $n_3 \in \mathbb{N}$ такво да је $|x_n - x_\infty| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ за све $n \geq n_3$. Важи
$$\begin{aligned} |\lambda x_n + \mu y_n - (\lambda x_\infty + \mu y_\infty)| &= |\lambda x_n - \lambda x_\infty| = \\ &= |\lambda| \cdot |x_n - x_\infty| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon, \end{aligned}$$
за све $n \geq n_3$. Слично се разматра случај $\lambda = 0$ и $\mu \neq 0$, док се случај $\lambda = \mu = 0$ своди на лимес константног нула низа.

На основу овога закључујемо да је низ $\lambda x_n + \mu y_n$ конвергентан и да је његова гранична вредност једнака $\lambda x_\infty + \mu y_\infty$. □

Пример 13. Испитати конвергенцију низа $\sqrt[n]{a}$ где је $a > 0$ фиксиран реалан број.

Прво разматрамо случај када је $a > 1$. Узмимо $\varepsilon > 0$ приозвољно. На основу Архимедове аксиоме постојаће $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да важи $n_0\varepsilon > a - 1$. Тада за све $n \geq n_0$ важи
$$(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon \geq 1 + n_0\varepsilon > a.$$

Прва неједнокост следи из Бернулијеве неједнакости. Узимањем n-тог корена леве и десне стране добијамо неједнакост $\sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$. Како је $\sqrt[n]{a} > 1$ закључујемо да важи

$$1 - \varepsilon < 1 < \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon,$$

за све $n \geq n_0$. Закључујемо

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Ако је $a = 1$ тада је низ $\sqrt[n]{a}$ константан и једнак јединици па је и његов лимес једнак 1. Ако је $0 < a < 1$ тада је $\frac{1}{a} > 1$ па је

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

Закључак је да за све $a > 0$ важи

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

$\sharp$

Следећа два исказа нам говоре о томе како се лимес низа слаже са релацијом $\leq$.

Тврђење 14. Нека су $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентни низови такви да је

$$x_n \leq y_n$$

за све $n \in \mathbb{N}$. Тада важи

$$\lim_{n \to +\infty} x_n \leq \lim_{n \to +\infty} y_n.$$

Приметимо да ће претходно тврђење важити и ако $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n, \lim\limits_{n \to +\infty} y_n \in \overline{\mathbb{R}}$. Ово тврђење нам каже да лимес пролази кроз релацију $\leq$ међу низовима. Напоменимо да се релација $<$ међу низовима не чува при проласку лимеса. Пример за то су низови $x_n = \frac{1}{n}$ и $y_n = \frac{2}{n}$. За ова два низа важи $x_n < y_n$ за све индексе n док међу лимесима важи једнакост (а не строга неједнакост) јер је $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$. Дакле, ако важи $x_n < y_n$ једино можемо да закључимо да је $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.

Доказ. Претпоставимо супротно $x_\infty := \lim\limits_{n \to +\infty} x_n > \lim\limits_{n \to +\infty} y_n =: y_\infty$. Нека је $\varepsilon = \frac{x_\infty - y_\infty}{3}$. За овако одабрано ε нађимо $n_1 \in \mathbb{N}$ такво да је $|x_n - x_\infty| < \varepsilon$ за све $n \geq n_1$ и нађимо $n_2 \in \mathbb{N}$ за које је $|y_n - y_\infty| < \varepsilon$ за све $n \geq n_2$. Означимо са n_0 већи од ова два одабрана природна броја n_1 и n_2, $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. За сваки индекс n који је већи од индекса n_0 важе неједнакости

$$x_\infty - \varepsilon < x_n < x_\infty + \varepsilon,$$
$$y_\infty - \varepsilon < y_n < y_\infty + \varepsilon.$$

Њиховим комбиновањем долазимо до неједнакости

$$y_n < y_\infty + \varepsilon < x_\infty - \varepsilon < x_n$$

која је у контрадикцији са условом тврђења $x_n \leq y_n$ за све природне бројеве n. Закључујемо да претпоставка не важи, односно закључујемо да је $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$. $\square$

Теорема 15. (Теорема о три лимеса за низове) *Нека су дати низови (a_n), (b_n) и (c_n) такви да важи*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \tag{2}$$

за све $n \in \mathbb{N}$. Ако низови (a_n) и (c_n) конвергирају ка истој граничној вредности d_∞ тада је и низ (b_n) конвергентан и конвергира ка истој граничној вредности, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = d_\infty$.

Доказ. Узмимо $\varepsilon > 0$ произвољно. Из конвергенције низова (a_n) и (b_n) следи да постоје природни бројеви n_1 и n_2 такви да је

$$|a_n - d_\infty| < \varepsilon, \forall n \geq n_1,$$
$$|c_n - d_\infty| < \varepsilon, \forall n \geq n_2.$$

Тада за све $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ важи $d_\infty - \varepsilon < a_n$ и $c_n < d_\infty + \varepsilon$. Комбиновањем ове две неједнакости са условом (2) долазимо до процене

$$d_\infty - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < d_\infty + \varepsilon.$$

Одавде закључујемо да је низ (b_n) конвергентан и да конвергира ка граничној вредности d_∞. $\square$

Напомена 16. Приметимо да закључак теореме важи и ако је неједнакост (2) задовољена почев од неког индекса, односно ако не важи за коначно много елемената низова (a_n), (b_n) и (c_n). Ово следи из чињенице да промена коначно много чланова низа не утиче ни на његову конвергенцију ни на његову граничну вредност. $\diamond$

Користећи Теорему о три лимеса за низове једноставно се доказује следеће тврђење које нам каже да је производ ограниченог низа и нула низ опет нула низ.

Тврђење 17. Нека је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан при чему је његов лимес $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ и нека је $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничен низ. Тада је низ $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан и важи

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = 0.$$

Следећи пример се решава применом теореме о три лимеса.

Пример 18. Показати да важи $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Означимо са $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Тада је

$$n = (1 + x_n)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x_n^i \geq \binom{n}{2} x_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} x_n^2,$$

при чему неједнакост важи јер је цела сума већа од члана који одговара индексу $i = 2$. Добили смо процену

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Теорема о три лимеса за низове каже нам да је $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ па је $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. $\sharp$

Сада ћемо видети како се лимес низа у проширеном смислу слаже са операцијама сабирања, множења и дељења.

Тврђење 19. Нека је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ одређено дивергентан, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$, и нека је низ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан при чему је $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y_\infty \in \mathbb{R}$. Тада важи следеће

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = \infty$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$,
- ако је $y_\infty \neq 0$ тада је $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = (\operatorname{sgn} y_\infty)\infty$.

Приметимо да у претходној теореми ознака ∞ подразумева да тврђење важи и у случају да је лимес једнак $+\infty$ и у случају да је лимес $-\infty$.

У претходном тврђењу се не појављују изрази облика $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^∞, 0^0,... који су неодређени. Следећи пример нам показује зашто Тврђење 19 не можемо да применимо на неодређене облике.

Пример 20. Испитати конвергенцију и ако ковенргирају одредити граничне вредности следећих низова: $x_n = \frac{n^2+3}{5n^2+n+10}$, $y_n = \frac{n+5}{n^3+7}$, $z_n = \frac{n^3}{n+3}$.

Ако бисмо прошли лимесом кроз количник ових низова у сва три случаја добијемо облик $\frac{\infty}{\infty}$. Ипак знамо да тврђење не можемо да применимо на низове тог облика па ћемо прво низове записати у другачијем облику.

Поделимо бројилац и именилац од x_n са n^2 и долазимо до следећег облика

$$x_n = \frac{1 + \frac{3}{n^2}}{5 + \frac{1}{n} + \frac{10}{n^2}}.$$

Како $\frac{1}{n} \to 0$ и $\frac{1}{n^2} \to +\infty$ када $n \to +\infty$ закључујемо да именилац од x_n тежи ка 5 па можемо да прођемо лимесом кроз разломачку црту у x_n. Како бројилац од x_n тежи ка 1 закључујемо

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{5}.$$

Да бисмо израчунали лимес од y_n поделимо бројилац и именилац са n^3. Тиме добијамо

$$y_n = \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3}}{1 + \frac{7}{n^3}},$$

при чему именилац тежи ка 1 па можемо да прођемо лимесом кроз количник. Како $\frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3} \to 0$ закључујемо

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = 0.$$

Преостао нам је низ z_n који ћемо трансформисати тако што ћемо бројилац и именилац поделити са n. Добијамо следећи облик

$$z_n = \frac{n^2}{1 + \frac{3}{n}}$$

који је једноставан за рачун јер је именилац $1 + \frac{3}{n}$ и он тежи ка вредности 1 када $n \to +\infty$. Како бројилац тежи ка вредности $+\infty$ закључујемо да је

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = +\infty.$$

♯

Пример 21. У овом примеру ћемо испитати када конвергира низ $x_n = q^n$, $n \in \mathbb{N}$, при чему је q неки реалан фиксиран параметар. Разликоваћемо више случајева у зависности од вредности параметра q.

- Ако је $q = 0$ онда је (x_n) константан низ чији су сви чланови једнаки вредности нула, па је и његова гранична вредност једнака нули.
- Ако је $q = 1$ онда је (x_n) опет константан низ једнак вредности 1 па је и лимес тог низа једнак јединици.
- Ако је $q > 1$ онда ће важити
$$q = 1 + \delta$$
где је $\delta > 0$. Користећи Бернулијеву неједнакост можемо да закључимо да је
$$q^n = (1+\delta)^n \geq 1 + n\delta.$$
Како је $\lim\limits_{n\to+\infty}(1 + n\delta) = +\infty$ онда је и $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Ако је $0 < q < 1$ тада је $\frac{1}{q} > 1$ па је на основу претходне тачке $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{q^n} = +\infty$ а онда на основу тога како лимес пролази кроз ∞ закључујемо да је
$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{q^n}} = „\frac{1}{+\infty}" = 0.$$

- Ако је $-1 < q < 0$ онда је $|q| \in (0,1)$ па из претходне тачке закључујемо да $|q|^n \to 0$ када $n \to +\infty$ а онда из Леме 12 следи да и $q^n \to 0$ када $n \to +\infty$.
- Ако је $q = -1$ онда имамо низ $x_n = (-1)^n$ за који смо у Примеру 6 видели да дивергира.
- Последњи случај који нам је преостао је $q < -1$. Тада је $|q| > 1$ па $|q|^n \to +\infty$ када $n \to +\infty$. То значи да за сваку константу M можемо да нађемо члан низа $|q|^n$ тако да је $|q|^n > M$. Другим речима, низ $|q^n| = |q|^n$ је неограничен па не може ни q^n бити конвергентан низ.

Закључак је

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0, & -1 < q < 1 \\ 1, & q = 1 \\ +\infty, & q > 1 \\ \text{не постоји}, & q \leq -1. \end{cases}$$

♯

Следећа теорема нам помаже да у неким случајевима одредимо чему је једнак лимес ако је он облика „било шта кроз растућу бесконачност”. Пре тога ћемо дефинисати појмове растућих и опадајућих низова.

Дефиниција 22. Кажемо да је низ (x_n) *растући* ако важи $x_n \leq x_{n+1}$ за све $n \in \mathbb{N}$ док је низ (x_n) *опадајући* ако важи $x_n \geq x_{n+1}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Кажемо да је низ *монотон* ако је растући или опадајући. ◊

Пример 23. Низ $x_n = n^2 + 5n$ је растући док је $x_n = \frac{3}{n!}$ пример опадајућег низа. ♯

Теорема 24. (Штолцова теорема) *Нека су дати реални низови (x_n) и (y_n) при чему је (y_n) растући низ реалних бројева такав да важи $y_n \to +\infty$ када $n \to +\infty$. Ако постоји $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \in \overline{\mathbb{R}}$ онда постоји и $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ и важи*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

Доказ. Идеја доказа је да се $x_{n+1} - x_n$ ограничи одоздо и одозго константом помноженом са $y_{n+1} - y_n$, па да се неједнакости сумирају по одређеном скупу индекса.

Прво доказујемо случај када је лимес коначан.

Означимо са $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \in \mathbb{R}$ и нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Постојаће $n_1 \in \mathbb{N}$ такво да је за све $n \geq n_1$

$$\left| \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} - L \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тада је

$$L - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} < L + \frac{\varepsilon}{3}$$

за све $n \geq n_1$ а како је низ (y_n) растући онда је $y_{n+1} - y_n > 0$ па тиме помножимо целу неједнакост

$$\left(L - \frac{\varepsilon}{3}\right)(y_{n+1}-y_n) < x_{n+1} - x_n < \left(L + \frac{\varepsilon}{3}\right)(y_{n+1}-y_n).$$

Напишемо претходну неједнакост помоћу индекса i па онда сумирамо те неједнакости од $i = n_1$ до $i = n-1$

$$\sum_{i=n_1}^{n-1} \left(L - \frac{\varepsilon}{3}\right)(y_{i+1}-y_i) < \sum_{i=n_1}^{n-1} (x_{i+1}-x_i) < \sum_{i=n_1}^{n-1} \left(L + \frac{\varepsilon}{3}\right)(y_{i+1}-y_i).$$

Како је $\sum_{i=n_1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i) = x_n - x_{n_1}$ а иста формула важи када сумирамо по y долазимо до неједнакости

$$\left(L-\frac{\varepsilon}{3}\right)(y_n - y_{n_1}) < x_n - x_{n_1} < \left(L+\frac{\varepsilon}{3}\right)(y_n - y_{n_1})$$

која важи за све $n > n_1$. Сада поделимо све са позитивним бројем $y_n - y_{n_1}$ и добијамо

$$L-\frac{\varepsilon}{3} < \frac{x_n - x_{n_1}}{y_n - y_{n_1}} < L+\frac{\varepsilon}{3},$$

односно

$$\left|\frac{x_n - x_{n_1}}{y_n - y_{n_1}} - L\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Сада процењујемо разлику количника x_n/y_n и вредности L

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x_n}{y_n} - L\right| &= \left|\frac{x_{n_1} - Ly_{n_1}}{y_n} + \left(1-\frac{y_{n_1}}{y_n}\right)\left(\frac{x_n - x_{n_1}}{y_n - y_{n_1}} - L\right)\right| \qquad \text{// неједнакост троугла}\\
&\le \left|\frac{x_{n_1} - Ly_{n_1}}{y_n}\right| + \left|\left(1-\frac{y_{n_1}}{y_n}\right)\left(\frac{x_n - x_{n_1}}{y_n - y_{n_1}} - L\right)\right|\\
&\le \left|\frac{x_{n_1} - Ly_{n_1}}{y_n}\right| + \frac{3}{2}\left|\frac{x_n - x_{n_1}}{y_n - y_{n_1}} - L\right| \qquad \text{//како је } y_n \text{ растући низ и } y_n \to +\infty\\
&\qquad \text{// када } n \to +\infty \text{ онда ће постојати } n_2 \in \mathbb{N}\\
&\qquad \text{// такво да је } \frac{1}{2} \le 1 - \frac{y_{n_1}}{y_n} \le \frac{3}{2} \text{ за све } n \ge n_2\\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad \text{//први сабирак је произвољно мали јер } y_n \to +\infty, \text{ па}\\
&\qquad \text{// } \left|\frac{x_{n_1} - Ly_{n_1}}{y_n}\right| \to 0 \text{ када } n \to +\infty \text{ а ми ћемо одабрати } n_3 \in \mathbb{N}\\
&\qquad \text{//такво да је за све } n \ge n_3 \text{ задовољено } \left|\frac{x_{n_1} - Ly_{n_1}}{y_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

за све $n > \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Закључујемо да је $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = L$.

Сада ћемо продискутовати случај када је $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = +\infty$. Тада је $x_{n+1} - x_n$ веће од $17(y_{n+1} - y_n) > 0$ за довољно велико n па ће и низ (x_n) бити растући и тежити ка $+\infty$ па онда посматрамо реципрочну вредност $\lim_{n\to+\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} = 0$ и применимо оно што смо доказали. Тада ће важити $\lim_{n\to+\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$ а како је ово количник позитивних величина онда је $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

Ако је $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = -\infty$ онда је $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-x_{n+1})-(-x_n)}{y_{n+1}-y_n} = +\infty$ па сад применимо оно од мало пре и закључујемо да ће важити $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-x_n)}{y_n} = +\infty$ односно $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$. □

Последица 25. (Кошијева теорема за низове) *Нека је (a_n) конвергентан низ и нека је његова гранична вредност a_∞. Тада конвергира и низ аритметичких средина*

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

ка истој граничној вредности, $\lim_{n\to+\infty} A_n = a_\infty$.

Доказ. Доказ следи из Штолцове теореме када је применимо на низове $x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ и $y_n = n$. □

Последица 26. *Нека низ* (a_n) *конвергира ка* a_∞. *Тада конвергира и низ хармонијских средина*

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

и важи $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = a_\infty$.

Доказ. Применимо претходну последицу на низ $\frac{1}{H_n}$. □

Последица 27. *Нека је* (a_n) *конвергентан низ такав да је* $a_n > 0$ *за све* $n \in \mathbb{N}$. *Низ геометријских средина*

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

је такође конвергентан низ и важи $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Доказ. Применимо Штолцову теорему на низ $\ln G_n = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n}{n}$. □

2. Монотони низови

Подсетимо се да је низ монотон ако је растући или опадајући.

Теорема 28. *Нека је низ* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *монотон. Тада је он конвергентан ако и само ако је ограничен. Ако је низ неограничен онда је он одређено дивергентан.*

Доказ.

$\Longrightarrow$: Овај смер је тривијалан јер знамо да је сваки конвергентан низ ограничен. Приметимо да нам за овај смер претпоставка о монотоности није била потребна.

$\Longleftarrow$: Нека је сада $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ монотон и ограничен низ. Хоћемо да покажемо да он конвергира. Претпоставићемо да је низ растући (ако је опадајући онда посматрамо низ $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ који ће бити растући па на њега применимо доказано). Скуп

$$X = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

је ограничен и непразан па на основу аксиоме супремума има супремум. Означимо га са

$$x_\infty = \sup X.$$

Показаћемо да је ово x_∞ гранична вредност нашег низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Дефиниција супремума нам каже да ће постојати елемент скупа X који је већи од $x_\infty - \varepsilon$, односно постојаће $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је

$$x_\infty - \varepsilon < x_{n_0}.$$

Како је низ растући онда ће за свако $n \geq n_0$ важити

$$x_{n_0} \leq x_n.$$

Када спојимо претходне две неједнакости закључујемо да за свако $n \geq n_0$ важи

$$x_\infty - \varepsilon < x_n,$$

а како је x_∞ супремум скупа X онда ће важити и

$$x_n \leq x_\infty.$$

Дакле задовољена је неједнакост

$$|x_n - x_\infty| < \varepsilon,$$

за све $n \geq n_0$, па по дефиницији граничне вредности закључујемо

$$x_\infty = \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

Ако је низ (x_n) опадајући онда је $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \inf\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Ако је растући низ неограничен то значи да ће за сваки реалан број $M \in \mathbb{R}$ постојати неки елемент низа x_{n_0} који је већи од тог реалног броја, $x_{n_0} > M$. Низ је растући па је $x_n \geq x_{n_0}$ када је $n \geq n_0$, односно $x_n > M$. Дакле $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Ако је низ (x_n) опадајући и неограничен онда је $(-x_n)$ растући и неограничен низ па је $\lim\limits_{n\to+\infty}(-x_n) = +\infty$, односно $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$. $\square$

Сада ћемо се вратити на број e који смо дефинисали као $e = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$. Означимо са $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ низ реалних бројева. Желимо да покажемо да је овај низ растући и ограничен па на основу претходне теореме (или боље речено њеног доказа) следи да ће његова гранична вредност бити баш e.

У материјалима од прошле недеље смо показали да је низ (a_n) ограничен (показали смо да је 3 једно ограничење низа). Сада ћемо показати да је низ растући.

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} &= \frac{(n+2)^{n+1}n^n}{(n+1)^{2n+1}} = \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1}\frac{n+1}{n} \\
&= \left[\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right]^{n+1}\frac{n+1}{n} \\
&= \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1}\frac{n+1}{n} \qquad \text{//сад користимо Бернулијеву неједнакост} \\
&\geq \left(1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{n+1}{n} = 1
\end{aligned}$$

и ово важи за све $n \in \mathbb{N}$.

Овим долазимо до битног лимеса

$$\boxed{e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.}$$

3. Поднизови, тачке нагомилавања, горњи и доњи лимес

Дефиниција 29. Подниз низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је низ $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ где је $k \mapsto n(k)$ неко строго растуће пресликавање скупа $\mathbb{N}$ у себе. $\diamondsuit$

Ако је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{60}, x_{61}, x_{62}, x_{63}, \ldots\}$ неки низ онда је један његов подниз $\{x_3, x_{17}, x_{18}, x_{19}, \ldots, x_{57}, x_{76}, x_{100}, \ldots\}$. Другим речима подниз се конструише тако што издвојимо неке елементе првобитног низа при чему нам индекси издвојених елемената расту.

Један подниз низа $a_n = (-1)^n$ је подниз са парним индексима

$$\{a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots, a_{80}, a_{82}, \ldots, a_{268}, a_{270}, \ldots\}$$

и то ће бити константан низ чији су сви елементи једнаки 1. Још један подниз може да се издвоји тако што посматрамо само елементе са непарним индексима

$$\{a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots, a_{37}, a_{39}, \ldots, a_{9907}, a_{9909}, \ldots\}.$$

Овај подниз ће такође бити константан и сви елементи ће бити једнаки вредности -1.

Доказ следеће леме следи директно из дефиниције граничне вредности конвергентног низа.

Лема 30. *Нека је* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *конвергентан низ и нека је* x_∞ *његова гранична вредност. Тада је сваки његов подниз* $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *конвергентан низ и конвергира ка* $x_\infty = \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n(k)}$.

На примеру низа $(-1)^n$ видимо да ако низ није конвергентан онда можемо да издвојимо поднизове који конвергирају ка различитим вредностима. Подниз са парним индексима конвергира ка 1 док подниз са непарним индексима конвергира ка -1. На тај начин долазимо до следеће дефиниције.

Дефиниција 31. Кажемо да је $x \in \mathbb{R}$ *тачка нагомилавања* низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ако постоји подниз $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ који конвергира ка x. Највећу тачку нагомилавања реалног низа називамо његовим *горњим лимесом* или *лимесом супериором* и означавамо са $\overline{\lim}\, x_n$ или $\limsup\, x_n$. Најмању тачку нагомилавања реалног низа називамо његовим *доњим лимесом* или *лимесом инфериором* и означавамо са $\underline{\lim}\, x_n$ или $\liminf\, x_n$. ♢

Из Леме 30 следи да конвергентан низ има само једну тачку нагомилавања и да су горњи и доњи лимеси једнаки граничној вредности тог конвергентног низа.

У дефицији смо рекли да тачка нагомилавања припада скупу $\mathbb{R}$, односно да је то нека коначна вредност. Ако желимо да проверимо да ли неки подниз конвергира ка $\pm\infty$ онда ћемо нагласити да се нађу тачке нагомилавања у $\overline{\mathbb{R}}$.

Пример 32. Наћи тачке нагомилавања у скупу $\mathbb{R}$ следећег низа $x_n = n^{(-1)^n}$.

Овде нам фактор $(-1)^n$ даје идеју да гледамо подниз са парним и непарним индексима. Подниз са парним индексима одређено дивергира

$$x_{2n} = (2n)^{(-1)^{2n}} = (2n)^1 = 2n \to +\infty,\ n \to +\infty,$$

док подниз са непарним индексима конвергира

$$x_{2n+1} = (2n+1)^{(-1)^{2n+1}} = (2n+1)^{-1} = \frac{1}{2n+1} \to 0,\ n \to +\infty.$$

Дакле, овај низ има само једну тачку нагомилавања у $\mathbb{R}$, тачку 0. Видимо да овај низ није конвергентан иако има само једну тачку нагомилавања. ♯

Пример 33. Наћи тачке нагомилавања у скупу $\mathbb{R}$ низа $b_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

Косинусна функција је 2π периодична па ћемо имати понављања елемената низа. Можемо да срачунамо неколико првих чланова

$$b_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},\ b_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},\ b_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{3}\right) = -1,$$
$$b_4 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},\ b_5 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},\ b_6 = \cos\left(\frac{6\pi}{3}\right) = 1.$$

Након првих шест чланова сви елементи се понављају јер је

$$b_7 = \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = b_1 = \frac{1}{2},\ b_8 = \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) = b_2 = -\frac{1}{2}, \dots$$

Дакле гледамо поднизове са индексима који при дељењу са 6 дају исте остатке, $(b_{6k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_{6k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_{6k+2})_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_{6k+3})_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_{6k+4})_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_{6k+5})_{k\in\mathbb{N}}$. Сада рачунамо чему су им једнаки чланови

$$b_{6k} = \cos\left(\frac{6k\pi}{3}\right) = \cos(2k\pi) = 1,\ b_{6k+1} = \cos\left(\frac{(6k+1)\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$
$$b_{6k+2} = \cos\left(\frac{(6k+2)\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},\ b_{6k+3} = \cos\left(\frac{(6k+3)\pi}{3}\right) = \cos\pi = -1,$$
$$b_{6k+4} = \cos\left(\frac{(6k+4)\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},\ b_{6k+5} = \cos\left(\frac{(6k+5)\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

и све претходне једнакости важе за све $k \in \mathbb{N}$. То значи да је сваки подниз константан и једнак наведеним бројевима. Закључујемо да је скуп тачака нагомилавања низа (b_n) једнак $\left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$. ♯

Теорема 34. (Болцано-Вајерштрасова теорема) *Сваки ограничен низ реалних бројева има тачку нагомилавања.*

Доказ. Нека је M једно ограничење низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $-M \leq x_n \leq M$ за све $n \in \mathbb{N}$. Посматрамо скуп вредности овог низа $X = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Ако је овај скуп коначан онда ће постојати подниз чији су сви чланови једнаки некој константној вредности, и та вредност ће бити тачка нагомилавања низа.

Ако је скуп вредности X бесконачан онда поделимо интервал $[-M, M]$ на два једнака дела. У једном од тих интервала, $[-M, 0]$ или $[0, M]$, мора постојати бесконачно много елемената скупа X, означимо тај интервал са I_1. Сада интервал I_1 поделимо на два једнака дела, и са I_2 означимо ону половину у којој се налази бесконачно много елемената скупа X. Наставимо овај поступак и на тај начин формирамо низ уметнутих затворених интервала I_n који на основу Канторове аксиоме има непразан пресек, $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} I_n \neq \emptyset$. Нека је $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} I_n$ неки елемент. За свако $\varepsilon > 0$ можемо да нађемо $n \in \mathbb{N}$ такво да је $\frac{2M}{2^n} < \varepsilon$. Ширина интервала I_n је $\frac{2M}{2^n}$ а овај интервал садржи x па ће I_n бити у ε-околини тачке x. Закључујемо да у свакој околини тачке x постоји бесконачно много елемената низа (x_n). То значи да је x тачка нагомилавања низа (x_n). □

4. Кошијев критеријум конвергенције

Дефиниција 35. Кажемо да је низ *Кошијев* ако

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})\, m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{3}$$

◊

Приметимо да низ $a_n = (-1)^n$ није Кошијев. Свака два узастопна члана се по апсолутној вредности разликују за 2 па разлика два члана са произвољно великим индексима не може бити произвољно мала.

Теорема 36. (Кошијев критеријум конвергенције низова) *Низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ако и само ако је Кошијев.*

Доказ.

$\Longrightarrow$: Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Како је низ конвергентан онда ће постојати $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је $|x_n - x_\infty| < \frac{\varepsilon}{2}$ за све $n \geq n_0$. Тада је за све $m, n \geq n_0$ задовољена следећа неједнакост

$$|x_m - x_n| = |x_m - x_\infty + x_\infty - x_n| \leq |x_m - x_\infty| + |x_n - x_\infty| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

односно низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је Кошијев.

$\Longleftarrow$: Нека је сада $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев низ, односно нека важи (3). За $\varepsilon = \frac{1}{2}$ одаберемо $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да важи

$$|x_m - x_n| < \frac{1}{2}$$

за све $m, n \geq n_0$. Ако узмемо $m = n_0$ видимо да за све $n \geq n_0$ важи $-\frac{1}{2} + x_{n_0} < x_n < x_{n_0} + \frac{1}{2}$ па је низ (x_n) ограничен. На основу Болцано-Вајерштрасове теореме ограничен низ (x_n) има тачку нагомилавања. Нека је $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ подниз који конвергира ка вредности x_∞.

Показаћемо да цео низ конвергира ка тој граничној вредности x_∞. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Како је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев постојаће неко $n_1 \in \mathbb{N}$ такво да је

$$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

за све $m, n \geq n_1$. Подзниз $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ конвергира па ће постојати $n_{k_0} \in \mathbb{N}$ такво да је

$$|x_{n_k} - x_\infty| < \frac{\varepsilon}{2}$$

за све $n_k \geq n_{k_0}$. Дефинишемо

$$n_0 = \max\{n_1, n_{k_0}\}$$

и нека је $n \geq n_0$ произвољно. Како је $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ строго растући низ онда ће постојати неки природан број n_k који је већи од n. За тако одабрано n_k важи неједнакост

$$|x_n - x_\infty| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x_\infty| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_\infty - x_{n_k}| < \varepsilon,$$

при чему је $|x_n - x_{n_k}|$ мање од $\frac{\varepsilon}{2}$ због Кошијевости низа јер за индексе важи $n_k > n \geq n_0 \geq n_1$. Док је разлика $|x_\infty - x_{n_k}|$ мања од $\frac{\varepsilon}{2}$ на основу конвергенције подниза. Закључујемо да низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ка x_∞. □

Ова теорема нам даје још један начин да закључимо да низ $(-1)^n$ не конвергира јер смо већ рекли да низ није Кошијев.

Приметимо да у Кошијевом критеријуму конвергенције (3) не фигурише сама гранична вредност, односно ми не знамо чему је једнако x_∞ али знамо да постоји.

Пример 37. Да ли конвергира низ $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$?

Показаћемо да овај низ није Кошијев па самим тим неће бити ни конвергентан. Нека је n произвољан природан број. Тада је

$$x_{2n} - x_n = \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{\text{има укупно } n \text{ чланова}} = \frac{1}{2}.$$

Дакле разлика два члана са прозвољно великим индексима не може бити мања од $\frac{1}{2}$ (па ни произвољно мала) и низ није Кошијев па није ни конвергентан. ♯

ОБЛАСТ 3

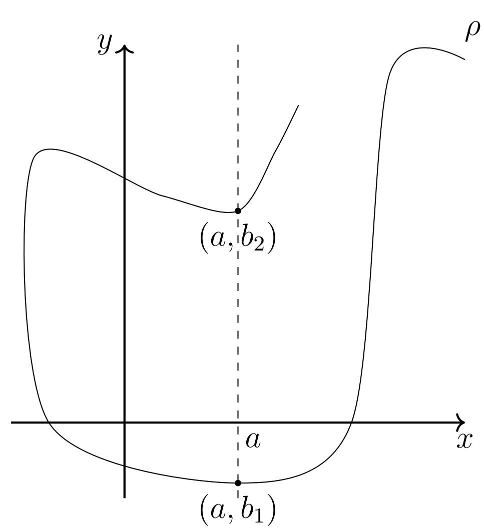
Лимеси и непрекидност функција

У овој глави ћемо дефинисати основне појмове математичке анализе, непрекидност и граничну вредност функције. Како је појам непрекидности лакше разумети посматрајући график функције прво ћемо дефинисати тај појам а затим појам граничне вредности функције. Након тога ћемо показати особине ових појмова.

1. Функције

Дефиниција 1. *Пресликавање* је тројка (f, X, Y) где су X и Y скупови а f релација из X у Y са својством да је свака тачка из скупа X у релацији f са тачно једном тачком из скупа Y. Скуп X се назива *доменом пресликавања* f док се Y назива *кодоменом пресликавања.* Домен ћемо означавати и са $\mathcal{D}(f)$. Релација f која је подскуп производа $X \times Y$ може да се види и као график пресликавања, $\mathrm{Graph}(f) := \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in X\}$. Често се за пресликавање користи ознака $f : X \to Y$. $\Diamond$

Као што је речено у дефиницији, свако пресликавање је релација, али не задаје свака релација неко пресликавање. То можемо видети на примеру релације ρ која је задата на Слици 1. Тачка $x = a$ је у релацији са две различите тачке, b_1 и b_2.



Слика 1. Крива која не може бити график функције

Следећом дефиницијом издвајамо пресликавања која задовољавају додатна својства.

Дефиниција 2. Кажемо да је пресликавање $f : X \to Y$ *инјекција* или „$1-1$" ако за свако $x_1, x_2 \in X$ важи импликација

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Кажемо да је пресликавање $f : X \to Y$ *сурјекција* или „НА" ако важи

$$(\forall\, y \in Y)(\exists\, x \in X)\ f(x) = y.$$

Инјективно и сурјективно пресликавање називамо *бијекцијом.* Ако је f бијективно пресликавање тада можемо да дефинишемо *инверзно* пресликавање, у ознаци

$$f^{-1} : Y \to X,$$

које је за свако $y \in Y$ дефинисано са $f^{-1}(y) := x$ где је $x \in X$ једниствен елемент за који важи $f(x) = y$. $\diamondsuit$

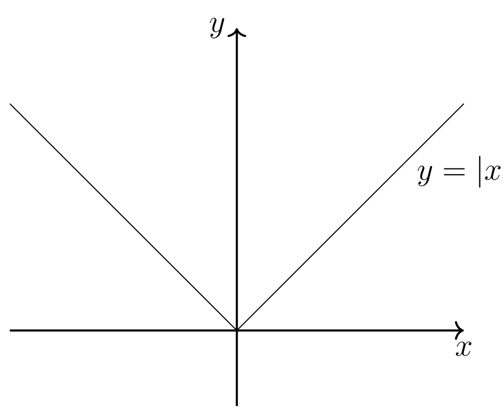
Приметимо да постојање елемента x (у дефиницији инверза) следи из чињенице да је f сурјекција а његова јединственост из чињенице да је f „$1-1$".

Функцијама ћемо називати пресликавања чији су домен и кодомен подскупови скупа реалних бројева.

Пример 3. Функција *апсолутна вредност* $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана је са (видети график на Слици 2)

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$\sharp$



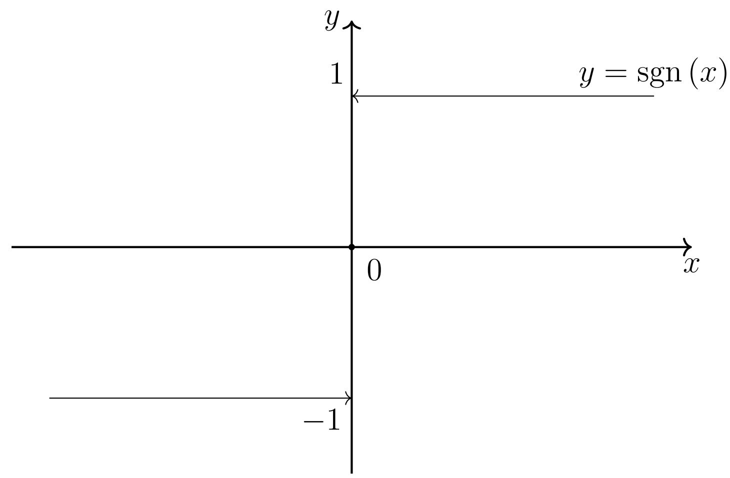
Слика 2. График функције апсолутна вредност

Пример 4. Функција *знак броја*, коју означавамо са sgn, дефинишемо на следећи начин (видети график на Слици 3)

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

$\sharp$

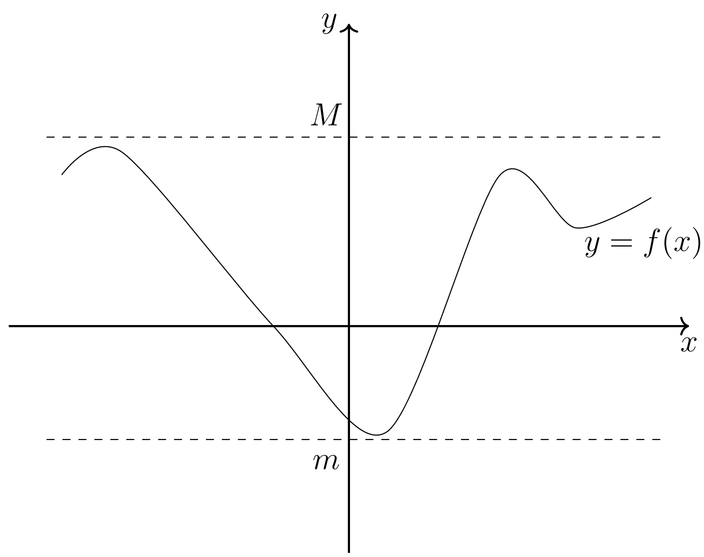
У поглављу о низовима смо дефинисали појам ограниченог низа. Видели смо да је то низ чији су елементи распоређени на ограниченом делу бројевне праве. Слично, можемо да дефинишемо појам ограничене функције чији ће график бити у некој ограниченој траци паралелној x-оси.



Слика 3. График функције знак броја

Дефиниција 5. Нека је $X = \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}$. Кажемо да је функција $f : X \to \mathbb{R}$ *ограничена одозго* на скупу $A \subset X$ ако постоји $M \in \mathbb{R}$ такво да важи $f(x) \leq M$ за све $x \in A$. Функција f је *ограничена одоздо* на скупу A ако постоји $m \in \mathbb{R}$ такво да је $f(x) \geq m$ за све $x \in A$. Кажемо да је функција f *ограничена* на скупу A ако је она ограничена одозго и одоздо на скупу A. Кажемо да је функција ограничена ако је ограничена на свом домену. $\diamondsuit$

Пример 6. График ограничене функције налази се између две хоризонталне линије, $y = m$ и $y = M$ (то су испрекидане линије на Слици 4). Функција $f(x) = |x|$ је ограничена одоздо (једно доње ограничење је 0) док је функција $f(x) = -x^2 + 10$ ограничена одозго (једно горње ограничење је 13). $\sharp$



Слика 4. Пример ограничене функције

Дефиниција 7. *Супремум* функције $f : X \to \mathbb{R}$ на скупу $A \subset X$ је величина

$$\sup_{x \in A} f(x) := \sup\{f(x) \,|\, x \in A\}.$$

Користићемо и ознаку $\sup\limits_{A} f$. *Инфимум* функције на скупу A је величина

$$\inf_{x \in A} f(x) := \inf\{f(x) \,|\, x \in A\}.$$

Инфимум функције на скупу ћемо означавати и са $\inf\limits_{A} f$. Ако за неко $x_0 \in A$ важи $f(x_0) = \sup\limits_{A} f$ (односно $f(x_0) = \inf\limits_{A} f$) онда се $f(x_0)$ назива *максимумом* (односно *минимумом*) функције f на скупу A и означава се са $\max\limits_{A} f$ (односно $\min\limits_{A} f$). Тада кажемо да функција f достиже свој максимум (односно минимум) на скупу A. $\diamondsuit$

Пример 8. Ако је $f(x) = x^3$ и $A = (0, 5)$ тада је $\sup\limits_{A} f = 125$ и он се не достиже на скупу A па функција f нема максимум на скупу A. Слично, $\inf\limits_{A} f = 0$ и инфимум се не достиже па функција f нема минимум на скупу A. Ако је $g(x) = \frac{1}{x}$ и $B = (0, 1]$ тада је $\sup\limits_{B} g = +\infty$ а $\inf\limits_{B} g = 1 = g(1)$ па функција g на скупу B не достиже максимум а достиже минимум у тачки $x = 1$. $\sharp$

Дефиниција 9. Нека је $X = \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}$. Кажемо да је функција $f : X \to \mathbb{R}$

- *растућа* ако је $f(x_1) \le f(x_2)$ за све елементе $x_1, x_2 \in X$ за које важи $x_1 \le x_2$,
- *опадајућа* ако је $f(x_1) \ge f(x_2)$ за све елементе $x_1, x_2 \in X$ за које важи $x_1 \le x_2$,
- *строго растућа* ако је $f(x_1) < f(x_2)$ за све елементе $x_1, x_2 \in X$ за које важи $x_1 < x_2$,
- *строго опадајућа* ако је $f(x_1) > f(x_2)$ за све елементе $x_1, x_2 \in X$ за које важи $x_1 < x_2$.

Кажемо да је фунција f *монотона* ако је она растућа или опадајућа, док је *строго монотона* ако је строго растућа или строго опадајућа. $\diamondsuit$

Пример 10. Функција $\operatorname{sgn} x$ је растућа али није строго растућа (важи $f(-3) = f(-5)$ а $-5 < -3$). Функција $f(x) = -x$ је строго опадајућа. $\sharp$

1.1. Елементарне функције. Функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ облика

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

при чему $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ називају се *полиномским функцијама* или *полиномима.* Реални бројеви $a_0, a_1, ..., a_n$ називају се коефицијентима полинома. Специјалан случај полинома су константне функције, $f(x) = a_0$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Свако полином има највише n реалних нула (реална нула је реалан број x_0 за који важи $f(x_0) = 0$).

Количник два полинома дефинише *рационалну функцију*

$$R(x) = \frac{b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n}{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n}.$$

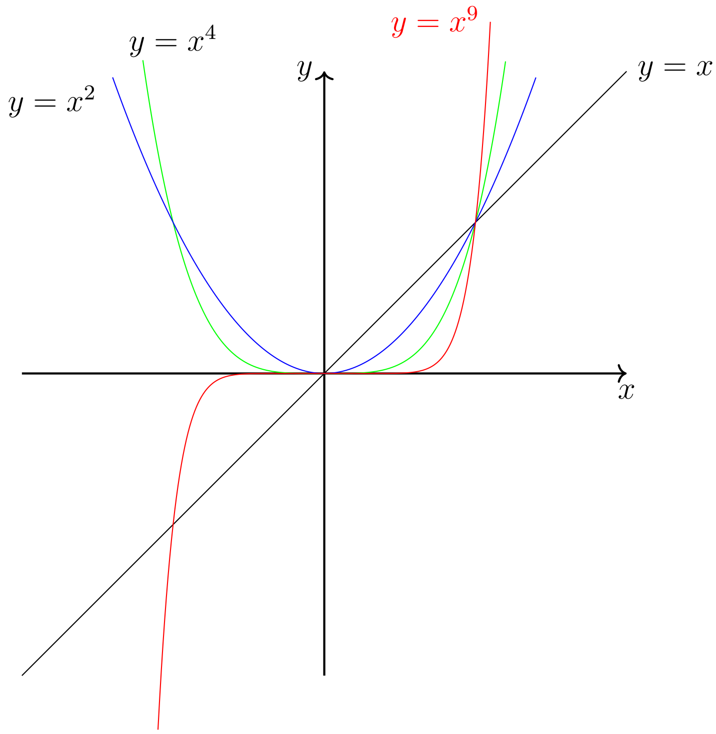
Домен рационалне функције је скуп $\{x \in \mathbb{R} \mid a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \neq 0\}$. Дакле, из скупа реалних бројева искључујемо највише n елемената при одређивању домена рационалне функције.

Задатак 11. Одредити реалне нуле полинома $f(x) = x^3 + 1$ а затим одредитит домен функције $g(x) = \frac{x^5+18x-17}{x^3+1}$. ✓

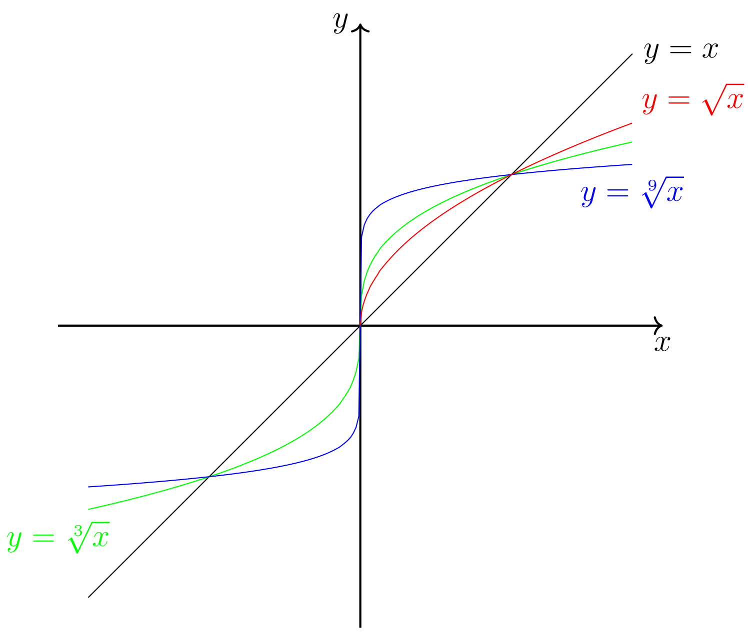
Специјалан случај полиномских функција су *степене функције*, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ где је n фиксиран природан број. На Слици 5 приказани су графици неких степених функција. Ако је n непаран број тада је функција f „$1-1$” и „НА” па постоји њен инверз. Инверзна функција $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ назива се *кореном функцијом.* Када смо заснивали поље реалних бројева видели смо како се дефинише $\sqrt[n]{a}$ када је $a > 0$. Вредност корене функције у негативним тачкама $x < 0$ дефинише се са $\sqrt[n]{x} := -\sqrt[n]{-x}$ и $\sqrt[n]{0} := 0$. Када је степен n паран број степена функција f није „$1-1$” ($f(-1) = f(1) = 1$) и није „НА” (вредност $y = -1$ се не достиже ни у једној тачки). Ако сузимо домен и кодомен, па посматрамо пресликавање

$$g : [0, +\infty) \to [0, +\infty),\ g(x) = x^n,$$

добијамо бијективно пресликавање чији се инверз такође назива кореном функцијом. На Слици 6 приказани су графици неких корених функција.



Слика 5. Примери степених функција



Слика 6. Примери корених функција

Функција $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ дефинисана једнакошћу

$$f(x) = a^x,$$

где је $a > 0$ назива се *експоненцијалном функцијом*. Видели смо како се дефинише вредност a^x за свако $x \in \mathbb{R}$. Овако дефинисана функција је инјективна и њен инверз називамо *логаритамском функцијом* и означавамо са

$$f^{-1}(x) = \log_a x.$$

Када је основа a једнака броју e онда ћемо користити ознаку $\ln x$ или $\log x$ уместо $\log_e x$.

Синусна и косинусна фунција

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1], \quad \cos : \mathbb{R} \to [-1,1],$$

припадају класи *тригонометријских функција.* Познато је да су ове функције $2\pi-$периодичне и да нису „1-1”. Сужавањем домена можемо да добијемо функције које су инјективне и њихови инверзи су *инверзне тригонометријске функције.* По договору, синусну функцију сужавамо на интервал $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и њена инверзна функција се означава са

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Када косинусну функцију сузимо на интервал $[0,\pi]$ добијемо функцију која је „$1-1$” и „НА”, чији инверз означавамо са

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi].$$

Дефиниција 12. Класа *елементарних функција* је најмања класа реалних функција реалне промењиве која садржи полиномске, корене, експоненцијалне, логаритамске, тригонометријске и инверзне тригонометријске функције и затворена је за сабирање, множење, дељење и композицију функција. $\Diamond$

Сада ћемо показати важну неједнакост између тригонометријских функција.

Тврђење 13. Важи

$$\sin\varphi \le \varphi \le \operatorname{tg}\varphi \tag{1}$$

за све $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$.

Доказ. Даћемо један геометријски доказ који је потпуно јасан са Слике 7. Посматрамо јединичну кружницу у равни са центром у координатном почетку и полуправу p која гради угао φ са $x-$осом. Полуправа сече кружницу у тачки B док ћемо пресек кружнице и позитивног дела x-осе означити тачком A. Тачка D се налази на $x-$оси тако да је троугао $\triangle ODB$ правоугли (прав угао је код темена D). Тачка C се налази на полуправој p тако да је $\triangle OAC$ правоугли троугао са правим углом код темена A.

Неједнакост (1) тривијално важи ако је $\varphi = 0$. Нека је $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Тада је

$$P_{\triangle OAB} \le P_{\angle OAB} \le P_{\triangle OAC}, \tag{2}$$

где је $P_{\triangle OAB} = \frac{\sin\varphi}{2}$ површина троугла $\triangle OAB$, $P_{\angle OAB} = \frac{\varphi}{2}$ је површина кружног исечка који одговара углу φ и $P_{\triangle OAC} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}$ је површина троугла $\triangle OAC$. Множењем неједнакости (2) бројем 2 добијамо неједнакости (1) . $\square$

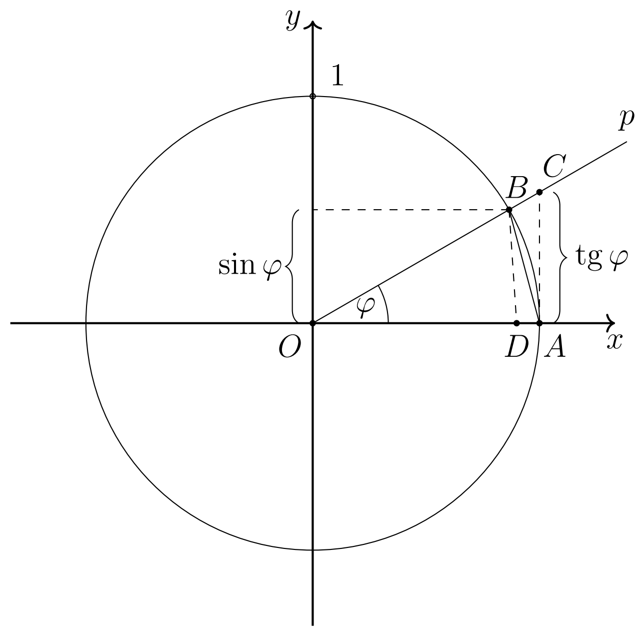
Доказ претходног тврђења нам даје следећу последицу.

Последица 14. *За свако $x \in \mathbb{R}$ важи $|\sin x| \le |x|$.*

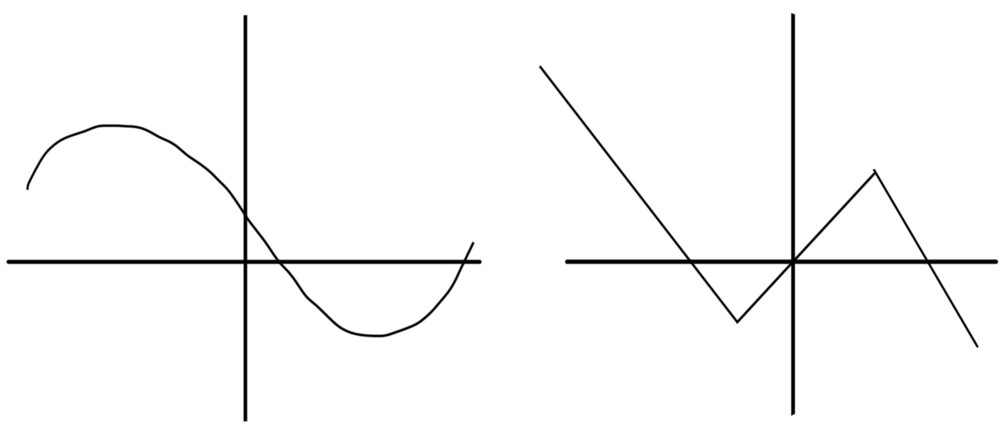
2. Основно о појму непрекидности

Појам непрекидности је најлакше исказати помоћу графика функције. Ако нам је дата *непрекидна функција* која је дефинисана на интервалу онда при цртању графика те функције не подижемо оловку са папира. График ће бити линија, крива или изломљена, која нема никаквих прекида. Ово је само интуитивна представа а мало прецизнији опис каже да је *функција непрекидна у тачки a* ако је вредност $f(x)$ произвољно близу вредности $f(a)$ кад год је аргумент x близу тачке a, било са леве било са његове десне стране. На Слици 8 видимо графике непрекидних функција. На Слици 9 видимо пример функције која није непрекидна, приметимо да се при цртању графика ове функције оловка подиже са папира у тачки $a = 5$.

Сада ћемо дати формалну дефиницију појма непрекидности у тачки.



Слика 7. Тригонометријски круг



Слика 8. Графици непрекидних функција

Дефиниција 15. Посматрамо функцију $f : A \to \mathbb{R}$ где је $A \subset \mathbb{R}$ домен функције f и нека је $a \in A$ тачка домена. Кажемо да је функција f *непрекидна у тачки* a ако и само ако важи

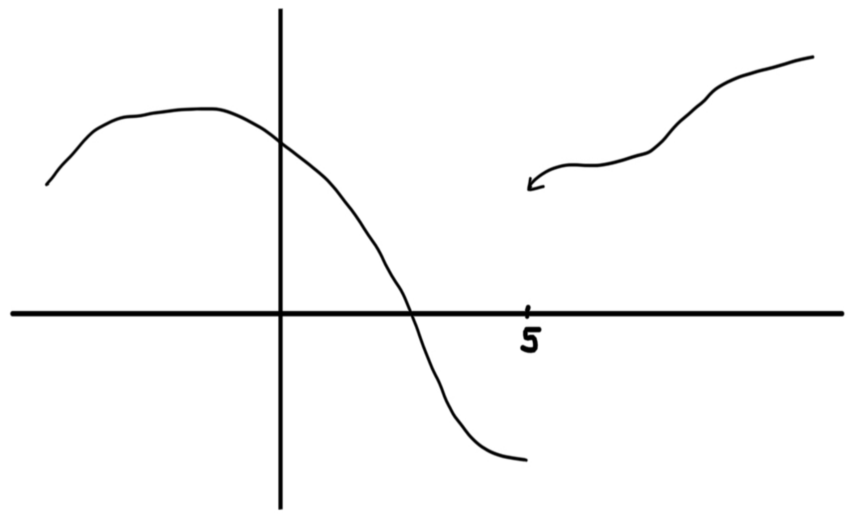
$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in A)\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Функција f *има прекид у тачки* a ако није непрекидна у тачки a. Кажемо да је функција *непрекидна* ако је непрекидна у свакој тачки свог домена. ◊

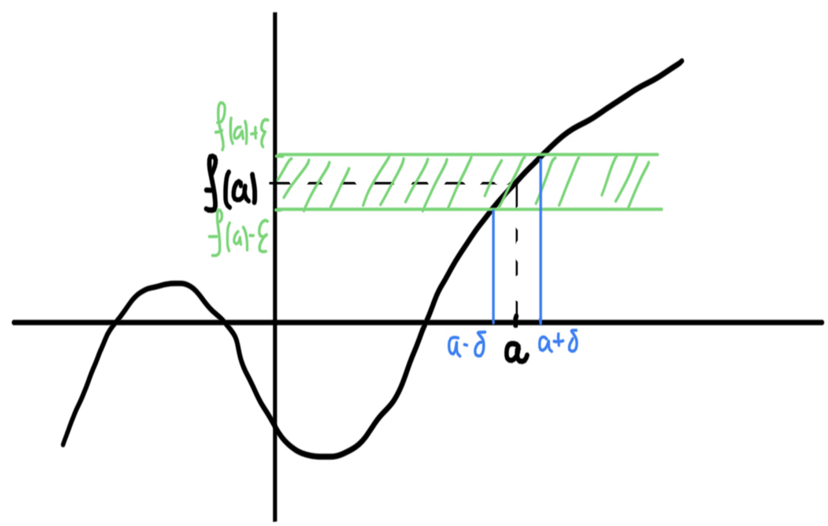
Приметимо да смо појам непрекидности дефинисали само у тачкама домена и само у тим тачкама има смисла испитивати да ли је нека функција непрекидна или прекидна.

Шта нам каже импликација (3) у Дефиницији 15? За било које $\varepsilon > 0$ можемо да нађемо δ (које може бити јако мало) тако да део графика функције који одговара тачкама из интервала $(a - \delta, a + \delta)$ упадне у $\varepsilon-$траку око вредности $f(a)$ (зелена трака на Слици 10).

Сада ћемо видети пример функције која има прекид у тачки а на овај пример ћемо се вратити и након дефиниције појма граничне вредности функције.



Слика 9. График функције која није непрекидна

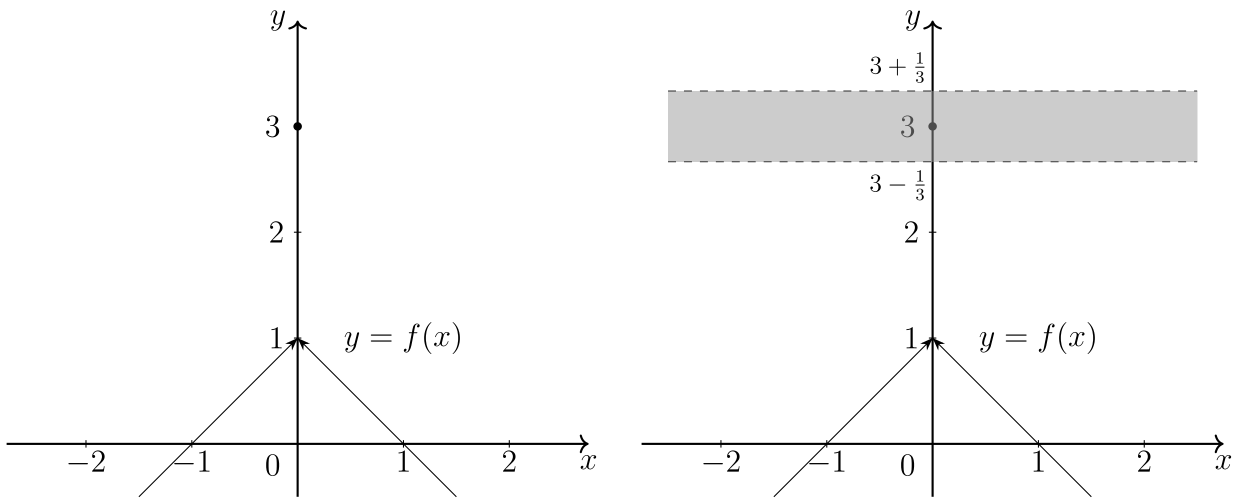


Слика 10. Графички приказ непрекидности функције у тачки

Пример 16. Дата је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на следећи начин

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 1-x, & x > 0 \\ 3, & x = 0, \end{cases}$$

чији је график приказан на Слици 11 (слика лево). Ова функција има прекид у тачки $x = 0$ и то закључујемо на следећи начин. Узмимо да је $\varepsilon = \frac{1}{3}$ и проверимо да ли исказ (3) важи за ту вредност параметра ε. На Слици 11 (десна слика) видимо да осенчена трака око вредности $f(0) = 3$, сем тачке $(0, 3)$, не садржи ни један други део графика функције. Дакле не можемо да нађемо такво $\delta > 0$ при чему би важило (3) па закључујемо да функција има прекид у тачки $x = 0$. $\sharp$



Слика 11. Пример функције која има прекид у тачки $x = 0$

3. Гранична вредност

3.1. Дефиниција. У делу о низовима споменули смо ε-околине тачке. Сада ћемо те појмове да проширимо.

Дефиниција 17. Интервали облика $(a-\delta, a+\delta)$ (где је δ неки позитиван реалан број) називају се *околинама* или δ-околинама тачке $a \in \mathbb{R}$. Околине ћемо означавати са U_a или са $U_a(\delta)$ када желимо да истакнемо која је ширина интервала. Скупови облика $U_a \setminus \{a\}$ називају се *пробушеним околинама* тачке a. Пробушене околине означавамо са $\dot{U}_a$. Околина тачке $+\infty$ је интервал облика $(M, +\infty)$ за неко $M \in \mathbb{R}$. Пробушена околина тачке $+\infty$ је истог облика. Околина тачке $-\infty$ је интервал облика $(-\infty, C)$ за неко $C \in \mathbb{R}$. Пробушена околина тачке $-\infty$ је истог облика као и обична околина. $\Diamond$

Приметимо да је пресек две (пробушене) околине тачке $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (пробушена) околина тачке a.

Дефиниција 18. Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$. Кажемо да је $x \in \overline{\mathbb{R}}$ *тачка нагомилавања скупа* A ако за сваку пробушену околину тачке x важи

$$\dot{U}_x \cap A \neq \emptyset.$$

Скуп тачака нагомилавања скупа A означавамо са A'. $\Diamond$

Другим речима x је коначна тачка нагомилавања скупа A ако важи

$$(\forall\, \delta > 0)\ \ ((x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Приметимо да само x не мора да буде елемент скупа A а дефиниција допушта да x узима вредности $+\infty$ и $-\infty$. Оно што је основна особина тачке нагомилавања јесте да се у свакој њеној околини налази бесконачно много елемената скупа A (иако, као што смо већ нагласили, она сама не мора да припада скупу A).

Задатак 19. Одредити тачке нагомилавања следећих скупова: $A_1 = (0,1)$, $A_2 = (0,1]$, $A_3 = [0,1]$, $A_4 = (0,+\infty)$, $A_5 = \{1\}$, $A_6 = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, $A_7 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. ✓

Дефиниција 20. Нека је дата функција $f : A \to \mathbb{R}$ где је $A \subseteq \mathbb{R}$ и нека је $a \in \mathbb{R}$ тачка нагомилавања скупа A. Кажемо да је $L \in \mathbb{R}$ *гранична вредност* (или *лимес*) *функције* f *у тачки* a ако важи

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in A)\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{4}$$

Тада пишемо

$$L = \lim_{x \to a} f(x).$$

◊

Као што смо рекли тачка a, у којој тражимо лимес, не мора припадати домену функције али мора бити тачка нагомилавања домена, односно у свакој њеној околини имамо бесконачно много тачака домена. На тај начин имамо довољно тачака у којима можемо да утврдимо понашање функције колико год се приближили тачки a. Ово је битна разлика у односу на појам непрекидности. Подсетимо се да је тачка у којој испитујемо непрекидност функције била у самом домену функције док код појма лимеса не мора припадати. У случају да a припада домену функције њен лимес у тој тачки зависи само од понашања функције у пробушеној околини тачке a и не зависи од вредности функције у самој тачки a. То ћемо видети на конкретној функцији из Примера 16 за коју смо утврдили да има прекид у тачки $x = 0$ а сада ћемо видети да она има лимес и да се тај лимес разликује од $f(0)$.

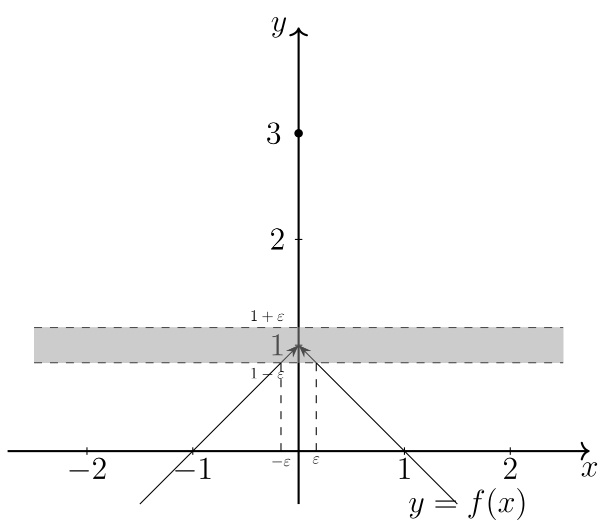
Пример 21. Дата је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на следећи начин

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x<0 \\ 1-x, & x>0 \\ 3, & x=0. \end{cases}$$

Показаћемо да је $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, односно да важи исказ (4) за вредност $L = 1$. За произвољно $\varepsilon > 0$ исказ (4) задовољен је за $\delta = \varepsilon$ јер у пробушеној околини $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ важи

$$|f(x) - L| = \begin{cases} |(x+1)-1|, & -\delta < x < 0 \\ |(1-x)-1|, & 0 < x < \delta \end{cases} = |x| < \delta = \varepsilon.$$

♯



Слика 12. ε-трака око вредности $L = 1$ садржи део графика

Задатак 22. Испитати да ли функција $f(x) = x$ има лимес у тачки $a = 5$. ✓

Задатак 23. Показати да функција $f(x) = \operatorname{sgn} x$ нема лимес у тачки $a = 0$. ✓

Задатак 24. Нека је дата функција $f : A \to \mathbb{R}$ и тачка домена $a \in A$ која је уједно и тачка нагомилавања скупа A. Показати да је функција f непрекидна у тачки a ако и само ако функција f има лимес у тачки a и важи $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. ✓

У претходној дефиницији смо допустили да гранична вредност функције узима вредности у скупу $\mathbb{R}$, односно то је био неки коначан реалан број. Дефиницију можемо да проширимо допуштајући да гранична вредност буде бесконачна.

Дефиниција 25. (**Бесконачни лимеси**) Кажемо да функција $f : A \to \mathbb{R}$ има лимес једнак вредности $+\infty$ у тачки $a \in \mathbb{R}$ која је тачка нагомилавања скупа A и пишемо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ако и само ако важи

$$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in A)\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Слично, кажемо да је гранична вредност функције f у тачки a једнака вредности $-\infty$ ако и само ако важи

$$(\forall\, C \in \mathbb{R})(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in A)\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < C.$$

Тада пишемо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$. ♢

Пример 26. Посматрајмо функцију $f(x) = -\frac{1}{|x|}$. Приметимо да је домен ове функције скуп $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и да је 0 његова тачка нагомилавања али не припада самом домену. Има смисла испитивати постојање лимеса функције у тој тачки. Остављамо за вежбу да се покаже да важи $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$. ♯

Дефиниција 27. (**Лимес у бесконачности**) Нека је дата функција $f : A \to \mathbb{R}$ при чему је $+\infty$ тачка нагомилавања скупа A. Кажемо да је $L \in \mathbb{R}$ лимес функције f у бесконачности и пишемо $L = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ако и само ако важи

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, M \in \mathbb{R})(\forall\, x \in A)\ x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Слично, ако је $-\infty$ тачка нагомилавања скупа A онда кажемо да функција f има граничну вредност l у $-\infty$ и пишемо $l = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ако и само ако важи

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, C \in \mathbb{R})(\forall\, x \in A)\ x < C \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

♢

Пример 28. Приметимо да за функцију $f(x) = \arctan x$ важи $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$. ♯

Напомена 29. Можемо да покажемо да је $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ при чему овде посматрамо лимес у бесконачности функције $f(x) = \frac{1}{x}$. Користећи овај лимес могли смо једноставније да закључимо да је $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ јер ће за свако $\varepsilon > 0$ почев од неке вредности C за све $x \geq C$ важити $|f(x)| < \varepsilon$. То значи да ће и за све природне бројеве n који су већи од C важити $\frac{1}{n} < \varepsilon$ а то је по дефиницији еквивалентно томе да је $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

На основу овога долазимо до следећег својства. Ако је функција f дефинисана у некој околини бесконачности и ако постоји лимес фунцкије $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ тада ће постојати и лимес низа $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$ и важиће $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = L$. ⋄

Претходну дефиницију можемо да проширимо допуштајући да сама гранична вредност буде бесконачна а не само неки коначан реалан број. Дефинисаћемо само један појам а остале остављамо читаоцу да сами дођу до дефиниције.

Дефиниција 30. (**Бесконачан лимес у бесконачности**) Дата је функција $f : A \to \mathbb{R}$ при чему је $-\infty$ тачка нагомилавања скупа A. Кажемо да функција има граничну вредност $+\infty$ у $-\infty$ и пишемо $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ако и само ако важи

$$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, C \in \mathbb{R})(\forall\, x \in A)\ x < C \Rightarrow f(x) > M.$$

♢

Узимајући у обзир дефиниције обичних и пробушених околина тачака скупа $\overline{\mathbb{R}}$ претходне четири дефиниције можемо да спојимо у једну.

Дефиниција 31. Дата је функција $f : A \to \mathbb{R}$ таква да је $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања домена A. Кажемо да је $L \in \overline{\mathbb{R}}$ гранична вредност функције f у тачки a и пишемо $L = \lim_{x\to a} f(x)$ ако и само ако за сваку околину U_L тачке L постоји пробушена околина $\dot{U}_a$ тачке a таква да за свако $x \in \dot{U}_a$ важи импликација

$$x \in \dot{U}_a \Rightarrow f(x) \in U_L. \tag{5}$$

$\Diamond$

Вратимо се на Задатак 23. Задатак нам каже да функција sgn нема лимес у тачки $a = 0$. Оно што можемо да закључимо посматрајући график ове функције јесте да је са леве стране тачке нула функција константна и једнака вредности -1 док је са десне стране тачке нула константно једнака 1. Различито понашање функције са леве и десне стране неке тачке мотивишу нас да дефинишимо појмове *једностраних лимеса*.

Дефиниција 32. Кажемо да је $D \in \mathbb{R}$ *десни лимес* функције f у тачки a ако важи

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in A)\ a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - D| < \varepsilon.$$

Тада пишемо $D = \lim_{x\to a+} f(x)$.

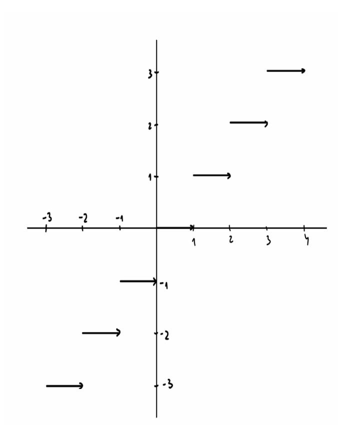
$L \in \mathbb{R}$ је *леви лимес* функције f у тачки a, и пишемо $L = \lim_{x\to a-} f(x)$, ако важи

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in A)\ a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

$\Diamond$

Пример 33. Једноставно закључујемо да важи $\lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$ и $\lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$. $\sharp$

Пример 34. Функција *цео део*, коју означавамо са $[x]$, за реално x једнака је најближем целом броју који се налази са леве стране броја x. График функције дат је на Слици 13. Ова функција има различит леви и десни лимес у свакој целобројној тачки. Нпр. $\lim_{x\to 2+}[x] = 2$ док је $\lim_{x\to 2-}[x] = 1$. У осталим тачкама реалне праве (које нису цели бројеви) функција има једнак леви и десни лимес, и то једнак вредности $[x]$. Приметимо да у тим тачкама постоји и обичан лимес функције. То следи и из следећег општијег тврђења. $\sharp$



Слика 13. График функције цео део

Тврђење 35. Нека је дата функција $f : A \to \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ која је тачка нагомилавања скупа A. Тада функција f има лимес у тачки a ако и само ако постоје леви и десни лимес у тој тачки и ако су они једнаки. У том случају су једнострани лимеси једнаки обичном лимесу у тачки a.

Можемо да проширимо дефиницију једностраних лимеса допуштајући да они имају бесконачне вредности.

Дефиниција 36. Кажемо да важи $\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty$ ако и само ако је задовољено

$$(\forall\, C \in \mathbb{R})(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in A)\ a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) < C.$$

Слично

$$\lim_{x\to a+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in A)\ a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

$\Diamond$

Преостале дефиниције остављамо читаоцу да сам запише.

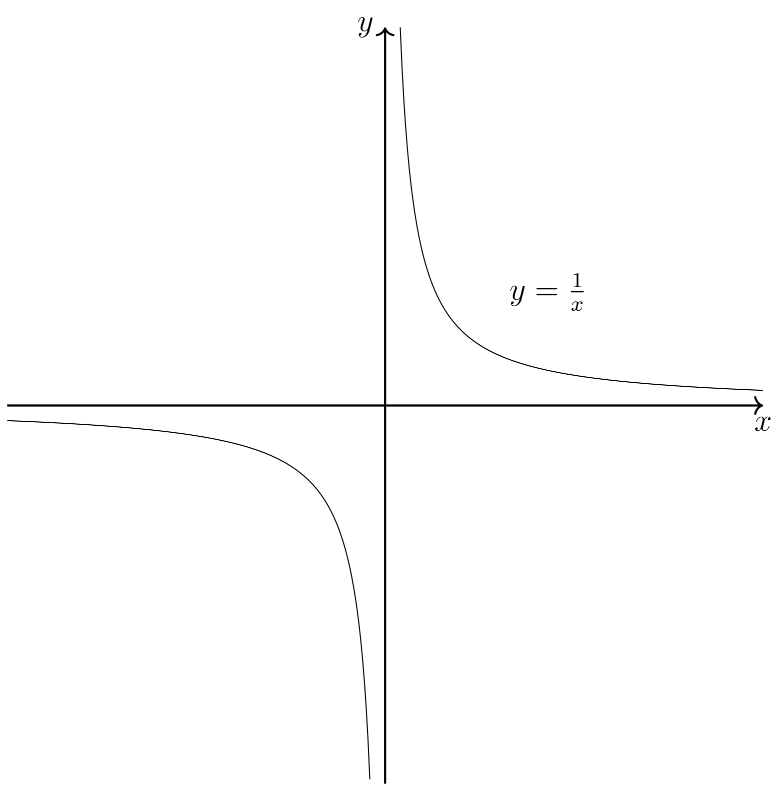
Пример 37. Посматрамо функцију $f(x) = \frac{1}{x}$ чији је график дат на Слици 14. Једноставно закључујемо да важи

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$$

док је

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Из тога што су леви и десни лимеси различити можемо да закључимо да функција f нема граничну вредност у тачки 0.



Слика 14. График функције $\frac{1}{x}$

$\sharp$

3.2. Својства граничне вредности. Сада ћемо показати својства функција које имају граничну вредност у тачки нагомилавања домена. Када кажемо да функција има лимес (или граничну вредност) у некој тачки подразумеваћемо да је та тачка тачка нагомилавања домена функције. Особине које важе у некој околини тачке нагомилавања (а не обавезно на целом домену) називају се *локалним својствима* функција.

Тврђење 38. Гранична вредност функције је, ако постоји, јединствена.

Напомена 39. У тврђењу допуштамо да сама гранична вредност буде бесконачна а и да тачка у којој постоји лимес буде једнака $+\infty$ или $-\infty$. ◇

Доказ. Тврђење ћемо показати у случају када функција $f : A \to \mathbb{R}$ има коначну граничну вредност у коначној тачки $a \in \mathbb{R}$ која је тачка нагомилавања скупа A. Остале случајеве (када је тачка нагомилавања бесконачна или када је лимес бесконачан остављамо читаоцу да сам покаже). Претпоставимо да неке две различите реалне вредности L_1 и L_2 задовољавају услове Дефиниције 20. На овај начин ми претпостављамо супротно од онога што каже тврђење, односно претпостављамо да гранична вредност није јединствена. Хоћемо да дођемо до контрадикције чиме показујемо да наша претпоставка није добра, односно да је исказ тврђења тачан.

Означимо растојање бројева L_1 и L_2 бројем ε, $\varepsilon = \frac{|L_1-L_2|}{3}$. Како су L_1 и L_2 различити бројеви онда је $\varepsilon > 0$.

Из чињенице да је L_1 гранична вредност функције следи да за горе одабрано ε постоји $\delta_1 > 0$ тако да за све $x \in A \cap (a - \delta_1, a + \delta_1) \setminus \{a\}$ важи

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon. \tag{6}$$

Са друге стране и L_2 задовољава импликацију (4) па ће за неко $\delta_2 > 0$ важити да је

$$|f(x) - L_2| < \varepsilon \tag{7}$$

кад год је $x \in A$ и $0 < |x - a| < \delta_2$.

Нека је $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Сада ће

$$\dot{U}_a(\delta) := (a - \delta, a + \delta)$$

бити мања од две претходно пронађење пробушене околине тачке a. За све тачке домена x које које се налазе у $\dot{U}_a(\delta)$ важи и (6) и (7) и тиме долазимо до контрадикције јер је тада $f(x) \in (L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon)$ и $f(x) \in (L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon)$. Контрадикција следи из тога што је пресек интервала $(L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon)$ и $(L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon)$ празан за одабрану вредност параметра ε. □

Тврђење 40. Функција која има коначну граничну вредност у тачки је ограничена у некој пробушеној околини те тачке.

Доказ. Посматрамо функцију $f : A \to \mathbb{R}$ која има коначан лимес L у тачки нагомилавања $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Пошто желимо да доказ покрије случај када је тачка нагомилавања коначна а и случај када је тачка нагомилавања бесконачна користићемо Дефиницију 31. Узмемо околину $U_L = (L-\frac{1}{17}, L+\frac{1}{17})$ тачке L [1]и из дефиниције закључујемо да ће постојати пробушена околина тачке a, у ознаци $\dot{U}_a$, таква да важи

$$f(x) \in U_L$$

кад год је $x \in \dot{U}_a \cap A$. Једноставно закључујемо да је $L - \frac{1}{17}$ доње ограничење функције f на скупу $\dot{U}_a \cap A$ док је $L + \frac{1}{17}$ једно њено горње ограничење на истом скупу. □

Поред тога што можемо да закључимо да је функција са коначном граничном вредношћу локално ограничена можемо још боље да је проценимо локално ако знамо да је коначан лимес различит од нуле.

[1]Приметимо да је околина коначне тачке заиста овог облика, овде је битан корак да лимес буде коначан.

Тврђење 41. Нека функција $f : A \to \mathbb{R}$ има коначну граничну вредност L различиту од нуле у тачки $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Тада постоји пробушена околина тачке a таква да је функција различита од нуле у свакој тачки те пробушене околине и додатно, знак функције у тим тачкама је исти као и знак граничне вредности L.

Напомена 42. Посматрајући функције $(x-1)^2$ и $(x-1)^3$ у околини тачке $a = 1$ можемо да закључимо да теорема не може да се примени када је гранична вредност L једнака нули. $\diamond$

Доказ. Применићемо Дефиницију 31 на околину $U_L = (L - \frac{|L|}{3}, L + \frac{|L|}{3})$ која ја интервал око L ширине $\frac{2|L|}{3}$. Приметимо да је $L \neq 0$ па је $\frac{|L|}{3} > 0$. Дефиниција каже да ће постојати пробушена околина $\dot{U}_a$ таква да важи $f(x) \in U_L$ када $x \in A \cap \dot{U}_a$. Интервал U_L је одабран тако да се цео налази са исте стране нуле као и реалан број L јер када је $L > 0$ тада је $L - \frac{|L|}{3} = \frac{2L}{3} > 0$ а када је $L < 0$ тада је $L + \frac{|L|}{3} = \frac{2L}{3} < 0$. То значи да је функција различита од нуле и да је $\operatorname{sgn} f = \operatorname{sgn} L$ на $A \cap \dot{U}_a$. $\square$

Следеће тврђење нам показује како се лимеси слажу са алгебарским операцијама.

Тврђење 43. Нека су дате функције $f, g : A \to \mathbb{R}$ и нека је $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа A. Претпоставићемо да функције имају коначне граничне вредности у тачки a, $L_1 = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $L_2 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$. Тада:

а) постоји лимес збира ове две функције и важи $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = L_1 + L_2$;

б) постоји лимес производа ове две функције и важи $\lim\limits_{x\to a}(f \cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2$;

в) Ако је $L_2 \neq 0$ тада постоји лимес количника ове две функције[2] и важи $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$;

г) Ако постоји пробушена околина тачке a, у ознаци $\dot{U}_a$, таква да је $f(x) \leq g(x)$ за све $x \in \dot{U}_a$ тада је $L_1 \leq L_2$.

Доказ.

а) Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Из чињенице да f и g имају граничне вредности следи да постоје пробушене околине $\dot{U}_a^f$ и U_a^g такве да важи
$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2},\ x \in \dot{U}_a^f \cap A,$$
и
$$|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2},\ x \in \dot{U}_a^g \cap A.$$
Тада на пресеку ових пробушених околина, што је такође пробушена околина од a, $\dot{U}_a = \dot{U}_a^f \cap \dot{U}_a^g$ важи
$$\begin{aligned}|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| &= |(f(x) - L_1) + (g(x) - L_2)| \leq \\ &\leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$
Прва неједнакост следи из неједнакости троугла. Закључујемо да лимес збира функција постоји и да је једнак збиру $L_1 + L_2$. Доказ у овом облику пролази и у случају када је a нека коначна тачка а и у случају да је a бесконачна тачка.

б) Одаберимо произвољно $\varepsilon > 0$ и нађимо пробушену околину тачке a на којој је функција g ограничена. Околину ћемо означити са $\dot{U}_a^1$ и на тој околини важи $|g(x)| \leq M$ при чему је $M > 0$ константа. За овако одређену константу постоји пробушена

[2] Приметимо да из Тврђења 41 следи да је функција g различита од нуле на некој пробушеној околини тачке a па је количник f/g дефинисан на тој пробушеној околини.

околина $\dot{U}_a^2$ таква да је

$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

за све $x \in \dot{U}_a^2 \cap A$. Из чињенице да је L_2 гранична вредност функције g постојаће пробушена околина $\dot{U}_a^3$ на којој важи

$$|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2(|L_1| + 1)}.$$

На пресеку пробушене околине

$$\dot{U}_a = \dot{U}_a^1 \cap \dot{U}_a^2 \cap \dot{U}_a^3$$

и скупа A важи

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - L_1L_2| &= |f(x)g(x) - L_1g(x) + L_1g(x) - L_1L_2| \leq \\ &\leq |g(x)| \cdot |f(x) - L_1| + |L_1| \cdot |g(x) - L_2| < \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + (|L_1| + 1)\frac{\varepsilon}{2(|L_1| + 1)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

в) Ако количник $\frac{f}{g}$ видимо као производ $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ онда је довољно да покажемо да важи

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2} \tag{8}$$

и користећи претходно слово у тврђењу долазимо до доказа особине в). Дакле, показујемо да важи (8). Како постоји лимес функције g који је различит од нуле, $L_2 \neq 0$, онда ће постојати пробушена околина тачке a, $\dot{U}_a^1$, таква да је

$$|g(x) - L_2| < \frac{|L_2|}{3}$$

за све $x \in A \cap \dot{U}_a^1$. Ако је $L_2 > 0$ тада је $g(x) > L_2 - \frac{|L_2|}{3} = \frac{2L_2}{3} > 0$ а ако је $L_2 < 0$ тада је $g(x) < L_2 + \frac{|L_2|}{3} = \frac{2L_2}{3} < 0$. У оба случаја важи да је

$$|g(x)| > \frac{2}{3}|L_2|$$

за све $x \in A \cap \dot{U}_a^1$. За произвољно $\varepsilon > 0$ разлику $|g(x) - L_2|$ можемо да проценимо одозго са $\frac{2}{3}|L_2|^2\varepsilon$ на некој пробушеној околини $\dot{U}_a^2$. Сада на пресеку $A \cap \dot{U}_a^1 \cap \dot{U}_a^2$ важи

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2}\right| = \frac{|g(x) - L_2|}{|g(x)| \cdot |L_2|} &< \frac{|g(x) - L_2|}{\frac{2}{3}|L_2|^2} < \\ &< \frac{1}{\frac{2}{3}|L_2|^2} \cdot \frac{2}{3}|L_2|^2\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

г) Претпоставимо супротно, $L_1 > L_2$. Нека је $\varepsilon = \frac{L_1 - L_2}{5}$. Како је $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ тада ће постојати пробушена околина $\dot{U}_a^1$ таква да важи

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon.$$

Из чињенице да је $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$ следи да важи

$$|g(x) - L_2| < \varepsilon$$

на $A \cap \dot{U}_a^2$ за неку пробушену околину $\dot{U}_a^2$. Посматрајући пробушену околину

$$\dot{\overline{U}}_a = \dot{U}_a^1 \cap \dot{U}_a^2$$

долазимо да за све тачке домена које се налазе у овој околину важи

$$g(x) < L_2 + \varepsilon < L_1 - \varepsilon < f(x)$$

а то је у контрадикцији са тим да важи $f(x) \leq g(x)$ на некој пробушеној околини тачке a. Дакле, претпоставка не важи па закључујемо да је $L_1 \leq L_2$.

□

Из претходног тврђења једноставно закључујемо да за све реалне бројеве α и β важи

$$\lim_{x\to a}(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x)$$

ако функције f и g имају наведене граничне вредности. Ова једнакост, као и претходно тврђење, важи и у случају када је тачка a коначна а лимеси које посматрамо једнострани.

Следеће тврђење нам показује како се бесконачни лимеси слажу са алгебарским операцијама. Како су докази ових особина врло слични доказу Тврђења 43 остављамо их читаоцу.

Тврђење 44. Нека су дате функције $f, g : A \to \mathbb{R}$ при чему је $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа A. Тада важи:

а) ако је $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ и $\lim_{x\to a} g(x) = L$ где је $-\infty < L \leq +\infty$ тада је $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty$;

б) ако је $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ и $\lim_{x\to a} g(x) = L$ где је $-\infty \leq L < +\infty$ тада је $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = -\infty$;

в) ако је $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ и $\lim_{x\to a} g(x) = L \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ тада је $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = (\operatorname{sgn} L) \cdot (\pm\infty)$;

г) ако је $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ тада је $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Приметимо да смо ово тврђење могли да додамо Тврђењу 43 ако дозволимо да лимеси буду у скупу $\overline{\mathbb{R}}$ и да су операције $+$ и $\cdot$ проширене на $\overline{\mathbb{R}}$ као у лекцији о проширеном скупу реалних бројева. Као што смо у том поглављу већ навели неки изрази, нпр. $(+\infty) + (-\infty)$, остају недефинисани. Односно, операције $+$ и $\cdot$ не можемо да проширимо тако да буду операције на целом $\overline{\mathbb{R}}$. Следећи пример ће нам објаснити зашто $(+\infty) + (-\infty)$ не можемо да дефинишемо.

Пример 45. Нека су дате следеће функције

$$f_1(x) = x^2 + 2x,\ g_1(x) = -(x^2 + x),$$
$$f_2(x) = \sqrt{x^2 + 2x},\ g_2(x) = -\sqrt{x^2 + x}.$$

Приметимо да важи $f_1(x) \to +\infty$, $f_2(x) \to +\infty$, $g_1(x) \to -\infty$ и $g_2(x) \to -\infty$ када $x \to +\infty$. Ако желимо да нађемо лимес функција $f_1 + g_1$ и $f_2 + g_2$ проласком лимесом кроз збир долазимо до облика $(+\infty) + (-\infty)$ за који смо већ видели да није покривен Тврђењем 44. Дакле, лимес збира морамо да нађемо на другачији начин. Сређивањем израза долазимо до следећег

$$f_1(x) + g_1(x) = (x^2 + 2x) - (x^2 + x) = x \to +\infty,\ x \to +\infty,$$

и

$$f_2(x) + g_2(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x} = (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x}) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + x}}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + x}} =$$
$$= \frac{x^2 + 2x - (x^2 + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + x}} = \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \to \frac{1}{2},\ x \to +\infty.$$

Дакле, у оба случаја проласком лимесом кроз збир долазимо до облика $(+\infty) + (-\infty)$. Рачунањем лимеса долазимо до тога да је у првом случају лимес бесконачан док је у другом случају лимес коначан број. На овај начин видимо да не можемо изразу $(+\infty) + (-\infty)$ доделити неки елемент из $\overline{\mathbb{R}}$ тако да алгебарска операција $+$ и lim буду усаглашени. ♯

Задатак 46. Дате су функције $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$, $f_3(x) = \frac{1}{2x}$, $g_1(x) = \frac{1}{x^2}$, $g_2(x) = \frac{1}{x}$ и $g_3(x) = \frac{1}{3x}$. Наћи $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_i(x)}{g_i(x)}$ за $i \in \{1, 2, 3\}$. Приметимо да се у сва три случаја проласком лимеса кроз количник добија облик $\frac{0}{0}$ за који знамо да није дефинисан. Дакле, то није начин да се реши овај задатак. ✓

Тврђење 47. Дате су функције $f, g : A \to \mathbb{R}$ и $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа A. Тада важи следеће:

а) ако је $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ и функција g је ограничена на некој пробушеној околини тачке a тада је $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = 0$;

б) у случају када је a коначна тачка, $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = 0$ и функција g ограничена на некој десној околини тачке a, $(a, a+\delta)\cap A$, тада је $\lim\limits_{x\to a+}(f(x)\cdot g(x)) = 0$;

в) у случају када је a коначна тачка, $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = 0$ и функција g ограничена на некој левој околини тачке a, $(a-\delta, a)\cap A$, тада је $\lim\limits_{x\to a-}(f(x)\cdot g(x)) = 0$.

Доказ. Доказаћемо тврђење које се налази под првим словом а остала два се доказују слично. Због једноставнијег записа покрићемо случај када је тачка a коначна.

Узмимо $\varepsilon > 0$ произвољно. Нека је $\dot{U}_a(\delta_1) = (a-\delta_1, a+\delta_1)$ пробушена околина тачке a таква да је $|g(x)| \leq M$ за све $x \in A\cap \dot{U}_a(\delta_1)$. Овде је $\delta_1 > 0$ и $M > 0$ је неко ограничење функције g. Како је лимес функције f једнак 0 онда ће постојати $\delta_2 > 0$ тако да важи

$$|f(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{M},$$

за све $x \in A\cap \dot{U}_a(\delta_2)$. Нека је

$$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Сада за све $x \in A\cap \dot{U}_a(\delta)$ важе процене

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M},\ |g(x)| \leq M,$$

па на том скупу важи и

$$|f(x)\cdot g(x)| < \frac{\varepsilon}{M}\cdot M = \varepsilon.$$

Одатле закључујемо $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = 0$. □

Напомена 48. Особина исказана у овом тврђењу нам каже да је производ ограничене функције и нула функције такође нула функција. Кажемо да је нека *функција нула* ако је њен одговарајући лимес једнак нули. ◇

Задатак 49. Показати да важи $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot \sin\frac{1}{x}\right) = 0$. ✓

Користећи појам нула функције који смо споменули у Напомени 48 показаћемо да је нека функција нула функција ако и само ако је њена апсолутна вредност такође нула функција. Подсетимо се да смо имали слично тврђење за низове.

Тврђење 50. За функцију $f : A \to \mathbb{R}$ важи

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = 0.$$

Постојање једног од наведених лимеса имплицира постојање и оног другог.

Доказ. Доказ ћемо извести низом еквиваленција при чему су прва и последња еквиваленција дефиниције лимеса док су еквиваленције између обично сређивање алгебарских израза.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \dot{U}_a)(\forall\, x \in A \cap \dot{U}_a)\ |f(x) - 0| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \dot{U}_a)(\forall\, x \in A \cap \dot{U}_a)\ |f(x)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \dot{U}_a)(\forall\, x \in A \cap \dot{U}_a)\ ||f(x)| - 0| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = 0.\end{aligned}$$

□

Ако је тачка нагомилавања коначна онда претходно тврђење важи и за једностране лимесе. У тврђењу је битно да је гранична вредност нула и не постоји тврђење које повезује граничну вредност апсолутне вредности функције и граничну вредност саме функције ако је гранична вредност неки други ненула број. То се једноставно види на примеру функције $f(x) = (-1)^{[x]}$ за коју важи да је $|f(x)| = 1$ па је и $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = 1$ док лимес саме функције $f(x)$ не постоји када $x \to +\infty$.

Теорема 51. (Теорема о три лимеса) *Нека функције $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ задовољавају неједнакости*

$$f(x) \le h(x) \le g(x)$$

на некој пробушеној околини $\dot{U}_a$ тачке a која је тачка нагомилавања скупа A. Ако постоје $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ и једнаки су, тада постоји $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ и важи

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Доказ. Означимо са $L := \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ и нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Из дефиниције лимеса следи да постоје пробушене околине $\dot{U}_a^f$ и $\dot{U}_a^g$ такве да важи

$$|f(x) - L| < \varepsilon,\ x \in \dot{U}_a^f,$$

и

$$|g(x) - L| < \varepsilon,\ x \in \dot{U}_a^g.$$

Тада на пресеку пробушених околина $\dot{U}_a = \dot{U}_a^f \cap \dot{U}_a^g$ важе неједнакости

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon,\ L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon,\ f(x) \le h(x) \le g(x),$$

односно

$$L - \varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < L + \varepsilon.$$

Дакле, нашли смо пробушену околину тачке a на којој важи $L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$. То значи да је $L = \lim\limits_{x\to a} h(x)$. □

Теорема 52. *Нека је $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа A и $f : A \to \mathbb{R}$ функција која има граничну вредност у тачки a, $L = \lim\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$. Ако је функција $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна у тачки L тада важи*

$$\lim_{x\to a} \varphi \circ f(x) = \varphi\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = \varphi(L).$$

Претходна теорема нам каже да непрекидна функција и лимес могу да замене места.

Теорема 53. (Теорема о смени променљиве у лимесу) *Нека функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ има граничну вредност у тачки $x_0 \in [a, b]$ и нека је $\psi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ непрекидно пресликавање које је бијекција чији је инверз ψ^{-1} такође непрекидна функција. Тада је*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{t\to\psi^{-1}(x_0)} f \circ \psi(t).$$

Напомена 54. Ако је $x_0 = a$ или $x_0 = b$ онда су лимеси који се спомињу у теореми одговарајући једнострани лимеси. Ако је, на пример, $x_0 = a$ и $\psi(\beta) = a$ тада важи $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{t\to\beta-} f\circ\psi(t)$. $\diamond$

Доказе претходне две теореме ћемо изоставити а уместо тога ћемо у следећем одељку на неколико примера показати како се теорема примењује.

3.3. Лимеси елементарних функција и основни лимеси.

Пример 55. (Лимес полиномске функције у бесконачности) Нека је дат полином

$$P_n(x) = a_0 + a_1\,x + \ldots + a_n\,x^n \tag{9}$$

где су $a_0, a_1, \ldots, a_n$ реални коефицијенти овог полинома. Ако је полином константан, односно ако су сви коефицијенти уз $x, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n$ једнаки нули тада је $P_n(x) = a_0$ за све $x \in \mathbb{R}$. Лимес константне функције је сама та константа па је у том случају

$$\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = a_0.$$

Претпоставимо да полином није једнак константи, тј. да је облика (9) при чему је $a_n \neq 0$ (коефицијент a_n се назива водећим коефицијентом) и $n \geq 1$ (број n се назива степеном полинома). Тада је

$$\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{x^n}_{\to+\infty}\underbrace{\left(\underbrace{\frac{a_0}{x^n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{a_1}{x^{n-1}}}_{\to 0} + \ldots + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{x}}_{\to 0} + \underbrace{a_n}_{\to a_n}\right)}_{\to a_n\neq 0}\right] =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & a_n > 0 \\ -\infty, & a_n < 0. \end{cases}$$

$\sharp$

Пример 56. (Лимес рационалне функције у бесконачности) Подсетимо се да је рационална функција количник две полиномске и у општем случају је облика

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1\,x + \ldots + a_n\,x^n}{b_0 + b_1\,x + \ldots + b_m\,x^m}.$$

Да бисмо избегли тривијалне случајеве претпоставићемо да је $a_n \neq 0$ и $b_m \neq 0$. Лимес рационалне функције у бесконачности зависи од односа степена полинома у бројиоцу и имениоцу.

Ако је $n < m$ тада је

$$\lim_{x\to+\infty} R(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n\left(\frac{a_0}{x^n} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n\right)}{x^m\left(\frac{b_0}{x^m} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{x} + b_m\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\frac{1}{x^{m-n}}}_{\to 0}\,\frac{\underbrace{\dfrac{a_0}{x^n} + \ldots + \dfrac{a_{n-1}}{x} + a_n}_{\to a_n}}{\underbrace{\dfrac{b_0}{x^m} + \ldots + \dfrac{b_{m-1}}{x} + b_m}_{\to b_m}}\right] = 0.$$

Ако је $n = m$ тада је

$$\lim_{x\to+\infty} R(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{a_0}{x^n} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n}{\frac{b_0}{x^m} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{x} + b_m} = \frac{a_n}{b_m}.$$

Преостао нам је случај када је $n > m$. Искористићемо претходне трансформације функције $R(x)$ и долазимо до следећег закључка

$$\lim_{x\to+\infty} R(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{x^{n-m}}_{\to+\infty}\frac{\overbrace{\frac{a_0}{x^n}+...+\frac{a_{n-1}}{x}+a_n}^{}\!\underbrace{\frac{a_0}{x^n}+...+\frac{a_{n-1}}{x}+a_n}_{\to a_n}}{\underbrace{\frac{b_0}{x^m}+...+\frac{b_{m-1}}{x}+b_m}_{\to b_m}}\right] = \operatorname{sgn}\frac{a_n}{b_m}\cdot(+\infty).$$

Долазимо до следећег закључка

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0+a_1\,x+...+a_n\,x^n}{b_0+b_1\,x+...+b_m\,x^m} = \begin{cases} 0, & n<m \\ \frac{a_n}{b_m}, & n=m \\ (+\infty)\cdot\operatorname{sgn}\frac{a_n}{b_m}, & n>m. \end{cases}$$

♯

Пример 57. У овом примеру желимо да нађемо граничне вредности синусне и косинусне функције у тачки $a = 0$.

Користећи тригонометријски идентитет

$$\cos\phi - \cos\psi = -2\sin\frac{\phi+\psi}{2}\sin\frac{\phi-\psi}{2}$$

долазимо до једнакости

$$\cos x - 1 = \cos x - \cos 0 = -2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2},$$

односно

$$0 \le |\cos x - 1| = 2\left|\sin\frac{x}{2}\right|^2 \le 2\cdot\frac{|x|^2}{4},$$

при чему последња неједнакост следи из Последице 14. Како је $\lim\limits_{x\to 0}|x|^2 = 0$ из Теореме о три лимеса следи

$$\lim_{x\to 0}|\cos x - 1| = 0,$$

потом, користећи Последицу 50 можемо да се ослободимо апсолутне вредности

$$\lim_{x\to 0}(\cos x - 1) = 0,$$

и на крају из својства слагања лимеса и операције + добијамо

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1.$$

Приметимо да је $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \cos 0$ па одмах можемо да закључимо да је косинусна функција непрекидна у тачки $a = 0$.

Користећи неједнакости

$$0 \le |\sin x| \le |x|$$

и Теорему о три лимеса једноставно закључујемо

$$\lim_{x\to 0}\sin x = 0.$$

Како је $\sin 0 = 0$ закључујемо да је синусна функција непрекидна у тачки $a = 0$. Непрекидност синусне и косинусне функције у осталим тачкама ћемо показати у делу о нпрекидности елементарних функција. ♯

У Тврђењу 13 смо видели да за све $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ важи

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Желимо да ограничимо количник $\frac{\sin x}{x}$ у пробушеној околини нуле па долазимо до неједнакости

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1, \tag{10}$$

за све $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ако је $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ тада $-x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ па је

$$\cos(-x) \leq \frac{\sin(-x)}{-x} \leq 1.$$

Искористимо чињеницу да је косинус парна а синус непарна функција па долазимо до истог низа неједнакости (10) на целој пробушеној околини $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$ тачке нула. Видели смо да је $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, скроз десна страна неједнакости (10) која је једнака константи 1 такође тежи јединици па из Теореме о три лимеса долазимо до основног лимеса

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.} \tag{11}$$

Пример 58. Наћи $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Подсетимо се да је

$$\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

па је

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}.$$

Дакле, желимо да израчунамо следећи лимес

$$2 \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}\right]^2.$$

Функција $\varphi(x) = x^2$ је непрекидна функција па користећи Теорему 52 можемо да закључимо да је

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 2\left[\lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}\right]^2$$

ако постоји $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}$. Овај лимес се може израчунати користећи Теорему о смени променљиве у лимесу и основни лимес (11). Аргумент синуса је $\frac{x}{2}$ и желимо да нам то буде нова променљива коју ћемо означити са $t = \frac{x}{2}$. Јасно је да када x тежи нули онда и $\frac{x}{2}$ тежи нули, односно када је x произвољно мала величина да ће тада и t бити произвољно мала величина. Преласком на нову променљиву наш лимес постаје

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{2t} = \frac{1}{2} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{2},$$

при чему смо у последњем кораку искористили основни лимес (11). На крају добијамо

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

♯

Када смо заснивали поље $\mathbb{R}$ дефинисали смо Ојлеров број e као $e = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ а затим смо у делу о низовима показали да је $e = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Сада ћемо показати да ће e бити вредност још једног основног лимеса.

Приметимо да је

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = e \tag{12}$$

јер је $[x]$ природан број када x иде у бесконачност а за лимес по n смо већ показали чему је једнак. Биће нам потребан и следећи лимес

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n+2}\right] = e. \tag{13}$$

Овде лимес може да прође кроз производ јер постоји и лимес од $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ и лимес од $\frac{n+1}{n+2}$ (први лимес је заправо лимес низа $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ коме је само индекс померен за један).

Нека је сада x реалан позитиван број. Знамо да је

$$[x] \le x < [x]+1,$$

па је

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

Скроз лева страна тежи ка вредности e када $x \to +\infty$ (то следи из једначине (13)) док скроз десна страна тежи истој вредности а то следи из једначине (12). На основу Теореме о три лимеса за функције добијамо следећи основни лимес:

$$\boxed{e = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.} \tag{14}$$

Пример 59. Израчунати следећи лимес $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Идеја је да се пређе на нову промењљиву $t = -x$ при чему важи да $t \to +\infty$ када $x \to -\infty$. Дакле

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &\overset{(a)}{=} \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \\ &= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t = \lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\right] = \\ &\overset{(b)}{=} \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right) = \\ &\overset{(c)}{=} \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\cdot(1+0) = e.\end{aligned}$$

Једнакост (a) се добије увођењем смене $t = -x$, (b) се добија проласком лимеса кроз производ док смо корак (c) добили увођењем смене $z = t-1$. Приметимо да $z \to +\infty$ када $t \to +\infty$. Последња једнакост следи коришћењем основног лимеса (14). ♯

Задатак 60. Користећи одговарајуће смене показати следеће једнакости:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$, г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>1,$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha.$

✓

3.4. Лимес монотоне функције. У Дефиницији 9 смо дефинисали монотоне функције, док смо у Дефиницији 7 дефинисали појам супремума и инфимума функције на неком скупу. Они ће нам бити потребни за следећу теорему која описује када постоји лимес монотоне функције.

Теорема 61. *Нека је $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ растућа функција чији је домен интервал (a,b). Важи следеће:*

а) *ако је функција ограничена одозго тада постоји коначан $\lim\limits_{x\to b-}f(x)$ и важи*

$$\lim_{x\to b-}f(x)=\sup_{x\in(a,b)}f(x);$$

б) *ако функција није ограничена одозго тада је*

$$\lim_{x\to b-}f(x)=+\infty;$$

в) *ако је функција ограничена одоздо тада постоји коначан $\lim\limits_{x\to a+}f(x)$ и важи*

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\inf_{x\in(a,b)}f(x);$$

г) *ако функција није ограничена одоздо онда је*

$$\lim_{x\to a+}f(x)=-\infty.$$

Доказ. Показаћемо део а) и б) а остала два слова се показују аналогно.

а) Нека је функција ограничена одозго, неком константом M. То значи да важи

$$(\forall\, x\in(a,b))\ f(x)\le M.$$

Тада скуп вредности

$$V=\{f(x)\mid x\in(a,b)\}$$

који је непразан скуп има једно горње ограничење, константу M. Подсетимо се да у скупу $\mathbb{R}$ важи Аксиома супремума па сваки непразан и одозго ограничен скуп има супремум. Закључујемо да скуп V има супремум у скупу $\mathbb{R}$, $L=\sup V$. То је заправо другачија ознака истог појма $\sup V=\sup\limits_{x\in(a,b)}f(x)$.

Сада нам је преостало да покажемо да је L леви лимес функције у тачки b. Нека је $\varepsilon>0$ произвољно. Желимо да нађемо $\delta>0$ такво да важи

$$|f(x)-L|<\varepsilon$$

за све $x\in(b-\delta,b)$. Како је $L-\varepsilon$ број који је строго мањи од L, а L је најмање горње ограничење скупа V, то значи да $L-\varepsilon$ неће бити горње ограничење скупа V. Дакле постојаће елемент скупа V који је већи од $L-\varepsilon$

$$(\exists\, x_0\in(a,b))f(x_0)>L-\varepsilon.$$

Са друге стране како је f растућа функција онда је

$$f(x_0)\le f(x)$$

за све вредности x из интервала (a,b) које су веће од x_0. Знамо да $f(x)\in V$ па је и $f(x)\le L$ за такве вредности x. Одабраћемо

$$\delta=b-x_0.$$

Дошли смо до неједнакости

$$L - \varepsilon < f(x_0) \le f(x) \le L$$

која важи за све $x \in (b-\delta, b) = (x_0, b)$. Овим смо показали да је $L = \lim\limits_{x \to b-} f(x)$.

б) Сада полазимо од функције која није ограничена одозго, односно за коју важи

$$\neg\, (\exists\, C \in \mathbb{R})\ (\forall\, x \in (a,b))\ f(x) \le C.$$

Када прођемо негацијом кроз претходни израз долазимо до тога да важи

$$(\forall\, C \in \mathbb{R})\ (\exists\, x_0 \in (a,,b))\ f(x_0) > C.$$

Функција f је растућа па ће за све $x \ge x_0$ важити

$$f(x) \ge f(x_0) > C.$$

Закључујемо следеће

$$(\forall\, C \in \mathbb{R})\ (\exists\, \delta = b - x_0 > 0)\ (\forall\, x \in (b-\delta, b) = (x_0, b))\ f(x) > C,$$

односно $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = +\infty$.

□

Остављамо читаоцу да сам формулише аналогну теорему уз претпоставку да је функција опадајућа.

3.5. Асимптотске релације и асимптоте функције. Сада када нам је познат појам лимеса функције можемо да дефинишемо разне релације међу функцијама које ће нам на неки начин упоређивати функције.

Дефиниција 62. Нека су дате функције $f : A \to \mathbb{R}$ и $g : B \to \mathbb{R}$ и $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тако да је a тачка нагомилавања и скупа A и скупа B. Кажемо да важи

$$f = o(g) \text{ или } f \ll g \text{ када } x \to a$$

ако и само ако постоји функција $\alpha(x)$ дефинисана на некој пробушеној околини тачке a, $\dot{U}_a$, таква да важи

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x),\ \forall\, x \in \dot{U}_a \cap A \cap B,$$

и

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

Када су две функције f и g у оваквој релацији онда кажемо *функција f је занемарљива у односу на функцију g* или *f је бесконачно мала функција у односу на g* или *f је мало о од g*. ◊

Истакнимо да домени функција f и g не морају бити једнаки али морају имати заједничку тачку нагомилавања и релација коју смо дефинисали тиче се локалног понашања функције у пробушеној околини тачке нагомилавања.

Ову дефиницију можемо да формулишемо и на ε-δ језику

$$f \ll g,\ x \to a \Leftrightarrow\ (\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0)\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon \cdot |g(x)|.$$

Ако је функција g различита од нуле на некој пробушеној околини тачке a онда дељењем једнакости $f = \alpha \cdot g$ са g и проласком лимесом када $x \to a$ долазимо до тога да важи $f \ll g$ када $x \to a$ ако и само ако је

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0.$$

Пример 63. Показати да важи $x^3 = o(x^2)$ када $x \to 0$.

Функција $g(x) = x^2$ је различита од нуле на пробушеној околини нуле $(-1,1) \setminus \{0\}$, па само треба наћи лимес

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to 0} x = 0.$$

Општије, важиће $x^\alpha = o(x^\beta)$, $x \to 0$, кад год међу реалним параметрима важи неједнакост $\alpha > \beta$. ♯

Пример 64. Желимо да упоредимо раст степених функција у околини тачке $+\infty$. Показати да важи $x = o(x^2)$ када $x \to +\infty$.

Функција $g(x) = x^2$ је различита од нуле на $(1, +\infty)$ што је пробушена околина тачке $+\infty$ и довољно је наћи лимес количника

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Општије, важиће $x^\alpha = o(x^\beta)$, $x \to +\infty$, кад год међу реалним параметрима важи неједнакост $\alpha < \beta$. ♯

Пример 65. Показати да важи $\sin x = o(x)$ када $x \to +\infty$.

У Тврђењу 47 смо видели да је лимес производа ограничене и нула функције такође једнак нули. Тако да ћемо количник $\frac{\sin x}{x}$ видети као производ синусне функције која је ограничена и функције $\frac{1}{x}$ која тежи нули када $x \to +\infty$ одакле једноставно закључујемо да је

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

♯

За разлику од претходног примера када смо упоређивали функције у околини бесконачности у околини нуле важи другачија релација.

Пример 66. Показати да важи $\sin x - x = o(x)$ када $x \to 0$.

Ово својство се показује помоћу основног лимеса (11).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

♯

Тврђење 67. Показати да важи

а) $o(f) + o(f) = o(f)$;
б) $f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$;
в) $o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$;
г) $(\forall\, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\; c \cdot o(f) = o(f)$;
д) $f = o(1),\ x \to a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Доказ. Показаћемо само неке особине док остале остављамо читаоцу за вежбу. Када у делу а) кажемо да важи једнакост $o(f) + o(f) = o(f)$ то заправо значи да када узмемо неку функцију која је занемарљива у односу на f када $x \to a$, означимо је са h_1, и неку другу функцију која је такође занемарљива у односу на f када $x \to a$, означимо је са h_2, онда ће и њихов збир $h_1 + h_2$ бити функција која је занемарљива у односу на f када $x \to a$. Покажимо ово својство.

Ако је $h_1 = o(f)$ и $h_2 = o(f)$ онда ће постојати функције α_1 и α_2 такве да је

$$h_1 = \alpha_1(x) \cdot f(x),\ \lim_{x\to a} \alpha_1(x) = 0$$

и

$$h_2 = \alpha_2(x) \cdot f(x),\ \lim_{x\to a} \alpha_2(x) = 0.$$

Тада за функцију $\alpha(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ важи да је

$$h_1(x) + h_2(x) = \alpha(x) \cdot f(x),$$

при чему је
$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=\lim_{x\to a}(\alpha_1(x)+\alpha_2(x))=\lim_{x\to a}\alpha_1(x)+\lim_{x\to a}\alpha_2(x)=0.$$
У последњем својству се појављује јединица у делу исказа $f=o(1)$. Та јединица означава константну функцију која је свуда једнака вредности 1. Тако да је доказ тог дела тврђења тривијалан јер
$$f=o(1),\ x\to a\Leftrightarrow\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1}=0.$$
□

Дефиниција 68. Нека су дате функције $f:A\to\mathbb{R}$ и $g:B\to\mathbb{R}$ и $a\in\overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупова A и B. Кажемо да је *фукнција f слична функцији g када $x\to a$* ако постоји функција $\beta:\dot{U}_a\to\mathbb{R}$ дефинисана на некој пробушеној околини тачке a таква да је
$$f(x)=\beta(x)\cdot g(x),\ x\in\dot{U}_a\cap A\cap B,$$
и важи
$$\lim_{x\to a}\beta(x)=1.$$
У том случају пишемо
$$f\sim g,\ x\to a.$$
◊

На овај начин смо дефинисали једну релацију међу функцијама, и једноставно се показује да је релација $\sim$ релација еквиваленције.

Ако је $g(x)\neq 0$ на некој пробушеној околини тачке a онда се провера да ли су две функције у релацији $\sim$ своди на тражење лимеса количника јер важи
$$f\sim g,\ x\to a\Leftrightarrow\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

Знајући основни лимес (11), Пример 58 и Задатак 60 долазимо до следећих функција међу којима важи релација сличности
$$\begin{aligned}&\sin x\sim x,\ x\to 0,\\&\ln(1+x)\sim x,\ x\to 0,\\&1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\ x\to 0,\\&e^x-1\sim x,\ x\to 0,\\&a^x-1\sim\ln a\cdot x,\ x\to 0\ (a>0),\\&(1+x)^\alpha-1\sim\alpha\cdot x,\ x\to 0.\end{aligned}\tag{15}$$

Задатак 69. Показати да важе следеће релације:

а) $x^3+x^2+2x-7\sim x^3,\ x\to+\infty,$
б) $x^3+x^2+2x-7\sim -7,\ x\to 0,$
в) $x^7+x^5+3x^2\sim x^7,\ x\to+\infty,$
г) $x^7+x^5+3x^2\sim 3x^2,\ x\to 0,$
д) $x^8+x^4+\sin x^{17}\sim x^8,\ x\to+\infty,$
ђ) $\frac{x^4+8}{x^3+7x}\sim x,\ x\to-\infty,$
е) $\frac{x^{10}+10x^5+\sqrt{x}}{7x+\sqrt[5]{x}}\sim x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}},\ x\to 0.$ ✓

Наредно тврђење повезује релације сличности и занемарљивости између две функције.

Тврђење 70. Нека су дате две функције f и g такве да је тачка $a\in\overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања њихових домена. Тада важи следеће:

а) ако је $f \sim g$ када $x \to a$ онда је $o(f) = o(g)$ када $x \to a$;
б) $f \sim g,\ x \to a$ ако и само ако важи $f - g = o(g),\ x \to a$.

Доказ. У делу а) једнакост $o(f) = o(g)$ каже да свака функција која је занемарљива у односу на f мора бити занемарљива у односу на g и, обрнуто, свака функција која је занемарљива у односу на g мора бити занемарљива у односу на f. Све ово наравно важи под претпоставком да је $f \sim g$ када $x \to a$. Дакле, узмимо функцију h за коју важи да је $h = o(f)$ када $x \to a$. Хоћемо да покажемо да важи $h = o(g)$. Како је $f \sim g$ онда постоји функција β таква да важи $f(x) = \beta(x) \cdot g(x)$ и $\beta(x) \to 1$ када $x \to a$. Даље, како је $h = o(f)$ онда постоји функција α таква да су задовољени услови $h(x) = \alpha(x) \cdot f(x)$ и $\alpha(x) \to 0$ када $x \to a$. Закључујемо

$$h(x) = \alpha(x) \cdot \beta(x) \cdot g(x),$$

и $\alpha(x) \cdot \beta(x) \to 0$ када $x \to a$. Функцију h смо представили као производ функције g и функције која тежи нули у тачки a. Из дефиниције следи да је $h = o(g)$ када $x \to a$. За завршетак доказа потребно је узети функцију $\overline{h}$ која је занемарљива у односу на g, $\overline{h} = o(g)$, и показати да важи $\overline{h} = o(f)$. Овај део доказа је исти као и претходни део при чему је потребно заменити места функција f и g.

Што се дела б) тиче низом еквиваленција, полазећи од дефиниције сличних функција, долазимо до следећег:

$$\begin{aligned} f \sim g,\ x \to a &\Leftrightarrow f(x) = \beta(x) \cdot g(x),\ \beta(x) \to 1,\ x \to a \\ &\Leftrightarrow f(x) - g(x) = (\beta(x) - 1) \cdot g(x),\ \beta(x) - 1 \to 0,\ x \to a \\ &\Leftrightarrow f - g = o(g),\ x \to a. \end{aligned}$$

□

Користећи релације (15) и претходно тврђење долазимо до следећих једнакости које називамо још и *развојем елементарних функција*

- $\sin x = x + o(x),\ x \to 0$;
- $\ln(1 + x) = x + o(x),\ x \to 0$;
- $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2),\ x \to 0$;
- $e^x - 1 = x + o(x),\ x \to 0$;
- $a^x - 1 = \ln a \cdot x + o(x),\ x \to 0\ (a > 0)$;
- $(1 + x)^\alpha - 1 = \alpha \cdot x + o(x),\ x \to 0$.

Задатак 71. Користећи претходне развоје израчунати следеће лимесе:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 17x}{\sin x\sqrt{3}}$;
б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)}$. ✓

Сада нам је преостало да дефинишемо појмове косих, хоризонталних и вертикалних асимптота функције. То ће бити праве (ако постоје) које су произвољно близу графика фукнције у тачкама које су бесконачне или неким тачкама које су рупе домена.

Дефиниција 72. Права $y = a \cdot x + b$, $a \neq 0$ назива се *косом асимптотом функције* f *у* $+\infty$ ако важи $f(x) = a \cdot x + b + o(1)$, $x \to +\infty$.

Слично, права $y = c \cdot x + d$, $a \neq 0$ назива се *косом асимптотом функције* f *у* $-\infty$ ако важи $f(x) = c \cdot x + d + o(1)$, $x \to -\infty$. ◊

Ако је $f(x) = a \cdot x + b + o(1)$ када $x \to +\infty$ тада је

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),\ x \to +\infty,$$

па је

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - a\cdot x).$$

Ово су формуле по којима се рачунају коефицијенти a и b који се појављују у једначини косе асимптоте. Ако неки од ова два лимеса не постоји онда функција неће имати косу асимптоту у $+\infty$. Слично, у околини тачке $-\infty$ до једначине косе асимптоте долазимо рачунајући коефицијенте c и d по следећим формулама

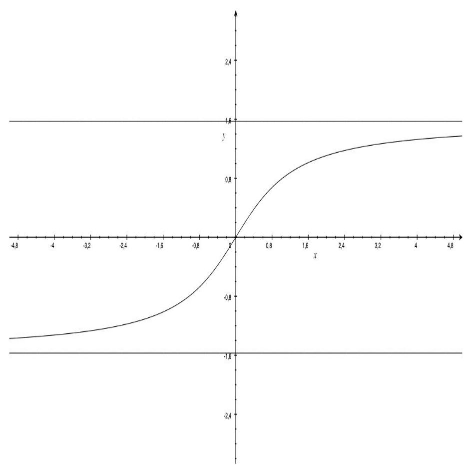
$$c = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad d = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - c\cdot x).$$

Дефиниција 73. Права $y = b$ назива се *хоризонталном асимптотом функције* f *у* $+\infty$ ако важи $f(x) = b + o(1)$ када $x \to +\infty$.

Права $y = d$ назива се *хоризонталном асимптотом функције* f *у* $-\infty$ ако важи $f(x) = d + o(1)$ када $x \to -\infty$. $\Diamond$

Видимо да су хоризонталне асимптоте специјалан случај косих асимптота када је $a = 0$ односно $c = 0$. Ако график функције има праву косу асимптоту ($a \neq 0$) када $x \to +\infty$ онда он не може имати и хоризонталну асимптоту у $+\infty$.

Функција $f(x) = \arctan x$ чији је график приказан на Слици 15 има хоризонталну асимптоту $y = \frac{\pi}{2}$ када $x \to +\infty$ и $y = -\frac{\pi}{2}$ када $x \to -\infty$.



Слика 15. График функције $f(x) = \arctan x$ и одговарајуће хоризонталне асимптоте

Функција $f(x) = \cos x$ нема ни хоризонталних ни косих асимптота. Иако је $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ не постоји $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cos x$ па самим тим не постоје никакве асимптоте у околини бесконачних тачака. Када погледамо график косинусне функције видимо да она стално осцилира између вредности 1 и -1 (јер је периодична) па график ни у једном тренутку не почиње да се приближава некој правој.

Квадратна функција $f(x) = x^2$ нема асимптота у $\pm\infty$ јер је $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$.

Експоненцијална функција $f(x) = e^x$ има хоризонталну асимптоту $y = 0$ када $x \to -\infty$ јер је $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ док у околини $+\infty$ нема ни косу ни хоризонталну асимптоту јер је $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Заиста када погледамо график експоненцијалне функције видимо да се она у $+\infty$ понаша јаче него било која линеарна функција.

Дефиниција 74. Права $x = C$ назива се *вертикалном асимптотом функције* f ако важи

$$\lim_{x\to C-} |f(x)| = +\infty \text{ или } \lim_{x\to C+} |f(x)| = +\infty.$$

$\Diamond$

Вертикалне асимптоте, ако постоје, јављају се у тачкама домена где је функција добијена лепљењем неке две функције или у тачкама које су избачене из домена („рупама” домена).

Пример 75. Одредити све асимптоте функције $f(x) = |x+3|e^{-\frac{1}{x}}$.

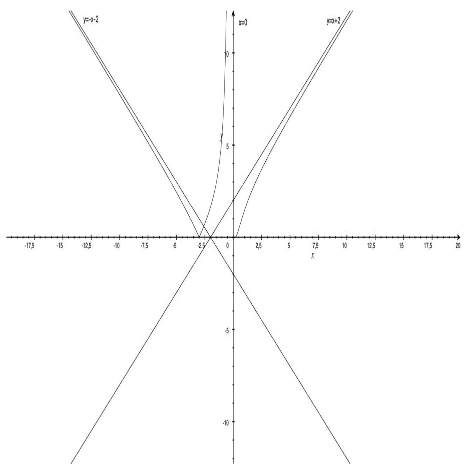
Ако развијемо $e^{-\frac{1}{x}}$ када је x произвољно велико, односно $\frac{1}{x}$ произвољно мало долазимо до следећих једнакости

$$f(x) = (x+3)\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + 2 + o(1),\ x \to +\infty,$$
$$f(x) = (-x-3)\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -x - 2 + o(1),\ x \to -\infty.$$

То значи да функција има хоризонталне асимптоте и то $x+2$ када $x \to +\infty$ и $-x-2$ када $x \to -\infty$. Тачка $x = 0$ не припада домену функције и видимо да је

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = +\infty$$

па је $x = 0$ вертикална асимптота ове функције. Асимптоте и сам график функције су приказани на Слици 16.



Слика 16. График функције $f(x) = |x+3|e^{-\frac{1}{x}}$ и одговарајуће асимптоте

♯

4. Непрекидност функција

Подсетимо се појма непрекидности функције у тачки који је дат у Дефиницији 15. Кажемо да је функција $f : A \to \mathbb{R}$ непрекидна у тачки $a \in A$ ако и само ако важи

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta < 0)(\forall\, x \in A)\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Истакнимо још једном да смо појам непрекидности дефинисали само у тачкама домена и да се зато у $\varepsilon - \delta$ дефиницији јавља услов $|x - a| < \delta$ и сама непрекидност је зависила од вредности функције у тој тачки. Док смо појам граничне вредности дефинисали у тачкама нагомилавања домена, у $\varepsilon - \delta$ дефиницији имамо услов $0 < |x - a| < \delta$ и сама гранична вредност не зависи од вредности функције у тој тачки (ако је a уопште тачка домена).

Пример 76. Показати да је линеарна функција $f(x) = ax + b$ непрекидна у свакој тачки домена (за произвољне константе a и b).

Нека је $x_0 \in \mathbb{R}$ произвољна тачка и нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Разлика

$$|f(x) - f(x_0)| = |a(x - x_0)|$$

биће мања од ε за свако $x \in \mathbb{R}$ за које важи $|x - x_0| < \delta$ где је

$$\delta = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{|a|}, & a \neq 0 \\ 1, & a = 0. \end{cases}$$

Тиме смо показали непрекидност линеарне функције на целом домену. $\sharp$

Из овог примера видимо да су константа функција и линеарна функција $f(x) = x$ непрекидне. Следећи пример даје функцију која има прекиде у неким тачкама домена.

Пример 77. Показати да функција $f(x) = \operatorname{sgn} x$ има прекид у тачки $a = 0$.

Претпоставимо супротно, функција знак броја је непрекидна у тачки $a = 0$. Узећемо да је ε које се јавља у дефиницији непрекидности у тачки једнако $\frac{1}{2}$. Дефиниција каже да ће постојати $\delta > 0$ такво да важи

$$|f(x) - f(0)| = |\operatorname{sgn} x - 0| < \frac{1}{2} \tag{16}$$

за све x за које је $|x - 0| = |x| < \delta$. Узмимо конкретно $x_1 = \frac{\delta}{2}$. Тада је x_1 у интервалу $(-\delta, \delta)$ на ком важи процена (16) али рачуном долазимо до следећег

$$|f(x_1) - f(0)| = |\operatorname{sgn} x_1 - 0| = 1 > \frac{1}{2}$$

што је контрадикција са (16). Тиме смо показали да претпоставка не важи па функција sgn има прекид у тачки $x = 0$.

Тражено својство смо могли да покажемо и на другачији начин. Већ смо споменули раније да је функција непрекидна у тачки домена ако и само ако је њен лимес у тој тачки једнак вредности функције у тој тачки (Задатак 24). Како ова функција нема лимес у тачки $a = 0$ закључујемо да ту не може бити непрекидна. $\sharp$

Тврђење 78. Нека је функција $f : A \to \mathbb{R}$ непрекидна у тачки $a \in A$. Тада постоји околина U_a тачке a на којој је функција ограничена.

Аналогно тврђење за лимесе је Тврђење 40. Разлика је у томе што код лимеса можемо да говоримо о ограничености функције на пробушеној околини док код непрекидности имамо ограниченост функције на целој околини. Доказ ћемо изоставити јер се добија једноставном модификацијом споменутог тврђења које се односи на лимесе.

Аналогно својство исказано у Тврђењу 41 за лимесе је следеће тврђење које нам каже да график непрекидне функције можемо да одвојимо од $x-$осе у некој околини тачке у којој је функција непрекидна и различита од нуле.

Тврђење 79. Ако је функција $f : A \to \mathbb{R}$ непрекидна у тачки $a \in A$ и ако важи $f(a) \neq 0$ онда постоји околина тачке a на којој је функција различита од нуле и знак функције је исти као и знак броја $f(a)$.

Сабирањем, множењем и дељењем непрекидних функција (када је дефинисано) опет добијамо непрекидне функције.

Тврђење 80. Нека су дате функције $f, g : A \to \mathbb{R}$ које су непрекидне у тачки $a \in A$. Тада су функције $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ и $f \cdot g$ непрекидне функције у тачки a, за произвољне реалне константе α и β. Ако је, додатно, $g(a) \neq 0$ онда је и функција $\frac{f}{g}$ непрекидна у тачки a.

Претходно тврђење нам је показало да се појам непрекидности лепо слаже са алгебарским операцијама. Непрекидност се очувава и при композицији.

Тврђење 81. Нека су дате функције $f : A \to B$ и $g : B \to \mathbb{R}$ такве да је функција f непрекидна у тачки $a \in A$ а функција g је непрекидна у тачки $b = f(a)$. Тада је функција $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ непрекидна у тачки a.

Доказ. Узмимо произвољно $\varepsilon > 0$. Како је функција g непрекидна у тачки b онда ће постојати неко $\delta_1 > 0$ тако да важи

$$|g(y) - g(b)| < \varepsilon \tag{17}$$

кад год је $|y - b| < \delta_1$. За овако нађено δ_1 постојаће неко $\delta > 0$ тако да важи

$$|f(x) - f(a)| < \delta_1 \tag{18}$$

кад год је $|x - a| < \delta$ (ово следи из чињенице да је f непрекидна у тачки a). Сада спајамо процене (17) и (18) и закључујемо да кад год је $|x - a| < \delta$ онда је

$$|\underbrace{f(x)}_{y=f(x)} - f(a)| = |y - b| < \delta_1$$

па је

$$|g \circ f(x) - g \circ f(a)| = |g(f(x)) - g(f(a))| = |g(y) - g(b)| < \varepsilon.$$

По дефиницији следи да је функција $g \circ f$ непрекидна у тачки a. □

Подсетимо се да је нека тачка домена била тачка прекида ако функција у тој тачки није непрекидна. Можемо додатно да класификујемо тачке прекида посматрајући леви и десни лимес функције у тој тачки.

Дефиниција 82. Дата је функција $f : A \to \mathbb{R}$ и $a \in A$ тачка домена у којој функција има прекид. Кажемо да f има *отклоњив прекид у тачки a* ако постоје леви и десни лимеси функције у тачки a и ако су једнаки. У супротном, прекид називамо *неотклоњивим*. Неотклоњив прекид називамо *прекидом прве врсте* ако функција има леви и десни лимес у тој тачки и лимеси су различити. Неотклоњив прекид називамо *прекидом друге врсте* ако бар један од лимеса $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ не постоји. ♢

Пример 83. Приметимо да функција $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дата са

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 7, & x = 0, \end{cases}$$

има отклоњив прекид у тачки $a = 0$. Леви и десни лимес функције g у тачки $a = 0$ једнаки су основном лимесу (11)

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

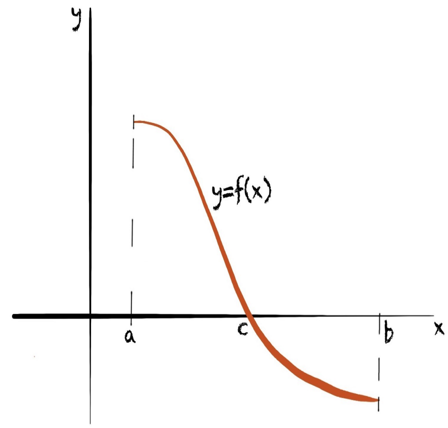
Прекиде ове врсте називамо отклоњивим јер ми можемо да променимо вредност функције g у тачки $a = 0$ тако да онда постане непрекидна. ♯

У Примеру 77 смо видели да је $a = 0$ тачка прекида функције $\operatorname{sgn} x$. Како је леви лимес функције у тој тачки једнак вредности -1 а десни лимес једнак јединици закључујемо да је тачка $a = 0$ тачка прекида прве врсте функције $\operatorname{sgn} x$.

4.1. Глобална својства непрекидних функција. У претходном делу смо се бавили локалним својствима непрекидних функција, односно понашањем функције у околини неке тачке. Сада ћемо се бавити глобалним својствима непрекидних функција која описују понашање функције на неком скупу.

Теорема 84. (Коши-Болцанова теорема) *Нека је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција таква да је $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тада је $f(c) = 0$ за неко $c \in (a, b)$.*

Доказ. Посматрамо тачку која се налази на половини интервала $[a, b]$, то је тачка $\frac{a+b}{2}$. Ако је $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ доказ је завршен, тачка $c = \frac{a+b}{2}$ задовољава услове теореме. Ако је $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$ онда имамо две могућности, $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ или $f(\frac{a+b}{2}) < 0$. Сада посматрамо интервал I_1 у чијим крајевима функција f има различит знак, то је $[a, \frac{a+b}{2}]$ или $[\frac{a+b}{2}, b]$. Поновимо овај поступак



Слика 17. Пример функције која задовољава поставке Коши-Болцанове теореме

са интервалом I_1 чије крајеве ћемо означити са $[a_1, b_1]$ (приметимо да је ширина интервала I_1 једнака $\frac{b-a}{2}$). Поделимо га тачком $\frac{a_1+b_1}{2}$ на два дела. Ако је фунција f једнака нули у тачки $\frac{a_1+b_1}{2}$ онда ће то бити тачка c која задовољава закључак теореме. У супротном, дефинишемо интервал I_2 у чијим крајевима функција f има различит знак, то ће бити интервал $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ или $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. Означимо крајеве интервала са $[a_2, b_2]$. Ширина интервала је $\frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$. Наставимо поступак даље. Ако у неком тренутку наиђемо на тачку у којој је функција једнака нули доказ се завршава. Ако не нађемо такву тачку онда смо дефинисали низ затворених уметнутих интервала

$$I_n = [a_n, b_n] \supseteq I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

у чијим крајевима функција f има различит знак и чија је ширина $\frac{b-a}{2^n}$.

Из Канторове теореме следи да ће пресек интервала $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} I_n$ бити непразан. Сада ћемо показати да ће пресек бити једнак једној тачки и да ће вредност функције у тој тачки бити једнака нули. Ако би се у пресеку налазиле две различите тачке c_1 и c_2 онда би на основу Архимедове теореме постојао природан број n_0 такав да је $\frac{b-a}{2^{n_0}} < |c_2 - c_1|$. Другим речима тачке c_1 и c_2 су на растојању које је веће од ширине интервала I_{n_0} па не могу обе тачке да се нађу у интервалу I_{n_0} а самим тим ни у пресеку $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} I_n$. Дакле, $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} I_n = \{c\}$. Преостаје нам да покажемо да је $f(c) = 0$. Претпоставимо супротно, $f(c) \neq 0$. Како је f непрекидна функција онда ће постојати неки интервал око тачке c, облика $J_\varepsilon = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, на ком је функција сталног знака. Опет, из Архимедове аксиоме следи да ће постојати природан број n_0 такав да је $\frac{b-a}{2^{n_0}} < \varepsilon$. То значи да ће цео интервал I_{n_0} бити садржан у J_ε. Тиме смо дошли до контрадикције јер функција f има различит знак на крајевима интервала I_{n_0} док је f сталног знака на интервалу J_ε. □

Задатак 85. Показати да полином $p(x) = x^5 + 17x^2 + 20$ има бар једну реалну нулу.
Решење. Приметимо да је $p(2) = 120 > 0$ и $p(-3) = -70 < 0$ па ће на основу Теореме 84 постојати нула полинома p у интервалу $(-3, 2)$. ✓

Напомена 86. Важи и општије својство, сваки полином непарног степена има бар једну реалну нулу. Ово се једноставно доказује користећи чињеницу да за сваки полином непарног степена $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ важи $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = \mp\infty$ (знак лимеса у бесконачности зависи од знака водећег коефицијента a_n као што смо видели у Примеру 55). ◇

Задатак 87. Доказати да свака непрекидна функција $f : [0,1] \to [0,1]$ има фиксну тачку (фиксна тачка је тачка x_0 за коју важи $f(x_0) = x_0$).
Решење. Дефинишимо нову функцију $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ са

$$F(x) = f(x) - x.$$

Приметимо да фиксне тачке пресликавања f одговарају нулама функције F и обрнуто. Функција F је непрекидна као разлика непрекидних функција и у крајњим тачкама интервала има вредности $F(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$ и $F(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Последње две неједнакости следе из чињенице да је кодомен функције f такође интервал $[0,1]$. Ако је $F(0) = 0$ или $F(1) = 0$ тада је $x_0 = 0$, односно $x_0 = 1$, фиксна тачка пресликавања f. Претпоставимо да је $F(0) \neq 0$ и $F(1) \neq 0$. Тада је $F(0) > 0$ и $F(1) < 0$ па функција F има различит знак на крајевима интервала $[0,1]$. Из Теореме 84 следи да постоји нула $c \in (0,1)$ ове функције, $F(c) = 0$, а то ће бити фиксна тачка пресликавања f. ✓

Напомена 88. Приметимо да непрекидна функција $f(x) = x^2$ слика интервал $(0,1)$ у $(0,1)$ а ипак нема фиксних тачака на $(0,1)$. Претходни задатак не може да се примени на овај конкретан пример јер домен функције f није затворен интервал. $\diamond$

Теорема 89. (Теорема о међувредности) *Ако је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција за коју је $f(a) = A$ и $f(b) = B$, онда за свако C које је између A и B постоји $c \in (a,b)$ такво да је $f(c) = C$.*

Доказ. Доказ следи из претходне теореме када се посматра функција $f(x) - C$. □

Ако се подсетимо карактеризације интервала долазимо до следеће последице.

Последица 90. *Непрекидна слика интервала је интервал.*

Пример 91. Функција $f : [0,5] \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 5, \end{cases}$$

слика интервал $[0,5]$ у $[0,1]$ али функција f није непрекидна на $[0,5]$ (има прекид у тачки $x = 1$). Овај пример нам говори да не важи обрнута импликација у претходној последици. $\sharp$

Теорема 92. (Вајерштрасова теорема) *Непрекидна функција на затвореном и ограниченом интервалу је ограничена и достиже максимум и минимум.*

Доказ. Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција.

Прво ћемо показати да је f ограничена. Претпоставимо супротно, f није ограничена на $[a,b]$. Тада функција није ограничена на левој или десној половини овог интервала јер ако би била ограничена на обе половине онда би била ограничена и на њиховој унији (горње ограничење би било максимум горњих ограничења на половинама а доње ограничење је минимум доњих ограничења на половинама). Означимо са I_1 интервал на ком функција није ограничена (слично као у доказу Теореме 84 интервал I_1 је ширине $\frac{b-a}{2}$). Сада интервал I_1 поделимо на два дела и означимо са I_2 интервал ширине $\frac{b-a}{2^2}$ на ком функција f није ограничена. Наставимо поступак. На овај начин дефинишемо низ опадајућих интервала $I_n \supseteq I_{n+1}$ који су ширине $\frac{b-a}{2^n}$ и f је неограничена на сваком од њих. Према Канторовој теореми њихов пресек је непразан и слично као и у доказу Теореме 84 садржаће само једну тачку, $\bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}} I_n = \{c\}$. Према претпоставци теореме f је непрекидна на свом домену па је непрекидна и у тачки c. Локално својство непрекидних функција нам каже да ће постојати околина $J_\varepsilon = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ на којој је функција f ограничена. На основу Архимедове аксиоме постоји природан број n_0 такав да је $\frac{b-a}{2^{n_0}} < \varepsilon$ па ће интервал I_{n_0} бити подскуп од J_ε.

Ово је контрадикција јер је са једне стране f неограничена на I_{n_0} а са друге стране смо J_ε конструисали тако да f буде ограничена на тој околини тачке c.

Сада ћемо показати да f достиже минимум на $[a,b]$ (на сличан начин се доказује да f достиже максимум). Претпоставимо супротно, нека је $m = \inf\limits_{[a,b]} f$ али нека је $f(x) \neq m$, односно $f(x) > m$, за све $x \in [a,b]$. Дефинишимо функцију $g(x) = \frac{1}{f(x)-m}$. Како је именилац непрекидна функција различита од нуле за све $x \in [a,b]$ онда ће функција g бити непрекидна на $[a,b]$. Према претходном делу доказа функција g је ограничена па ће постојати константа $C > 0$ таква да је

$$g(x) = \frac{1}{f(x)-m} \leq C$$

за све $x \in [a,b]$. Тада је

$$f(x) \geq m + \frac{1}{C}$$

за све $x \in [a,b]$. Ово је контрадикција јер ће онда $m + \frac{1}{C}$ бити једно доње ограничење скупа $\{f(x) \,|\, x \in [a,b]\}$ чији је инфимум m мањи од те вредности (подсетимо се да је инфимум скупа његово највеће доње ограничење). Закључујемо да је $m = f(x_0)$ за неко $x_0 \in [a,b]$. □

Задатак 93. Наћи слике скупова $A = (-1,1)$, $B = (-1,1]$, $C = [-3,5]$ и $D = [4,+\infty)$ при пресликавању $f(x) = x^2$.

Решење. Функција f је непрекидна а скупови A, B, C и D су интервали па ће и њихове слике бити интервали. Приметимо да је $x^2 \geq 0$ и да је $x^2 < 1$ за све $|x| < 1$. Када узмемо произвољан позитиван број s мањи од 1 онда је $\sqrt{s} \in A$ и $f(\sqrt{s}) = s$. То значи да је $f(A) = [0,1)$. Лако закључујемо да је $f(B) = [0,1]$. Са друге стране $f(5) = 25$ па је $f(C) = [0,25]$. Лако се закључује да је $f(D) = [16,+\infty)$. Приметимо да смо на скуп C могли да применимо Вајерштрасову теорему јер је C затворен и ограничен интервал док на интервале A, B и D нисмо могли да применимо исту теорему. Интервали A и B нису затворени док D није ограничен. ✓

4.2. Непрекидност монотоних функција. Подсетимо се да је функција (строго) монотона ако је она (строго) растућа или (строго) опадајућа.

Тврђење 94. Монотона функција може имати само прекиде прве врсте.

Доказ. Нека $f : X \to \mathbb{R}$ и претпоставимо, без умањења општости, да је функција растућа. Нека је $x_0 \in X$ тачка прекида функције f. Сада ћемо показати да постоје леви и десни лимес функције у тачки x_0. Посматрамо скупове

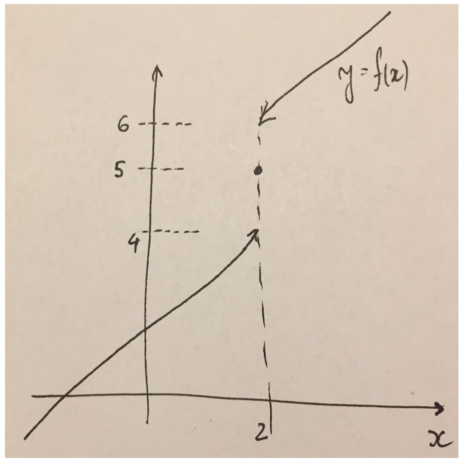
$$A = \{f(x) \,|\, x < x_0\},\ B = \{f(x) \,|\, x > x_0\}.$$

Функција је растућа па је скуп A ограничен одозго вредношћу $f(x_0)$ док је скуп B ограничен одоздо истим бројем. Аксиома супремума нам каже да ће постојати супремум скупа A, $a_0 = \sup A$, и инфимум скупа B, $b_0 = \inf B$. Показаћемо да је $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = a_0$, односно да је a_0 леви лимес функције у тачки x_0. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. На основу дефиниције супремума постојаће $x_\varepsilon \in A$ за које је $a_0 - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq a_0$. Како је функција растућа важиће $f(x_\varepsilon) \leq f(x)$ за све x за које је $x_\varepsilon \leq x < x_0$. Дакле $a_0 - \varepsilon < f(x) \leq a_0$ ако је $|x - x_o| < \delta$ где је $\delta = x_0 - x_\varepsilon$. Ако се подсетимо дефиниције левог лимеса у тачки закључујемо да је $a_0 = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$. Аналогно се доказује да је b_0 десни лимес функције f у тачки x_0. Тиме смо доказали да монотона функција има леви и десни лимес у свакој тачки. Још један закључак можемо да извучемо из доказа овог тврђења. Једно горње ограничење скупа A је $f(x_0)$ а његов супремум је a_0 па закључујемо да важи $a_0 \leq f(x_0)$. Скуп B има једно доње ограничење $f(x_0)$ а инфимум скупа B је b_0. Дакле $f(x_0) \leq b_0$. Од две неједнакости

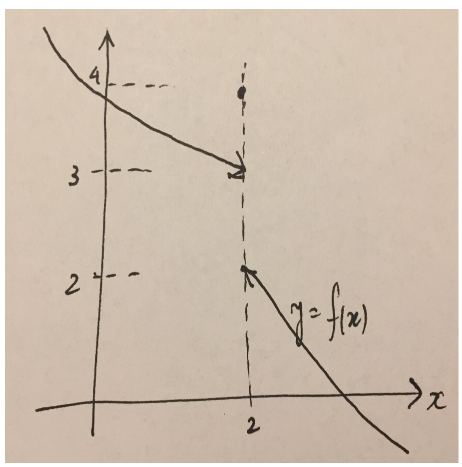
$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = a_0 \leq f(x_0) \leq b_0 = \lim_{x \to x_0+} f(x)$$

једна је строга јер је x_0 тачка прекида функције. □

Пример 95. На Слици 18 налази се пример функције која је растућа. Приметимо да функција у тачки $x = 2$ има прекид прве врсте и да важи $\lim\limits_{x\to 2-} = 4$, $\lim\limits_{x\to 2+} = 6$ док је $f(2) = 5$. На Слици 19 налази се график функције која није монотона. Приметимо да је она опадајућа лево од тачке $x = 2$, затим има скок у $x = 2$ а онда наставља да опада. Приметимо да је $\lim\limits_{x\to 2-} = 3$, $\lim\limits_{x\to 2+} = 2$ док се вредност функције у самој тачки $x = 2$, $f(2) = 4$ не налази између левог и десног лимеса. ♯



Слика 18. Пример растуће функције



Слика 19. Пример функције која није монотона

Теорема 96. *Монотона функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ је непрекидна ако и само ако је $f((a, b))$ интервал.*

Напомена 97. У исказу теореме $f((a, b))$ означава слику интервала при пресликавању f, $f((a, b)) = \{f(x) \,|\, x \in (a, b)\} \subseteq \mathbb{R}$.

Доказ. Један смер (са леве на десну страну) смо већ видели као Последицу 90, ту нам претпоставка о монотоности функције није потребна. Нека је сада $f((a, b))$ интервал и f монотона функција. Претпоставимо да је неко $x_0 \in (a, b)$ тачка прекида функције f. Тада је $a_0 = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = b_0$ и вредност $f(x_0)$ се налази између ових бројева. Нека је I_0 отворен интервал са крајевима a_0 и b_0 (ако је f растућа онда је $I_0 = (a_0, b_0)$ а ако је f опадајућа онда је $I_0 = (b_0, a_0)$). Како су бројеви a_0 и b_0 различити I_0 је прави интервал (није празан већ садржи бесконачно много тачака). У доказу Тврђења 94 смо видели да је $f(x_0)$ између a_0 и b_0 при чему је једна неједнакост строга. Ако је $f(x_0)$ строго између ова два броја онда је $f(x_0) \in I_0$ а може да се деси да је $f(x_0)$ једнако неком од бројева a_0 или b_0 и у том случају $f(x_0)$ не припада интервалу I_0. На основу ове анализе видимо да слика $f((a,b))$ има праву "рупу" I_0 у којој ће се можда налазити тачка $f(x_0)$ али ништа више сем тога. Другим речима $f((a,b))$ није интервал. Ова контрадикција нам каже да f не може имати тачке прекида, односно да је f непрекидна функција. □

Задатак 98. Показати да је свака строго монотона функција инјективна.
Решење. Нека је $f : X \to \mathbb{R}$ строго растућа функција и нека је $f(x_1) = f(x_2)$. Ако је $x_1 \neq x_2$ онда је $x_1 < x_2$ или $x_1 > x_2$. Из чињенице да је f строго растућа закључујемо да је $f(x_1) < f(x_2)$ или $f(x_1) > f(x_2)$. У сваком случају не може да важи $f(x_1) = f(x_2)$. Једино преостаје $x_1 = x_2$. Ако је f опадајућа функција можемо да посматрамо функцију $-f$ која је у том случају растућа па на њу применимо доказано својство инјективности. ✓

Тврђење 99. Ако је $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ строго монотона и непрекидна функција тада је и f^{-1} (са одговарајућим доменом) непрекидна функција.

Доказ. Како је f непрекидна функција онда ће слика интрвала (a,b) при пресликавању f бити неки интервал (α, β). Задатак 98 нам каже да ће f бити инјективно пресликавање, па ће постојати његов инверз $f^{-1} : (\alpha, \beta) \to (a,b)$. Преостаје нам да покажемо да ће и инверзна функција бити строго монотона. Да бисмо олакшали запис претпоставимо да је f строго растућа. Нека су $y_1 < y_2$ произвољни елементи из (α, β). Знамо да је $y_i = f(x_i)$, $i = 1,2$ за неке $x_1, x_2 \in (a,b)$. Очигледно је $x_1 \neq x_2$. Ако је $x_1 > x_2$ тада је $f(x_1) > f(x_2)$ јер је f строго растућа, односно $y_1 > y_2$ а то је у супротности са почетним одабиром елемената y_1 и y_2. Дакле, важи $x_1 < x_2$. Приметимо да је $x_i = f^{-1}(y_i)$, $i = 1,2$. Закључујемо да важи $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ ако је $y_1 < y_2$, тј. инверзна функција f^{-1} је строго растућа. $f^{-1}((\alpha, \beta))$ је интервал, f^{-1} је монотона функција па нам Теорема 96 каже да ће и f^{-1} бити непрекидна функција. □

4.3. Непрекидност елементарних функција. У Примеру 76 смо показали да да је линеарна функција $f(x) = x$ непрекидна. Знамо да је производ непрекидних функција непрекидна функција па ће и функције $x^2, x^3, \ldots$ бити такође непрекидне. Како је збир и количник непрекидних функција непрекидна функција можемо да закључимо да су полиномске и рационалне функције непрекидне.

Квадратна функција x^2 инјективно слика скуп $[0, +\infty)$ у $[0, +\infty)$, при томе је и строго растуће и слика домена је такође $[0, +\infty)$. Инверзна, односно корена функција $\sqrt{x} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ је такође непрекидна. Функција x^3 је строго растућа и непрекидна на свом домену и кодомен је једнак скупу $\mathbb{R}$. Њен инверз је непрекидан и слика $\sqrt[3]{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. И уопште, степена функција x^{2k} где је $k \in \mathbb{N}$ има непрекидан инверз када посматрамо њену рестрикцију на $[0, +\infty)$ док степене функције облика x^{2k+1} имају непрекидан инверз на целом $\mathbb{R}$. Другим речима, корене функције су непрекидне.

Подсетимо се да смо доказали непрекидност синусне и косинусне функције у тачки $a = 0$ у Примеру 57. Желимо да покажемо непрекидност ових функција у свим тачкама домена. Знамо да за важи $|\sin x| \leq |x|$ за све $x \in \mathbb{R}$. Нека је $x_0 \in \mathbb{R}$ произвољна тачка. Тада је

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2 \cdot \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}\right| \leq 2 \left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \leq |x - x_0|.$$

Када прођемо лимесом по $x \to x_0$ добијемо да скроз десна страна тежи нули па ће и разлика $\sin x - \sin x_0$ тежити нули. Другим речима $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x_0 = \sin x$. Слично, користећи тригонометријске идентитете добијамо низ неједнакости

$$|\cos x - \cos x_0| = \left|-2 \cdot \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \sin \frac{x + x_0}{2}\right| \leq 2 \left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \leq |x - x_0|,$$

па је и косинусна функција непрекидна у произвољној тачки x_0.

Приметимо да је $\sin x$ строго растућа на интервалу $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и непрекидна па ће и њена инверзна функција arcsin бити такође непрекидна. Слично важи и за косинус. Када рестрикујемо косинус на $[0, \pi]$ (где он опада) долазимо до непрекидне инверзне функције

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

Горња дискусија је показала део исказа следеће теореме.

Теорема 100. *Елементарне функције су непрекидне.*

Доказ. Знамо да је збир, производ, количник (када је дефинисан) и композиција непрекидних функција непрекидна функција. Преостало нам је само да покажемо да су непрекидне експоненцијална и логаритамска функција.

Показујемо непрекидност експоненцијалне функције у тачки $x = 0$. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Како је $e > 1$ онда ће бити $e - 1 > 0$ па ће на основу Архимедове аксиоме постојати природан број n такав да важи

$$n \cdot \varepsilon > e - 1,$$

односно $1 + n \cdot \varepsilon > e$. Користећи Бернулијеву неједнакост закључујемо да је

$$(1 + \varepsilon)^n \geq 1 + n \cdot \varepsilon > e.$$

Када узмемо $n-$ти корен леве и десне стране добијамо неједнакост

$$1 + \varepsilon > e^{\frac{1}{n}}.$$

Када неједнакост запишемо у следећем облику $e^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$ па леву и десну страну помножимо са $e^{-\frac{1}{n}}$ добијемо неједнакост

$$1 - e^{-\frac{1}{n}} < e^{-\frac{1}{n}} \cdot \varepsilon < \varepsilon$$

при чему последња неједнакост важи јер је $0 < e^{-\frac{1}{n}} < 1$. Ако је x у следећој околини тачке 0, $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ (где смо n одабрали тако да важе све горње неједнакости) онда је

$$e^{-\frac{1}{n}} < e^x < e^{\frac{1}{n}},$$

па је даље

$$-\varepsilon < e^{-\frac{1}{n}} - 1 < e^x - 1 < e^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon.$$

Дакле у $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ околини тачке 0 важи

$$|e^x - 1| < \varepsilon.$$

Закључујемо $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$ а знамо да је $e^0 = 1$ па је експоненцијална функција непрекидна у $x = 0$. За произвољну тачку $x_0 \in \mathbb{R}$ приметимо да је

$$\lim_{x \to x_0} (e^x - e^{x_0}) = \lim_{x \to x_0} \left(e^{x_0}(e^{x - x_0} - 1)\right) = e^{x_0} \lim_{x \to x_0} (e^{x - x_0} - 1) = e^{x_0} \lim_{h \to 0} (e^h - 1) = e^{x_0} \cdot 0 = 0,$$

односно $\lim\limits_{x \to x_0} e^x = e^{x_0}$ па је експоненцијална функција непрекидна у свакој тачки свог домена.

Експоненцијална функција је строго растућа и непрекидна па ће на основу Тврђења 99 и њој инверзна логаритамска функција бити непрекидна. □

5. Хајнеова и Кошијева карактеризација лимеса

Појам граничне вредности смо дефинисали на $\varepsilon - \delta$ језику и то је Кошијева дефиниција. Граничну вредност функције можемо да дефинишемо користећи низове. Ту дефиницију је дао Хајне, еквивалентна је Кошијевој дефиницији и ми ћемо то формулисати као теорему.

Теорема 101. (Хајнеова карактеризација лимеса) *Нека је дата функција $f : X \to \mathbb{R}$ и нека је $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа X. Тада је $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ ако и само ако за сваки низ $x_n \in X \setminus x_0$ важи импликација*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L.$$

Доказ.

$\implies$:

Нека је L гранична вредност функције f у тачки x_0 и нека је (x_n) низ у $X \setminus x_0$ за који важи $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$. Хоћемо да покажемо да је $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = L$.

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада ће постојати $\delta > 0$ такво да је $|f(x)-L| < \varepsilon$ кад год је $0 < |x - x_0| < \delta$. Када дефинишемо овакво $\delta > 0$ онда ће постојати $n_0 \in \mathbb{N}$ за које је $|x_n - x_0| < \delta$ за све $n \geq n_0$. На основу овога закључујемо да за све $n \geq n_0$ важи $|f(x_n) - L| < \varepsilon$, односно $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = L$.

$\impliedby$:

Претпоставимо да не важи $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$. То значи да

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x \in X)\, 0 < |x - x_0| < \delta \,\wedge\, |f(x) - L| \geq \varepsilon.$$

Овај део $\forall\delta > 0$ ми ћемо заменити са $\forall n \in \mathbb{N}$ јер желимо да конструишемо низ, а узећемо да је $\delta = \frac{1}{n}$. Дакле за сваки природан број n постоји $x_n \in X$ тако да важи $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. На овај начин смо конструисали низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ из $X \setminus \{x_0\}$ за који важи $x_n \to x_0$ када $n \to +\infty$ а са друге стране је $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$ па не може да важи $f(x_n) \to L$ када $n \to +\infty$. Тиме смо дошли до контрадикције па претпоставка не важи, односно задовољена је једнакост $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

Овај доказ подразумева да су x_0 и L коначне вредности и сличан је доказу када су x_0 или L бесконачне вредности. □

Пример 102. Показати да не постоји $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$.

Претпоставимо да постоји овај лимес и да је једнак некој вредности L. Посматрамо два низа, $x_n = 2n\pi$ и $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$. Очигледно да оба низа имају граничну вредност $+\infty$. Низ вредности $f(x_n) = \sin(2n\pi) = 0$ је константан па важи $f(x_n) \to 0$ када $n \to +\infty$. Хајнеова карактеризација каже да је $L = 0$. Други низ вредности $f(y_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \to 1$ када $n \to +\infty$, па опет из Хајнеовог принципа следи да је $L = 1$. Ово је контрадикција па не постоји $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$. ♯

Претходна особина је последица општијег својства. Ако је f периодична функција и ако није константна онда она нема лимес у бесконачности. Нека су $a, b \in Dom(f)$ две тачке у којима f има различите вредности (ове тачке постоје јер f није константна функција) и нека је $T > 0$ период функције. Посматрамо низове $a_n = a + nT$ и $b_n = b + nT$. Оба низа теже ка $+\infty$ када $n \to +\infty$. Вредности функције на овим низовима су константне јер је $f(a_n) = f(a + nT) = f(a)$ док је $f(b_n) = f(b)$. Дакле граничне вредности низова $f(a_n)$ и $f(b_n)$ су различите па не постоји $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. На основу овога закључујемо да периодична функција не може имати хоризонталну асимптоту. А не може имати ни косу асимптоту што следи из чињенице да f има коначне вредности када је аргумент произвољно велик.

Као последицу Хајнеове карактеризације можемо да дамо карактеризацију непрекидности функције помоћу низова.

Последица 103. *Функција $f : X \to \mathbb{R}$ је непрекидна у тачки $x_0 \in X$ ако и само ако за сваки низ $x_n \in X$ важи*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Следећа теорема нам даје потребан и довољан услов постојања коначне граничне вредности функције.

Теорема 104. (Кошијев критеријум постојања лимеса у тачки) *Нека је дата функција $f : A \to \mathbb{R}$ при чему је $A \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ тачка нагомилавања скупа A. Тада постоји гранична вредност функције f у тачки a ако и само ако важи*

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, s, t \in A)\; 0 < |s - a| < \delta \wedge 0 < |t - a| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon. \tag{19}$$

Напомена 105. Битно је истаћи да у Кошијевом критеријуму не фигурише сама гранична вредност L која се појављује у дефиницији граничне вредности. Дакле овај критеријум показује да ли лимес постоји или не без обзира на то што можда не знамо која је вредност лимеса. $\diamond$

Доказ.

$\Longleftarrow$:

Нека функција f има граничну вредност, коју ћемо означити са L, у тачки a и нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада постоји $\delta > 0$ такво да је $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ кад год је $0 < |x - a| < \delta$. За тако одабрано δ важи

$$|f(s) - f(t)| = |f(s) - L + (L - f(t))| \overset{(*)}{\leq} |f(s) - L| + |f(t) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

кад год је $0 < |s - a| < \delta$ и $0 < |t - a| < \delta$ (у кораку $(*)$ смо искористили неједнакост троугла). Тиме смо доказали неједнакост са десне стране импликације (19).

$\Longleftarrow$:

Доказ овог смера, који користи Хајнеову карактеризацију, дајемо у два корака.

1. корак. Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ произвољан низ у $X\setminus\{x_0\}$ за који важи $x_n \to x_0$ када $n \to +\infty$. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно и нађимо $\delta > 0$ тако да важи (19). Тада ће постојати $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је за све $n \geq n_0$ задовољено $|x_n - x_0| < \delta$. Сада за све $m, n \geq n_0$ важи $0 < |x_n - x_0| < \delta$ и $0 < |x_m - x_0| < \delta$ па је на основу (19) задовољена неједнакост $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$. То значи да је низ $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев, па ће бити и конвергентан, односно постоји коначно $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.

Сада је питање зашто је за сваки низ који тежи ка x_0 ова гранична вредност иста. То ћемо показати у другом кораку.

2. корак. Нека је $x_n \in X \setminus \{x_0\}$ један произвољан низ који тежи ка x_0 и означимо са $L = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$. Нека је $y_n \in X \setminus \{x_0\}$ произвољан низ који тежи ка x_0 и нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Дефинишемо $\delta > 0$ из (19) и нађемо $n_1 \in \mathbb{N}$ такво да је $|y_n - x_0| < \frac{\delta}{2}$ за све $n \geq n_1$. И нека је $n_2 \in \mathbb{N}$ такво да је $|x_n - x_0| < \frac{\delta}{2}$ за све $n \geq n_2$. Дефинишемо

$$n_3 = \max\{n_1, n_2\}.$$

Тада је за све $n \geq n_3$ задовољено

$$|x_n - y_n| = |x_n - x_0 + x_0 - y_n| \leq |x_n - x_0| + |x_0 - y_n| < \delta.$$

Низ $f(x_n)$ тежи ка L па постоји $n_4 \in \mathbb{N}$ тако да је

$$|f(x_n) - L| < \varepsilon$$

за све $n \geq n_4$. На крају узмемо

$$n_0 = \max\{n_3, n_4\}.$$

Тада је за све $n \geq n_0$ задовољена неједнакост

$$|f(y_n) - L| \leq |f(y_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - L| < \varepsilon + \varepsilon,$$

при чему важи $|f(y_n) - f(x_n)| < \varepsilon$ јер су аргументи x_n и y_n на растојању мањем од δ. То значи да је $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = L$.

Сада на основу Хајнеове карактеризације закључујемо да је гранична вредност функције f у тачки x_0 једнака тој коначној вредности L, односно да постоји.

□

Пример 106. Дата је функција $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са

$$h(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Показати да је тачка $a = 0$ тачка прекида друге врсте функције h.

У произвољно малој десној околини тачке $a = 0$ постоје тачке домена облика $x_k = \frac{1}{2k\pi}$ и $y_k = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$, $k \in \mathbb{N}$, за које важи

$$|f(x_k) - f(y_k)| = \left|\sin(2k\pi) - \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right| = 1.$$

Тиме видимо да није задовољен Кошијев услов постојања лимеса па не постоји десни лимес функције h у тачки $a = 0$. ♯

6. Задаци

ОБЛАСТ 4

Диференцијабилност функција

Нека је $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ непрекидна функција. Посматрајмо две тачке са графика функције $A(x_0, f(x_0))$ и $B(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Једначина праве која пролази кроз ове две тачке је

$$p \; : \; y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0).$$

Дуж AB назива се и *тетивом* графика функције. Коефицијент правца ове праве (који је једнак тангенсу угла α између праве p и позитивног дела x-осе) је $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (видети Слику 1). Ако померамо тачку B по графику функције и приближавамо је тачки A видимо да ће се тетива приближавати *тангенти* t на график функције у тачки A (видети Слику 2). Коефицијент правца тангента t ће бити

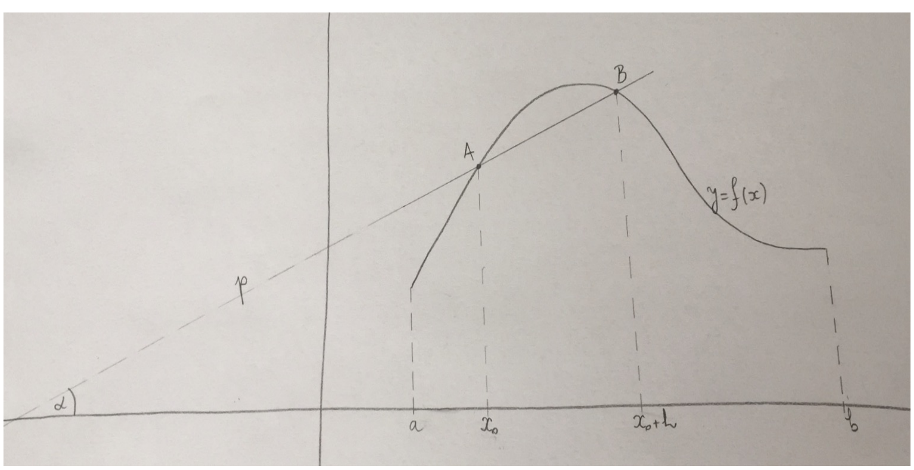
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ако овај лимес постоји. Постојање овог лимеса еквивалентно је диференцијабилности.

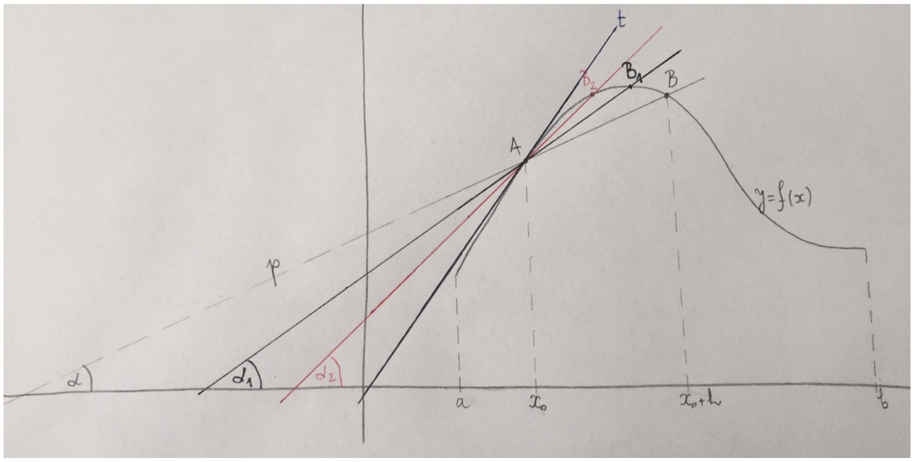
1. Извод функције

Дефиниција 1. Нека је $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ и нека је $x_0 \in (a, b)$. Ако постоји

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$



Слика 1. Тетива графика функције



Слика 2. Тетива функције се приближава тангенти графика у тачки A

кажемо да је функција *диференцијабилна у тачки* x_0. Овај лимес се назива *изводом функције* f *у тачки* x_0 и означава са $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$ или $\frac{d}{dx}f(x_0)$. Кажемо да је функција *диференцијабилна* ако је диференцијабилна у свакој тачки свог домена. $\Diamond$

Прво питање које се природно поставља јесте која је веза између непрекидности у тачки и диференцијабилности у тачки. О томе нам говори следећа теорема.

Теорема 2. *Ако је функција* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *диференцијабилна у тачки* $x_0\in(a,b)$ *онда је она у тој тачки и непрекидна.*

Доказ. Приметимо да је

$$\lim_{h\to 0}\big(f(x_0+h)-f(x_0)\big)=\lim_{h\to 0}\left[h\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right].$$

Лимес може да прође кроз производ јер лимеси и једне и друге функције постоје па је

$$\lim_{h\to 0}\big(f(x_0+h)-f(x_0)\big)=0\cdot f'(x_0)=0.$$

Закључујемо да је $\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)$, односно функција f је непрекидна у тачки x_0. $\square$

Није свака непрекидна функција диференцијабилна у тачки, другим речима не важи обрнута импликација у претходној теореми. То ћемо видети у следећем примеру.

Пример 3. Функција апсолутне вредности $f(x)=|x|$ је непрекидна у тачки $x=0$ али није диференцијабилна у тој тачки. Заиста, не постоји $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ јер су лимеси када $h\to 0+$ и $h\to 0-$ различити. Лимес када тачки 0 прилазимо са леве стране (где је функција једнака $f(x)=-x$) једнак је

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h}{h}=-1,$$

док са десне стране тачке 0 (где је функција једнака $f(x)=x$) добијамо лимес

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h}{h}=1.$$

Ако се подсетимо графика те функције видимо да у тачки $x=0$ имамо шиљак, као да се график функције ломи на том месту. $\sharp$

Већ на овом месту видимо потребу да разматрамо случајеве када постоје леви и десни лимеси израза (1).

Дефиниција 4. Нека $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ и нека је $x_0 \in (a,b)$. Ако постоји

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

он се назива *левим изводом функције* f *у тачки* x_0 и означава са $f'_-(x_0)$. *Десни извод функције* f *у тачки* x_0 једнак је лимесу (ако постоји)

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

и означава се са $f'_+(x_0)$. ◊

Знајући својства левог и десног лимеса можемо да закључимо да је функција диференцијабилна у тачки x_0 ако и само ако постоје леви и десни лимес у тој тачки и једнаки су.

У Примеру 3 смо показали да функција $|x|$ у тачки $x = 0$ има леви извод и једнак је -1 док је десни извод једнак 1.

Сада ћемо испитати диференцијабилност неких елементарних функција.

Пример 5. Константна функција $f(x) = C$ је диференцијабилна у свакој тачки и њен извод је једнак нули јер је

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{C - C}{h} = 0.$$

Закључујемо: **извод константне функције једнак је нули**. ♯

Пример 6. Сада ћемо наћи извод степене функције $f(x) = x^n$ где је $n \in \mathbf{N}$ фиксиран природан број. Нека је $x \in \mathbb{R}$ произвољна тачка. Тада је

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \overset{(*)}{=} \frac{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} \cdot h^j - x^n}{h} \\
&= \frac{x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot h + ... + n \cdot x \cdot h^{n-1} + h^n - x^n}{h} \\
&= \frac{h\left(n \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot h + ... + h^{n-1}\right)}{h} \\
&= n \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot h + ... + h^{n-1},
\end{aligned}$$

где је једнакост $(*)$ добијена применом биномне формуле. Када прођемо лимесом по $h \to 0$ закључујемо да је $f'(x) = nx^{n-1}$. ♯

Пример 7. У овом примеру испитујемо диференцијабилност експоненцијалне и логаритамске функције.

Нека је $f(x) = a^x$ где је $a > 0$ фиксирано. Знамо да је домен експоненцијалне функције скуп $\mathbb{R}$. Показаћемо да је f диференцијабилна у свакој тачки домена. За произвољно $x \in \mathbb{R}$ важи

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \left[a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} \right] = a^x \cdot \ln a,$$

јер је $\lim\limits_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$. Примећујемо да је $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ односно извод експоненцијалне функције e^x је опет експоненцијална функција e^x.

Нека је $g(x) = \ln x$. Знамо да је домен логаритамске функције $(0, +\infty)$ па има смисла испитивати диференцијабилност функције g само у тим тачкама. Опет применом основних лимеса добијамо

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln \dfrac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} \right] = \frac{1}{x}$$

јер је $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ а $\frac{h}{x} \to 0$ када $h \to 0$. Видећемо још један начин да израчунамо извод логаритамске функције када будемо формулисали Теорему о изводу инверзне функције. $\sharp$

Пример 8. Нека је $\alpha \in \mathbb{R}$ фиксиран број и посматрамо функцију $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ дефинисану са $f(x) = x^\alpha$. Желимо да испитамо диференцијабилност ове функције. Нека је $x > 0$ произвољно. Тада постоји извод функције $f'(x)$ и једнак је

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^\alpha(1+\frac{h}{x})^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0}\left[x^\alpha\cdot\frac{(1+\frac{h}{x})^\alpha - 1}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}\right] = \alpha\cdot x^{\alpha-1},$$

јер је $\lim\limits_{t\to 0}\frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha$. $\sharp$

Пример 9. Желимо да нађемо извод синусне и косинусне функције.

Извод косинуса је

$$\frac{d}{dx}\cos x = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \overset{(**)}{=} \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\left[-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right] = -\sin x,$$

где је једнакост $(**)$ формула за разлику косинуса а последња једнакост је добијена применом основног лимеса $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$.

Аналогни кораци нам дају извод синусне функције

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right] = \cos x.$$

$\sharp$

Вратимо се сада на дефиницију извода. Нека је функција f диференцијабилна у тачки x_0. То значи да је

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

односно

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + o(1),\ h\to 0.$$

Када све помножимо са h добијамо једнакост

$$f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0)\cdot h + o(h),\ h\to 0. \tag{2}$$

Приметимо сада да смо диференцијабилност могли да дефинишемо на још један начин, функција f је диференцијабилна у тачки x_0 ако постоји број A такав да важи

$$f(x_0+h) = f(x_0) + A\cdot h + o(h),\ h\to 0.$$

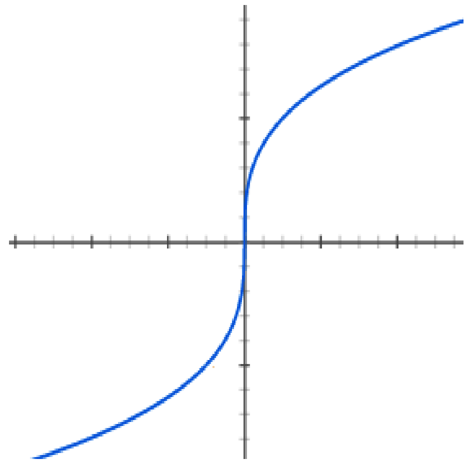
У том случају кажемо да је број A извод функције f у тачки x_0, $A = f'(x_0)$. Ова дефиниција је згоднија за уопштење извода када је функција f дефинисана на вишедимензионим просторима, нпр. $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$ а нама ће бити згодна и за доказ теореме о диференцирању композиције функција.

Истакнимо још једну лепу особину диференцијабилне функције коју можемо да уочимо из једнакости (2). Приметимо да заправо важи апроксимација

$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot h$$

када је h довољно мало. Ако десну страну видимо као једначину праве где нам прираштај h игра улогу разлике $x - x_0$ видимо да је то једначина тангенте t на график функције у тачки x_0. Једначина (2) каже да се график диференцијабилне функције у малој околини тачке x_0 налази произвољно близу тангенте. Још једном ћемо нагласити да је једначина тангенте на график функције f у тачки x_0 у којој је функција диференцијабилна

$$t\ :\ y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



Слика 3. График функције $f(x) = \sqrt[5]{x}$

Коефицијент правца ове праве који је дат изводом функције у тачки x_0, $f'(x_0)$, једнак је тангенсу угла који тангента гради са позитивним делом x-осе.

Напоменимо да диференцијабилност може да се дефинише и у проширеном смислу (и за леве и десне изводе) ако дозволимо да лимес у (1) узима вредности у $\overline{\mathbb{R}}$. На конкретним примерима ћемо видети шта геометријски значи да је извод у тачки (или једнострани извод) једнак $+\infty$ или $-\infty$.

Пример 10. Посматрајмо функцију $f(x) = \sqrt[5]{x}$ чији је домен $\mathbb{R}$. Желимо да испитамо њену диференцијабилност у тачки $x = 0$. Тражимо

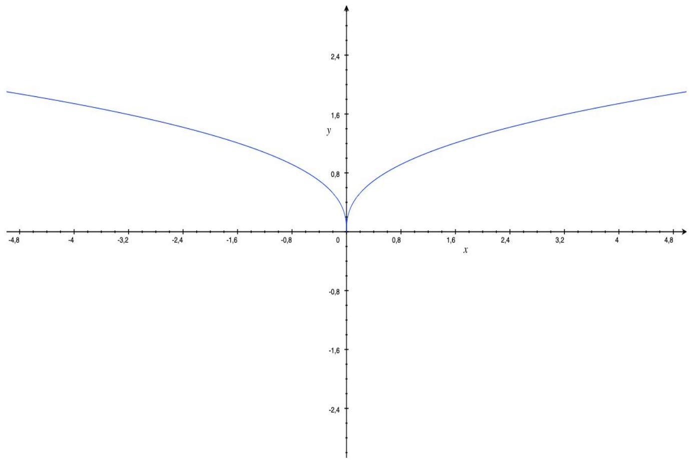
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[5]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[5]{h^4}} = +\infty.$$

Видимо да је функција $\sqrt[5]{x}$ диференцијабилна у проширеном смислу у тачки $x = 0$. Ако погледамо график ове функције (Слика 3) видимо да је график функције приљубљен уз y-осу у околини тачке $x = 0$, заправо тангента на график функције у тој тачки је права $x = 0$ (односно $y-$оса). Знамо да је тангенс угла који граде тангента и позитиван део $x-$осе (који је у овом случају једнак вредности $\frac{\pi}{2}$) једнак изводу функције. Ако се подсетимо особина тангенса, па приметимо да његова вредности тежи ка $+\infty$ када угао тежи ка $\frac{\pi}{2}-$ можемо да видимо да се ова диференцијабилност у проширеном смислу слаже са геометријском сликом обичне диференцијабилности коју смо изградили до сада. ♯

Пример 11. У овом примеру ћемо разматрати функцију $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$. Домен функције је $\mathbb{R}$ а нас занима њена диференцијабилност у тачки $x = 0$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[5]{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[5]{h^3}}.$$

Приметимо да се једнострани лимеси разликују јер је $\lim\limits_{h\to 0-} \frac{1}{\sqrt[5]{h^3}} = -\infty$ док је $\lim\limits_{h\to 0+} \frac{1}{\sqrt[5]{h^3}} = +\infty$. То значи да леви и десни извод у тачки $x = 0$ постоје у проширеном смислу. Ако погледамо график ове функције (Слика 4) можемо да приметимо да је график функције са леве стране тачке $x = 0$ приљубљен уз $y-$осу и да функција опада док је график са десне стране тачке $x = 0$ такође приљубљен уз $y-$осу али да ту функција расте (касније ћемо видети како нам знак извода одређује монотоност функције). Видимо да функција није диференцијабилна у проширеном смислу у тачки $x = 0$. ♯



Слика 4. График функције $f(x)=\sqrt[5]{x^2}$

2. Својства диференцијабилних функција

У овом делу показујемо како се извод понаша у односу на основне операције и композицију. Такође ћемо показати како се диференцира инверзна функција.

Теорема 12. (Линеарност извода) *Нека су функције $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ диференцијабилне у тачки $x_0\in(a,b)$ и $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Тада је функција $\alpha f+\beta g$ диференцијабилна у тачки x_0 и важи*

$$(\alpha f+\beta g)'(x_0)=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0).$$

Доказ. Доказ следи из познате линеарности лимеса

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(\alpha f+\beta g)(x_0+h)-(\alpha f+\beta g)(x_0)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{\alpha f(x_0+h)+\beta g(x_0+h)-\alpha f(x_0)-\beta g(x_0)}{h}\\&\overset{(***)}{=}\alpha\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\beta\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\\&=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0).\end{aligned}$$

при чему смо у једнакости $(***)$ могли да прођемо лимесом кроз збир јер лимеси са десне стране постоје. □

Следећа теорема нам каже како се диференцира производ диференцијабилних функција и позната је као Лајбницово правило.

Теорема 13. (Лајбницово правило) *Ако су функције $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ диференцијабилне у тачки $x_0\in(a,b)$ тада је и функција $f\cdot g$ диференцијабилна у тачки x_0 и важи*

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

Доказ. Доказ теореме следи из следећих једнакости

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}\\&\quad=\lim_{h\to 0}\left[f(x_0+h)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}+g(x_0)\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right]\\&\quad=f(x_0)\cdot g'(x_0)+g(x_0)\cdot f'(x_0).\end{aligned}$$

У последњој једнакости лимес пролази кроз суму и производ јер сви лимеси са десне стране постоје а функција f је непрекидна па ће важити $\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)$. □

Сада ћемо показати како се диференцира количник две функције.

Теорема 14. *Нека су функције $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ диференцијабилне у тачки $x_0 \in (a,b)$ при чему важи $g(x_0) \neq 0$. Тада је и $\frac{f}{g}$ диференцијабилна у x_0 и важи*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}. \tag{3}$$

Доказ. Показаћемо да важи

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}$$

а онда ће једнакост (3) следити применом ове једнакости и Лајбницовог правила на производ $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$. Посматрамо прираштај функције $\frac{1}{g}$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g}(x_0+h) - \frac{1}{g}(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{g(x_0+h)\cdot g(x_0)\cdot h} \\
&= -\lim_{h\to 0} \left[\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \cdot \frac{1}{g(x_0+h)} \cdot \frac{1}{g(x_0)}\right] \\
&= -\frac{g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}.
\end{aligned}$$

Лимес на крају може да прође кроз производ јер сви лимеси постоје а функција g је непрекидна у тачки x_0. Приметимо да има смисла делити са $g(x_0+h)$ јер смо рекли да ако је нека функција непрекидна у x_0 и различита од нуле у тој тачки онда ће постојати нека околина од x_0 на којој је функција различита од нуле. □

Сада можемо да нађемо извод још неких тригонометријских функција.

Пример 15. Користећи правило диференцирања количника две функције можемо да закључимо да су тангенсна и котангенсна функција диференцијабилне на свом домену и да је њихов извод једнак

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{(\sin x)'\cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x}, \\
\frac{d}{dx}\operatorname{ctg} x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{(\cos x)'\cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{(\sin x)^2} = -\frac{1}{\sin^2 x}.
\end{aligned}$$

♯

Композиција диференцијабилних функција ће бити диференцијабилна функција. Следећа теорема нам објашњава како се диференцира композиција две функције.

Теорема 16. (Извод сложене функције) *Нека је функција $f : (a,b) \to (\alpha, \beta)$ диференцијабилна у тачки $x_0 \in (a,b)$ а функција $g : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ диференцијабилна у тачки $y_0 = f(x_0)$. Тада је функција $g \circ f : (a,b) \to \mathbb{R}$ диференцијабилна у тачки x_0 и важи*

$$(g\circ f)'(x_0) = g'\left(f(x_0)\right)\cdot f'(x_0). \tag{4}$$

Доказ. Занима нас да ли постоји следећи лимес

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h}. \tag{5}$$

Најзгодније би било када бисмо израз под лимесом поделили и помножили са $f(x_0+h) - f(x_0)$ али то некада може да буде једнако нули. Зато нам је згодније да за испитивање прираштаја

$g(f(x_0+h))-g(f(x_0))$ користимо алтернативну дефиницију извода коју смо раније објаснили. Означимо са $t=f(x_0+h)-f(x_0)=f(x_0+h)-y_0$. Знамо да је функција f диференцијабилна у тачки x_0 па ће бити и непрекидна одакле закључујемо да $t\to 0$ када $h\to 0$.

$$\begin{aligned} g(f(x_0+h))-g(f(x_0)) &= g(y_0+t)-g(y_0)=g'(y_0)\cdot t+o(t)\\ &= g'(y_0)\cdot(f(x_0+h)-f(x_0))+o(f(x_0+h)-f(x_0))\\ &= g'(y_0)\cdot(f'(x_0)\cdot h+o(h))+o(f'(x_0)\cdot h+o(h))\\ &= g'(y_0)\cdot f'(x_0)\cdot h+o(h),\ h\to 0. \end{aligned}$$

У последњем кораку смо израз $g'(y_0)\cdot o(h)+o(f'(x_0)\cdot h+o(h))$ изједначили са $o(h)$ (то су особине релације $o(\cdot)$ које смо раније доказали). Закључујемо да је функција $g\circ f$ диференцијабилна у тачки x_0 и да је њен извод дат једнакошћу (4). □

Сада ћемо формулисати и доказати теорему која нам показује како изгледа извод инверзне функције.

Теорема 17. (Извод инверзне функције) *Нека је функција $f:(a,b)\to(\alpha,\beta)$ диференцијабилна у тачки $x_0\in(a,b)$ при чему је $f'(x_0)\neq 0$ и нека постоји њој инверзна функција $f^{-1}:(\alpha,\beta)\to(a,b)$ која је диференцијабилна у тачки $y_0=f(x_0)$. Тада је*

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}.$$

Доказ. Теорема се доказује диференцирањем композиције $f\circ f^{-1}$. Приметимо да је ова композиција идентичко пресликавање

$$f\circ f^{-1}:(\alpha,\beta)\to(\alpha,\beta)$$

за које у свакој тачки $y\in(\alpha,\beta)$ важи $(f\circ f^{-1})(y)=y$. Ако се подсетимо Примера 6 можемо да закључимо да је извод идентичког пресликавања једнак јединици, односно

$$\frac{d}{dy}(f\circ f^{-1})(y)=1.$$

Применом Теореме 16 у тачки $y=y_0$ закључујемо

$$f'(f^{-1}(y_0))\cdot(f^{-1})'(y_0)=1,$$

што је и требало показати. □

Напомена 18. Претходна теорема важи и под слабијим условима. Довољно је претпоставити да је функција f^{-1} непрекидна у тачки y_0. Тада ће она бити и диференцијабилна. Доказ у овом облику не пролази за теорему са слабијим претпоставкама. ◇

Пример 19. Сада ћемо на још један начин наћи извод логаритамске функције. Нека је $f(x)=e^x$. Знамо шта је њој инверзна функција, $f^{-1}(y)=\ln y$ а видели смо и да је извод експоненцијалне функције сама та функција, $f'(x)=e^x$. Применом Теореме 17 долазимо до једнакости

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\frac{1}{f'(\ln y)}=\frac{1}{e^{\ln y}}=\frac{1}{y},$$

а ово смо већ видели у Примеру 7. ♯

3. Основне теореме диференцијалног рачуна

У овом поглављу ћемо посматрајући извод функције испитивати нека својства функција. Прво ћемо дефинисати шта то значи да је нека тачка домена тачка локалног екстремум функције $f:X\to\mathbb{R}$.

Дефиниција 20. Кажемо да је тачка $x_0 \in X$ тачка

- *Локалног максимума* функције f ако постоји $\delta > 0$ тако да за свако $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ важи $f(x) \leq f(x_0)$,
- *Локалног минимума* функције f ако постоји $\delta > 0$ тако да за свако $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ важи $f(x_0) \leq f(x)$,
- *Строгог локалног максимума* функције f ако постоји $\delta > 0$ тако да за свако $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ важи $f(x) < f(x_0)$,
- *Строгог локалног минимума* функције f ако постоји $\delta > 0$ тако да за свако $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ важи $f(x_0) < f(x)$.

Кажемо да је $x_0 \in X$ тачка *тачка (строгог) локалног екстремума* ако је x_0 тачка (строгог) локалног максимума или тачка (строгог) локалног минимума. ♢

Теорема 21. (Фермаова теорема) *Ако функција $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ у тачки $x_0 \in (a, b)$ има локални екстремум и ако је она диференцијабилна у тој тачки тада је $f'(x_0) = 0$.*

Доказ. Не умањуући општост можемо претпоставити да је x_0 тачка локалног максимума (ако је x_0 локални минимум онда посматрамо функцију $-f$ која ће у x_0 имати локални максимум). Ако је прираштај $h > 0$ онда ће важити

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \tag{6}$$

у некој десној околини тачке x_0. Знамо да је f диференцијабилна у тачки x_0 па ће постојати и десни извод. Када неједнакост (6) нападнемо лимесом по $h \to 0+$ видимо да ће важити

$$f'_+(x_0) \leq 0.$$

За негативан прираштај $h < 0$ ће важити

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \tag{7}$$

у некој левој околини тачке x_0. Сада ову неједнакост нападнемо са лимесом $h \to 0-$ и закључујемо да важи

$$f'_-(x_0) \geq 0.$$

Из диференцијабилности функције у тачки x_0 знамо да су леви и десни извод једнаки па је

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0,$$

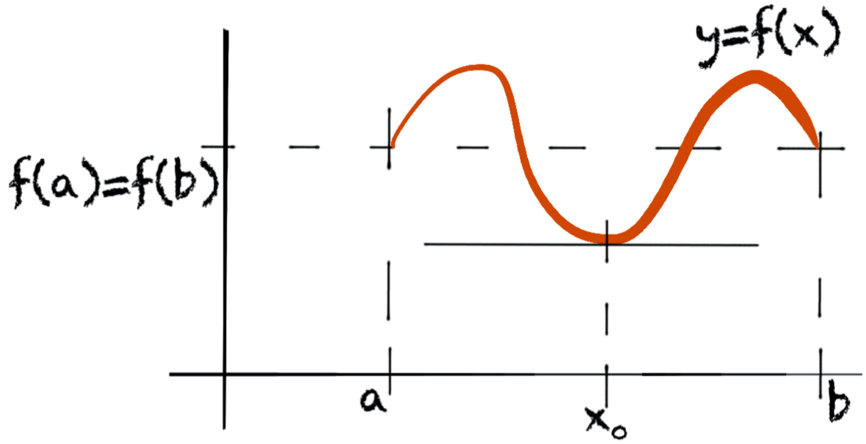
односно $f'(x_0) = 0$ а то је требало показати. □

Истакнимо да се ова теорема односи на унутрашње тачке домена. Видимо да је претпоставка да је **тачка x_0 у отвореном интервалу** (a, b). Тај услов је веома битан а то се види на следећем примеру.

Пример 22. Функција $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ дата са $f(x) = 3x^3 + 7x$ има локални минумум у тачки $x = 0$ а локални максимум у тачки $x = 1$, иако је $f'(x) = 9x^2 + 7 \neq 0$ за све x из домена функције. ♯

Као последицу Фермаове теореме можемо да извучемо следећи закључак. Да би функција $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ имала локални екстремум у тачки $x_0 \in (a, b)$ (отвореног интервала) потребно је да буду испуњена један од следећа два услова: или f није диференцијабилна у тачки x_0 или је f диференцијабилна у x_0 и важи $f'(x_0) = 0$.

Пример 23. Описани услов није довољан. Односно, ако је нека тачка нула првог извода она не мора да буде локални екстремум. Пример за то је функција $f(x) = x^3$, $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Тачка $x = 0$ је нула првог извода али не и тачка локалног екстремума. Приметимо да је $f(0) = 0$ и да је функција позитивна са десне стране тачке нула а негативна са леве стране нуле. То значи да вредност нула ни највећа ни најмања коју функција f може да узме. ♯



Слика 5. Пример функције која задовољава поставке Ролове теореме

Теорема 24. (Ролова теорема) *Нека је функција $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна на $[a,b]$ и диференцијабилна на (a,b) при чему важи $f(a) = f(b)$. Тада ће постојати тачка $x_0 \in (a,b)$ таква да је $f'(x_0) = 0$.*

Пре него пређемо на доказ теореме даћемо једну геометријску интерпретацију која нам (на нивоу слика) омогућава да боље разумемо саму теорему. Ролова теорема нам каже да ће постојати тачка у којој је тангента на график функције паралелна са $x-$осом а уједно и са правом која спаја две тачке са графика $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ (видети Слику 5). У овом конкретном примеру са слике видимо да ће то бити тачка локалног минимума а када прођемо кроз доказ теореме видећемо да је то главна идеја.

Доказ. Како је функција f непрекидна то значи да ће на основу Вајерштрасове теореме она достизати свој максимум и минимум на $[a,b]$, максимум у некој тачки $M \in [a,b]$ а минимум у некој тачки $m \in [a,b]$. Јасно је да сада желимо да завршимо доказ користећи се Фермаовом теоремом. Мораћемо пре тога посебно да разматрамо случај када ови екстремуми нису у отвореном интервалу.

Дакле ако се екстремуми достижу у тачкама a или b, односно ако имамо једнакост скупова $\{m, M\} = \{a, b\}$ тада је максимална вредност функције једнака њеној минималној вредности јер је $f(a) = f(b)$. То значи да је функција константна на целом интервалу па ће њен извод свуда бити једнк нули, односно за тачку x_0 можемо да узмемо било коју тачку из (a,b).

Ако је бар једна тачка m или M у отвореном интервалу (a,b) тада ће она бити тачка локалног екстремума, у њој је f диференцијабилна јер је диференцијабилна свуда на (a,b) па ће на основу Фермаове теореме то бити нула првог извода. То је тражена тачка x_0. □

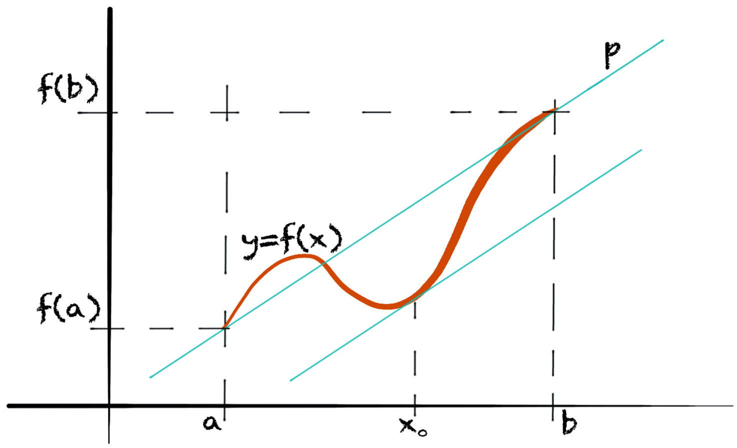
Теорема 25. (Кошијева теорема) *Нека су дате две функције $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ које су непрекидне на $[a,b]$ и диференцијабилне на (a,b) при чему је $g'(x) \neq 0$ за све $x \in (a,b)$. Тада ће постојати тачка $x_0 \in (a,b)$ таква да важи*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Напомена 26. Приметимо да у поставци теореме има смисла делити са $g(b) - g(a)$ јер овај израз није једнак нули. Ако би он био једнак нули онда би на основу Ролове теореме постојала нула првог извода функције g а претпоставка теореме је да је $g' \neq 0$ на (a,b). ◇

Доказ. Посматрајмо функцију

$$F(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x).$$



Слика 6. Геометријска интерпретација Лагранжеве теореме

Важи $F(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$ и $F(b) = g(a)f(b) - f(a)g(b)$. Функција F је непрекидна на $[a,b]$ и диференцијабилна на (a,b) као композиција таквих. Видимо да F задовољава услове Ролове теореме па ће њен први извод имати нулу у некој тачки $x_0 \in (a,b)$. Правилима диференцирања закључујемо

$$F'(x) = (f(b) - f(a))\, g'(x) - (g(b) - g(a))\, f'(x)$$

па је

$$(f(b) - f(a))\, g'(x_0) - (g(b) - g(a))\, f'(x_0) = 0.$$

□

Сада ћемо формулисати теорему која је директна последица Кошијеве теореме а има лепу геометријску интерпретацију.

Теорема 27. (Лагранжева теорема) *Нека је функција* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *непрекидна на* $[a,b]$ *и диференцијабилна на* (a,b). *Тада ће постојати тачка* $x_0 \in (a,b)$ *таква да важи*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0). \tag{8}$$

Напомена 28. Лева страна једначине (8) представља нагиб тетиве која спаја две тачке на графику $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ (то је права p на Слици 6). Десна страна једначине (8) представља нагиб тангентне на график функције f у тачки x_0. Лагранжева теорема каже да ће постојати тачка на графику диференцијабилне функције у којој је тангента паралелна тетиви која спаја две тачке на графику.

И Кошијева теорема има геометријску интерпретацију али за њу морамо прво да објаснимо шта је крива. График функције је једна крива у равни али није свака крива график функције. Још неки примери кривих су права у равни или круг. Круг није график ни једне функције а нпр. праву $y = 0$ не можемо да видимо као график неке функције $y = f(x)$. У том случају можемо криве да задамо *параметарски*, односно да тачке са криве $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ опишемо као пресликавање чији је аргумент *параметар* t, $(x,y) = (\alpha(t), \beta(t))$ где су α и β неке функције. Ово нам омогућава да рачунамо и радимо са кривама као да су графици неких функција. Круг у равни задат једначином $x^2 + y^2 = 1$ има параметризацију $(x,y) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ где је параметар φ заправо угао између позитивног дела x-осе и праве која спаја центар са тачком на кругу. Кошијева теорема има исти геометријску интерпретацију као и Лагранжева теорема за график параметарски задате криве $(x,y) = (f(t), g(t))$ где су f и g функције из поставке теореме. ◇

Доказ. Доказ следи из Кошијеве теореме када специјално узмемо да је $g(x) = x$. □

Сада долазимо до последице која на основу знака првог извода функције испитује да ли је функција (строго) монотона или константна.

Последица 29. *Нека је дата диференцијабилна функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Тада важи*

- $f'(x) = 0$ *за све* $x \in (a, b) \iff f$ *константна функција,*
- *Ако је* $f'(x) \geq 0$ *за све* $x \in (a, b) \iff f$ *растућа функција,*
- *Ако је* $f'(x) > 0$ *за све* $x \in (a, b) \implies f$ *строго растућа функција,*
- *Ако је* $f'(x) \leq 0$ *за све* $x \in (a, b) \iff f$ *опадајућа функција,*
- *Ако је* $f'(x) < 0$ *за све* $x \in (a, b) \implies f$ *строго опадајућа функција,*

Доказ. Свака тачка се доказује применом Лагранжеве теореме. Нека су $x_1, x_2 \in (a, b)$ два тачке за које је $x_1 < x_2$. Тада ће важити

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \tag{9}$$

за неку тачку $\xi \in (x_1, x_2)$.

Из овога је очигледно да ако је $f' \equiv 0$ онда ће f у свим тачкама интервала имати исту вредност а већ од раније знамо да је извод контанте једнак нули. Тиме је показана прва тачка.

Ако је $f' > 0$ (односно $f' < 0$) онда ће и разлика бити истог знака $f(x_2) - f(x_1) > 0$ (односно $f(x_2) - f(x_1) < 0$) па тиме смо показали трећу и пету тачку.

Преостаје нам да покажемо другу и четврту тачку. Смерови са леве на десну страну следе исто из једнакости (9). За обрнуте смерови се враћамо на дефиницију извода у произвољно тачки $x_0 \in (a, b)$. Како је фунција диференцијабилна довољно је посматрати само нпр. леви извод. Знамо да је у левој околини, односно за приращтаје $h < 0$ количник

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ненегативан ако је f растућа функција а непозитиван ако је f опадајућа. А преласком на лимес по $h \to 0-$ добијемо да је знак извода исти као из исказа последице. □

Пример 30. Истакнимо још једну битну ствар у претходним тврђењима. Домени функција су свуда интервали. Ако имамо рупу у домену онда тврђења неће важити. Најједноставнији пример за тако нешто је следећа функција $f : [0, 1] \cup [3, 5] \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 15, & 3 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Ова функција је непрекидна на свом домену и диференцијабилна на $(0, 1) \cup (3, 5)$. Њен извод је свуда једнак нули али f није константна функција. Напоменимо још једном, ово није у контрадикцији са Последицом 29 јер домен ове функције није интервал па на њу и не можемо да применимо последицу. ♯

Пример 31. Приметимо да у претходној последици неки искази садрже импликације а неки еквиваленције. У исказима са импликацијом обрнут смер не важи. Пример за то у трећој тачки је функција $f(x) = x^3$ која је строго растућа али не важи $f' > 0$ на њеном домену јер први извод $f'(x) = 3x^2$ има вредност нула у тачки $x = 0$. ♯

4. Лопиталова правила

Када смо дефинисали операције у проширеном скупу реалних бројева $\overline{\mathbb{R}}$ рекли смо да су изрази облика

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{0}{0}\ , 0\cdot(\pm\infty),\ +\infty-(+\infty),\ 1^{\pm\infty},\ (+\infty)^0,\ 0^0$$

неодређени. Када смо те изразе посматрали као лимесе видели смо да као резултат можемо да добијемо различите вредности. Сада ћемо доказати теорему која нам помаже да у неким случајевима израчунамо лимесе који су облика $\frac{0}{0}$ или било шта кроз $\pm\infty$.

Теорема 32. (Лопиталова правила) *Нека су функције $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ диференцијабилне на (a, b), $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, и нека је $g'(x) \neq 0$ за све $x \in (a, b)$. Нека је*

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ако је $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = \infty$ тада ће постојати и $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}$ и важиће

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Напомена 33. Претходно тврђење важи и ако посматрамо $\lim\limits_{x\to b-}$. Приметимо у поставци теореме да a може да узима вредност $-\infty$ и b може да узме вредност $+\infty$, па теорема важи и ако посматрамо $\lim\limits_{x\to-\infty}$ или $\lim\limits_{x\to+\infty}$. ◇

Доказ. Прво ћемо извести доказ када је $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = 0$. Додефинисаћемо функције у тачки $x = a$ тако да добијемо непрекидне функције,

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & a < x < b \\ 0, & x = a, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x), & a < x < b \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

Функције F и G су непрекидне на $[a, b)$ и диференцијабилне на (a, b). Ако узмемо произвољно $x \in (a, b)$ тада су F и G непрекидне на $[a, x]$ и диференцијабилне на (a, x), важи $G' = g' \neq 0$ на (a, x). Дакле можемо да применимо Кошијеву теорему на ове две функције па ће важити

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

за неку тачку $\xi \in (a, x)$. Када погледамо дефиниције функција видимо да је

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Сада ову једнакост нападнемо лимесом по $x \to a+$. Тада ће и $\xi \to a+$ јер важи $a < x < \xi$. Одатле добијемо закључак теореме

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Нека је сада $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = +\infty$ и нека је $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}$ (посебно ћемо разматрати случај када је $A = \infty$). Узмимо $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада ће постојати $\delta > 0$ такво да је

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon \tag{10}$$

за све $x \in (a, a + \delta)$. Одаберимо $\beta \in (a, a + \delta)$ произвољно. Како $g \to +\infty$ онда ће постојати $\delta_1 < \beta - a$ такво да је

$$g(t) > g(\beta)$$

за све $t \in (a, a+\delta_1)$. Даља идеја је да β фиксирамо а да нам параметар t тежи ка $a+$. Сада применимо Кошијеву теорему на тачке t и β за функције f и g. Важиће

$$\frac{f(t)-f(\beta)}{g(t)-g(\beta)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

за неко $\xi \in (t, \beta)$. Како је ово ξ у интервалу $(a, a+\delta)$ онда ће важити процена (10) па је

$$A - \varepsilon < \frac{f(t)-f(\beta)}{g(t)-g(\beta)} < A + \varepsilon.$$

Када средимо овај израз долазимо до следећег облика

$$(A-\varepsilon)\left(1 - \frac{g(\beta)}{g(t)}\right) + \frac{f(\beta)}{g(t)} < \frac{f(t)}{g(t)} < (A+\varepsilon)\left(1 - \frac{g(\beta)}{g(t)}\right) + \frac{f(\beta)}{g(t)}.$$

Када пустимо да $t \to a+$ онда $\frac{g(\beta)}{g(t)} \to 0$ и $\frac{f(\beta)}{g(t)} \to 0$ јер $g(t) \to +\infty$ а β је фиксирано. У неједнакости скроз лева страна тежи ка $A-\varepsilon$ и скроз десна страна тези ка $A+\varepsilon$ при чему је ε произвољно мало па ће и $\frac{f(t)}{g(t)}$ тежити ка A када $t \to a+$.

Ако је $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$. Тада узмемо произвољно $C > 0$ уместо $\varepsilon > 0$ и ово C ће нам бити произвољно велика величина. Неједнакост (10) заменимо са

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > C$$

и долазимо до неједнакости

$$\frac{f(t)}{g(t)} > C\left(1 - \frac{g(\beta)}{g(t)}\right) + \frac{f(\beta)}{g(t)}.$$

Десна страна неједнакости је произвољно велика када $t \to a+$ па ће и $\frac{f(t)}{g(t)}$ тежити ка $+\infty$ када $t \to a+$. □

Сада ћемо видети неке примере у којима нам Лопиталова правила помажу да лако срачунамо лимесе.

Пример 34. Нека је $\alpha > 0$ фиксирана константа. Тада је

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Овде смо у првом кораку искористили Лопиталова правила што смемо јер $x^\alpha \to +\infty$ када $x \to +\infty$. Када диференцирамо и бројилац и именилац долазимо до средњег израза. Знамо да лимес тог израза постоји па ће постојати лимес количника функција $\ln x$ и x^α и биће једнак нули. Приметимо да је прва једнакост под знаком питања све док не закључимо да лимес количника извода постоји. Када закључимо да постоји онда прва једнакост заиста важи. ♯

Пример 35. Нека су сада $\alpha > 0$ и $a > 1$ фиксиране константе. Занима нас чему је једнак

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x}.$$

Када једном искористимо Лопиталова правила долазимо до следећег лимеса

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x \ln a}.$$

Снизили смо степен од x у бројиоцу али лимес израза зависи од знака $\alpha - 1$. Ако је $\alpha - 1 \le 0$ онда цео израз тежи ка нули. Ако је $\alpha - 1 > 0$ онда добијемо облик $\frac{\infty}{\infty}$. Идеја је да у том случају још једном искористимо Лопиталова правила па заправо проблем сводимо на питање

да ли постоји
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{a^x(\ln a)^2}.$$
А сада знамо да је овај лимес 0 ако је $\alpha-2\le 0$ а у супротном опет искористимо Лопиталова правила. Како је $\alpha>0$ фиксиран број сигурно постоји природан број $m\in\mathbb{N}$ такав да је $\alpha-m\le 0$. После m корака наше питање се своди на то да ли постоји
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)x^{\alpha-m}}{a^x(\ln a)^m}?$$
Очигледно је да ће овај лимес бити једнак нули, па је
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0.$$
♯

На овај начин смо добили поредбену скалу
$$\ln x\ll x^\alpha\ll a^x,\ x\to+\infty$$
за све $a>1$ и $\alpha>0$.

5. Изводи вишег реда

Ако је функција $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ диференцијабилна онда можемо да посматрамо извод изводне функције $f':(a,b)\to\mathbb{R}$. Ако је функција f' диференцијабилна у тачки $x_0\in(a,b)$ онда тај извод $(f')'(x_0)$ називамо *другим изводом функције* f и означавамо га са $f''(x_0)$.

На тај начин за свако $n\in\mathbb{N}_0$ можемо да дефинишемо *$n-$ти извод функције* f, у ознаци $f^{(n)}$. Узимамо да је по дефиницији нулти извод функције сама та функција
$$f^{(0)}(x):=f(x).$$
Ако знамо извод реда $(n-1)$, $f^{(n-1)}(x)$, онда се $n-$ти извод дефинише као
$$f^{(n)}(x):=\left(f^{(n-1)}\right)'(x).$$
Користићемо још једну ознаку за $n-$ти извод, $\frac{d^nf}{dx^n}$.

Кажемо да је функција f *n пута диференцијабилна* ако има $n-$ти извод. Ако функција има извод сваког реда кажемо да је она *бесконачно пута диференцијабилна.*

Сада ћемо кроз примере видети како се рачунају изводи вишег реда неких елементарних функција.

Пример 36. Посматрајмо линеарну функцију $f(x)=x+17$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Ова функција је диференцијабилна на свом домену и њен први извод је $f'(x)=1$ за сваку тачку $x\in\mathbb{R}$. Сада је и изводна функција (која је константа) диференцијабилна свуда на $\mathbb{R}$ и њен дуги извод је једнак нули, $f''(x)=0$ за свако $x\in\mathbb{R}$. Сви следећи изводи вишег реда једнаки су нули.

Ако хоћемо да диференцирамо неки полином трећег степена $p(x)=x^3+7x$ долазимо до следећих извода. $p'(x)=3x^2+7$, затим $p''(x)=6x$, трећи извод је константа $p'''(x)=6$ док је четврти и сваки извод вишег реда једнак нули $p^{(n)}(x)=0$, $n\ge 4$.

И општије, изводи вишег реда степене функције $g(x)=x^\alpha:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ једнаки су
$$g^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)\cdot x^{\alpha-n}.$$
Видимо да ако је α природан број онда ће сви изводи реда већег од α бити једнаки нули. ♯

Пример 37. Раније смо рекли да је извод експоненцијалне функције e^x сама та функција. Када наставимо индукцијом закључујемо да је $n-$ти извод функције e^x такође e^x и то за свако $n\in\mathbb{N}_0$, $(e^x)^{(n)}=e^x$. ♯

Пример 38. Можемо да одредимо n-те изводе синусне и косинусне функције. Знамо да је $(\sin x)' = \cos x$ и $(\cos x)' = -\sin x$. Када још једном диференцирамо синусну функцију закључујемо

$$(\sin x)'' = ((\sin x)')' = (\cos x)' = -\sin x.$$

Трећи извод једнак је

$$(\sin x)''' = ((\sin x)'')' = (-\sin x)' = -\cos x,$$

док је четврти извод

$$(\sin x)^{(4)} = ((\sin x)''')' = (-\cos x)' = \sin x.$$

Сада се изводи понављају па закључујемо да је

$$(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \sin x, & n = 4k \\ \cos x, & n = 4k+1 \\ -\sin x, & n = 4k+2 \\ -\cos x, & n = 4k+3. \end{cases}$$

Слична идеја се користи при налажењу извода вишег реда косинусне функције

$$(\cos x)^{(n)} = \begin{cases} \cos x, & n = 4k \\ -\sin x, & n = 4k+1 \\ -\cos x, & n = 4k+2 \\ \sin x, & n = 4k+3. \end{cases}$$

♯

Пример 39. Сада ћемо видети чему су једнаки изводи вишег реда логаритамске функције. Означимо са $h(x) = \ln x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Ова функција ће бити бесконачно пута диференцијабилна на свом домену и знамо да је њен први извод

$$h'(x) = \frac{1}{x}.$$

Када ову функцију диференцирамо добијамо

$$h''(x) = -\frac{1}{x^2},$$

а онда и

$$h'''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Видимо да се у сваком кораку степен од x (који се налази у имениоцу) повећава а да бројиоц у сваком кораку множимо са природним бројем који је за један мањи од реда извода. На тај начин долазимо до једнакости

$$h^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

која важи за свако $n \in \mathbb{N}$ и која се једноставно доказује индукцијом. ♯

Следећа теорема сумира својства извода вишег реда.

Теорема 40. *Нека функције $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ имају изводе реда n у тачки $x \in (a, b)$. Тада важи*

- **(Линеарност извода)** $(\lambda f + \mu g)^{(n)}(x) = \lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x)$ *за све* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
- **(Уопштено Лајбницово правило)** $(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$.

Доказ. Линеарност извода вишег реда тривијално следи из линеарности првог извода а то смо показали у Теореми 12.

Уопштено Лајбницово правило се доказује индукцијом по n. За $n = 1$ тврђење важи јер је то обично Лајбницово правило које смо показали у Теореми 13. Нека формула важи за природан број n желимо да покажемо да важи и за $n+1$ односно да извод реда $n+1$ може да се представи као

$$(f \cdot g)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x).$$

Кренемо од леве стране

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(n+1)}(x) &= \left((f \cdot g)^{(n)}\right)'(x) && \text{//искористимо индукцијску хипотезу}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)\right)' && \text{//линеарност првог извода + Лајбинц}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x)\right) && \text{//сада раздвојимо суме}\\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} f^{(j)}(x) g^{(n-j+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x)
\end{aligned}$$

//посебно напишемо чланове $j = n+1$ и $k = 0$ а преостале две суме спојимо

$$= f^{(n+1)}(x) g(x) + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) + f(x) g^{(n+1)}(x)$$

//сада срачунамо збир ова два биномна коефицијента

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}\\
&= \frac{n! \cdot k + n! \cdot (n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f^{(n+1)}(x) g(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) + f(x) g^{(n+1)}(x)\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x),
\end{aligned}$$

и долазимо до једнакости коју је требало показати. □

6. Тејлорова формула

Нека је дат полином степена m у следећем облику

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 \ldots + a_{m-1}(x - x_0)^{m-1} + a_m(x - x_0)^m.$$

Ово је бесконачно пута диференцијабилна функција и видимо да је $p(x_0) = a_0$. Када једном диференцирамо полином долазимо до изводне функције

$$p'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \ldots + (m-1)a_{m-1}(x - x_0)^{m-2} + m a_m (x - x_0)^{m-1},$$

чија је вредност у тачки $x = x_0$ дата са $p'(x_0) = a_1$. Диференцирање још једном даје нам други извод

$$p''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \ldots + (m-1)(m-2)a_{m-1}(x - x_0)^{m-3} + m(m-1)a_m(x - x_0)^{m-2},$$

а вредност другог извода у тачки x_0 је $p''(x_0) = 2a_2$. Идеја је јасна, вредности извода вишег реда у тачки $x = x_0$ и коефицијенти полинома повезани су на следећи начин

$$p^{(n)}(x_0) = n! a_n, 0 \leq n \leq m.$$

Већ смо споменули у Примеру 36 да ће изводи реда $m+1, m+2, \ldots$ бити једнаки нули па је $p^{(n)}(x_0) = 0$ за $n > m$. Тиме долазимо до следеће особине полинома. Сваки полином можемо да напишемо у облику

$$p(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Описану идеју желимо да пренесемо и на произвољне функције.

Дефиниција 41. Нека је дата функција $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ која је n пута диференцијабилна у тачки $x_0 \in (a,b)$. Полином облика

$$P_n(x_0, x; f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

назива се *Тејлоровим полиномом степена n функције f у тачки x_0*. Разлика

$$r_n(x_0, x; f) = f(x) - P_n(x_0, x; f)$$

назива се *n-тим остатком Тејлоровог полинома.* Када је $x_0 = 0$ Тејлоров полином се често назива *Маклореновим полиномом.* $\diamondsuit$

Из дефиниције видимо да важи

$$f(x) = P_n(x_0, x; f) + r_n(x_0, x; f).$$

Ако се присетимо једнакости (2) долазимо до закључка да за диференцијабилну функцију у тачки x_0 важи

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0),\ x \to x_0.$$

Приметимо да смо уместо аргумента h прешли на $x = x_0 + h$. То значи да први Тејлоров полином $P_1(x_0, x; f) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ апроксимира диференцијабилну функцију до на нешто што је занемарљиво у односу на $x - x_0$. Поставља се питање колико добро Тејлорови полиноми вишег степена апроксимирају функцију. Формулисаћемо и доказати две теореме које нам боље описују остатак Тејлоровог полинома.

Теорема 42. (Пеанов облик остатка) *Нека је функција $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ n-пута диференцијабилна у тачки $x_0 \in (a,b)$. Тада је*

$$r_n(x_0, x; f) = o\left((x-x_0)^n\right),\ x \to x_0.$$

Доказ. Означимо (због лакшег записа) са $\varphi(x)$ остатак Тејлоровог полинома

$$\varphi(x) = r_n(x_0, x; f) = f(x) - P_n(x_0, x; f).$$

Теорема каже да важи $\varphi(x) = o((x-x_0)^n)$ када $x \to x_0$.

Функција φ има изводе до реда n у тачки x_0 и важи

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \varphi''(x_0) = \cdots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0. \tag{11}$$

Ове једнакости једноставно добијемо када знамо да је

$$P_n^{(k)}(x_0, x; f) = f^{(k)}(x_0),\ 0 \le k \le n.$$

Сада ћемо индукцијом по n показати да свака функција φ која је n пута диференцијабилна у тачки x_0 и за коју важе једнакости (11) задовољава релацију $\varphi(x) = o\left((x-x_0)^n\right),\ x \to x_0$. Када то покажемо наш доказ је завршен.

За $n = 1$ тврђење важи јер следи директно из дефиниције диференцијабилности функције φ у тачки x_0,

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0),\ x \to x_0.$$

Када заменимо једнакости $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$ добијемо да важи $\varphi(x) = o(x-x_0),\ x \to x_0$.

Нека сада тврђење важи за $n \geq 1$ желимо да покажемо да важи за $n+1$. Дакле нека је функција φ диференцијабилна у тачки x_0 и то $n+1$ пут и нека важи $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \varphi''(x_0) = \cdots = \varphi^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n+1)}(x_0) = 0$. Применимо Лагранжеву теорему на функцију φ и видимо да важи

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi)(x - x_0), \tag{12}$$

за неку тачку ξ која је између тачака x и x_0. Посматрамо функцију $g(x) = \varphi'(x)$ која је n пута диференцијабилна у тачки x_0 и која задовољава неједнакости

$$g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \cdots = g^{(n)}(x_0) = 0,$$

па на њу применимо индукцијску хипотезу. Она каже да ће важити $g(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$, $x \to x_0$, односно $\varphi'(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$, $x \to x_0$. Нама се у једначини (12) јавља аргумент ξ уместо x па ако се вратимо на дефиницију релације мало o закључујемо да је

$$g(\xi) = \alpha(\xi)(\xi - x_0)^n$$

за неку функцију α која тежи нули када $\xi \to x_0$. Тада је

$$|\varphi(x)| = |\alpha(\xi)| \cdot |\xi - x_0|^n \cdot |x - x_0| \leq |\alpha(\xi)| \cdot |x - x_0|^{n+1},$$

при чему смо последњу неједнакост добили из чињенице да се ξ налази између x и x_0. Када $x \to x_0$ тада $\xi \to x_0$ па $\alpha(\xi) \to 0$. Тиме смо показали да важи $\varphi(x) = o((x-x_0)^{n+1})$ када $x \to x_0$. □

Теорема 43. (Лагранжев облик остатка) *Нека је функција $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ n пута диференцијабилна у тачкама затвореног интервала са крајевима $x, x_0 \in (a,b)$ и нека је њен n-ти извод непрекидан у свим тачкама тог затвореног интервала. Додатно, нека функција има извод реда $n+1$ у тачкама отвореног интервала са крајевима x и x_0. Тада је*

$$r_n(x_0, x; f) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

за неко ξ које је између x и x_0.

Доказ. Дефинисаћемо две нове функције $F(t) = f(x) - P_n(t, x; f)$ и $G(t) = (x-t)^{n+1}$. Видимо да је

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right)$$

па је F непрекидна у тачкама затвореног и диференцијабилна у тачкама отвореног интервала са крајевима x и x_0. Функција G задовољава исте особине и још је $G' \neq 0$ на отвореном интервалу па можемо да применимо Кошијеву теорему на ове две функције. Она каже да ће важити

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

за неку тачку ξ која је између x и x_0. Јасно је да је $F(x) = 0$, $F(x_0) = r_n(x_0, x; f)$, $G(x) = 0$, $G'(\xi) = -(n+1)(x-\xi)^n$. Преостало нам је да нађемо извод функције F. Он је у тачки t једнак

$$\begin{aligned} F(t) &= -\left(f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f'(t)}{1!} + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{n!} n(x-t)^{n-1} \right) \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \end{aligned}$$

Када се замене све претходне једнакости добија се

$$\frac{0 - r_n(x_0, x; f)}{0 - (x - x_0)^{n+1}} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{-(n+1)(x-\xi)^n},$$

односно једнакост коју је требало показати. □

Пример 44. Можемо да видимо чему су једнаки Маклоренови полиноми за неке основне функције.

Већ смо у Примеру 37 видели чему су једнаки изводи експоненцијалне функције па једноставно закључујемо да важи

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),\ x \to 0.$$

Овде смо остатак описали у Пеановом облику.

Даље, користећи изводе вишег реда синусне и косинусне функције из Примера 38 долазимо до следећих развоја ових функција

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}),\ x \to 0,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}),\ x \to 0.$$

У Примеру 39 смо видели како се диференцира $\ln x$, а ако променимо аргумент па уместо $\ln x$ посматрамо $\ln(1+x)$ долазимо до следеће једнакости

$$\frac{d^n}{dx^n} \ln(1+x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

а онда и до Маклореновог полинома са остатком у Пеановом облику

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n),\ x \to 0.$$

Знамо да диференцирамо x^α (Пример 36) па једноставно закључујемо да је

$$\frac{d^n}{dx^n}(1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Сада знамо да развијемо и функцију $(1+x)^\alpha$ у околини нуле

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n),\ x \to 0,$$

где је

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

♯

7. Монотоност и локални екстремуми

У Теореми 21 смо видели који су потребни услови да у некој диференцијабилној тачки функција има локални екстремум. Напоменимо сада да се тачка x_0 у којој је функција f диференцијабилна и важи $f'(x_0) = 0$ назива *стационарном* (или *критичном*) *тачком* функције f. У Примеру 23 смо видели да услов из Теореме 21 није и довољан. Наиме, за функцију $f(x) = x^3$ тачка $x = 0$ је стационарна али не и тачка локалног екстремума. Ако погледамо функцију $f(x) = x^2$ видимо да је и за њу $x = 0$ стационарна тачка али у овој тачки квадратна функција има локални минимум. Сада ћемо формулисати и доказати теорему која даје довољан услов постојања локалног екстремума.

Теорема 45. *Нека је функција $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ два пута диференцијабилна у тачки $x_0 \in (a, b)$ при чему је x_0 стационарна тачка функције f и важи $f''(x_0) \neq 0$. Тада је*

- *x_0 тачка локалног максимума ако је $f''(x_0) < 0$,*

- x_0 *тачка локалног минимума ако је* $f''(x_0) > 0$.

Доказ. У доказу користимо развој функције помоћу Тејлоровог полинома реда два док остатак описујемо у Пеановом облику

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right),\ x \to x_0.$$

Знамо да је x_0 стационарна тачка па је

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right),\ x \to x_0.$$

Како је функција $o\left((x - x_0)^2\right)$ произвољно мала онда знак разлике $f(x) - f(x_0)$ зависи од знака израза $\frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$, односно од знака $f''(x_0)$ јер је $\frac{1}{2}(x - x_0)^2$ увек позитивно. Када је $f''(x_0) < 0$ разлика $f(x) - f(x_0)$ је негативна за свако x из неке мале околине тачке x_0 па је x_0 тачка локалног максимума. Ако је други извод у x_0 позитиван онда је и $f(x) - f(x_0)$ позитивно па је x_0 тачка локалног минимума. □

Теорема има и општији облик. Нека је функција f n пута диференцијабилна у тачки x_0 при чему су сви изводи до реда $n - 1$ једнаки нули а извод реда n различит од нуле. Постојање локалног екстремума и врсту екстремума испитујемо посматрањем Тејлоровог полинома реда n при чему остатак опет описујемо у Пеановом облику

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right),\ x \to x_0.$$

Ако је n паран број онда знак разлике $f(x) - f(x_0)$ зависи од знака израза $f^{(n)}(x_0)$ (приметимо да је израз $\frac{1}{n!}(x - x_0)^n$ позитиван за свако x из неке мале околине тачке x_0). Сада имамо исти закључак као и у претходној теореми (у којој је $n = 2$): ако је $f^{(n)}(x_0) < 0$ онда је x_0 тачка локалног максимума а ако је $f^{(n)}(x_0) > 0$ онда је x_0 тачка локалног минимума.

Закључак је потпуно другачији ако је n непаран број. У том случају знак разлике $f(x) - f(x_0)$ неће бити сталан ни у једној околини тачке x_0. Видимо да је знак од $f(x) - f(x_0)$ једнак знаку израза $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$. А знак овог израза није константан. Знамо да је $(x - x_0)^n$ негативно када је $x < x_0$ а позитивно када је $x > x_0$. Дакле промењљивог је знака па у том случају x_0 није тачка локалног екстремума. Приметимо да је овај случај уопштење онога што смо већ описали у Примеру 23.

8. Конвексне функције

Подсетимо се елементарног појма конвексности. Конвексни скупови су они код којих се спајањем линијом било које две тачке унутар скупа не напушта сам скуп. Сада ћемо тај појам формулисати и за функције.

Дефиниција 46. Кажемо да је функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *конвексна* ако за произвољне тачке $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \tag{13}$$

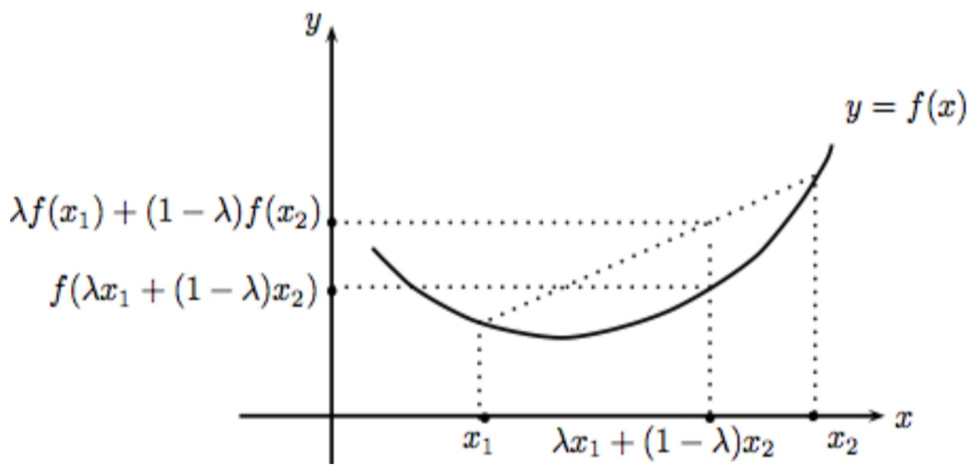
где је λ параметар из интервала $[0, 1]$.

Ако важи обрнута неједнакост

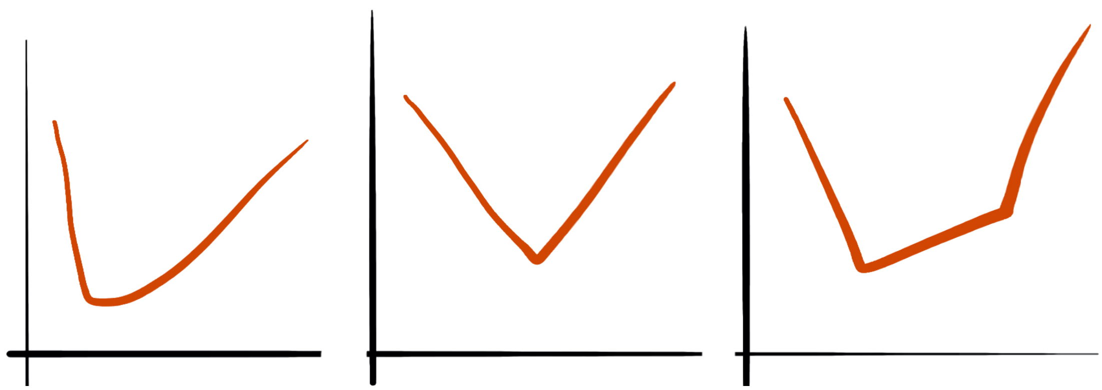
$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

онда кажемо да је функција f *конкавна*. ◊

Геометријска интерпретација појма конвексности је да се свака тетива графика функције (то је свака дуж која спаја две тачке са графика) налази изнад тог графика (видети Слику 7). Тачка $(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2))$ се налази на тетиви која спаја тачке $A_1(x_1, f(x_1))$



Слика 7. Тетива графика конвексне функције се налази изнад графика



Слика 8. Примери конвексних функција

и $A_2(x_2, f(x_2))$ (то је нека линеарна комбинација тачака A_1 и A_2). Док је тачка $(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2))$ тачка са графика функције. И неједнакост (13) нам каже да је тачка са графика испод тачке на тетиви.

На Слици 8 се виде неки примери конвексних функција, док на Слици 9 видимо примере конкавних функција. Ако погледамо дефиницију видимо да је константна функција и конвексна и конкавна на свом домену. И линеарна функција има то својство. На Слици 10 видимо примере функција које нису ни конвексне ни конкавне. Приметимо да је функција у примеру в) прво конвексна (до тачке c) а онда постаје конкавна (после тачке c). Тачке у којима се дешавају овакве промене издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 47. Ако је функција f конвексна на интервалу $(c-\delta_1, c)$ а конкавна на $(c, c+\delta_2)$ (или конкавна на $(c-\delta_1, c)$ а конвексна на $(c, c+\delta_2)$) онда се тачка c назива *превојном тачком* функције f. Овде су δ_1 и δ_2 неки позитивни бројеви. ◊

Надграф функције f је скуп

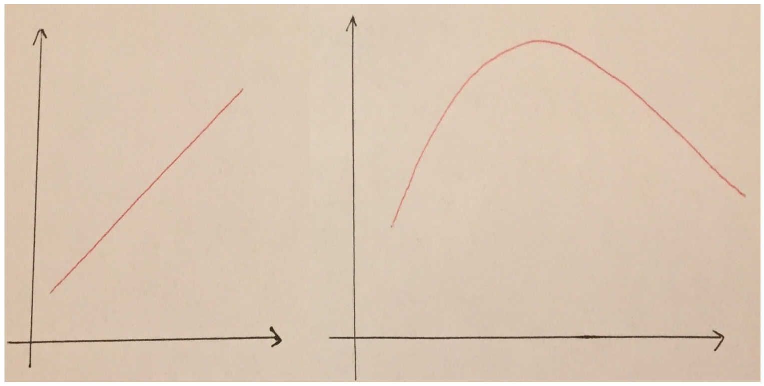
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ y \ge f(x)\},$$

видети Слику 11. Приметимо да је функција конвексна ако и само ако је њен надграф конвексан скуп. Овим смо повезали појам конвексне функције са појмом конвексног скупа.

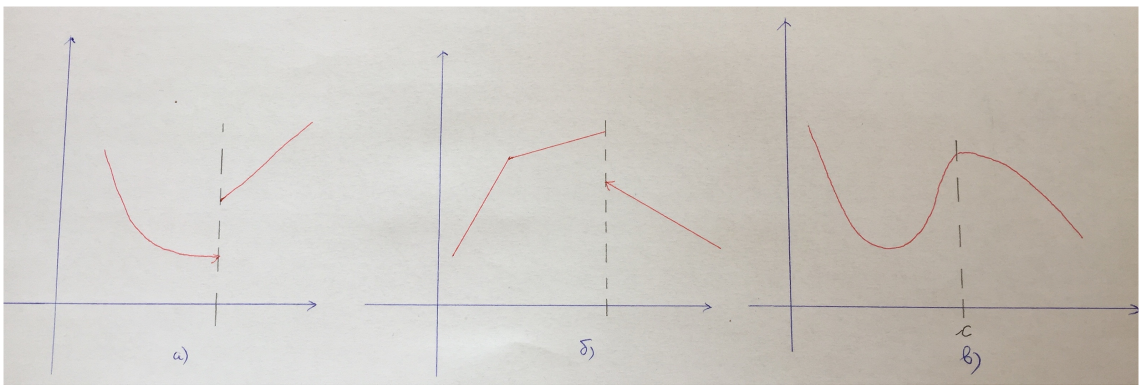
Сада ћемо видети да знак другог извода функције (ако други извод постоји) одређује конвексност и конкавност функције.

Нека је дата функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ и означимо са

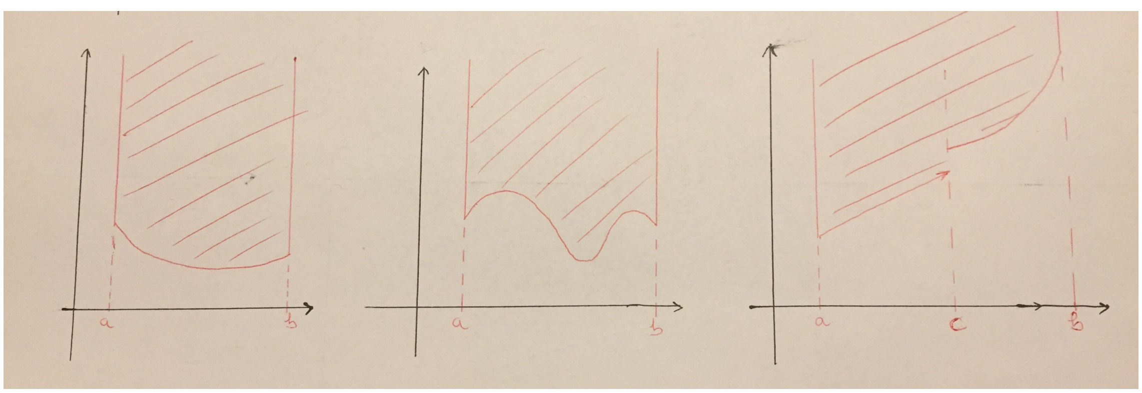
$$n_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Слика 9. Примери конкавних функција



Слика 10. Примери функција које нису ни конвексне ни конкавне на свом домену

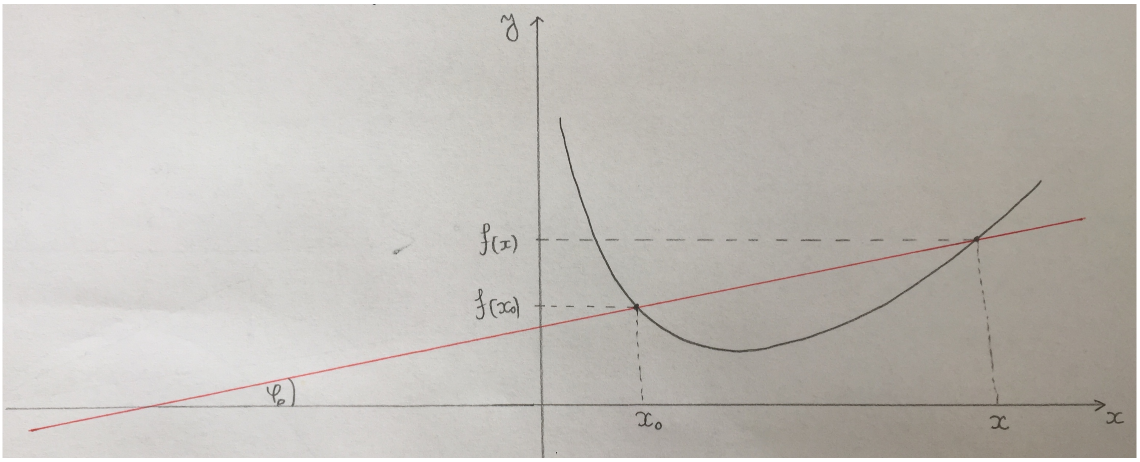


Слика 11. Примери функција и њихових надграфова који су скицирани црвеном бојом

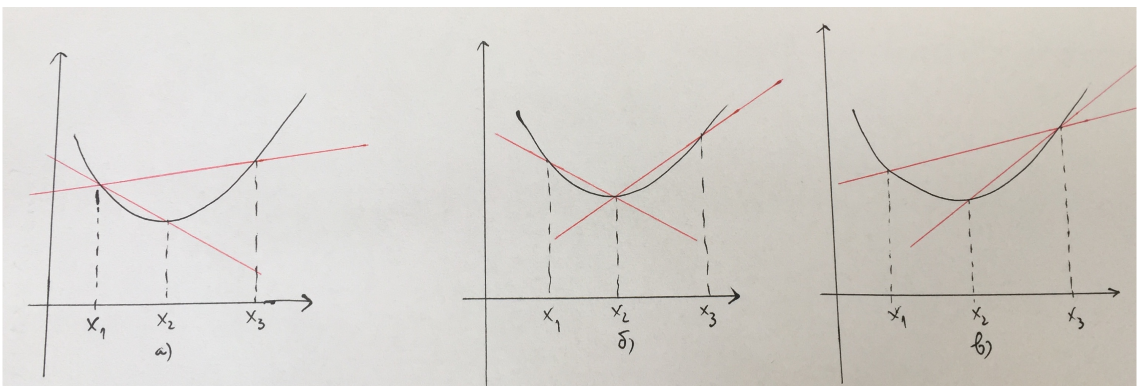
нагиб праве која пролази кроз две тачке $(x_0, f(x_0))$ и $(x, f(x))$ са графика функције f (приметимо да нагиб n_{x_0} није дефинисан у тачки $x = x_0$). Нагиб је заправо коефицијент правца праве која пролази кроз $(x_0, f(x_0))$ и $(x, f(x))$ и једнак је тангенсу угла који та права гради са позитивним делом $x-$осе (то је угао φ_0 на Слици 12).

Желимо неједнакост (13) да сведемо на однос међу нагибима одређених правих. Означимо са $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ тачку која се налази између x_1 и x_2. Тада је $\lambda = \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_2}$. Претпоставићемо да је $x_1 < x_2$. Тада неједнакост (13) има облик

$$f(x_0) \leq \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_2} f(x_2).$$



Слика 12. Нагиб праве која пролази кроз две тачке на графику функције



Слика 13. Примери који показују да је нагиб растућа функција

Након множења са $x_2 - x_1 > 0$ долазимо до следеће неједнакости

$$(x_2 - x_0)f(x_1) + (x_0 - x_1)f(x_2) + (x_1 - x_2)f(x_0) \geq 0. \tag{14}$$

Ако $x_0 - x_1$ уз $f(x_2)$ представимо као $(x_0 - x_2) + (x_2 - x_1)$ онда долазимо до неједнакости

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$

Сада се опет враћамо на неједнакост (14) и представимо $x_2 - x_0$ уз $f(x_1)$ као $(x_2 - x_1) + (x_1 - x_0)$. Тада ова неједнакост постаје

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Сада ћемо претходне две неједнакости спојити и закључујемо да за конвексну функцију $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ и све тачке $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ за које је $x_1 < x_2 < x_3$ важи

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{15}$$

Ако ове изразе видимо као нагибе ми смо заправо добили следеће неједнакости

$$\begin{aligned}
&n_{x_1}(x_2) \leq n_{x_1}(x_3), \text{ из неједнакости првог и другог члана (Слика 13а)},\\
&n_{x_2}(x_1) \leq n_{x_2}(x_3), \text{ из неједнакости првог и трећег члана (Слика 13б)},\\
&n_{x_3}(x_1) \leq n_{x_3}(x_2), \text{ из неједнакости другог и трећег члана (Слика 13в)}.
\end{aligned}$$

Овим смо показали да је за фиксирано x_0 нагиб $n_{x_0}(x)$ растућа функција по x. Какав год да је распоред тачака x_0, x_1, x_2 ако је $x_1 < x_2$ тада је $n_{x_0}(x_1) \leq n_{x_0}(x_2)$.

Важиће и обрнуто, ако је нагиб $n_{x_0}(x)$ (задат функцијом f) растућа функција по x за све $x_0 \in (a,b)$ тада је функција f конвексна. Покажимо ово. Нека су $x_1, x_2 \in (a,b)$ произвољне тачке. Тачка $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ налази се између ове две тачке. Означимо је са

$$x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2.$$

Раније смо видели да је тада $\lambda = \frac{x_0-x_2}{x_1-x_2}$ а важиће и $\frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{x_0-x_2}{x_1-x_0}$. Имамо сада две могућности $x_1 < x_2$ или $x_2 < x_1$. У првом случају из чињенице да је n_{x_0} растућа закључујемо да је

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0},$$

па множењем обе стране са $x_2 - x_0 > 0$ долазимо до

$$(f(x_0)-f(x_1))\frac{x_0-x_2}{x_1-x_0} \leq f(x_2)-f(x_0),$$

односно

$$\frac{\lambda}{1-\lambda}(f(x_0)-f(x_1)) \leq f(x_2)-f(x_0).$$

Ако је $x_2 < x_1$ онда долазимо до неједнакости

$$\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \leq \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0},$$

коју множењем са $x_0 - x_2 > 0$ сводимо на исту неједнакост

$$f(x_0)-f(x_2) \leq (f(x_1)-f(x_0))\frac{x_0-x_2}{x_1-x_0} = (f(x_1)-f(x_0))\frac{\lambda}{1-\lambda}, \tag{16}$$

(ако је $\lambda = 1$ онда је неједнакост (13) тривијално задовољена). Који год био распоред тачака x_1 и x_2 важиће неједнакост (16) а одатле једноставно закључујемо

$$f(x_0) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$

односно функција f је конвексна.

Претходним дискусијама смо показали следеће тврђење.

Тврђење 48. Функција $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ је конвексна ако и само ако је функција нагиба $n_{x_0}(x)$ растућа функција по x за све $x_0 \in (a,b)$.

У претходној дискусији смо показали неједнакости (15) помоћу којих можемо да закључимо да конвексна функција има леви и десни извод у свакој тачки (који не морају да буду једнаки). Постојање левог и десног извода у тачки је довољно за непрекидност функције у тачки. Дакле **конвексна функција на** (a,b) **је непрекидна**.

Сада можемо нешто више да кажемо о првом изводу (ако постоји) конвексне функције.

Тврђење 49. Нека је функција $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ диференцијабилна. Тада је функција конвексна ако и само ако је њен први извод растућа функција.

Доказ.

$\Longrightarrow$:

Нека је функција конвексна и узмемо две тачке $x_1, x_2 \in (a,b)$ за које важи $x_1 < x_2$. За сваку тачку x која је између ових вредности, $x_1 < x < x_2$ важе неједнакости (15), односно

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Означимо са $C = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (примећујемо да је ово константа и да не зависи од x). Сада је

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq C \leq \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}.$$

Кроз неједнакост $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq C$ прођемо лимесом када $x \to x_1+$, знамо да постоје леви и десни изводи у свим тачкама (јер је f диференцијабилна) и закључујемо

$$f'_+(x_1) \leq C.$$

Знамо да за диференцијабилне функције важи $f'(x_1) = f'_+(x_1)$. На тај начин долазимо до неједнакости

$$f'(x_1) \leq C. \tag{17}$$

Следећи корак је да кроз неједнакост $C \leq \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$ прођемо лимесом када $x \to x_2-$. Како је $f'_-(x_2) = f'(x_2)$ онда је

$$C \leq f'(x_2). \tag{18}$$

Неједнакости (17) и (18) кажу да је функција f' растућа на (a, b).

$\Longleftarrow$:

Нека је сада f' растућа функција. Показаћемо да је тада и нагиб растућа функција па користећи Тврђење 48 можемо да закључимо да је f ковексна. Довољно је показати да је $n_{x_0}(x_1) \leq n_{x_0}(x_2)$ ако је распоред тачака $x_1 < x_0 < x_2$. Знамо да је

$$n_{x_0}(x_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

а важи $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f'(c_1)$ према Лагранжевој теореми за неко $c_1 \in (x_1, x_0)$ (знамо да је f дифеенцијабилна на (a, b) па ће бити непрекидна на $[x_1, x_0]$ и диференцијабилна на (x_1, x_0)). Важиће и

$$n_{x_0}(x_2) = \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} = f'(c_2)$$

за неко $c_2 \in (x_0, x_2)$. Први извод је растућа функција, важи $c_1 < x_0 < c_2$ па је $f'(c_1) \leq f'(c_2)$ односно

$$n_{x_0}(x_1) \leq n_{x_0}(x_2).$$

□

Знак другог извода (ако постоји) нам у потпуности одређује конвексност односно конкавност функције.

Тврђење 50. Нека је $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ два пута диференцијабилна функција. Тада је f конвексна функција ако и само ако је други извод ненегативан на (a, b).

Доказ. Знамо да ће f бити диференцијабилна па на основу претходног тврђења важи f је конвексна ако и само ако је први извод растућа функција а онда је то на основу Последице 29 (друга тачка) еквивалентно томе да је $(f')' = f'' \geq 0$ на (a, b). □

Преостала нам је још дискусија о конкавним функцијама. Приметимо да је f конкавна ако и само ако је функција $-f$ конвексна. То значи да је конкавност еквивалентна томе да је нагиб опадајућа функција (Тврђење 48). Аналогно својство из Тврђења 49 каже да је диференцијабилна функција конкавна ако и само ако је први извод опадајућа функција. Док за два пута диференцијабилне функције важи да су конкавне ако и само ако им је други извод мањи или једнак од нуле.

Ако је $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ два пута диференцијабилна функција и ако је c њена превојна тачка тада је $f''(c) = 0$. Ова карактеризација превојне тачке као нула другог извода је могућа само ако унапред знамо да функција има други извод у тој тачки. Може да се деси да је c превојна тачка а да функција има прекид у тој тачки па онда не можемо да причамо о изводима функције у тој тачки.

9. Испитивање функција и скицирање графика

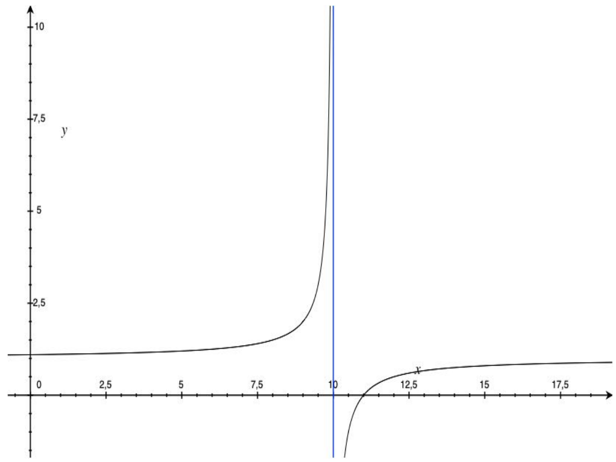
При испитивању функција и скицирању графика користимо сва претходна знања о функцијама (елементарне функције, лимеси, непрекидност, диференцијабилност, изводи вишег реда...) Сада ћемо истаћи неке ствари које су најбитније, али не и једине јер се испитивање функција разликује од примера до примера.

- **Домен функције** је као што знамо скуп тачака за који функција може да се дефинише. Означаваћемо га са $Dom(f)$ или $D(f)$. Када тражимо домен функције битно нам је да избегнемо дељење нулом, да избегнемо кореновање негативних бројева када то није могуће (нпр. $\sqrt[4]{-6}$ није дефинисано у скупу $\mathbb{R}$, док $\sqrt[5]{-6}$ јесте добро дефинисано). Овде је важно знати домене елементарних функција јер нам се често јављају у конкретним примерима. Као пример наводимо функцију природног логаритма, $\ln x$ за коју знамо да је дефинисана само за $x > 0$.
- **Парност, непарност, периодичност.** Функција је парна ако је $f(-x) = f(x)$ за све $x \in Dom(f)$ а непарна ако је $f(-x) = -f(x)$ на целом домену. Прва ствар која мора да важи да би функција била парна или непарна јесте да је њен домен симетричан око нуле. Нема смисла испитивати парност/непарност функција чији је домен скуп $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$ или $(-7, 19)$. Када скицирамо график функције треба имати у виду да је график парне функције симетричан око $y-$осе док је график непарне функције централно-симетричан око координатног почетка. Примери парних функција су косинусна функција и квадратна функција, док су синусна и кубна функција непарне.

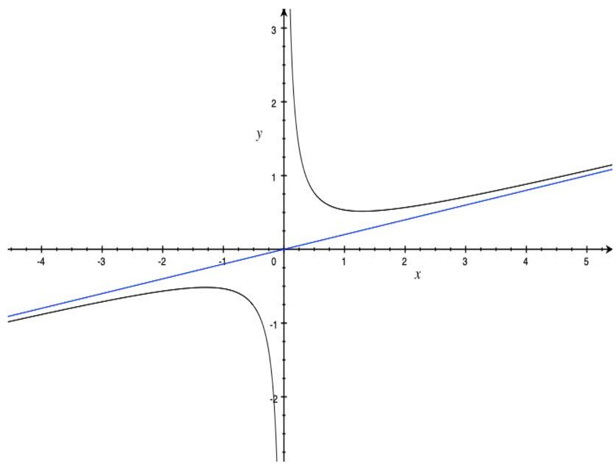
  Кажемо да је функција f периодична ако постоји реалан број $T > 0$ такав да важи $f(x+T) = f(x)$ за све $x \in Dom(f)$. Најмањи такав позитиван број назива се периодом функције. Функције $\sin x$ и $\cos x$ су периодичне са периодом 2π док је функција $\operatorname{tg} x$ периодична са периодом π. Када скицирамо график периодичне функције довољно је испитати функцију на једном интервалу ширине T, на пример $[0, T)$ или $(-2T, -T]$ а онда само копирамо тај део графика на цео домен функције.
- **Нуле и знак функције.** Нуле функције, односно тачке x_0 у којима важи $f(x_0) = 0$, су тачке у којима график функције сече $x-$осу. Када испитујемо знак функције тражимо скуп тачака у којима је функција позитивна и скуп тачака у којима је функција негативна, $Dom_+(f) := \{x \in Dom(f) \mid f(x) > 0\}$ и $Dom_-(f) := \{x \in Dom(f) \mid f(x) < 0\}$.

  У зависности од примера неће увек бити једноставно да одредимо нуле и знак. Некада ће нам први извод бити од помоћи, па ћемо на основу тога да ли функција негде расте или опада моћи да закључимо да ли функција има неку нулу и да ли је негде позитивна или негативна. Биће и примера где не можемо тачно да одредимо нулу већ можемо само да закључимо у ком интервалу се налази.
- **Асимптоте.** Већ смо рекли да функција може имати вертикалне асимптоте у неким коначним тачкама и косе или хоризонтале асимптоте у бесконачности. Може се десити да неке од ових асимптоте не постоје.

  Када цртамо график постојање асимптота значи да је график функције произвољно близу неке праве. На Слици 14 видимо пример функције која има вертикалну асимптоту $x = 10$ (и то сад леве стране) па се график функције приближава овој правој како ближе прилазимо тачки $x = 10$ са леве стране. На Слици 15 видимо пример функције $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{1}{3x}$ која има косу асимптоту $y = \frac{x}{5}$ када $x \to +\infty$ и исту косу



Слика 14. График се приближава вертикалној асимптоти (плава линија на слици) са леве стране



Слика 15. График функције $y = \frac{x}{5} + \frac{1}{3x}$

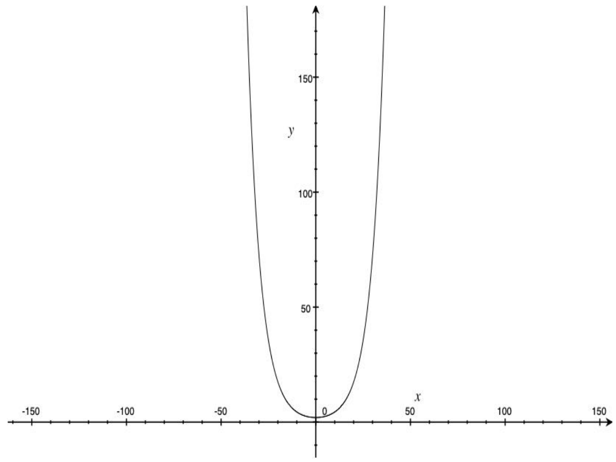
асимптоту када $x \to -\infty$. Приметимо да је разлика између наше функције и асимптоте $f(x) - y = \frac{x}{5} + \frac{1}{3x} - \frac{x}{5} = \frac{1}{3x}$ и да је ова разлика позитивна када је $x > 0$ а негативна када је $x < 0$. То значи да се график функције налази изнад асимптоте када $x \to +\infty$ а испод асимптоте када $x \to -\infty$. Ова функција има и вертикалну асимптоту $x = 0$.

Имаћемо примере када функција нема ни једну асимптоту. На Слици 16 видимо график функције $y = e^x + e^{-x}$ која нема ни једну асимптоту на свом домену.

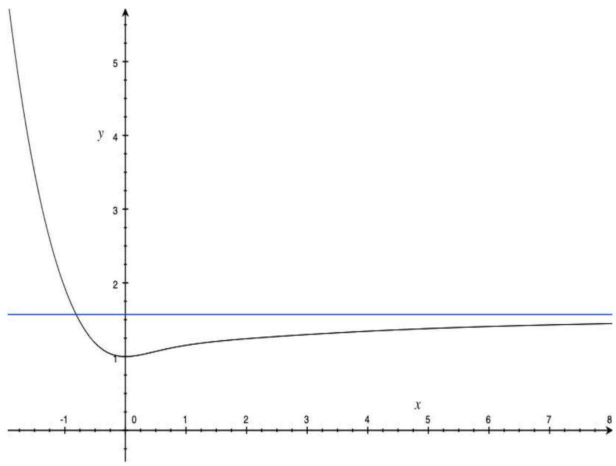
Функција $y = e^{-x} + \arctan x$ има хоризонталну асимптоту $y = \frac{\pi}{2}$ када $x \to +\infty$ док нема ни једну асимптоту када $x \to -\infty$ (видети Слику 17). Ова функција нема никаквих рупа у домену па не може имати вертикалних асимптота.

- **Непрекидност и диференцијабилност.** Подсетимо се да су елементарне функције непрекидне у тачкама у којима су дефинисане. Знамо да ако имамо тачку прекида у некој тачки домена онда нам се график „кида” на том месту, односно при цртању графика оловку морамо да подигнемо са папира. Једна од метода за испитивање непрекидности јесте тражење левог и десног лимеса у тачки. Леви лимес нам каже како график функције прилази тачки прекида са леве стране а десни лимес како график прилази тачки прекида са десне стране.

  За тражење првог извода и испитивање диференцијабилности такође је важно знати како се диференцирају елементарне функције. Знамо да график изгледа као да се ломи у тачки у којој функција није диференцијабилна. Леви и десни извод су такође битни



Слика 16. График функције $y = e^x + e^{-x}$



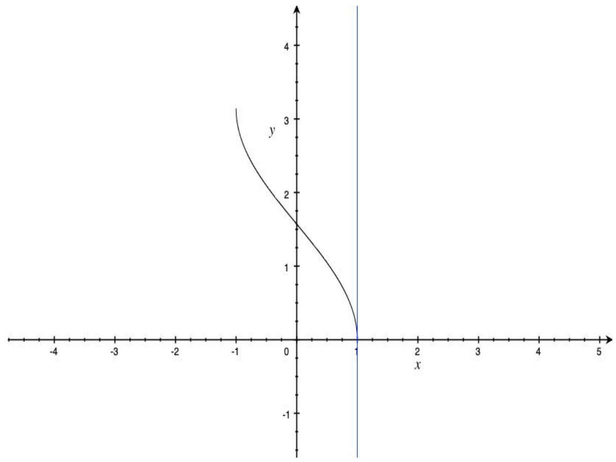
Слика 17. График функције $y = e^{-x} + \arctan x$

(ако постоје) у некој тачки где функција није диференцијабилна. Они нам говоре о томе под којим углом график прилази тачки у којој немамо диференцијабилност или под којим углом се прилази неким крајевима домена или тачкама које нису у домену. На Слици 18 видимо график функције $f(x) = \arccos x$. Знамо да је извод ове функције $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ па закључујемо да је $\lim\limits_{x\to 1-} f'(x) = -\infty$ па график прилази тачки $x = 1$ са леве стране приљубљен уз праву која је паралелна $y-$оси (односно под углом од $\frac{\pi}{2}$).

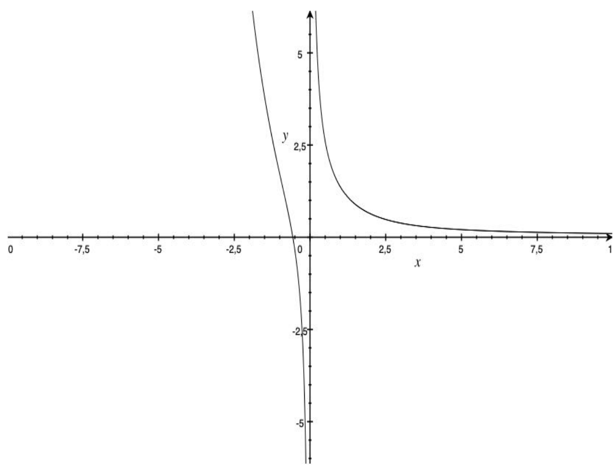
- **Екстремне вредности и монотоност.** Од раније знамо да ако је $f' \geq 0$ на неком интервалу онда функција расте на том интервалу а ако је $f' \leq 0$ на неком интервалу онда функција опада на том интервалу. Овде је битно да закључак о монотоности важи само ако је на неком интервалу у свим тачкама задовољена неједнакост.

Погледајмо пример на Слици 19. Видимо да је извод функције $f(x) = \frac{1}{x} + e^{-x}$ дат са $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - e^{-x} \leq 0$ на целом домену $Dom(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. На основу тога можемо да закључимо да f опада на $(-\infty, 0)$ и да f опада на $(0, +\infty)$, никако на целом домену. Функција и не опада на целом домену а то можемо да видимо и са графика или упоређивањем вредности у неке две тачке. На пример $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 + \sqrt{e} < 0 < f(1) = 1 + \frac{1}{e}$ а важи $-\frac{1}{2} < 1$. Дакле f не опада на целом домену већ закључак о монотоности важи само на интервалима који су садржани у домену.

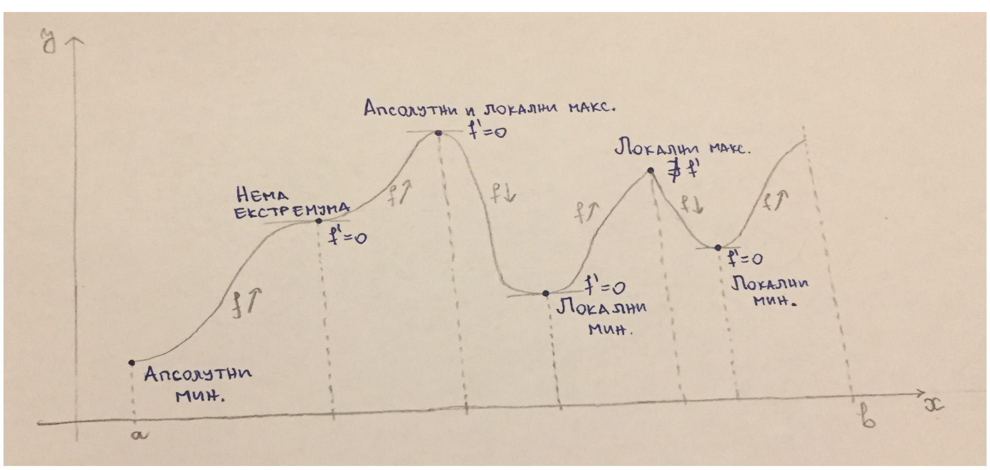
Раније смо рекли да су нам кандидати за локалне екстремуме тачке у којима извод функције има нулу (стационарне тачке) или тачке у којима извод уопште не постоји. Када тражимо апсолутне максимуме и апсолутне минимуме (то су тачке у којима



Слика 18. График функције $y = \arccos x$

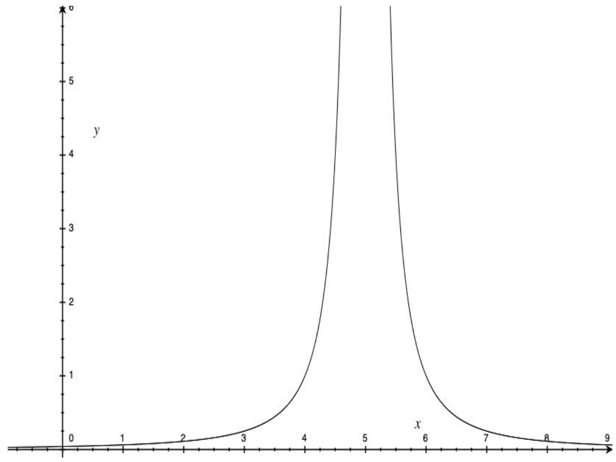


Слика 19. График функције $y = \frac{1}{x} + e^{-x}$

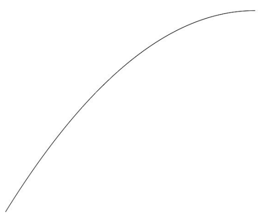


Слика 20. Први извод, екстремуми и монотоност

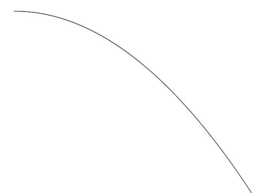
функција достиже максимум и минимум на целом домену) онда проверимо вредност функције у свим локалним екстремумима и видимо које су вредности функције на крајевима домена и закључимо која је највећа а која најмања вредност. На Слици 20 приказане су разне могуће ситуације.



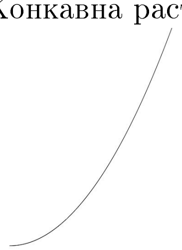
Слика 21. График функције $y = \frac{1}{(x-5)^2}$



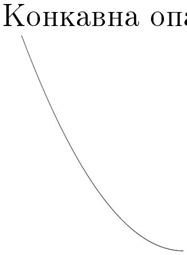
Слика 22. Конкавна растућа функција



Слика 23. Конкавна опадајућа функција



Слика 24. Конвексна растућа функција



Слика 25. Конвексна опадајућа функција

- **Конвексност, конкавност и превојне тачке.** Својство конвексности и конкавности нам каже како се график функције савија или скреће. За његово испитивање најчешће користимо други извод функције. Знамо да је функције конвексна на неком интервалу ако је њен други извод ненегативан, а конкавна је ако је $f'' \leq 0$. Опет истичемо да је овде битно да то важи у свим тачкама интервала (и да други извод постоји и да је одређеног знака).

  Погледајмо функцију $f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$ (Слика 21). Њен други извод је $f''(x) = \frac{6}{(x-5)^4} > 0$ на целом домену $Dom(f) = (-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$. Оно што можемо да закључимо јесте да је функција конвексна на $(-\infty, 5)$ и да је конвексна на $(5, +\infty)$ али да није конвексна на целом домену.

  На Слици 22 видимо како изгледа график функције која је на једном делу конкавна и растућа. Слика 23 приказује функцију која је на једном делу конкавна и опадајућа.

  Конвексна растућа и конвексна опадајућа функција су редом приказане на Сликама 24 и 25.

  Превојне тачке су оне тачке у којима функција мења конвексност и конкавност. Ако други извод постоји у тој тачки онда је он једнак нули. Може се десити да је нека тачка превојна а да у њој функција нема други извод.

- **Скицирање графика функције.** На основу претходно описаних корака долазимо до одређених особина функције на основу којих скицирамо график функције.

Задатак 51. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$.
Решење.

- Како трећи корен постоји за све реалне бројеве и у изразу под кореном је полиномна функција закључујемо да израз $\sqrt[3]{x^2 - x^3}$ може да се израчуна за све реалне бројеве па је домен ове функције $D(f) = \mathbb{R}$.
- Приметимо да је $f(1) = \sqrt[3]{1^2 - 1^3} = 0$ и $f(-1) = \sqrt[3]{(-1)^2 - (-1)^3} = \sqrt[3]{2}$ па функција није ни пара ни непарна. Није ни периодична јер је бесконачно велика када аргумент x узима велике негативне вредности.
- Нуле и знак функције испитујемо одређивањем знака и нула полинома који се налази под трећим кореном. Закључујемо да је $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(x) < 0$ за све $x \in (1, +\infty)$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
x	$-$	$+$	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$-$
$x^2(1-x)$	$+$	$+$	$-$
f	$+$	$+$	$-$

и $f(x) > 0$ за све $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$.

- Ни једна тачка нити скуп нису избачени из домена функције па немамо вертикалних асимптота. Развој функције у околинама бесконачно великих тачака нам каже да је

$$f(x) = \sqrt[3]{-x^3\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = -x\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} =$$
$$= -x\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -x + \frac{1}{3} + o(1),\ x \to \pm\infty.$$

Дакле, функција f има косу асимптоту $y = -x + \frac{1}{3}$ када $x \to +\infty$ и исту ту косу асимптоту када $x \to -\infty$.

- Функција f је непрекидна као комозиција таквих функција. Извод функције једнак је

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - x^3)^{-\frac{2}{3}}(2x - 3x^2) =$$
$$= \frac{x\cdot(2-3x)}{3\cdot\sqrt[3]{x^4(1-x)^2}} = \frac{2-3x}{3\cdot\sqrt[3]{x(1-x)^2}}$$

у тачакама реалне осе које нису једнаке 0 и 1. Постојање извода тачкама $x = 0$ и $x = 1$ испитујемо по дефиницији. Прво проверавамо да ли постоји следећи лимес

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^2 - h^3} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-h}}{\sqrt[3]{h}}.$$

Овај лимес не постоји јер је $\lim\limits_{h\to 0+}\frac{\sqrt[3]{1-h}}{\sqrt[3]{h}} = +\infty$, док је $\lim\limits_{h\to 0-}\frac{\sqrt[3]{1-h}}{\sqrt[3]{h}} = -\infty$. Што се тачке $x = 1$ тиче занима нас да ли постоји следећи лимес

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{(1+h)^2(1-(1+h))} - 0}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^{\frac{2}{3}}h^{\frac{1}{3}}}{h}.$$

Овај лимес је једнак вредности $-\infty$ па је закључак да је функција диференцијабилна на скупу $D(f) \setminus \{0, 1\}$.

- Сада нас занима да одредимо знак првог извода у тачкама у којима он постоји. Видимо да знак првог извода зависи од знака израза x и $2-3x$ па ћемо у табели издвојити тачке $x=0$ и $x=\frac{2}{3}$. У табелу смо додали и тачку $x=1$ јер функција нема први извод у тој тачки. Закључујемо да функција f опада на интервалу $(-\infty,0)$, расте на интервалу $(0,\frac{2}{3})$, затим опада на $(\frac{2}{3},1)$ и опада на интервалу $(1,+\infty)$. Локални минумум се јавља у тачки $x=0$, $f(0)=0$, а локални максимум у тачки $x=\frac{2}{3}$, $f(\frac{2}{3})=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$.

	$(-\infty,0)$	$(0,\frac{2}{3})$	$(\frac{2}{3},1)$	$(1,+\infty)$
x	$-$	$+$	$+$	$+$
$2-3x$	$+$	$+$	$-$	$-$
f'	$-$	$+$	$-$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

- Други извод има смисла рачунати у тачкама у којима постоји први извод тако да други извод неће постојати у тачкама $x=0$ и $x=1$. Што се осталих тачака домена тиче правила диференцирања кажу да је

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-3\cdot 3\cdot \sqrt[3]{x(1-x)^2}-(2-3x)\cdot 3\cdot \frac{1}{3}(x(1-x)^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot((1-x)^2+x\cdot 2(1-x)\cdot(-1))}{9\cdot\sqrt[3]{x^2(1-x)^4}} = \\
&= \frac{-9\cdot\sqrt[3]{x(1-x)^2}-(2-3x)\cdot\frac{1-2x+x^2-2x+2x^2}{\sqrt[3]{x^2(1-x)^4}}}{9\cdot\sqrt[3]{x^2(1-x)^4}} = \\
&= \frac{-9x(1-x)^2-(2-3x)(1-4x+3x^2)}{9\cdot\sqrt[3]{x^4(1-x)^8}} = \\
&= \frac{-9x(1-x)^2-(2-3x)(1-x)(1-3x)}{9\cdot\sqrt[3]{x^4(1-x)^2}\cdot(1-x)^2} = \\
&= \frac{-9x(1-x)-(2-3x)(1-3x)}{9\cdot f^2(x)\cdot(1-x)} = \\
&= \frac{-9x+9x^2-2+6x+3x-9x^2}{9\cdot f^2(x)\cdot(1-x)} = \frac{2}{9(x-1)\cdot f^2(x)}
\end{aligned}
$$

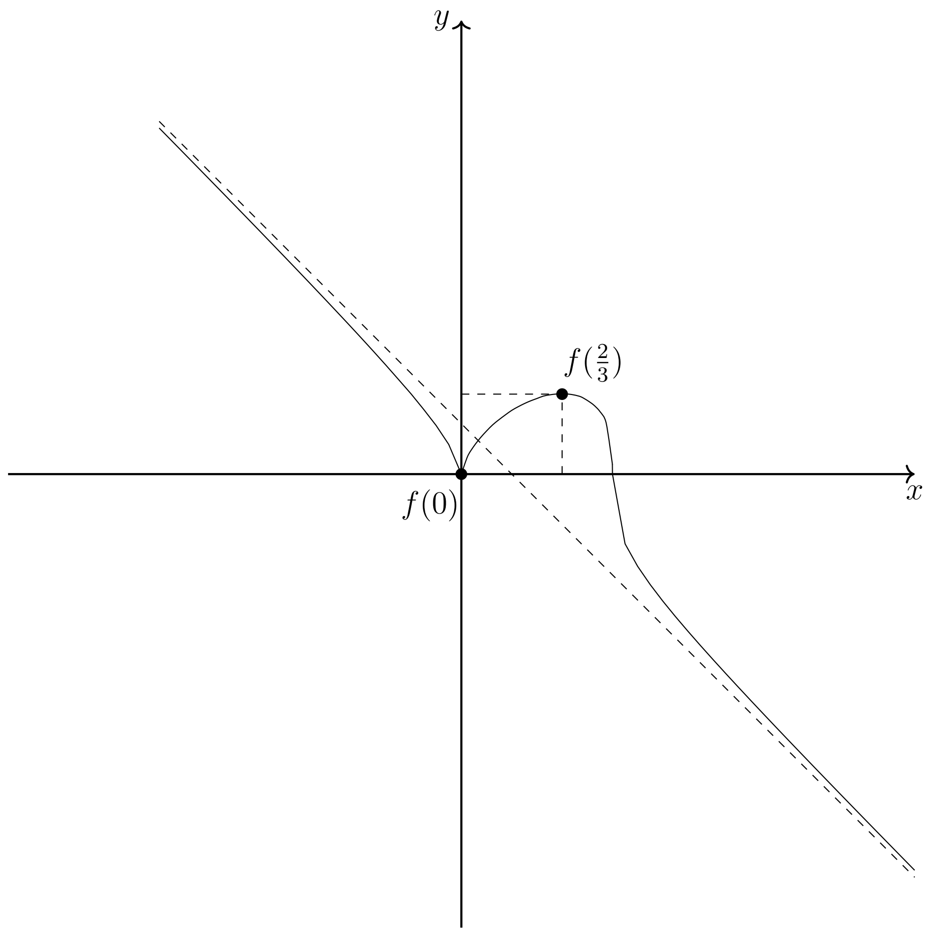
На основу претходног можемо да кажемо да је функција конкавна на интервалу

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
f''	$-$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cap$	$\cup$

$(-\infty,0)$, на интервалу $(0,1)$ је такође конкавна док је конвексна на $(1,+\infty)$. Тачка $x=1$ је превојна тачка.

- При цртању графика је важно повести рачуна како изгледа график у околинама тачака 0 и 1. Како је $f'_-(0)=-\infty$ онда је график приљубљен уз $y-$осу са леве стране и са те стране функција опада. Са десне стране важи $f'_+(0)=+\infty$ па је график функције приљубљен уз $y-$осу и са десне стране тачке нула и са те стране функција расте. Како је $f'(1)=-\infty$ (овде се ради о изводу у проширеном смислу) онда је график функције приљубљен уз праву $x=1$ и ту функција опада. На Слици 26 приказан је график функције.

$\checkmark$



Слика 26. График функције $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$

10. Задаци

Задатак 52. Ако функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ има леви и десни извод у тачки x_0 показати да је она тада непрекидна. Приметимо да не захтевамо претпоставку да леви и десни извод буду једнаки већ да само постоје. ✓

Задатак 53. Наћи извод функције $h(x) = f(x)^{g(x)}$ у оним тачкама у којима су све функције дефинисане и диференцијабилне. ✓

Испитна питања из Анализе 1 (Информатика) 2024/2025

-прелиминарна верзија која ће се мењати-

1. Принцип математичке индукције.
2. Архимедово и Канторово својство скупа $\mathbb{R}$.
3. Поље реалних бројева.
4. Супремум и инфимум скупа. Аксиома супремума. Број e.
5. Проширени скуп реалних бројева.
6. Дефиниција граничне вредности низа и примери.
7. Својства конвергентних низова (алгебарске операције).
8. Теорема о три лимеса.
9. Штолцова теорема и последице.
10. Монотони низови, егзистенција лимеса.
11. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
12. Поднизови, тачке нагомилавања низа.
13. Болцано-Вајерштрасова теорема.
14. Кошијев критеријум конвергенције низа.
15. Дефиниције граничне вредност реалне функције у тачки и једностраних лимеса.
16. Својства граничне вредност реалне функције.
17. Теорема о три лимеса. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.
18. Теорема о смени променљиве, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ и последице.
19. Лимес монотоне функције.
20. Асимптотска релација o.
21. Асимптотска релација $\sim$.
22. Дефиниција непрекидних реалних функција. Врсте тачака прекида.
23. Локална својства непрекидних реалних функција.
24. Глобална својства непрекидних реалних функција (Коши-Болцанова теорема и теорема о међувредности).
25. Вајерштрасова теорема о непрекидним функцијама.
26. Непрекидност монотоне и њој инверзне функције.
27. Непрекидност елементарних функција.

28. Низови и гранична вредност реалне функције у тачки.
29. Дефиниција извода у тачки, левог и десног извода реалне функције. Диференцијабилност.
30. Својства диференцијабилних функција (извод збира, производа и количника функција).
31. Извод сложене и инверзне функције.
32. Фермаова и Ролова теорема.
33. Кошијева и Лагранжева теорема о средњој вредности диференцијалног рачуна.
34. Лопиталова правила.
35. Изводи вишег реда.
36. Тејлорова формула са остатком у Лагранжевом и Пеановом облику.
37. Маклоренови полиноми елементарних функција.
38. Монотоност и локални екстремуми функција.
39. Конвексне и конкавне функције.