Elementarna matematika 2 (M-08)
20. III 2018.
dr Nenad Teofanov

TEOREMA KANTOR-ŠREDER-BERNŠTAJN

Neprazni skupovi A i B su *ekvipotentni* ako postoji bijektivno preslikavanje izmedju njih. U tom slučaju se koristi oznaka $A \sim B$ i lako se dokazuje da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Klasa ekvivalencije kojoj pripada skup A je *kardinalni broj* skupa A, u oznaci $cardA$.

Neka je $cardA = n$ i $cardB = m$, $n, m \in \mathbb{N}$. Preslikavanje $f : A \to B$ može da bude injektivno ako i samo ako je $n \leq m$, a sirjektivno ako i samo ako je $n \geq m$. Odavde sledi da, ako postoje injektivna preslikavanja $f : A \to B$ i $g : B \to A$, onda je $n = m$, pa postoji bijekcija izmedju A i B.

Ova činjenica nije očigledna za skupove proizvoljne kardinalnosti. O tome govori teorema Kantor - Šreder - Bernštajna. Teorema je dokazana u periodu 1887. - 1897. godine.[1]

Teorema 0.1. *Dati su neprazni skupovi A i B. Ako postoji injektivno preslikavanje $f : A \to B$ i injektivno preslikavanje $g : B \to A$, onda postoji bijekcija izmedju skupova A i B.*

Dokaz. Bez ograničenja se pretpostavlja da je $A \cap B = \emptyset$. Skup slika preslikavanja f je $f(A) \subset B$, a skup slika preslikavanja g je $g(B) \subset A$.

Primetimo da iz $A \setminus g(B) = \emptyset$ sledi da je g bijekcija, pa se tu dokaz završava. Slično, iz $B \setminus f(A) = \emptyset$ sledi da je f bijekcija. Stoga se pretpostavlja da važi $A \setminus g(B) \neq \emptyset$ i $B \setminus f(A) \neq \emptyset$.

Injektivnost preslikavanja f i g omogućava primenu tehnike koju nazivamo "guraj-vuci".

1. korak: "Guranje unapred"[2]

Svaki element $a \in A$ "guramo unapred" tako što mu pridružujemo jedinstveno odredjen niz $\{x_n(a)\} \subset A \cup B$ definisan sa:

$$x_1(a) = a,\ x_2(a) = f(a),\ x_3(a) = g(f(a)),\ x_4(a) = f(g(f(a))), \ldots$$

Primetimo da $x_m(a) \in A$ ako i samo ako je m neparan broj, a $x_m(a) \in B$ ako i samo ako je m paran broj.

Svaki element niza $\{x_n(a)\}$ je *sledbenik* elementa a, izuzev $x_1(a)$ (ako je $x_1(a) \neq x_n(a)$, $\forall n > 1$).

[1] Istorijat ove teoreme se može pročitati na: http://en.wikipedia.org/wiki/SchröderBernstein_theorem

[2] engl. push forward

Takodje, ako je $x_m(a) \in \{x_n(a)\}$, *prethodnici* elementa $x_m(a)$ su članovi niza $x_k(a)$, $k = 1, 2, \ldots, m-1, m$.

Može da se desi da je $a = x_m(a)$ za neki (neparan) prirodan broj $m > 1$, pa je takav niz *periodičan* i $x_1(a) = x_m(a)$ je tako *sledbenik* elementa $x_{m-1}(a)$. Svaki element periodičnog niza se u njemu pojavljuje beskonačno mnogo puta, pa je lista njegovih prethodnika beskonačna.

Na sličan način se i svaki element $b \in B$ "gura unapred" pomoću jedinstveno odredjenog niza $\{y_n(b)\} \subset A \cup B$:

$$y_1(b) = b, y_2(b) = g(b), y_3(b) = f(g(b)), y_4(b) = g(f(g(b))), \ldots.$$

2. korak: U ovom koraku se svaki element skupa $A \cup B$ "vuče unazad".[3] Neka je a proizvoljan element skupa A. Formira se jedinstvena *lista prethodnika* elementa $a \in A$ na sledeći način. Ako $a \in A \setminus g(B)$, on je jedini element te liste (i sam je svoj prethodnik). U suprotnom slučaju, dobija se lista njegovih prethodnika:

$$a,\ g^{-1}(a),\ f^{-1}(g^{-1}(a)),\ g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(a))), \ldots,$$

koja može biti konačna ili beskonačna.

Dakle, moguć je tačno jedan od sledeća tri slučaja:

a) Lista prethodnika elementa $a \in A$ je konačna i poslednji element te liste pripada skupu A.
b) Lista prethodnika elementa $a \in A$ je konačna i poslednji element te liste pripada skupu B.
c) Lista prethodnika elementa $a \in A$ je beskonačna.

U slučaju a) to znači da postoji $\tilde{a} \in A$ i niz $\{x_n(\tilde{a})\}$ tako da postoji (neparan) broj $m \in \mathbb{N}$ za koji važi:

$$\tilde{a} = x_1(\tilde{a}),\ f(\tilde{a}) = x_2(\tilde{a}),\ g(f(\tilde{a})) = x_3(\tilde{a}),$$
$$f(g(f(\tilde{a}))) = x_4(\tilde{a}), \ldots,\ a = x_m(\tilde{a})$$

i, pri tome, $\tilde{a} \in A \setminus g(B)$. Kažemo još da a vodi poreklo iz skupa A.

U slučaju b) to znači da postoji $b \in B$ i niz $\{y_n(b)\}$ tako da postoji (paran) broj $m \in \mathbb{N}$ za koji važi:

$$b = y_1(b),\ g(b) = y_2(b),\ f(g(b)) = y_3(b),$$
$$g(f(g(b))) = y_4(b), \ldots,\ a = y_m(b)$$

i, pri tome, $b \in B \setminus f(A)$. Tada a vodi poreklo iz skupa B.

Na sličan način se formira lista prethodnika proizvoljnog elementa $b \in B$, a moguć je tačno jedan od sledeća tri slučaja:

d) Lista prethodnika elementa $b \in B$ je konačna i poslednji element te liste pripada skupu B.

[3]engl. pull back

e) Lista prethodnika elementa $b \in B$ je konačna i poslednji element te liste pripada skupu A.
f) Lista prethodnika elementa $b \in B$ je beskonačna.

U slučaju d) to znači da postoji $a \in A$ i niz $\{x_n(a)\}$ tako da postoji (paran) broj $m \in \mathbb{N}$ za koji važi:

$$a = x_1(a),\ f(a) = x_2(a),\ g(f(a)) = x_3(a),$$
$$f(g(f(a))) = x_4(a), \dots,\ b = x_m(a)$$

i, pri tome, $a \in A \setminus g(B)$.

U slučaju e) to znači da postoji $\tilde{b} \in B$ i niz $\{y_n(\tilde{b})\}$ tako da postoji (neparan) broj $m \in \mathbb{N}$ za koji važi:

$$\tilde{b} = y_1(\tilde{b}),\ g(\tilde{b}) = y_2(\tilde{b}),\ f(g(\tilde{b})) = y_3(\tilde{b}),$$
$$g(f(g(\tilde{b}))) = y_4(\tilde{b}), \dots,\ b = y_m(\tilde{b})$$

i, pri tome, $\tilde{b} \in B \setminus f(A)$.

3. korak: Uvodimo skupove $A_A, A_B, A_\infty, B_A, B_B$, i B_∞, pomoću pojma sledbenika:

$$\begin{aligned}
A_A &= \{a \in A \setminus g(B)\} \cup \{a \in A \mid a \text{ je sledbenik} \\
&\quad \text{nekog elementa skupa } A \setminus g(B)\}, \\
A_B &= \{a \in A \mid a \text{ je sledbenik nekog elementa skupa } B \setminus f(A)\}, \\
A_\infty &= A \setminus (A_A \cup A_B), \\
B_B &= \{b \in B \setminus f(A)\} \cup \{b \in B \mid b \text{ je sledbenik} \\
&\quad \text{nekog elementa skupa } B \setminus f(A)\}, \\
B_A &= \{b \in B \mid b \text{ je sledbenik nekog elementa skupa } A \setminus g(B)\}, \\
B_\infty &= B \setminus (B_A \cup B_B).
\end{aligned}$$

Važi:

✓ $a \in A_A$ ako i samo ako važi a) prethodnog koraka.
✓ $a \in A_B$ ako i samo ako važi b) prethodnog koraka.
✓ $a \in A_\infty$ ako i samo ako važi c) prethodnog koraka.
✓ $b \in B_B$ ako i samo ako važi d) prethodnog koraka.
✓ $b \in B_A$ ako i samo ako važi e) prethodnog koraka.
✓ $b \in B_\infty$ ako i samo ako važi f) prethodnog koraka.

Na ovaj način je izvršena particija skupova A i B, to jest skup A je disjunktna unija skupova A_A, A_B i A_∞:

$$A = A_A \sqcup A_B \sqcup A_\infty,$$

a skup B je disjunktna unija skupova B_A, B_B i B_∞:

$$B = B_A \sqcup B_B \sqcup B_\infty.$$

4. korak: Podsetimo se, za preslikavanje $f : A \to B$, *restrikcija* tog preslikavanja na skup $C \subset A$ je preslikavanje $f\,|_C : C \to B_A$ definisano sa $f\,|_C(c) = f(c)$ za svaki element $c \in C$.

Posmatramo restrikcije preslikavanja f na skupove A_A i A_∞ i preslikavanja g^{-1} na skup A_B.

Tvrdimo da su tako definisana preslikavanja bijekcije:

$$f\,|_{A_A} : A_A \to B_A\ , \quad g^{-1}\,|_{A_B} : A_B \to B_B\ , \quad f\,|_{A_\infty} : A_\infty \to B_\infty\ .$$

Najpre, $f\,|_{A_A} : A_A \to B_A$ je injektivno preslikavanje jer je f injektivno presliklavanje. Svaki element $a \in A_A$ vodi poreklo iz skupa A odakle sledi da $f(a)$ takodje vodi poreklo iz skupa A, odnosno $f(a) \in B_A$. Dakle, preslikavanje je dobro definisano i injektivno. Preostaje da se dokaže da je $f\,|_{A_A} : A_A \to B_A$ sirjekcija.

Neka je $b \in B_A$. Na osnovu e) postoji $\tilde{a} \in A \setminus g(B)$ tako da je b element niza koji je nastao "guranjem unapred" elementa $\tilde{a}$. Prema tome, postoji $a \in A$ tako da je $f(a) = b$. Pošto b vodi poreklo iz skupa A, to važi i za a, odnosno $a \in A_A$, odakle sledi da je $f\,|_{A_A}$ sirjekcija.

Čitaocu ostavljamo za vežbu da dokaže da je $f\,|_{A_\infty} : A_\infty \to B_\infty$ dobro definisano preslikavanje koje je bijekcija.

Posmatrajmo sada $g^{-1}\,|_{A_B} : A_B \to B_B$. Jasno, g^{-1} je injektivno preslikavanje definisano na $g(B)$. Ako $a \in A_B$, to znači da je a barem jednom "povučen unazad", to jest $A_B \subset g(B)$. Takodje, $b \in B$ za koje je $g(b) = a$ vodi poreklo od istog elementa $\tilde{b} \in B$ od kojeg vodi poreklo i element a, odakle sledi da je $g^{-1}\,|_{A_B} : A_B \to B_B$ dobro definisano preslikavanje. Preostaje da se dokaže da je to preslikavanje sirjektivno.

Neka $b \in B_B$ i neka je $a \in g(B)$ element skupa A za koji važi $g(b) = a$, to jest $g^{-1}(a) = b$. Pošto b vodi poreklo iz skupa B, to važi i za a, odnosno $a \in A_B$.

5. korak: Na osnovu prethodnih razmatranja sledi da je funkcija $h : A \to B$ definisana sa:

$$h(x) = \begin{cases} f(a), & \text{ako } a \in A_A, \\ g^{-1}(a), & \text{ako } a \in A_B, \\ f(a), & \text{ako } a \in A_\infty, \end{cases}$$

bijekcija, čime je teorema dokazana. $\square$

Primer 0.2. *Neka je $A = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ i $B = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Jasno, $g : B \to A$ defnisano sa $g(b) = (b, 0) \in (0,1) \times (0,1)$ je injektivno preslikavanje.*

Neka $(x, y) \in (0,1) \times (0,1)$*, i neka je jedinstveni decimalni zapis*[4] *tih brojeva dat sa*

$$x = 0, x_1x_2x_3x_4x_5x_6\ldots, \quad y = 0, y_1y_2y_3y_4y_5y_6\ldots.$$

Preslikavanje $f : (0,1) \times (0,1) \to (0,1)$ *definisano sa*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0, x_1x_2x_3x_4x_5x_6\ldots \quad , \quad 0, y_1y_2y_3y_4y_5y_6) \\ &= 0, x_1y_1x_2y_2x_3y_3x_4y_4\ldots \end{aligned}$$

je injektivno preslikavanje.

Na osnovu teoreme Kantor-Šreder-Bernštajn sledi

$$card((0,1) \times (0,1)) = card(0,1).$$

Ovo znači da postoji bijekcija između duži i kvadrata.

Primer 0.3. *Neka je* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *partitivni skup skupa* $\mathbb{N}$*. Iz* $card\mathbb{N} = card\mathbb{Q}$ *sledi* $card\mathcal{P}(\mathbb{N}) = card\mathcal{P}(\mathbb{Q})$*, pa postoji bijekcija* $B : \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$*.*

Preslikavanje $g : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ *dato sa*

$$g(x) = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

je injektivno, pa je i preslikavanje $B \circ g(x) = B(g(x))$ *injektivno preslikavanje između* $\mathbb{R}$ *i* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$*.*

Neka je $A \subset \mathbb{N}$*, odnosno* $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$*. Preslikavanje*

$$f(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{10^{n+1}} \in \mathbb{R} \quad (f(A) = 0,1 \quad \textit{ako je} \quad A = \emptyset),$$

je injektivno preslikavanje iz $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *u* $\mathbb{R}$*.*

Zaključak: skupovi $\mathbb{R}$ *i* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *su iste kardinalnosti, odnosno podskupova skupa* $\mathbb{N}$ *ima neprebrojivo (kontinuum) mnogo.*

Literatura

[1] http://www.topologywithouttears.net/

[4] uz uobičajenu intepretaciju brojeva koji se završavaju beskonačnim nizom devetki