Sistem linearnih jednačina: $ax = b$ $a,b \in R$
Tražimo $x \in R$ za koje važi jednakost $ax = b$
Razlikujemo tri mogućnosti:

1. $a =/= 0$
$x = b/a$ – jedinstveno rešenje

2. $a = 0$ $b =/= 0$
$0*x = b$ nemoguće
Nema rešenja

3. $a = 0$ $b = 0$
$0*x = 0$
$0 = 0$ – važi za sve $x \in R$ jednačina neodređena

Linearna jednačina sa n nepoznatih je izraz oblika: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$
$a_1, a_2, ..., a_n \in R$ – koeficijenti $b \in R$ – slobodan član $x_1, x_2, ..., x_n$ – nepoznate

Def Konjukcija više linearnih jednačina je sistem linearnih jednačina:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \qquad \text{Sistem (*)} \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Sistem od m jednačina sa n nepoznatih
Def Rešenje sistema je bilo koja n-torka $(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ $\alpha \in R$ koja kada se zameni u sistem daje jednakosti u R.
S – skup rešenja sistema
1. $|S| = 1$, sistem ima jedno rešenje 2. $|S|>1$, sistem ima više rešenja tj. neodređen je 3. $S = \emptyset$, sistem nema rešenje

Def Ako dva sistema imaju isti broj nepoznatih i iste skupove rešenja kažemo da su ekvivalentni.
Za svođenje sistema na ekvivalentni koji ima jednostavniji oblik koristimo elementarne transformacije.
Postoje 3 tipa elementarnih tj Gausovih transformacija:
1. Zamena mesta i-te i j-te jednačine i=/=j Ψ_{ij}: $J_i <–> J_j$
2. Dodavanje i-toj jednačini j-tu pomnoženu sa α, $\alpha \in R$ $\Phi_{ij}(\alpha)$: $J_i –> J_i + \alpha * J_j$
3. Množenje i-te elementom α, $\alpha \in R$ $\Theta_i(\alpha)$: $J_i –> \alpha * J_i$
Dva sistema su elementarno ekvivalentna ako jedan nastaje iz drugog primenom elementarnih transformacija.
Svaka od navedenih transformacija ima inverznu (možemo se vratiti „unazad“ do polaznog oblika sistema).
1. Ψ_{ij}^{-1}: $J_i <–> J_j$
2. $\Phi_{ij}^{-1}(\alpha)$: $J_i –> J_i - \alpha * J_j$
3. $\Theta_i^{-1}(\alpha)$: $J_i –> J_i * 1/\alpha$
Kako transformisati sistem do njemu ekvivalentnog iz kojeg se lako čitaju rešenja?
Gausov metod
Neka je dat sistem * Algoritam je sledeći:
1. Biramo prvu u nizu promenljivu uz koju je koeficijent =/= 0 (verovatno x_1, možemo pretpostaviti bez gubitka opštosti). Uvek transformacijama tipa 1. možemo dovesti na prvo mesto jednačinu u kojoj je koeficijent uz x_1 =/= 0. Markiramo promenljivu koju dalje nazivamo pivot.
2. Transformacijama tipa 2 eliminišemo pojavljivanje promenljive koja je pivot iz drugih jednačina.

$$\begin{aligned} \boxed{a_{11}x_1} + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \quad +(-a_{21}/a_{11}) \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \quad +(-a_{21}/a_{11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}'x_n &= b'_1 \qquad ** \\ a_{22}'x_2 + ... + a_{2n}'x_n &= b'_2 \\ &\vdots \\ a_{m2}'x_2 + ... + a_{mn}'x_n &= b'_m \end{aligned}$$

Sistem sa n-1 nepoznatom i m-1 jednačinom

3. Primenimo sve iste korake na podsistem **.
4. U konačno mnogo korako dolazimo do stepenastog sistema ekvivalentnom polaznom:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}'x_n &= b' \\ a_{22}'x_2 + ... + a_{2n}'x_n &= b'_2 \\ &\vdots \\ a_{jj}'x_j + ... + a_{jm}'x_n &= b_j' \\ 0 &= b_{j+1}' \\ &\vdots \\ 0 &= b_m' \qquad a_{jj}' =/= 0,\ j <= m \end{aligned}$$

Mogu se dogoditi sledeće situacije:
1. U poslednjem koraku smo došli do jednačine: $ax_n = b$ pri čemu a=/= 0, onda je $x_n = b/a$. Suksesivno se vraćamo unazad ubacivanjem x_n u ostale jednačine. U ovom slučaju rešenje je jedinstveno.
2. Ako se u nekom koraku pojavi jednačina oblika $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = b$, b=/=0 onda jednačina/sistem nema rešenja.
3. Ako na kraju stignemo do jednačine oblika: $ax_j + ... + \_x_{j+1} + ...+ \_x_n = b$ a=/= 0 Markiranje služi da razgraničimo „vezane“ od „slobodnih“ promenljivih. Markirane promenljive su „vezane“ – njih izražavamo preko „slobodnih“ koje uzimaju proizvoljne vrednosti iz skupa R.
$x_j = 1/a (b - \_x_{j+1} - ... -\_x_n)$
$x_j = 1/a (b - \_ \alpha_1 - ... -\_ \alpha_j)$ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j \in R$
Suksesivno se vraćamo nazad u prethodne jednačine. Sistem je neodređen.
Homogeni sistem je onaj sistem čiji su svi slobodni članovi nule:
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0$ #
$\vdots$
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0$
Homogeni sistem uvek ima bar jedno rešenje, to rešenje je (0, 0, ..., 0) i ono se naziva trivijalno rešenje.
Svakom sistemu možemo pridružiti homogeni sistem. Sistemu * pridružujemo sistem #. Rešenje sistema je rešenje homogenog sistema + jedno (bilo koje) rešenje polaznog sistema.
$h = (h_1, h_2, ..., h_n)$ – rešenje sistema # $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ – rešenje polaznog sistema tj partikularno rešenje.
Posmatrajmo j-tu jednačinu polaznog sistema:
$a_{j1}(h_1 + p_1) + a_{j2}(h_2 + p_2) + ... + a_{jn}(h_n + p_n) = a_{j1}h_1 + a_{j2}h_2 + ... + a_{jn}h_n + a_{j1}p_1 + a_{j2}p_2 + ... + a_{jn}p_n = 0 + b_j = b_j$!

Def Polje Neka je skup A skup na kome su zadane dve operacije + i * za koje važe sledeće osobine:
1. Za sve $a, b, c \in A$ važi da je (a+b)+c = a+(b+c) Asocijativnost
Operacija = preslikavanje iz A u A, mora biti u skupu
2. Postoji element $0 \in A$ takav da je a+0 = 0+a = a Neutral za sabiranje
3. Postoji element $a' \in A$ takav da je $a + a' = a' + a = 0_A$ Suprotni element
4. Za sve elemente $a, b \in A$ važi a+b = b+a Komutativnost operacije +
5. Za sve $a, b, c \in A$ važi (a*b)*c = a*(b*c) Asocijativnost za operaciju *
6. Postoji element $1_A \in A$ takav da je $a * 1_n = 1_n * a = a$ Neutral za *
7. Za sve elemente $a \in A/\{0\}$ postoji element $a^{-1} \in A$ takav da je $a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$ Postoji inverzan element
8. Za sve elemente $a, b \in A$ važi da je a*b = b*a Komutativnost za *
9. Za sve $a, b, c \in A$ važi (a + b) * c = ac + bc Distributivnost
Ako je sve zadovoljeno onda imamo polje
p – prost broj
$F_p = \{0, 1, 2, ... , p-1\}$ -> ostatak p
$(F_p, +p, *p)$ $a +_p b$ = ostatak pri deljenju sa p elementa a+b
$a*^p b$ = ostatak pri deljenju sa p elementa a*b
p = 5 $F_p = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

*5	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Matrice

Ako $m, n \in N$ i F polje matrice formata mxn ili tipa mxn nad poljem F je matrica koja se sastoji od m vrsta i n kolona. Element $a_{ij} \in F$ se nalazi u preseku i-te vrste i j-te kolone. $A = [a_{ij}]$ $i = \overline{1,m}$ $j = \overline{1,n}$ ili samo $A = [a_{ij}]$ ako ne treba naglasiti format.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$M_{mn}(F)$ – skup svih matrica formata mxn nad F

$A \in M_{mn}(F)$ – onda matrica A ima m vrsta i n kolona

j-ta kolona: $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{mj} \end{bmatrix} = A_{\downarrow j}$

i-ta vrsta: $[\, a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in} \,] = A_{i\text{->}}$

Ako je m = n za takve matrice kažemo da su kvadratne formata nxn.

$M_n(F)$ -> skup matrica svih kvadratnih matrica nad poljem F.

Matrice koje su formata 1xn zovemo vrsta-matrice.

Matrice koje su formata nx1 zovemo kolona-matrice.

Na skupu $M_{mn}(F)$ može se definisati operacija sabiranja:

$A, B \in M_{mn}(F)$

$A = [a_{ij}]$

$B = [b_{ij}]$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$A+B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$ Sabiramo samo matrice istog formata.

Sabiranje matrica je:

1) Asocijativno

$A, B, C \in M_{mn}(R)$

$(A+B) + C = ([a_{ij}]+[b_{ij}]) + [c_{ij}]=[a_{ij} + b_{ij}]+[c_{ij}] = [(a_{ij} + b_{ij})+cij]=[a_{ij} +(b_{ij} + c_{ij})] = [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] = [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) = A + (B+C)$

2) Komutativno

$A+B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = B + A$

3) Postoji neutral za sabiranje u $M_{mn}(R)$, nula matrica (svi elementi su 0)

4) Množenje skalarom $\alpha \in R$ $A \in M_{mn}(R)$ $A = [a_{ij}]$

$\alpha A = \alpha[a_{ij}] = [\alpha a_{ij}] \in M_{mn}(R)$ Svaki element se množi sa skalarom. Spoljašnja operacija!

Transponovanje matrice

Unarna operacija: $M_{mn}(R) \text{->} M_{nm}(R)$ $A \longrightarrow A^T$ definisano sa

$A^T + ([a_{ij}]_{\ i=1,m \ j=1,n})^T = [a_{ji}]_{\ i=1,n \ j=1,m}$

Vrste matrice A postaju kolone transponata, kolone postaju vrste transponata.

Važi sledeće:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$

$(A+B)^T = ([a_{ij}+b_{ij}])^T = [a_{ji}+b_{ji}] = [a_{ji}] + [b_{ji}] = A^T + B^T$

2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

$(\alpha A)^T = [\alpha a_{ij}]^T = [\alpha a_{ji}] = \alpha[a_{ji}] = \alpha A^T$

3. $(A^T)^T = A$

$(A^T)^T = ([a_{ij}]^T)^T = [a_{ji}]^T = [a_{ij}] = A$

Množenje matrica:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

gde je $c_{ij} = a_{i1}*b_{1j} + a_{i2}*b_{2j} + \dots + a_{ik}*b_{kj} = A_{i\text{->}} * B_{\downarrow j}$

Osobine množenja:

-Ne mogu se množiti bilo koje dve matrice. Broj kolona prve mora biti jednak broju vrsta druge matrice.

Množenje nije komutativno!

Ali je asocijativno (dokaz 1) i distributivno u odnosu na sabiranje (dokaz 2)

$A \in M_n(R)$

$\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \\ 0 & & \alpha_n \end{bmatrix}$ - dijagonalna matrica

Matricu $E_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 . & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{nxn}$ nazivamo jediničnom

Ako je $A \in M_{mn}(R)$ tada je $E_m*A = A$ i $A*E_n = A$ (dokaz 3 i 4)

Povezivanje množenja matrica sa sistemom jednačina:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$

$\vdots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$ možemo predstaviti kao:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Inverzne/Inverzibilne matrice

Def Kvadratna matrica $A \in M_n(R)$ je inverzibilna ako postoji tačno jedna matrica $B \in M_n(R)$ takva da je $A*B = B*A = E_n$.

oznaka: $B = A^{-1}$ ovu matricu nazivamo inverzom od A. Inverz ukoliko postoji je jedinstven. (dokaz 5)

Važi:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$

$A*A^{-1} = A^{-1}*A = E$ neka je $A^{-1} = B$ => $B^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A$

2. $(AB)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$

$(AB)*(AB)^{-1} = A*B*B^{-1}*A^{-1} = A*E*A^{-1} = A*A^{-1} = E$

$(AB)^{-1}*(AB) = B^{-1}*A^{-1}*A*B = B^{-1}*E*B = B^{-1}B = E$

Kako naći inverz date matrice ako on postoji?

Preko definicije A*matrica sa nepoznatima x_1 x_2 itd = E i onda pravimo sistem jednačina.

Elementarne transformacije matrica

Elementarne transformacije na vrstama:

1. P_{ij}: V_i <-> V_j Zamena i-te i j-te vrste

$P_{ij}(A)$ – matrica se dobija zamenom i-te i j-te vrste matrice A

2. $Q_{ij}(\alpha)$: $V_i \longrightarrow V_i + \alpha V_j$ Dodavanje i-toj vrsti j-tu vrste pomnoženu sa α

$Q_{ij}(\alpha)$ (A) – matrica koja se dobija dodavanjem i-toj vrsti matrice A j-tu vrstu pomnoženu sa α

3. $R_i(\alpha)$: $V_i \longrightarrow \alpha V_i$ množenje i-te vrste sa α

$R_i(\alpha)(A)$ – matrica koja se dobija kada se i-ta vrsta matrice A pomnoži sa α

Def Za matricu $B \in M_{mn}(R)$ kažemo da je vrsta-ekvivalentna matrici $A \in M_{mn}(R)$ i pišemo $A \sim_v B$ ako se matrica B dobija od matrice A primenom konačnog broja elementarnih transformacija na vrstama.

$\sim_v$ je relacija ekvivalencije (dokaz 6)

Elementarne transformacije na kolonama:

1. P_{ij}: K_i <-> K_j Zamena i-te i j-te kolone

$P_{ij}(A)$ – matrica se dobija zamenom i-te i j-te kolone matrice A

2. $Q_{ij}(\alpha)$: $K_i \longrightarrow K_i + \alpha K_j$ Dodavanje i-toj koloni j-tu kolonu pomnoženu sa α

$Q_{ij}(\alpha)$ (A) – matrica koja se dobija dodavanjem i-toj koloni matrice A j-tu kolonu pomnoženu sa α

3. $R_i(\alpha)$: $K_i \longrightarrow \alpha K_i$ množenje i-te kolone sa α

$R_i(\alpha)(A)$ – matrica koja se dobija kada se i-ta kolona matrice A pomnoži sa α

Svaka od ovih transformacija ima svoju inverznu transformaciju.

1. $(P_{ij})^{-1} = P_{ij}$ 2. $(Q_{ij}(\alpha))^{-1} = Q_{ij}(-\alpha)$ 3. $(R_i(\alpha))^{-1} = R_i(1/\alpha)$

Def Za matricu $B \in M_{mn}(R)$ kažemo da je kolona-ekvivalentna matrici $A \in M_{mn}(R)$ i pišemo $A \sim_k B$ ako se matrica B dobija od matrice A primenom konačnog broja elementarnih transformacija na kolonama.

$\sim_k$ je relacija ekvivalencije (dokaz analogan dokazu 6)

Ispostavlja se da se transformacije na vrstama i kolonama mogu zameniti množenjem matrica.

Lema 1 Ako je T bilo koja transformacija na vrstama onda je $T(A) = T(E) * A$

Lema 2 Ako je T bilo koja transformacija na kolonama onda je $T(A) = A*T(E)$

Matrice koje se dobijaju primenom tačno jedne elementarne na vrstama ili kolonama na jediničnu matricu nazivaju se elementarne matrice.
Lema 3 Elementarne matrice su invertibilne i važi:
$(T(E))^{-1} = T^{-1}(E)$ (dokaz 7)

Def Elementarno ekvivalentne matrice su matrice A, B ∈ $M_{mn}(R)$ za koje se matrice B dobija primenom konačnog broja elementarnih transformacija bilo na vrstama, bilo na kolonama na matricu A. Oznaka: A $\sim_e$ B (rel. ekvivalencije).

Def Matrice A i B ∈ $M_{mn}(R)$ su ekvivalentne ako postoje invertibilne matrice P ∈ $M_m(R)$ i Q ∈ $M_n(R)$ takve da je
B = PAQ Pišemo A~B
Tvrđenje: A $\sim_e$ B <=> A~B (dokaz 8)
Šta su klase relacije ~?
Tvrđenje: Svaka matrica A ∈ $M_{mn}(R)$ može da se primenom konačno mnogo elementarnih transformacija na vrstama i kolonama svede na matricu oblika:

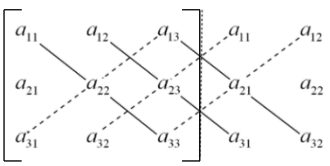
$$A^0 = \begin{bmatrix} 1_1 & & 0 \\ & {}^1 1 & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

A^0 – kanonska matrica matrice A
(dokaz 9)

Def: Broj jedinica na početnom delu dijagonalne matrice A^0 zove se rag matrice A.
Oznaka: rang(A) ili ρ(A)
A ∈ $M_{mn}(R)$ Primetimo: rang(A) <= min{m,n}
Tvrđenje: Neka A, B ∈ $M_{mn}(R)$. Tada je A~B akko rang(A) = rang(B). (Dokaz 10)
Broj klasa ekivalencije relacije ~ određen je rangom matrica. Odnosno ima ih k+1, gde je k=min{m,n} na $M_{mn}(R)$.

Teorema: Za kvadratnu matricu A ∈ $M_n(R)$ sledeća tvrđenja su ekvivalentna:
1) A je proizvod elementarnih matrica.
2) A je invertibilna.
3) A~E
4) A$\sim_V$E
5) A$\sim_K$E (Dokaz 11 za sve)
Posledica: Kvadratna matrica A ∈ $M_n(R)$ ima rang n ako je A invertibilna.
Algoritam za izračunavanja inverza matrice:
A$\sim_V$E <=> A je invertibilna
$P_k...P_1A = E$ gde $P_i = T_i(E)$ – transformacija na vrstama
$A^{-1} = P_k...P_1 = T_k(E)...T_1(E) = T_k...T_1(E)$
$[A|E] \xrightarrow{T1,\, T2,..,Tk} [E|A^{-1}]$

Determinante
Determinanta je funkcija koja skupu kvadratnih matrica nad poljem realnih brojeva dodeljuje realan broj.
$M_n(R) \longrightarrow R$ $\quad A \longrightarrow \det A$
Def Neka je A∈$M_n(R)$ data matrica. Data je det A ∈ R definisana sa:
$\det A = a_{11}*\det\overline{A_{11}} - a_{21}*\det\overline{A_{21}} +...+(-1)^{n+1}*a_{n1}*\det\overline{A_{n1}}$
Pri čemu je za sve i ∈ {1, ..., n}, matrica $\overline{A_{i1}}$ dobijena izbacivanjem i-te vrste i prve kolone matrice A.
Neka je $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det\overline{A_{ij}}$ <- algebarski kofaktor na mestu (i, j)
Tada je: $\det A = a_{11}*\det A_{11} + a_{21}*\det A_{21} +...+a_{n1}*\det A_{n1}$
Sarusovo pravilo



$\det M = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}$
$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{33}a_{12}a_{21}$

\- - -+ + + oznaka det[ ] = | |

Def: Matrica A = $[a_{ij}]$ ∈ $M_n(R)$ kod koje je $a_{ij} = 0$ za i>j zove se gornje trougaona.
$\det A = a_{11}a_{22}...a_{nn}$

Svaku matricu elementarnim transformacijama na vrstama možemo da svedemo na gornje trougaonu.

$A \longrightarrow \det A \quad T(A) \longrightarrow \det(T(A))? \quad P*A; \det(PA)$

Kako se determinanta ponaša u odnosu na elementarne transformacije na vrstama?

$A = \begin{bmatrix} A_{1\to} \\ A_{2\to} \\ A_n \end{bmatrix} \in (R^n)^n$ $a_i = A_{i\to}$ i-ta vrsta matrice. $\det(A) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_n \end{bmatrix} = \det(a_1, a_2, ..., a_n)$

Determinantu možemo posmatrati kao funkciju vrsta

Teorema(Osnovna svojstva determinante):

Funkcija det: $(R^n)^n \to R$ ima sledeća svojstva kao funkcija n promenljivih vrsta:

1. Aditivnost po svakom argumentu a_k, $k \in \{1, ..., n\}$ $\quad b+c = a_k$

$\det(a_1, ... b+c, ... a_n) = \det(a_1, ... b, ... a_n) + \det(a_1, ... c, ... a_n)$

2. Homogenost po svakom argumentu a_k, $k \in \{1, ..., n\}$ $\quad \alpha b = a_k$

$\det(a_1, ... \alpha b, ... a_n) = \alpha*\det(a_1, ... b, ... a_n)$

3. Antisimetričnost (a_l je na poziciji k, a_k je na poziciji l; zamena mesta)

$\det(a_1, ... a_l, ... a_k, ... a_n) = -\det(a_1, ..., a_k, ... a_l, ... a_n)$

4. Normiranost

$\det E = 1$

5. Linearnost = aditivnost + homogenost

(1 i 2 dokaz 12, 5 dokaz 13, 3 dokaz 14, 4 dokaz 15)

Iz prethodnog zaključujemo: $\det P_{ij}(A) = -\det A \quad \det R_i(\alpha)(A) = \alpha*\det A$

Posledice osnovnih osobina determinante:

5. $\det\begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_n \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \\ \end{array} \overset{homogenost}{=} 0*\det\begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_n \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \\ \end{array} = 0$

6. $\det\begin{bmatrix} a_1 \\ a_i \\ a_i \\ a_n \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array} \overset{antisim.}{=} -\det\begin{bmatrix} a_1 \\ a_i \\ a_i \\ a_n \end{bmatrix}$ $\quad \det A = -\det A$

$\det A = 0$

7. $\det\begin{bmatrix} a_1 \\ a_i \\ a_j + \alpha a_i \\ a_n \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array} \overset{lin}{=} \det\begin{bmatrix} a_1 \\ a_i \\ a_j \\ a_n \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array} + \alpha*\det\begin{bmatrix} a_1 \\ a_i \\ a_i \\ a_n \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array} = \det\begin{bmatrix} a_1 \\ a_i \\ a_j \\ a_n \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array}$

$\det Q_{ij}(\alpha)(A) = \det A$

Teorema o jedinstvenosti determinante

Ako je $f: M_n(R) \longrightarrow R$ bilo koja funkcija koja je aditivna, homogena i antisimetrična kao funkcija vrsta matrice onda je $f(A) = \det A * f(E)$

Ako je f i normirana (tj $f(E) = 1$) onda je $f(A) = \det A$ $\quad (f \equiv \det)$ Dokaz 16

Determinanta je jedinstvena funkcija kvadratne matrice koja je linearna, antisimetrična i normirana kao f-ja vrsta.

Tvrđenje Razvoj determinante po proizvoljnoj koloni.

Ako je $A \in M_n(R)$ za svako $j \in \{1, ..., n\}$ sledi:

$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}$ dokaz 17

Teorema Bine Košijeva teorema: Ako su $A, B \in M_n(R)$ tada je: $\det(AB) = \det A*\det B$ dokaz 18

Determinantu možemo da posmatramo i kao funkciju kolona, i tada je ona linearna, antisimetrična i normirana.

Posledica: Ako $A \in M_n(R)$ tada $\det(A^T) = \det A$ (dokaz 19)

Matricu $A \in M_n(R)$ možemo razvijati i po proizvoljnoj i-toj vrsti $i \in \{1, ..., n\}$

$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$

Sve što važi za determinante i vrste, važi i za determinante i kolone (svojstva, t. o jedinstvenosti, razvoji)

Da li postoji eksplicitna formula za determinantu? Postoji

Tvrđenje $A \in M_n(R)$

$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \, a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} ... a_{n,\pi(n)}$ gde je Sn skup svih permutacija skupova {1,..n} i sgn π = {1, -1}

dokaz 20

Primene determinanti

Adjungovana matrica i inverz

$A = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(R)$

Od matrice A pravimo novu matricu – matricu kofaktora:

$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$ transponujemo je $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$ adjungovana matrica matrice A

Teorema: $A \in M_n(R)$ $A*adj(A) = detA*E$ (dokaz 21)

Teorema: $A \in M_n(R)$ je invertibilna akko det A =/= 0. U tom slučaju je A^{-1}= (adjA) / (detA) (dokaz 22)

Kramerovo pravilo

Neka je dat kvadratni sistem:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$ Sistem (*)

$\vdots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$

Zapisujemo ga kao AX = b, gde $A \in M_n(R)$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{bmatrix} \in M_{n1}(R)$ i $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix}$ je kolona nepoznatih.

Označimo sa: $\Delta = \det A$

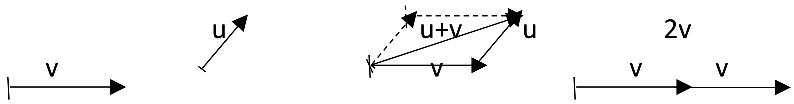
$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & b_n & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$ Ovo je determinanta matrice koja se dobija kada se u i-tu kolonu matrice A zameni kolona b.

Teorema:

1. Sistem (*) ima jedinstveno rešenje akko Δ=/=0
2. Ako je Δ = 0 i bar jedno od Δ_i =/= 0 tada sistem (*) nema rešenje. (dokaz 23)

Vektorski prostori

E – Euklidska ravan



Važi:

v+u = u+v

(u+v)+w = u+(w+v)

Važi:

k(u+v) = ku + kv k(l*u) = (k*l)u k, l ∈ R

(k+l)u = ku + lu 1u = u u, v ∈ E

Sve ove osobine koje smo naveli da važe za geometrijske vektore važe i za sabiranje matrica i množenje matrica skalarima, za sabiranje polinoma i množenje polinoma realnim brojem.

Def Vektorski prostor nad poljem F (F – vektorski prostor) predstavlja skup V sa jednom binarnom operacijom VxV -> V (sabiranje, (v, u) -> v + u) u jednom spoljašnjom operacijom FxV-> V (množenje skalarom iz polja F (α, v) -> α*v) pri čemu su zadovoljene sledeće osobine:

A1. (u + v) + w = u + (v + w)

A2. u + v = v + u

A3. postoji o_v ∈ V takav da je o_v + v = v + o_v = v za sve v∈V

A4. Za svaki v∈V postoji –v ∈ V tdj. v+(-v) = (-v)+v = o_v

A5. α(u + v) = α*u + α*v

A6. (α + β)v = α*v + β*v

A7. α*(β*v) = (α*β)*v

A8. 1*v = v, gde je 1 jedinica polja F

Elementi iz V zovu se vektori, a elementi iz F skalari.

0 = 0_v - nula vektor -v – suprotan vektora v u+v - sabiranje vektora, u, v∈V α*v - množenje vektora skalarom α∈F

U nastavku možemo pretpostaviti da je F = R tj. radićemo sa realnim vektorskim prostorima.

R – vektorski prostori ili realni vektorski prostori

Tvrđenje: (posledice aksioma)
Neka je V realan vektorski prostor Tada:
1. $\alpha(v_1 + v_2 + ... + v_n) = \alpha v_1 + \alpha v_2 + ... + \alpha v_n$
2. $(\alpha_1 + ... + \alpha_n)v = \alpha_1 v + \alpha_2 v + ... + \alpha_n v$
3. $0*v = 0_v$ za sve $v \in V$, gde je 0 neutral za sabiranje u R
4. $\alpha 0_v = 0_v$ za sve $\alpha \in R$
5. Ako je $\alpha * v = 0_v$ onda je $\alpha = 0$ ili $v = 0_v$
(Dokazi: 1. indukcijom po A5, 2. indukcijom po A6, 3. dokaz 24, 4. analogno 3. , 5. dokaz 25)

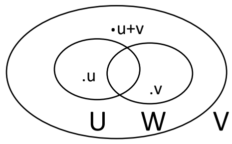
Primeri vektorskih prostora:
1. $V = R^n = RxRx...xR = \{ (x_1, ..., x_n) \mid x_i \in R\}$
Operacije:
$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) := (x_1+y_1, ..., x_n + y_n)$
$\alpha(x_1, ..., x_n) := (\alpha x_1, ..., \alpha x_n) \quad \alpha \in R$
V sa definisanim operacijama je v.p.
Sa n=2 dobijamo geometrijske vektore ($E = R^2$)
2. Polinomi sa koeficijentima iz polja F
$V = F[x] = \{a_o + a_1x +... + a_nx^n \mid a_i \in F, n \in N\}$
Operacije: Sabiranje polinoma, množenje polinoma elementima iz F
3. Matrice
$V = M_{mn}(F)$
Operacije: $A+B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \quad \alpha A = \alpha[a_{ij}] = [\alpha a_{ij}], \alpha \in F$
4. Prostor funkcija
F – polje, S =/= Ø bilo koji skup
$V = F^S = \{ f \mid f:S \to F\}$
Operacije:
$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ + u polju F
$(\alpha*f)(x) := \alpha * f(x)$ * u polju F

Potprostori
Def Neka je V v.p. nad R i U ≠ Ø podskup skupa V. Skup U je vektorski potprostor (ili samo potprostor) prostora V ako je U i sam vektorski prostor u odnosu na operacije iz V. Oznaka $U \leq V$
Tvrđenje Neka je V v.p. nad R i $U \leq V$, U ≠ Ø. Tada je U potprostor od V ako važe sledeća dva uslova:
1. Ako $u_1, u_2 \in U$ onda $u_1 + u_2 \in U$ (U je zatvoren za sabiranje)
2. Ako $\alpha \in R$ i $u \in U$, onda $\alpha*u \in U$ (U je zatvoren za množenje skalarom)
(Dokaz 26)
Primeri potprostora:
1. $V = R^n$ S-skup rešenja homogenog sistema (sa n nepoznatih) $AX = 0$, $S \leq R^n$
$u = (u_1, ..., u_n) \quad v = (v_1, ..., v_n) \quad u, v \in S$
$$A\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad A\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} Au = 0 \\ Av = 0 \\ \alpha, \beta \in R \end{matrix} \quad A(\alpha u + \beta v) = A\begin{bmatrix} \alpha u_1 + \beta v_1 \\ \vdots \\ \alpha u_n + \beta v_n \end{bmatrix} = \alpha Au + \beta Av = 0 \Rightarrow \alpha u + \beta v \in S$$
Rešenja homogenog sistema ne čine potprostor od R^n. $AX = b$ (skup rešenja ne sadrži $0_v = (0, ...,0)$)
Rešenje nehomogenog sistema = rešenje odgovarajućeg homogenog + neki vektor tj rešenja nehomogenog sistema čine afini potprostor v+S

Potprostori u R^2 : $\{0_v\} = (0,0)$, R^2 trivijalni potprostori
$p = \{ (x, y) \mid \alpha x + \beta y = 0\}$ – prave koje prolaze kroz koordinatni početak
Potprostori u R^3 : $\{0_v\} = (0,0,0)$, R^3
$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ – ravni koje sadrže tačku (0, 0, 0)
prave koje prolaze kroz (0, 0, 0) (presek dve ravni)

2. $V = M_{mn}(R)$
Neki potprostori su
gornje trougaone, donje trougaone, dijagonalne, simetrične ($A^T = A$)

Presek potprostora:
$U, W \leq V \overset{?}{=}> U \cap W \leq V$
Neka $u, v \in U \cap W$, , $\alpha, \beta \in R$ Da li $\alpha u + \beta v \in U \cap W$
$u \in U \cap W \Rightarrow {}^1u \in U$ i ${}^2u \in W$ iz 1 i $U \leq V \Rightarrow \alpha u + \beta v \in U$
$v \in U \cap W \Rightarrow {}^1v \in U$ i ${}^2v \in W$ iz 2 i $W \leq V \Rightarrow \alpha u + \beta v \in W$ $\Rightarrow \alpha u + \beta v \in U \cap W$
Presek potprostora je uvek potprostor



Suma potprostora
$U, W \leq V$
Unija potprostora ne mora biti potprostor tj ne znamo gde će biti zbir u+v.
Def Suma potprostora U i W je najmanji skup koji je potprostor i koji sadrži potprostore U i W.
$U+W=\{ u+w \mid u \in U, w \in W\}$
Važi: $U \subseteq U + W$, $W \subseteq U + W$
$U, W \leq V \overset{?}{=}> U + W \leq V$
$v_1, v_2 \in U + W \Rightarrow v_1 = u_1 + w_1$ za neke $u_1 \in U, w_1 \in W$
$v_2 = u_2 + w_2$ za neke $u_2 \in U, w_2 \in W$
$\alpha, \beta \in R$ $\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha(u_1 + w_1) + \beta(u_2 + w_2) = \underbrace{(\alpha u_1 + \beta u_2)}_{\in U \text{ jer } U \leq V} + \underbrace{(\alpha w_1 + \beta w_2)}_{\in W \text{ jer } W \leq V} \in U+W$
Suma potprostora je potprostor
Ako $v \in U+W$ tada $v = u + w$ za neke $u \in U$ i $w \in W$
Da li iz $u+w = u' + w'$, gde $u,u' \in U$ $w,w' \in W$ sledi $u=u'$ i $w=w'$
Tvrđenje Prikaz je jedinstven akko $U \cap W = \{0_v\}$ (dokaz 27)

Def Za sumu U+W kažemo da je direktna i pišemo $U \oplus W$ ako je $U \cap W = \{0_v\}$
Def Vektorski prostor V je direktna suma svojih potprostora U i W ako se svaki element iz V može na jedinstven način zapisati kao u+w gde je $u \in U$ $w \in W$
Primeri:
1. $U = \{(x, 0) \mid x \in R\}$ i $W = \{(0, y) \mid y \in R\}$ $U, W \leq V$
(Suma gornje trougaonih i donje trougaonih matrica nije direktna)

Linearna kombinacija, generatrisa
V – v.p. nad R $\alpha_i \in R$ $v_i \in V$
$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$ - linearna kombinacija vektora $v_1,..., v_n$ sa koeficijentima $\alpha_1,..., \alpha_n$

Skup svih linearnih kombinacija vektora iz nekog skupa vektora zove se linearni omotač ili lineal tog skupa.
$\mathcal{L}(v_1, ..., v_n) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n \mid \alpha_i \in R\}$
S – skup vektora iz V $\mathcal{L}(S)$ je najmanji potprostor koji sadrži S (tj $S \subseteq \mathcal{L}(S)$)
Tvrđenje: $S = \mathcal{L}(S)$ akko $S \leq V$ (dokaz 28)

Napomena: Ako je S beskonačan skup tada uzimamo linearne kombinacije konačno mnogo vektora iz S.
Važi:
$\mathcal{L}(S \cup T) = \mathcal{L}(S) \cup \mathcal{L}(T)$
$\mathcal{L}(\mathcal{L}(S)) = \mathcal{L}(S)$
$S \subseteq T \Rightarrow \mathcal{L}(S) \leq \mathcal{L}(T)$
Posebno su važni skupovi koji „generišu“ čitav prostor V
Def Za skup S kažemo da je generatrisa v.p. V ako je $\mathcal{L}(S) = V$
Svaki vektorski prostor ima generatrisu, npr $\mathcal{L}(V) = V$. Pitamo se šta je najmanja generatrisa

Def Vektori $v_1, v_2, ..., v_n$ su linearno nezavisni ako vaći:
Ako je $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0_v$ gde je $\alpha_i \in R$ onda mora biti ispunjeno $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$
U suprotnom kažemo da su vektori $v_1,..., v_n$ linearno zavisni.

Lema 1: $e = [e_1, ..., e_n]$ je linearno zavisan sistem vektora ako neki vektor e_i $i \in \{1, ..., n\}$ možemo izraziti preko drugih. (Dokaz 29)
Lema 2: $e = [e_1, ..., e_n]$ je linearno nezavisan akko predstavljanje bilo kog vektora kao linearne kombinacije vektora iz e je jednoznačno. (dokaz 30)

Teorema: Neka je V v.p. nad R i $e = [e_1, ..., e_n]$ sistem vektora iz V
Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:
1) e je linearno nezavisan i generatrisa
2) e je minimalna generatrisa
3) e je maksimalan linearno nezavisan sistem (dokaz 31 za sve)

Def Za sistem vektora e iz v.p. V koji je linearno nezavisan i generatrisa od V kažemo da je baza v.p. V.
Ako je e baza vektorskog prostora V onda se svaki vektor na jedinstven način može predstaviti kao linearna kombinacija vektora iz e.
Svaki vektorski prostor ima bazu. Sve baze jednog vektorskog prostora su istobrojne.
Lema 3 Ako je $f = [f_1, ... , f_m]$ linearno nezaisan sistem i $f \subseteq \mathcal{L}(e)$ gde je $e = [e_1, ..., e_n]$ onda je $m \leq n$. (dokaz 32)

Teorema: Ako su e i f baze vektorskog prostora V, onda je $|e|=|f|$ ($|e|$ - broj vektora u skupu e)(dokaz 33)

Def: Neka je V v.p. nad R koji ima konačnu bazu. Dimenziju prostora V definišemo kao broj elemenata bilo koje baze od V i označavamo sa dim V.
Ako v.p. V nema konačnu bazu kažemo da nije konačno dimenzionalan odnosno kažemo da je beskonačne dimenzije.
Primeri: R^n (dim je n), $M_{mn}(R)$ (dim je m*n)
Primetimo sledeće: Svaki lin. nezavisan skup možemo dopuniti do baze.
f – lin. nezavisan
- ako je $\mathcal{L}(f) = V$ => f je baza
- ako je $\mathcal{L}(f) \neq V$ => postoji $v \in V \setminus \mathcal{L}(f)$
=> $f \cup \{v\}$ linearno nezavisan i ponavljamo dok lineal proširenog sistema ne bude V
Iz svake generatrise se može izdvojiti baza.
g – generatrisa tj $\mathcal{L}(g) = V$
Neka je e maksimalan linearno nezavisan podsistem od g
Važi $g \subseteq \mathcal{L}(e)$:
pps postoji $v \in g \setminus \mathcal{L}(e)$ => $e \cup \{v\}$ linearno nezavisni sistem koji sadrži sistem e
Kontradikcija jer je e maksimalan linearno nezavisan skup
Dakle $g \subseteq \mathcal{L}(e) \Rightarrow \mathcal{L}(g) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{L}(e)) = \mathcal{L}(e)$
$\Rightarrow \mathcal{L}(e) = V$ => e je baza

Teorema: Neka je V v.p. nad R i dim V = n. Ako je $U \leq V$ tada važi:
1) dim $U \leq n$
2) Ako je dim U = n, onda je U = V. (dokaz 34)

Promena baze
V – v.p. $e=[e_1, ..., e_n]$ $f=[f_1, ..., f_n]$ e i f su dve baze od V
e je baza i $f \subseteq \mathcal{L}(e)$ => postoje $\alpha_{ij} \in R$

$$\begin{aligned} \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + ... + \alpha_{1n}e_n &= f_1 \\ \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 + ... + \alpha_{2n}e_n &= f_2 \qquad \text{Sistem } (*) \\ &\vdots \\ \alpha_{n1}e_1 + \alpha_{n2}e_2 + ... + \alpha_{nn}e_n &= f_n \end{aligned}$$

$v \in V$ $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$ $v_e = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ – koordinate vektora v u bazi e

$$v = [e_1, e_2, ..., e_n] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad v=e*v_e \quad \text{Definišemo matricu A: } A_{\downarrow i} = \begin{bmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \alpha_{ni} \end{bmatrix} = (f_i)_e$$

(*) ima oblik $[f_1, ..., f_n] = [e_1, ..., e_n]\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$ tj $f = e*A$ Matricu A nazivamo matrica prelaska sa baze e na bazu f oznake: $A=[f]_e$ ili $A = A_{e->f}$

Ako e-ove izrazimo preko f-ova (f je takođe baza)

$e = f*B => e = (e*A)*B = e*(A*B) => AB = E => B = A^{-1}$ tj $[e]_f = [f]_e^{-1}$

Šta se dešava sa koordinatama nekog vektora ako promenimo bazu?

$v = e*v_e$

$v = f*v_f \Rightarrow v = (e*A_{e->f})*v_f = e*v_e => v_e = A_{e->f}*v_f$ tj $v_f = A_{e->f}^{-1} * v_e$

Linearna preslikavanja

Želimo da uvedemo preslikavanja između vektorskih prostora koja će da čuvaju strukturu vektorskih prostora.

Def: Neka su V i W vektorski prostori nad R. Za preslikavanje L: V->W kažemo da je linearno preslikavanje ili homomorfizam v.p. ako važi:

1. L(u+v) = L(u) + L(v) Aditivnost
2. $L(\alpha u) = \alpha*L(u)$ Homogenost za sve $\alpha \in R$, $u,v \in V$

Neka svojstva linearnih preslikavanja:

1. $L(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 L(v_1) + ... + \alpha_n L(v_n)$
2. $L(0_v) = L(0*v) = 0*L(v) = 0_w$

Ako $L(0_v) =/= 0_w$ onda L nije linearno preslikavanje

3. L(-u) = -L(u)

Terminologija:

$\mathcal{L}(V, W)$ – skup svih linearnih preslikavanja iz v.p. V u v.p. W

$\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V)$ – skup svih linearnih operatora na v.p. V

Ako je L: V -> V linearno, L nazivamo linearni operator v.p. V

Def Neka je L linearno preslikavanje:

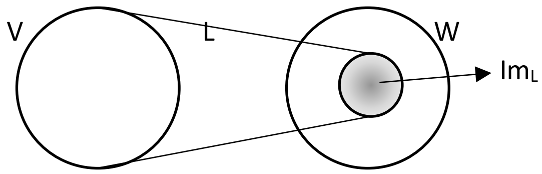
-ako je L "1-1" onda ga nazivamo monomorfizam

-ako je L "na" onda ga nazivamo epimorfizam

-ako je L bijekcija onda ga nazivamo izomorfizam

Def Za v.p. V i W kažemo da su izomorfni i pišemo $V \cong W$ ako postoji barem jedan izomorfizam L: V->W

Rang i defekt linearnog preslikavanja



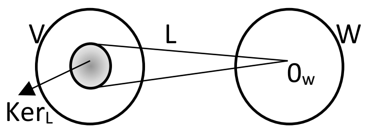
V, W v.p.

L: V -> W lin preslikavanje

$Im_L = L(V) = \{L(v) \mid v \in V\}$ slika linearnog preslikavanja

Važi $Im_L \leq W$

Neka $a, b \in R$ i $w_1, w_2 \in Im_L => w_1 = L(v_1)$ $w_2 = L(v_2)$ za neke $v_1, v_2 \in V$



$aw_1 + bw_2 = aL(v_1) + bL(v_2) = L(av_1 + bv_2) \in Im_L$

$L^{-1}[\{0_w\}] = \{v \in V \mid L(v) = 0_w\} = Ker_L$ - jezgro linearnog preslikavanja L

Važi: $Ker_L \leq V$

Neka $a, b \in R$ i $v_1, v_2 \in Ker_L => L(v_1) = 0_w$ $L(v_2) = 0_w$

$L(av_1 + bv_2) = aL(v_1) + bL(v_2) = a*0_w + b*0_w = 0_w$ tj $av_1 + bv_2 \in Ker_L$

Def: Dimenzija v.p. Im_L naziva se rang linearnog preslikavanja. Dimenzija vektorskog prostora Ker_L naziva se defekt linearnog preslikavanja.

Oznake: $\rho(L) = \dim Im_L$ – rang $\delta(L) = \dim Ker_L$ – defekt

Rang "meri" da li je preslikavanje "na":

L je "na" <=> $Im_L = W <=> \rho(L) = \dim W$

Defekt "meri" da li je preslikavanje "1-1":

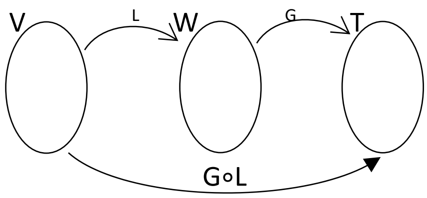
L je "1-1" <=> $Ker_L = \{0_v\} <=> \delta(L) = 0$ (dokaz 35)

Kako naći bazu za sliku i jezgro (tj. kako naći rang i defekt)?
V, W v.p. $L: V \to W$ linearno preslikavanje
$e = [e_1, ..., e_n]$ neka baza v.p. V
za svako $v \in V$ važi $v = a_1e_1 + ... + a_ne_n$, gde $a_i \in R$
$L(v) = a_1L(e_1) + ... + a_nL(e_n)$
Dakle svaki vektor iz Im_L se može napisati kao linearna kombinacija $L(e_1), ..., L(e_n)$
=> $Im_L = \mathcal{L}(L(e_1), ..., L(e_n))$ – iz lineala izdvojimo linearno nezavisne vektore i dobijemo bazu
$L(e) := [L(e_1), ..., L(e_n)]$
Baza jezgra se traži preko definicije Ker_L:
$v \in Ker_L \iff L(v) = 0_w$ Dobijamo sistem homogenih jednačina iz koga nađemo v

Stav o rangu i defektu: Ako je $L: V \to W$ linearno preslikavanje, onda je $\rho(L) + \delta(L) = \dim V$ (dokaz 36)
Posledica: $L: V \to V$ je "1-1" <=> L je "na" tj $Ker_L = 0 \iff Im_L = n$ gde je $n = \dim V$

Matrica linearnog preslikavanja
V, W v.p.   e baza v.p. V $e=[e_1, ..., e_n]$ f baza v.p. W $f=[f_1, ..., f_n]$
$L: V \to W$ linearno preslikavanje
$v \in V$: $v = a_1e_1 + ... + a_ne_n$ $\left(= e * v_e = [e_1, ..., e_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_n \end{bmatrix}\right)$
$L(v) = a_1L(e_1) + ... + a_nL(e_n) = L(e) * v_e$ $L(e) = [L(e_1) ... L(e_n)]$
$L(e_1), ..., L(e_n) \in W$
$L(e_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + ... + a_{m1}f_m$
$L(e_2) = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + ... + a_{m2}f_m$ sistem (*)
$L(e_n) = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + ... + a_{mn}f_m$
Neka je $A = [a_{ij}]$ tj $A_{\downarrow i} = (L(e_i))_f$ i-ta kolona matrice A je kolona koordinata vektora $L(e_i)$ u bazi f
$L(e) = [f_1, ..., f_m] A \Rightarrow L(e) = f*A$ (matrični zapis za *)
Za bilo koji vektor $v \in V$: $L(v) = L(e) * v_e = f*A*v_e$

Dakle ako znamo slike baznih vektora, onda lako pronalazimo sliku bilo kog vektora iz V.
$A = [L]_{ef}$ – matrica preslikavanja L u paru baza (e, f)
$[L]_{ef}$ potpuno određuje preslikavanje L
$[L]_{ef} \in M_{mn}(R)$ gde je $m=\dim W$, $n=\dim V$

Matrica kompozicije linearnih preslikavanja


$L: V \to W$, $G: W \to T$
baza za V je e, za W je f, za T je g
$(G \circ L)(u) = G(L(u))$
$G \circ L: V \to T$ lin preslikavanje
$v \in V$ $L(v) = f*A*v_e$, gde je $A = [L]_{ef}$
$w \in W$ $G(v) = g*B*w_f$, gde je $B = [G]_{fg}$
Neka je $L(v) = w$
$G(L(v)) = g*B*(L(v))_f = g*B*w_f = g*B*A*v_e$

Sa druge strane
$G(L(v)) = g*[G \circ L]_{eg} * v_e$
Dakle $[G \circ L]_{ef} = [G]_{fg} * [L]_{ef}$

Tvrđenje: Neka je $\dim V = \dim W$ i neka je e baza za V, a f baza za W, linearno preslikavanje $L: V \to W$ je invertibilno akko je $[L]_{ef}$ invertibilna. (dokaz 37)

$L: V \to W$; baza za V je e ; baza za W je f $e = [e_1, ..., e_n]$ $f = [f_1, ..., f_m]$
$Im_L = \mathcal{L}(L(e_1), ..., L(e_n))$ bazu čine linearno nezavisni vektori iz $[L(e_1), ..., L(e_n)]$
rang A = broj jedinica na dijagonali u A^0
$A \in M_{mn}(R)$ – m vrsta, vektori iz R^n ; n kolona, vektori iz R^m
rang(A, ->) = rang vrsta = najveći broj linearno nezavisnih vrsta
rang(A,↓) = rang kolona = najveći broj linearno nezavisnih kolona

Transformacije na vrstama ne menjaju rang vrsta, a ni rang kolona. Slično transformacije na kolonama ne menjaju rang kolona, ali takođe ne menjaju ni rang vrsta. (dokaz 38)
Prema tome:
rang(A,->) = rang(A^0, ->) i rang(A, ↓) = rang(A^0, ↓)
rang(A^0, ->) = rang(A^0,↓) = rang(A) = broj jedinica na dijagonali u A^0
Zaključujemo:
rang(A) = najveći broj linearno nezavisnih vrsta
= najveći broj linearno nezavisnih kolona
Neka je $A=[L]_{ef}$ $A = [L(e_1)_f\ L(e_2)_f \ldots L(e_n)_f]$
rang(A) = rang(A↓) = najveći broj linearno nezavisnih vektora među vektorima $L(e_1)_f, \ldots, L(e_n)_f \in R^m$
=> rang($[L]_{ef}$) = rang(L)

Promena baze i matrica preslikavanja
L: V -> W linearno preslikavanje ; e, g baze za V ; f, h baze za W
Kakav je odnos $[L]_{ef}$ i $[L]_{gh}$?
e i g su baze v.p. V => g = e*P   f i g su baze v.p. W => h = f*Q   P i Q su invertibilne i matrice prelaska
v ∈ V
$L(v) = L(e) * v_e = f* [L]_{ef} * v_e$
$L(v) = L(g) * v_g = h*[L]_{gh} * v_g$
$f = h * Q^{-1}$
$v = e*v_e = g*v_g = (e * P) * v_g$
$L(v) = f*[L]_{ef}*v_e = h * Q^{-1}[L]_{ef}*P*v_g$
$[L]_{gh} = Q^{-1}*[L]_{ef}*P$ gde je g = e*P i h = f*Q
Matrice $[L]_{gh}$ i $[L]_{ef}$ su ekvivalentne.

Sve matrice preslikavanja L u različitim parovima baza su međusobno ekvivalentne.
Ako je $[L]_{ef}$ = A onda postoje invertibilne matrice Q i P za koje je A^0 = PAQ.
Postoji par baza (g, h) u kojem je $[L]_{gh} = A^0$.
Ako je (e, f) proizvoljan par baza, tada u paru baza (g, h) takvih da je g = eQ, $h = f*P^{-1}$
važi $[L]_{gh} = ([L]_{ef})^0$

Za svako linearno preslikavanje L: V -> W postoji par baza (e, f) u kome je
$$[L]_{ef} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & 0 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 1 \\ r \\ \\ \end{array} \end{array}$$
odnosno $L(e_1) = f_1$; $L(e_2) = f_2$; $L(e_r) = f_r$
$L(e_{r+1}) = L(e_{r+2}) = \ldots = L(e_n) = 0$
Na osnovu prethodnog, postoji samo konačno mnogo različitih linearnih preslikavanja v.p. V u v.p. W, jer je svako linearno preslikavanje određeno svojim rangom.

L: V -> V linearni operator   e, f – baze za V
$[L]_e := [L]_{ee}$ – matrica operatora L u bazi e (slike e-ova izrazimo preko e-ova, $L(e) = e*[L]_e$
f = e * P ; P – invertibilna, matrica prelaska
Kakav je odnos A = $[L]_e$ i B = $[L]_f$?
ako v ∈ V tada je:
$L(v) = e*A*v_e$ $L(v) = f*B*v_f$
$e = f*P^{-1}$ i $v_e = P*v_f$ => $L(v) = f * P^{-1}*A*P*V_f$ => $[L]_f = P^{-1}[L]_eP$ gde je f = eP

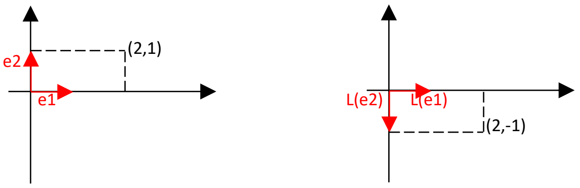
Def: Za matrice A, B ∈ $M_n(R)$ kažemo da su slične ako postoji invertibilna matrica P takva da je $B = P^{-1}AP$.
Oznaka A≃B   Relacija ≃ je ekvivalencija na $M_n(R)$ (dokaz 39)
Primetimo sledeće:
-Slične matrice su i ekvivalentne, obrnuto ne važi
-A≃B tj $B=P^{-1}AP$ $\det B = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})*\det A*\det P = (1/\det P)*\det A*\det P = \det A$

$\mathcal{L}(V, W) = \{L \mid L: V \to W \text{ linearno}\}$
Definišemo operacije na $\mathcal{L}(V, W)$: $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V, W)$
*Sabiranje preslikavanja
$L := L_1 + L_2$ za sve $v \in V$ $L(v) = (L_1 + L_2)(v) = L_1(v) + L_2(v)$ (Da li je L linearno? Dokaz 40)
*Množenje skalarom $a \in R$
$L' := a*L$ za sve $v \in V$ $L'(v) = (a*L)(v) = a*L(v)$ (Da li je L linearno? Dokaz 41)

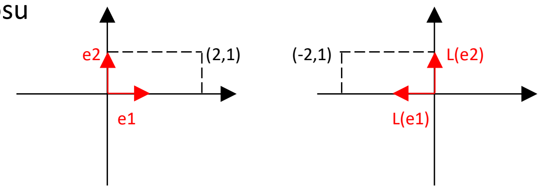
Skup $\mathcal{L}(V, W)$ sa ovako definisanim operacijama sabiranja i množenja skalarom zadovoljava sve aksiome vektorskog prostora.
Zapravo, $\mathcal{L}(V, W) \cong M_{mn}(R)$ ako je $\dim V = n$, $\dim W = m$

$F: \mathcal{L}(V, W) \longrightarrow M_{mn}(R)$ baza za V je e, baza za W je f
$L \longrightarrow [L]_{ef}$ $F(L) = [L]_{ef}$
Za fiksirano e i f, preslikavanje F je bijekcija ostaje da pokažemo da je F linearno. (dokaz 42)

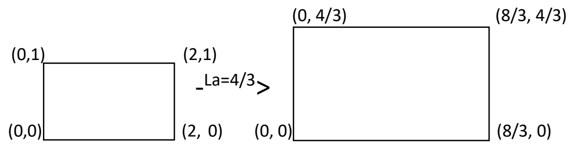
eka interesantna linearna preslikavanja u R^2 $L: R^2 \to R^2$ Standardna baza za R^2: $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ $e=[e_1\ e_2]$
1. Refleksija u odnosu na x-osu
$L((x,y)) = (x,-y)$
$[L]_e = [L(e_1)\ \ L(e_2)] = [\, L(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix})\ \ L(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
$L((1,0)) = (1,0)$
$L((0,1)) = (0,-1)$



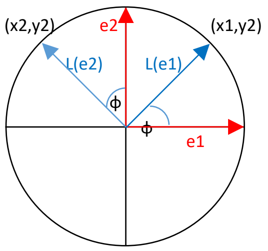
2. Refleksija u odnosu na y-osu
$L((x,y)) = (-x,y)$
$[L]_e = [L(e_1)\ \ L(e_2)] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$L((1,0)) = (-1,0)$
$L((0,1)) = (0,1)$



3. Skaliranje
$L((x,y)) = a(x,y)$; $a \in R$
$L((x,y)) = (ax, ay) = a(x,y)$
$L(e_1) = ae_1$
$L(e_2) = ae_2$ $[L]_e = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$



4. Rotacija za ugao ϕ (kontra od smera kazaljke na satu)
$x_1 = \cos\phi$
$y_1 = \sin\phi$
$x_2 = \cos(90+\phi) = -\sin\phi$
$y_2 = \sin(90+\phi) = \cos\phi$
$[L]_e = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$



Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori
Def Neka je $L: V \to V$ linearni operator. Za skalar $\lambda \in R$ kažemo da je sopstvena vrednost operatora L ako postoji $v \in V$, $v \neq 0$, takav da je $L(v) = \lambda v$. Vektor v se naziva sopstveni vektor preslikavanja L, a par (v, λ) nazivamo sopstveni par preslikavanja L.
$\lambda \in R$ – fiksirano Neka je $L(v) = \lambda v$, $v \neq 0$
$L(v) = \lambda\, Id(v) = (\lambda Id)(v)$
$L(v) - (\lambda Id)(v) = 0$
$(L - \lambda Id) = 0$ $v \in Ker(L - \lambda Id)$, $v \neq 0$
Dakle λ je sopstvena vrednost operatora L akko potprost $Ker(L - \lambda Id)$ nije trivijalan tj. $Ker(L - \lambda Id) \neq \{0\}$
$Ker(L - \lambda Id)$ – sopstveni potprostor za sopstvenu vrednost $\lambda \in R$

Kako naći sve sopstvene vrednosti i sopstvene vektore operatora L?

$L(v) = \lambda v$, $v=/=0$ <=> $Ker(L - \lambda Id) =/=\{0_v\}$

L-λId nije "1-1" pa nije ni bijekcija, pa nije ni invertibilno. Dakle $[L-\lambda Id]_e$ nije invertibilna za bilo koju bazu e.

$[L-\lambda Id]_e = [L]_e - \lambda[Id]_e$ nije invertibilna ni za jednu bazu e.

Neka je $A = [L]_e$ (e je proizvoljna baza)

$A - \lambda E$ nije invertibilna <=> $\det(A - \lambda E) = 0$

Zaključujemo: λ je sopstvena vrednost ako je nula polinoma $\det(A-\lambda E)$

Def: Ako je $A \in M_n(R)$, polinom $\chi_A(x) := \det(A - xE)$ zove se karakterističan polinom matrice A.

Slične matrice imaju iste karakteristične polinome (dokaz 43)

Def: Ako je $L \in \mathcal{L}(V)$, karakterističan polinom operatora L je karakteristična polinom bilo koje matrice:

$\chi_L(x) = \chi_{[L]e}(x)$ gde je e proizvoljna baza. Ova definicija je korektna zbog dokaza 43

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $\chi_A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{bmatrix}$ $\deg\chi_A(x) = n$ ako $A\in M_n$ vodeći koeficijent je $(-1)^n$

Važi da je:

$\chi_A(0) = \det(A - 0E) = \det A$ pa je slobodan član polinoma χ_A jednak detA.

Kako nalazimo sopstvene vrednosti operatora L?

e – neka proizvoljna baza (najčešće uzimamo konansku bazu v.p. V) Odredimo $A = [L]_e$

Nalazimo nule polinoma $\chi_A(x) = \det(A - xE)$ – to su sopstvene vrednosti matrice A i operatora L.

$\lambda \in R$ – sopstvena vrednost operatora L.

Kako naći sopstvene vektore za sopstvene vrednosti λ?

Sopstvene vektore dobijamo rešavanjem homogenog sistema: $(A - \lambda E)X = 0$

Rešenja ovog sistema će biti koordinate sopstvenih vektora.

Ako je $v_{e\to}$ rešenje sistema onda je $v=e*v_e$ sopstveni vektor.

Dijagonalizacija

Def Za linearni operator L:V->V kažemo da je dijagonalnog tipa tj dijagonalan je ako u bar jednoj bazi ima dijagonalnu matricu. (dokaz 44)

Def Za matricu $A\in M_n(R)$ kažemo da je dijagonalnog tipa ako je slična dijagonalnoj, tj. ako postoji invertibilna matrica P i dijagonalna matrica D za koje je $P^{-1}AP = D$.

Kako proveriti da li je matrica dijagonalnog tipa i ako jeste, odrediti matrice P i D.

$D = P^{-1}AP \iff AP = PD \iff (AP)_{\downarrow j} = (PD)_{\downarrow j}$ za sve $j\in\{1, \dots, n\}$

$(AP)_{\downarrow j} = P(\lambda_j * E_{\downarrow j}) = \lambda_j P E_{\downarrow j} = \lambda_j (PE)_{\downarrow j} = \lambda_j * P_{\downarrow j}$

$(AP)_{\downarrow j} = AP_{\downarrow j} = \lambda_j * P_{\downarrow j} \Rightarrow (A - \lambda_j E)P_{\downarrow j} = 0$ gde je $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

Dakle $P^{-1}AP = D$ tj matrica A je dijagonalnog tipa akko matrica A ima n linearno nezavisnih sopstvenih kolona(vektora).

Ako A ima n linearno nezavisnih sopstvenih vektora od kojih se pravi matrica P, a od sopstvenih vrednosti se napravi matrica D, vodeći računa o redosledu.

$P=[P_1\ P_2 \dots P_n] \Rightarrow D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix}^*$ gde su (λ_i, P_i) $i \in \{1, \dots, n\}$ odgovarajući sopstveni parovi.

Za matricu dijagonalnog tipa lako računamo stepene:

$A\in M_n(R)$ A – dijagonalnog tipa.

$P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1}$ $D = *$ $A^m = ?$

$A^m = (PDP^{-1})^m = PDP^{-1}PDP^{-1}\dots PDP^{-1} = PD^mP^{-1}$

Euklidski vektorski prostori
Želimo da računamo uglove rastojanja između vektora, norme vektora i vektorskih prostora, i zbog toga moramo da „obogatimo“ vektorske prostore novom strukturom.
Def: Neka je V v.p. nad R. Skalarni proizvod na V je svako preslikavanje ∘: VxV -> R koje paru vektora dodeljuje realan broj i za koje važe sledeće osobine:
1. (u+v) ∘ w = u∘w + v∘w aditivnost
2. (a*u) ∘ v = a(u∘v) homogenost
3. u∘v = v∘u simetričnost, komutativnost
4. u∘u >= 0 i u∘u = 0 <=> u = 0_v pozitivna definitnost
Posledice svojstava skalarnog proizvoda:
1. u∘0v = 0
u∘0_v + 0_v∘v = (0*u) ∘ v =^{2}= 0*(u∘v) = 0
2. (a_1u_1 + ... + a_nu_n) ∘ v = a_1(u_1 ∘ v) + ... + a_n(u_n ∘ v)

Def: Par (V, ∘) gde je V konačnodimenzioni vektorski prostor sa skalarnim proizvodom ∘, naziva se euklidski vektorski prostor. Na istom v.p. možemo definisati na više načina skalarni proizvod.

Norma
iz 4 => u∘u >= 0, u∈V – evp i u∘u ∈ R
||u|| = sqrt(u∘u) – norma, dužina, vektora u

Važi:
1. ||u|| = 0 <=> u∘u = 0 <=> u=0_v
2. ||au|| = sqrt((au) ∘ (au)) = sqrt(a^2(u∘u)) = |a|*||u||
ako uzmemo da je a = 1/||u|| onda je || u* 1/||u|| || = 1 za dati vektor u, vektor u/||u|| ima dužinu 1 (normiranje vektora)

Tvrđenje: Ako je (V, ∘) evp. onda za sve u, v ∈ V važi:
1. |u ∘ v| <= ||u|| * ||v|| (Koši – Švarcova nejednakost) (dokaz 45)
2. ||u+v|| <= ||u|| + ||v|| (nejednakost trougla ili nejednakost Minkovskog) (dokaz 46)

u, v =/= 0_v
|u∘v| <= ||u||*||v|| - Koši-Švarc
|u∘v|/**(**||u||*||v||**)** <= 1 tj. | (u∘v)/**(**||u||*||v||**)**| <= 1 tj -1<= (u∘v) / **(**||u||*||v||**)** <= 1

=>Postoji jedinstven ugao ϕ ∈ [0, π] za koji je cos ϕ = (u∘v) / **(**||u||*||v||**)**
Ugao ϕ nazivamo uglom između vektora u i v i obeležavamo sa:
ϕ = ∠(u, v)
Ugao između 0_v i bilo kog vektora definišemo sa ∠(0_v , u) := π/2
u ∘ v = ||u||*||v|| * cos∠(u, v)
Primetimo da važi: ∠(u, v) = π/2 <=> u∘v = 0

Def: Za vektore u i v u evp V kažemo da su ortogonalni ako je u∘v = 0 i pišemo u⊥v.
Ako je u ∘ v = 0 tada je:
$||u + v||^2$ = (u+v) ∘ (u+v) = u∘u + u∘v + v∘u + v∘v = u∘u + 2(u∘v) + v∘v = u∘u + v∘v = $||u||^2$ + $||v||^2$ – Pitagorina teorema

V – evp Neka je X⊆V proizvoljan. Kažemo da je v ∈ V ortogonalan na X, i pišemo v⊥x za sve x ∈ X.
Važi: $X^\perp$ <= V Neka u, v ∈ $X^\perp$ tj. u, v ⊥ x za sve x ∈ X
au + bv ∈ $X^\perp$?
(au + bv) ∘ x = a(u∘x) + b(v∘x) = a*0 + b*0 = 0, za sve x ∈ X => au + bv ∈ $X^\perp$

Skup je ortogonalan kada su svi njegovi vektori vektori međusobno ortogonalni. Posebno će nas zanimati ortogonalne baze. Svaki bazni vektor iz ortogonalne baze možemo normalizovati i na taj način dobijamo ortonormiranu bazu. e je ortogonalna ako je e_i∘e_j = 0, kada je i=/=j, ako e dodatno normiramo dobijamo ortonormiranu bazu za čije će vektore da važi:
(V, ∘) – evp. e = [e_1, ..., e_n] – baza za V e_i ∘ e_j = { 0, i=/=j ; 1, i=j

R^3 sa standardnim skalarnim proizvodom ima ortonormiranu kanonsku bazu.
Zašto su nam važne ortonormirane baze? – U njima se vrlo lako računa:
$\Sigma^n_{i=1} a_i e_i \quad \Sigma^n_{i=1} b_i e_i \;\Rightarrow\; u \circ v = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$ - u odnosu na onb svaki skalarni proizvod ima standarnu formu
$u \circ e_i = (a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n) \circ e_i = a_i(e_i \circ e_i) = a_i$
$u = (u \circ e_i)e_1 + (u \circ e_2)e_2 + ... + (u \circ e_n)e_n$
Kordinate vektora u ortonormiranoj bazi su skalarni proizvodi tog vektora i odgovarajućih baznih.
Da li svaki evp. ima ortonormiranu bazu? Kako je naći?

Lema: Svaki ortogonalan sistem vektora je linearno nezavisan. (dokaz 47)

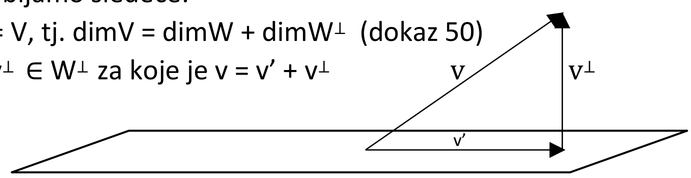
Teorema (Gram Šmit) Neka je e proizvoljna baza evp. V. Tada postoji ortonormirana baza $f = [f_1, ..., f_n]$ prostora V za čije vektore važi:
$\mathcal{L}(f_1, ..., f_k) = \mathcal{L}(e_1, ..., e_k)$ za sve $1 <= k <= n$ i $f_i \circ e_i > 0$ za sve $i <= i <= n$. (dokaz 48)

tj. $\widehat{f_n} = e_n - f_1(e_n \circ f_1) - (e_n \circ f_2)f_2 - ... - (e_n \circ f_{n-1})f_{n-1}$ $\quad f_n = \widehat{f_n} * 1/||\widehat{f_n}||$

Ortogonalne matrice
$(V, \circ)$ – evp. e – onb. $f = e*P$ P-matrica prelaska i invertibilna je
Kada je f onb?
Teorema: Neka je e ortonormirana baza euklidskog vektorskog prostora V i $f = e*P$ za neku matricu P. Tada je f ortonormirana baza prostora V akko za matricu P važi $P^T*P = E$. (Dokaz 49)

Def: Matrica P za koju važi $P^TP = E$ tj $P^{-1} = P^T$ zove se ortogonalna matrica. P je ortogonalna ako su njene kolone ortogonalne u odnosu na standardni skalarni proizvod u R^n.
P – ortogonalna => $\det(P^TP) = \det E = 1 \Rightarrow \det(P^T)*\det(P) = 1 \Rightarrow (\det P)^2 = 1 \Rightarrow \det P=1$ ili $\det P=-1$

Ortogonalna projekcija
$x \subseteq V$, $(V, \circ)$ –evp. $X^\perp <= V$ ako uzmemo da je $X = W <= V$ dobijamo sledeće:
Teorema: Za svaki potprostor W evp V važi da je $W \oplus W^\perp = V$, tj. $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$ (dokaz 50)
Za svaki vektor $v \in V$ postoje jedinstveni vektori $v' \in W$ i $v^\perp \in W^\perp$ za koje je $v = v' + v^\perp$
v' – projekcija vektora v na potprostor W
$v^\perp$ - ortogonalna dopuna vektora v do potprostora W



Kako naći ortogonalnu projekciju nekog vektora na potprostor W? (Projekciju možemo naći i bez onb)
Neka je $[e_1, ..., e_n]$ proizvoljna baza potprostora W
$v = v' + v^\perp \quad v' = a_1e_1 + ... + a_ne_n \quad v \circ e_1 = a_1(e_1 \circ e_1) + ... + a_n(e_n \circ e_1) + v^\perp \circ e_1$ i tako do e_k
Proizvode $v \circ e_i$ i $e_i \circ e_j$ možemo da izračunamo (v i baza e su unapred dati) preostaje nam da rešimo sistem do a_i.

Rastojanje u euklidskom vektorskom prostoru
U R^2 rastojanje između tačaka A i B tj vektora u i v je: $d(u, v) = \text{sqrt}((x_1-x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)$ -> norma vektora u-v u odnosu na standarni skalarni proizvod u R^2 $\quad u-v = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

U proizvoljnom vektorskom prostoru rastojanje između dva vektora definišemo kao normu njihove razlike:
$d(u, v) = || u - v ||$ d nazivamo euklidsko rastojanje u evp V
Ono ima sledeća svojstva:
1. $d(u,v) >= 0$ i $(d(u,v) = 0 \iff u = v)$
2. $d(u,v) = d(v,u)$
3. $d(u,v) <= d(u, w) + d(w,u)$
$X, Y \subseteq V \quad X, Y =/= \emptyset$
$d(X, Y) = \inf \{ d(x,y) \mid x \in X, y \in Y \}$ Rastojanje između dva neprazna skupa podrazumeva najmanje rastojanje između tačaka tih skupova. Šta je rastojanje između vektora i potprostora?
Uzmimo da je $X = \{v\}$, $Y = W <=$ evp V
$d(v, W) = ?$
$d(v, W) = \inf \{ d(v, w) \mid w \in W \}$
Tvrđenje: $d(v, W) = d(v, v') = ||v^\perp||$ (Dokaz 51)
Ugao između vektora i potprostora se definiše kao ugao između vektora i njegove projekcije na taj potprostor.
$\angle(v, W) = \angle(v, v')$

Množenje matrica je asocijativno: Dokaz 1

$$\underbrace{\underbrace{(A\cdot B)}_{X}\cdot C}_{L} = \underbrace{A\cdot\underbrace{(B\cdot C)}_{Y}}_{D} = A\cdot B\cdot C$$

$A\in M_{mk}(\mathbb{R})$ $A\cdot B\in M_{ml}(\mathbb{R})$

$B\in M_{kl}(\mathbb{R})$ $B\cdot C\in M_{kn}(\mathbb{R})$

$C\in M_{ln}(\mathbb{R})$ $\{(A\cdot B)\cdot C, A(B\cdot C)\}\in M_{m\times n}$

$$x_{ij} = A_{i\rightarrow}\cdot B_{\downarrow j} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip}\cdot b_{pj}$$

$$l_{ij} = X_{i\rightarrow}\cdot C_{\downarrow j} = \sum_{q=1}^{l} x_{iq}\cdot c_{qj} = \sum_{q=1}^{l}\left(\sum_{p=1}^{k} a_{ip}\cdot b_{pq}\right)\cdot c_{qj} = \sum_{q=1}^{l}\sum_{p=1}^{k} a_{ip}\cdot b_{pq}\cdot c_{qj}$$

$$y_{ij} = B_{i\rightarrow}\cdot C_{\downarrow j} = \sum_{q=1}^{l} b_{iq}\cdot c_{qj}$$

$$d_{ij} = A_{i\rightarrow}\cdot Y_{\downarrow j} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip}\cdot y_{pj} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip}\left(\sum_{q=1}^{l} b_{pq}\cdot c_{qj}\right) = \sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{l} a_{ip}\cdot b_{pq}\cdot c_{qj}$$

$$\Rightarrow l_{ij} = d_{ij} \Rightarrow D = L$$

Dokaz 2: ~~(Množenje matrica je distributivno u odnosu na sabiranje)~~

$$A\cdot\underbrace{\underbrace{(B+C)}_{X}}_{L} = \underbrace{\underbrace{AB}_{Y} + \underbrace{AC}_{Z}}_{D}$$

$A\in M_{n}(\mathbb{R})$, $B, C\in M_{nk}(\mathbb{R})$

$X\in M_{nk}(\mathbb{R})$, $Y\in M_{mk}(\mathbb{R})$, $Z\in M_{mk}(\mathbb{R})$ $A\cdot X\in M_{mk}(\mathbb{R})$

$$x_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \qquad l_{ij} = A_{i\rightarrow}\cdot X_{\downarrow j} = \sum_{d=1}^{n} a_{id}\cdot x_{dj} = \sum_{d=1}^{n} a_{id}(b_{dj} + c_{dj}) =$$

$$= \sum_{d=1}^{n}(a_{id}\cdot b_{dj} + a_{id}\cdot c_{dj}) = \sum_{d=1}^{n} a_{id}\cdot b_{dj} + \sum_{d=1}^{n} a_{id}\cdot c_{dj} = A_{i\rightarrow}\cdot B_{\downarrow j} + A_{i\rightarrow}\cdot C_{\downarrow j}$$

$$\Rightarrow y_{ij} + z_{ij} = d_{ij} \Rightarrow L = D \checkmark$$

$e_{ik}\neq 0$ samo kada je $k = i$

Dokaz 3: $E_m\cdot A = B$, $B = ?$ $b_{ij} = E_{mi\rightarrow}\cdot A_{\downarrow j} = \sum_{k=1}^{m} e_{ik}\cdot a_{kj} = e_{ii}\cdot a_{ij} = a_{ij}$

$\Rightarrow B = A$

Dokaz 4: $A\cdot E_n = C$, $C = ?$ $e_{kj}\neq 0$ samo kada je $k = j$

$$c_{ij} = A_{i\rightarrow}\cdot E_{j\downarrow} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot e_{kj} = a_{ij} \Rightarrow C = A \checkmark$$

Dokaz 1 dokaz 2 dokaz 3 dokaz 4

Dokaz 5: Pretpostavimo suprotno, neka su B_1 i B_2 inverz od A, odnosno

$$A \cdot B_1 = B_1 \cdot A = E \quad i \quad A \cdot B_2 = B_2 \cdot A = E$$

Tada je: $B_1 = B_1 \cdot E = B_1(A \cdot B_2) = \overbrace{B_1 \cdot A}^{E} \cdot B_2 = E \cdot B_2 = B_2$ ↯

Dokaz 6 $\sim_v$ je relacija ekvivalencije

(R) $A \sim_v A$ ✓

(S) $A \sim_v B \overset{?}{\Rightarrow} B \sim_v A$ ovo važi jer svaka od vrsta transformacija ima inverznu

$P_{ij}^{-1}: V_i \leftrightarrow V_j$ tj. $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$

$Q_{ij}^{-1}(\alpha)$ $V_i \mapsto V_i - \alpha V_j$ tj. $Q_{ij}^{-1}(\alpha) = Q_{ij}(-\alpha)$

$R_i^{-1}(\alpha)$ $V_i \mapsto V_i/\alpha$ tj. $R_i^{-1}(\alpha) = R_i(1/\alpha)$

Ako je $B = T_k \ldots T_1(A)$ gde $T \in \{P_{ij}, Q_{ij}(\alpha), R_i(\alpha)\}$

tada je $A = T_1^{-1} \ldots T_k^{-1}(B) \Rightarrow B \sim_v A$ ✓

(T) $A \sim_v B$ i $B \sim_v C \overset{?}{\Rightarrow} A \sim_v C$

$B = T_k \ldots T_1(A)$, $C = T_\ell' \ldots T_1'(B)$

$C = T_\ell' \ldots T_1' \underbrace{T_k \ldots T_1(A)}_{B} \Rightarrow A \sim_v C$

Dokaz 7: $(T(E))^{-1} = T^{-1}(E)$

Ako je T transformacija na vrstama, za bilo koju matricu A važi:

$$T(A) = T(E) \cdot A.$$

Uzmimo da je $A = T^{-1}(E)$ tada je: $T(T^{-1}(E)) = T(E) \cdot T^{-1}(E) = E$ pa je $T^{-1}(E)$ inverz od $T(E)$ tj. $(T(E))^{-1} = T^{-1}(E)$

Analogno se može dokazati ako je T transformacija na kolonama.

Dokaz 5 dokaz 6 dokaz 7

Dokaz 8: $A \sim_e B$ akko $A \sim B$

$\Rightarrow$: $A \sim_e B$ važi da je B dobijena primenom elementarnih transformacija na kolonama i vrstama matrice A.

Svaku elementarnu transformaciju možemo zameniti množenjem elementarnom matricom s'leva (vrste) ili s'desna (kolone)

$$B = \underbrace{T_k(E) \cdot \ldots \cdot T_2(E) \cdot T_1(E)}_{\text{transformacije na vrstama}\} P} \cdot \underbrace{T^1(E) \cdot T^2(E) \cdot \ldots \cdot T^l(E)}_{\text{transformacije na kolonama}\} Q}$$

Važi $B = PAQ$ Da li su P i Q inverzibilne?

Jesu $P^{-1} = (T_1(E))^{-1} \cdot (T_2(E))^{-1} \cdot \ldots \cdot (T_k(E))^{-1}$

$Q^{-1} = (T^l(E))^{-1} \cdot \ldots \cdot (T^1(E))^{-1}$ dokaz kasnije (   )

Dokaz 9: Algoritam koji daje matricu A^0.

1. Tražimo prvu ne-nula kolonu matrice A (Ako ne postoji: kraj).
2. U pronađenoj ne-nula koloni tražimo prvi ne-nula element (pivot).
3. Dovodimo pivot na poziciju $(1,1)$ tako što zamenimo mesta prvoj koloni i koloni u kojoj je pivot, a zatim zamenimo mesta prvoj vrsti i vrsti u kojoj je pivot.
4. Pomnožimo prvu vrstu (u kojoj je pivot) inverzom pivota da bismo na poziciji $(1,1)$ dobili 1.
5. Množenjem prve vrste odgovarajućim elementima i dodavanjem drugim vrstama pravimo nule ispod pivota.
6. Množenjem prve kolone odgovarajućim elementima i dodavanjem drugim kolonama pravimo nule desno od pivota, dobijamo matricu A'
7. Ceo algoritam ponavljamo na matricu A'.
8. Algoritam se završava kada nema više ne-nula kolona.

Dokaz 10: $A \sim B$ akko $\rho(A) = \rho(B)$

$\Rightarrow$: Neka je $A \sim B$ i $rang(A) = r$

$$\left.\begin{array}{l} A \sim A^0 \\ A \sim B \underset{\text{simetričnost}}{\Longrightarrow} B \sim A \end{array}\right\} \underset{\text{Tranzitivnost}}{\Rightarrow} B \sim A^0 \Rightarrow A^0 \text{ je kanonska matrica matrice } B$$

$\Rightarrow \rho(B) = r$

$\Leftarrow$: Neka je $\rho(A) = \rho(B)$

$$\Downarrow$$

$$A^0 = B^0$$

$$A \sim A^0 = B^0 \sim B \xrightarrow{\text{tranzitivnost}} A \sim B$$

Dokaz 11: $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5) \Rightarrow 1)$

$1) \Rightarrow 2)$ Neka je $A = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_k$; P_i - elementarne matrice

P_i su ~~invertibilno~~ elementarne, pa su i invertibilne

$$A^{-1} = P_1^{-1} \cdot P_2^{-1} \cdot \ldots \cdot P_k^{-1}$$

$2) \Rightarrow 3)$ A je invertibilna, pa postoji matrica $B \in M_n(\mathbb{R})$ tdj. $AB = BA = E$

- ako bi matrica A sadržavala nula ~~kolonu~~ vrstu tada bi i $AB = E$ sadržavalo nula vrstu.
- ako bi matrica A sadržavala nula kolonu tada bi i $AB = E$ sadržavalo nula kolonu.

Dakle A nema nula vrstu ni nula kolonu

$$A^0 = PAQ, \quad P, Q \in M_n(\mathbb{R}) \quad A = P^{-1} A^0 Q^{-1}$$

Ako A^0 sadrži nula vrstu ili nula kolonu, tada i A sadrži nula vrstu ili nula kolonu što nije tačno $A^0 = E$.

$3) \Rightarrow 4)$ $A \sim E$ i $A \sim_v E$?

važi $A \sim E \Rightarrow A = PEQ$ $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$ invertibilne

$$A = P \cdot Q = \underbrace{(P \cdot Q)}_{\text{proizvod elementarnih matrica}} \cdot E =$$

$$A \sim_v E$$

4) ⇒ 5) Važi $A \sim_v E$

$A = P \cdot E = E \cdot P = A \sim_k E$

5) ⇒ 1) važi $A \sim_k E$ $A = E \cdot P = P$ → proizvod elementarnih matrica pa je invertibilna.

Dokaz 12 aditivnost + homogenost

$\det(a_1, \dots, \alpha b + \beta c, \dots a_n) = \alpha \det(a_1, \dots, \underset{k}{b}, \dots, a_n) + \beta \det(a_1, \dots, \underset{k}{c}, \dots a_n)$

Za $\alpha = \beta = 1$ dobijamo aditivnost, a za $\beta = 0$ homogenost

Dokaz 13 : indukcija po n

$A = (a_1, a_2, \dots, \underbrace{\alpha b + \beta c}_{a_k}, \dots, a_n)$ $B = (a_1, \dots \underset{a_k}{b} \dots, a_n)$ $C = (a_1, \dots, \underset{a_k}{c}, \dots, a_n)$

Dokazujemo: $\det A = \alpha \det B + \beta \det C$

$\det A = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{k1} A_{k1}$ $A_{i1} = (-1)^{i+1} \det \overline{A_{i1}}, \ i \neq k$

$A_{i1} \overset{ih}{=} (-1)^{i+1} \left[\alpha \det \overline{B_{i1}} + \beta \det \overline{C_{i1}} \right] = \alpha B_{i1} + \beta C_{i1}$

$i = k$ $A_{k1} = (-1)^{k+1} \det \overline{A_{k1}} = (-1)^{k+1} \det \overline{B_{k1}} = (-1)^{k+1} \det \overline{C_{k1}}$

$\Rightarrow A_{k1} = B_{k1} = C_{k1}$

$\det A = \sum_{i \neq k} a_{i1} (\alpha B_{i1} + \beta C_{i1}) + (\alpha b_{k1} + \beta c_{k1}) A_{k1} =$

$= \alpha \underbrace{\left(\sum_{i \neq k} a_{i1} B_{i1} + b_{k1} B_{k1} \right)}_{\det B} + \beta \underbrace{\left(\sum_{i \neq k} a_{i1} C_{i1} + c_{k1} \cdot C_{k1} \right)}_{\det C} = \alpha \det B + \beta \det C$

dokaz 12 dokaz 13

Dokaz 14: Antisimetričnost. Neka je $l = k+1$.

$A = (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ $B = (a_1, \dots, a_{k+1}, a_k, \dots, a_n)$

Dokazujemo $\det A = -\det B$

$$\det A = \sum_{i \neq k, k+1} a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{k1} \cdot A_{k1} + a_{k+1,1} \cdot A_{k+1,1}$$

$i \neq k, k+1$

$$A_{i1} = (-1)^{i+1} \det \overline{A_{i1}} \stackrel{ih}{=} (-1)^{i+1} \cdot (-\det \overline{B_{i1}}) = -B_{i1}$$

$$A_{k1} = (-1)^{k+1} \det \overline{A_{k1}} = (-1)^{k+1} \det \overline{B_{k+1,1}} = -(-1)^{k+2} \cdot \det \overline{B_{k+1,1}} = -B_{k+1,1}$$

$$A_{k+1,1} = (-1)^{k+2} \cdot \det \overline{A_{k+1,1}} = -(-1)^{k+1} \cdot \det \overline{B_{k1}} = -B_{k1}$$

$$\det A = \sum_{i \neq k, k+1} a_{i1} (-B_{i1}) + a_{k1} \cdot (-B_{k+1,1}) + a_{k+1,1} (-B_{k1})$$

$$= -\sum_{i \neq k, k+1} b_{i1} B_{i1} - b_{k+1,1} \cdot B_{k+1,1} - b_{k1} \cdot B_{k1} = -\det B$$

Ako su k i l proizvoljni:

Neka je $k < l$ $\quad k \to k+1 \to k+2 \to \dots \to l$ $\quad l-k$ permutovanja susednih vrsta da k-tu dovedemo na l-to mesto.

Tada je l-ta vrsta na $(l-1)$-vom mestu, pa je potrebno još $l-k-1$ permutacija susednih vrsta da l-tu vrstu dovedemo na mesto k.

Ukupno $l-k+l-k-1 = 2(l-k)-1$ permutacija susednih vrsta matrice A, pa

$$\det(a_1, \dots, \underset{k}{a_l}, \dots, \underset{l}{a_k}, \dots, a_n) = (-1)^{2(l-k)-1} \cdot \det(a_1, \dots, a_k, \dots, a_l, \dots, a_n) = -\det(a_1, \dots, \underset{k}{a_k}, \dots, \underset{l}{a_l}, \dots, a_n)$$

Dokaz 15: Normiranost E je gornje trougaona $\Rightarrow \det E = \underbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}_{n \text{ puta}} = 1$

Dokaz 16:

$A \in M_n(\mathbb{R})$ Elementarnim transformacijama I i II tipa matricu A svodimo na trougaonu matricu T.

Tada je $f(A) = (-1)^k \cdot f(T)$ $f(A)$ je samo par puta (t_j k puta) promenila znak kada se menjaju mesta vrstama (antisimetričnost). Kada se nekoj vrsti doda druga pomnožena sa koeficijentima, ne dešava se ništa (posledica linearnosti)

$\det A = (-1)^k \det T = (-1)^k \cdot t_{11} \cdot t_{22} \cdots t_{nn}$

Primenom svojstava funkcije f dobijamo:

$f(T) = t_{11} \cdot t_{22} \cdots t_{nn}\, f(E)$

Prema tome: $f(A) = (-1)^k \cdot f(T) = (-1)^k \cdot t_{11} \cdot t_{22} \cdots t_{nn}\, f(E) = \det(A) \cdot f(E)$

Dokaz 17:

$f(A) = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}$ i pokažemo da je linearna, antisimetrična, i normirana kao funkcija vrsta. Na osnovu teoreme o jedinstvenosti $f(A) = \det(A)$

Dokaz 18:

Fiksiramo matricu B i uočimo funkciju $f(A) = \det(AB)$. $f(A)$ je linearna i antisimetrična (i normirana kada je $B = E$)

$f(E) = \det(E \cdot B) = \det(B)$

$\det(AB) = f(A) = \det A \cdot f(E) = \det A \cdot \det B$

Dokaz 19

Primenom teorema o jedinstvenosti:

Neka je $f(A) = \det(A^T)$

Kako je determinanta linearna, antisimetrična i normirana funkcija kolona, onda je f linearna, antisimetrična i normirana.

$\Rightarrow f(A) = \det(A)$ pa je $\det(A^T) = \det A$

Dokaz 20

$f(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \; a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$ i teorema o jedinstvenosti

Permutacija skupa $\{1, .., n\}$ = bijekcija skupa $\{1, .., n\}$ ima ih $n!$

Ako je $i<j$, $\pi(i) > \pi(j)$ par $(\pi(i), \pi(j))$ čini inverziju u permutaciji π.

Pr: Permutacija $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\overset{2}{\pi}(1) > \overset{1}{\pi}(3)$ i $1<3$ | $\overset{3}{\pi}(2) > \overset{1}{\pi}(3)$ i $2<3$

Permutacija je parna ako ima paran broj inverzija, inače je neparna.

$$\operatorname{sgn} \pi = \begin{cases} 1, & \pi \text{ je parna} \\ -1, & \pi \text{ je neparna} \end{cases}$$

Dokaz 21

$$A \cdot \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$(A \cdot \operatorname{adj} A)_{12} = a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + \dots + a_{1n} A_{2n}$

$(A \cdot \operatorname{adj} A)_{11} = a_{11} A_{11} + \dots + a_{1n} A_{1n} = \det A$

razvoj po j-toj vrsti

$(A \cdot \operatorname{adj} A)_{ij} = a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \dots + a_{in} A_{jn} = a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} + \dots a_{in} A_{jn}$

$(A \cdot \operatorname{adj} A)_{ii} = \det A$

$$0 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow i\text{-ta vrsta} \\ \leftarrow j\text{-ta vrsta} \leftarrow \text{razvijamo po ovoj vrsti.} \\ \\ \end{matrix}$$

$\Rightarrow a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \dots + a_{in} A_{jn} = 0$ za $j \neq i$

Sledi $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \det, & i = j \end{cases}$

$$A \cdot \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix} = \det A \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \det A \cdot E$$

dokaz 22 dokaz 23

Dokaz 22

$\Rightarrow$: Neka je A invertibilna $\Rightarrow$ postoji $B \in M_n(\mathbb{R})$ tdj. $A \cdot B = E$

Bine Košijeva teorema: $\det(AB) = \det A \cdot \det B = \det E = 1$

$\det A \cdot \det B = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$

još važi $\det B = \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

$\Leftarrow$: Neka je $\det A \neq 0$

$A \cdot \operatorname{adj} A = \det A \cdot E \quad / \cdot \frac{1}{\det A}$

$A \cdot \underbrace{\frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A}_{A^{-1}} = E$

$A \cdot A^{-1} = E \Rightarrow A$ je invertibilna i $A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A}$

Dokaz 23.

$a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad / \cdot A_{1j}$ saberemo pomnožene jednačine.

$a_{21}x_1 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad / \cdot A_{2j}$

$\vdots$

$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{nn}x_n = b_n \quad / \cdot A_{nj}$

$$\left(\sum_i a_{i1} \cdot A_{ij}\right)x_1 + \dots + \underbrace{\left(\sum_i a_{ij} \cdot A_{ij}\right)}_{\Delta} x_j + \dots + \left(\sum_i a_{in} A_{ij}\right)x_n = \underbrace{\sum_i b_i A_{ij}}_{\Delta_j}$$

$$\sum_i b_i \cdot A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_j$$

$\sum_i a_{ij} A_{ij} = \det A$
razvoj po j-toj koloni

$$\sum_i a_{ik} A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

k bilo šta
iz skupa $\{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$

$\longrightarrow$

$\Delta \cdot x_j = \Delta_j$ za sve $j \in \{1, \dots, n\}$

Dobijamo novi sistem.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x_1 = \Delta_1 \\ \Delta x_2 = \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n = \Delta_n \end{array}\right\} (**)$$

1\. $\Delta \neq 0$ rešenje $(**)$ je $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$

$S(*) \subseteq S(**)$

Proveravamo da li je rešenje sistema $(**)$ i rešenje sistema $*$ ubacivanjem u jednačine.

$$a_{i1} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{i2} \frac{\Delta_2}{\Delta} + \dots + a_{in} \frac{\Delta_n}{\Delta} \stackrel{?}{=} b_i$$

$$\sum_j a_{ij} \cdot \frac{\Delta_j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_j a_{ij} \Delta_j = \frac{1}{\Delta} \sum_j a_{ij} \left(\sum_u b_u A_{uj}\right) = \frac{1}{\Delta} \sum_u b_u \sum_j a_{ij} A_{uj}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \left(b_1 \cdot \underbrace{\sum_j a_{ij} \cdot A_{1j}}_{0} + \dots + b_i \underbrace{\sum_j a_{ij} A_{ij}}_{\Delta} + \dots + b_n \underbrace{\sum_j a_{ij} A_{nj}}_{0}\right)$$

$$= \frac{1}{\Delta} \cdot b_i \Delta = b_i$$

jeste rešenje sistema $*$

2° $\Delta = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \cdot x_1 = \Delta_1 \\ 0 \cdot x_2 = \Delta_2 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n = \Delta_n \end{array}\right\} (**)$$

ako je ba jedan od $\Delta_i \neq 0 \Rightarrow (**)$ nema rešenje $\Rightarrow (*)$ nema rešenje (jer je $S(*) \subseteq \underbrace{S(**)}_{\emptyset}$)

3° Ako je $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0$ tada je $S(**) = \mathbb{R}^n$ Međutim o $(*)$ ne možemo ništa reći. Znamo $S(*) \subseteq S(**) = \mathbb{R}^n$, ali to ne daje nikakvu informaciju o $S(*)$. U ovom slučaju $(*)$ rešavamo drugom metodom npr Gausom.

Dokaz 24

$0 + 0 = 0$ jer je 0 neutral u $\mathbb{R}$

$$0 \cdot v = (0+0) \cdot v \stackrel{A6}{=} 0 \cdot v + 0 \cdot v$$

$$u = 0 \cdot v \in V$$

$$u = u + u \ / + (-u)$$

$$\underbrace{u + (-u)}_{\stackrel{=}{A4} 0_V} = (u+u) + (-u) \stackrel{=}{A1} u + \underbrace{(u + (-u))}_{\stackrel{=}{A4} 0_V} \Rightarrow 0_V + u = 0_V$$

$$\stackrel{\Rightarrow}{A3} u = 0_V$$

tj. $0 \cdot v = 0_V$

Dokaz 25:

Ako je $\alpha=0 \overset{3^\circ}{\Rightarrow} 0\cdot v = 0_v$

$\alpha\cdot v = 0_v$ i $\alpha\neq 0$:

$\alpha\neq 0 \Rightarrow$ postoji $\frac{1}{\alpha}\in\mathbb{R}$ $\quad \alpha\cdot v = 0_v \,/\cdot\frac{1}{\alpha}$

$\frac{1}{\alpha}\cdot(\alpha\cdot v) = \frac{1}{\alpha}\cdot 0_v \overset{7}{\Rightarrow} \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha\right)}_{1}\cdot v = \underbrace{\frac{1}{\alpha}\cdot 0_v}_{\overset{4}{=}0_v}$ $\quad 1\cdot v = 0_v \underset{A8}{\Rightarrow} v = 0_v$

Dokaz 26

Aksiome $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ važe na čitavom V, pa važe i na U. Pod uslovom da važi A_1 i A_2, da li je za U ispunjena A_3?

A_3: Da li $0_v\in U$?

za $\alpha=0$, $\alpha\in R$ i $u\in U$ (postoji jer $U\neq\emptyset$) $u\cdot 0\in U$ (osobina 2)

$0\cdot u = 0_v\in U$

A_4 Da li za svaki vektor $u\in U$ važi $(-u)\in U$?

iz uslova 2 za $\alpha=-1 \Rightarrow (-1)\cdot u\in U$

$(-1)\cdot u = -u$? $\quad (-1)+1=0$ u R $\quad \underbrace{((-1)+1)\cdot u}_{\overset{A6}{=}-1\cdot u+1\cdot u} = \underbrace{0\cdot u}_{0_v}$

$(-1)u+\underbrace{1\cdot u}_{\overset{A8}{=}u} = 0_v \Rightarrow (-1)u+u=0_v \Rightarrow -u=(-1)u \Rightarrow (-u)\in U$

Uslove 1° i 2° možemo zameniti uslovom $\alpha u+\beta v\in U$ za sve $\alpha,\beta\in R$, $u,v\in U$

$\Rightarrow$: $\left.\begin{matrix}\alpha,\beta\in R\\ u,v\in U\end{matrix}\right\} \xrightarrow{2^\circ} \alpha u, \beta v\in U \xrightarrow{1^\circ} \alpha u+\beta v\in U$

$\Leftarrow$: Neka je $\alpha u+\beta v\in U$ za sve $\alpha,\beta\in R$; $u,v\in U$

za $\alpha=\beta=1 \Rightarrow 1^\circ$

za $\beta=0 \Rightarrow 2^\circ$

$U\leq V$ akko $\alpha u+\beta v\in U$ za sve $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; $u,v\in U$

Dokaz 27:

$\Rightarrow$: Neka je prikaz jedinstven. Dokazujemo $U \cap W = \{0_V\}$

PPS $U \cap W \neq \{0_V\}$

$\Rightarrow$ postoji $v \in (U \cap W) \setminus \{0_V\}$

$$0_V = \underbrace{0_V}_{\in U} + \underbrace{0_V}_{\in W} = \underbrace{v}_{\in U} + \underbrace{(-v)}_{\in W} \Rightarrow \text{prikaz nije jedinstven } \lightning$$

$\Leftarrow$: Neka je $U \cap W = \{0_V\}$. Dokazujemo: prikaz je jedinstven

$u + w = u' + w'$ za neke $u, u' \in U$ i $w, w' \in W$

$$x = \underbrace{u - u'}_{\in U} = \underbrace{w' - w}_{\in W} \Rightarrow x \in U \cap W$$

$u - u' = 0_V$ i $w' - w = 0_V$

$u = u'$ $\quad$ $w' = w$

Dokaz 28:

$\Rightarrow$: Neka je $S \leq V \Rightarrow$ svaka linearna kombinacija elemenata iz S ostaje u S

tj. $\mathcal{L}(S) \subseteq S$

Uvek važi $S \subseteq \mathcal{L}(S)$

Dakle $S = \mathcal{L}(S)$

$\Leftarrow$: $\left.\begin{array}{l} S = \mathcal{L}(S) \\ \mathcal{L}(S) \leq V \end{array}\right\} S \leq V$

Dokaz 29:

$\Rightarrow$: e je linearno zavisan $\Rightarrow \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0_V$ i postoji $\alpha_i \neq 0$ za neko $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_i} e_i + \dots + \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} e_{i-1} + e_i + \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} e_{i+1} + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_i} e_n = 0_V$$

$$e_i = -\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_i} + \dots + \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} e_{i-1} + \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} e_{i+1} + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_i} e_n\right)$$

$$e_i \in \mathcal{L}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n)$$

$\longrightarrow$

$\Leftarrow$: $e_i = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{i-1} e_{i-1} + \alpha_{i+1} e_{i+1} + \ldots + \alpha_n e_n$

$\Rightarrow \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{i-1} e_{i-1} + \underbrace{\alpha_i e_i}_{\neq 0} + \alpha_{i+1} e_{i+1} + \ldots + \alpha_n e_n = 0_V$

$\Rightarrow e$ je linearno zavisan.

Dokaz 30

$\Rightarrow$: e je linearno nezavisan sistem

Neka je $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n$

$\Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1) e_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) e_n = 0_V$

$\xRightarrow{e \text{ je lin. nez.}} (\alpha_1 - \beta_1) = (\alpha_2 - \beta_2) = \ldots = (\alpha_n - \beta_n) = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \ldots,\ \alpha_n = \beta_n$

$\Leftarrow$: Neka je predstavljanje vektora kao linearne kombinacije iz e jednoznačno.

$\underline{\alpha_1} e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = 0_V = \underline{0} e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + 0 e_n$

Prikaz je jednoznačan te $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 \Rightarrow e$ je lin. nezavisan

Dokaz 31 Lanac implikacija 2) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2)

2) $\Rightarrow$ 1) e jeste generatrisa. Treba pokazati da je e linearno nezavisan

PPS. e je lin. zavisan $\xRightarrow{\text{lema 1}}$ postoji $e_i \in e$ td. $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e \setminus \{e_i\})$

Kako je $\mathcal{L}(e) = V \Rightarrow \mathcal{L}(e \setminus \{e_i\}) = V$

$\Rightarrow e \setminus \{e_i\}$ je generatrisa manja od e $\lightning$ jer je e minimalna generatrisa

1) $\Rightarrow$ 3) e je lin. nezavisan. Treba pokazati da je e maksimalan lin. nezavisan skup.

Ako dodamo sistemu vektora e vektor $u \notin$ tada:

$\underset{\hookrightarrow e \text{ je generatrisa}}{u \in V = \mathcal{L}(e)} \xRightarrow{\text{lema 1}} e \cup \{u\}$ linearno zavisan $\lightning$ e je maksimalan lin. nezavisan

3) $\Rightarrow$ 2): e je maksimalan lin. nezavisan skup

Dokazujemo: e je generatrisa

PPS: Postoji $v \in V$ i $u \notin \mathcal{L}(e)$

ako je $\alpha u + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0_V$ tada je $\alpha = 0$ jer $u \notin \mathcal{L}(e)$

$\Rightarrow \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0_V$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ tj. e je nezavisan sistem

Dakle $e \cup \{u\}$ je lin. nezavisan skup $\lightning$ e je max lin. nezavisan skup

e je minimalna generatrisa:

PPS $\mathcal{L}(e \setminus \{e_i\}) = V$

Znano je $\mathcal{L}(e) = V \Rightarrow \mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e \setminus \{e_i\}) \overset{\text{lema 1}}{\Rightarrow} e$ je lin. zavisan $\lightning$

Dokaz 32 Indukcijom po n:

1) $n = 1$ $\quad e = [e_1]$ $\quad f \subseteq \mathcal{L}(e_1)$ ako je $m \geq 2$

$f_1 = \alpha_1 e_1$ $\quad f_2 = \alpha_2 e_1$ $\quad \alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ jer $0_V \notin f$ jer je f lin. nezavisan

$\Rightarrow e_1 = \frac{1}{\alpha_1} f_1$

$\Rightarrow f_2 = \alpha_2 \cdot \frac{1}{\alpha_1} f_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} f_1 \Rightarrow f$ nije lin. nezavisan $\lightning$

$\Rightarrow m \leq 1$

2) Pretpostavimo da je $n > 1$

(IH) Tvrđenje važi za sve sisteme e sa manje od n vektora.

$e = [e_1, \dots, e_n]$ $\quad f = [f_1, \dots, f_m] \to$ lin. nezavisan

$f_1 = \alpha_{11} e_1 + \dots + \alpha_{1n} e_n \quad / \cdot \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} \quad \dots \quad / \cdot \frac{\alpha_{m1}}{\alpha_{11}}$

$f_2 = \alpha_{21} e_1 + \dots + \alpha_{2n} e_n$

$f_m = \alpha_{m1} e_1 + \dots + \alpha_{mn} e_n$

$f_1 \neq 0_V \Rightarrow \alpha_{1j} \neq 0$ za neko $j \in \{1, \dots, n\}$

0_V ne može biti u linearno nezavisnom sistemu

Bez gubitka opštosti Neka je $j=1$ tj $\alpha_{11} \neq 0$

$f_1 = \alpha_{11} e_1 + \alpha_{12} e_2 + \dots + \alpha_{1n} e_n$

$f_2 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} \cdot f_1 = \square e_2 + \dots + \square e_n \qquad f_2' = f_2 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} f_1, \dots,$

$\vdots$

$f_m - \frac{\alpha_{m1}}{\alpha_{11}} f_1 = \square e_2 + \dots + \square e_n \qquad f_m' = f_m - \frac{\alpha_{m1}}{\alpha_{11}} f_1$

$f' = [f_1, f_2', \dots, f_m'] \to$ lin nezavisan

$$\left.\begin{array}{l} f_i' \in \mathcal{L}(e_2, \dots, e_n) \\ [f_2', \dots, f_m'] \text{ lin nezavisan} \end{array}\right\} \overset{(IH)}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} m-1 \leq n-1 \\ \text{pa } m \leq n \end{array}$$

Dokaz 33:

dokaz 33 dokaz 34 dokaz 35

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} e \text{ - baza, pa je lin nez} \\ f \text{ - generatrisa pa } e \subseteq \mathcal{L}(f) \end{array}\right\} \overset{\text{lema } 3}{\Longrightarrow} |e| \leq |f| \\ \left.\begin{array}{l} f \text{ - baza pa je lin. nez.} \\ e \text{ - generatrisa pa } f \subseteq \mathcal{L}(e) \end{array}\right\} \overset{\text{lema } 3}{\Longrightarrow} |f| \leq |e| \end{array}\right\} \Longrightarrow |e| = |f|$$

Dokaz 34:

1) baza od U je linearno nezavisna u V i može se dopuniti do baze u V

$\overset{\text{lema } 3}{\Longrightarrow} \dim U \leq n$

2) $U = \mathcal{L}(e) = V \longrightarrow$ baza od V dimenzije n

Dokaz 35:

$\Rightarrow$: ako je L "1-1" onda se samo 0_V slika u 0_W tj $\operatorname{Ker} L = \{0_W\}$

$\Leftarrow$: Neka je $\operatorname{Ker} L = \{0_V\}$

$L(u_1) = L(u_2) \Rightarrow L(u_1) - L(u_2) = 0_W \qquad L(u_1 - u_2) = 0_W$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 - u_2 \in \operatorname{Ker} L \\ \operatorname{Ker} L = \{0_V\} \end{array}\right\} \begin{array}{l} u_1 - u_2 = 0_V \\ u_1 = u_2 \end{array}$$

Dokaz 36

$\delta(L) = \dim \mathrm{Ker} L = k$ Uzmimo proizvoljnu bazu jezgra: $\tilde{e} = [e_1, \dots, e_k]$

dopunimo ovu bazu do baze za V: $e = [e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_l]$

Primetimo da je $k + l = \dim V$

Pokažimo da je $\rho(L) = \dim \mathrm{Im}_L = l$:

$\mathrm{Im}_L = \mathcal{L}(\underbrace{L(e_1)}_{0_W}, \dots, \underbrace{L(e_k)}_{0_W}, L(f_1), \dots, L(f_l)) = \mathcal{L}[L(f_1), \dots, L(f_l)]$

Ostaje da pokažemo da su $L(f_1), \dots, L(f_l)$ linearno nezavisni:

$\alpha_1 L(f_1) + \dots \alpha_l L(f_l) = 0$

$L(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_l f_l) = 0 \Rightarrow \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_l f_l \in \mathrm{Ker} L$

postoje $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$ tdj.

$\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_l f_l = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k$

$\beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k - \alpha_1 f_1 - \dots - \alpha_l f_l = 0$ - kombinacija linearno nezavisnih vektora

$\Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = \alpha_1 = \dots = \alpha_l = 0$

Dakle $[L(f_1), \dots, L(f_l)]$ je lin. nezavisan sistem pa je on baza od $\mathrm{Im}_L \Rightarrow \rho(L) = \dim \mathrm{Im}_L = l$

Zaključujemo $\dim \mathrm{Ker} L + \dim \mathrm{Im}_L = \dim V$

Dokaz 37:

$\Rightarrow$: L je invertibilno preslikavanje tj. postoji $L^{-1}: W \to V$ tdj. $L^{-1} \circ L = I_{dV}$ i $L \circ L^{-1} = I_{dW}$, $[L^{-1} \circ L]_{ee} = [I_d]_{ee} = E$

$[L^{-1}]_{fe} \cdot [L]_{ef} = E \Rightarrow [L]_{ef}$ invertibilna

$\Leftarrow$: $[L]_{ef} = A$ invertibilna. Postoji B tdj. $AB = E \Rightarrow B = A^{-1} = [L]_{ef}^{-1}$

Posmatrajmo preslikavanje $G: W \to V$ zadato sa: $[G]_{fe} = [L]_{ef}^{-1}$

$[G \circ L]_{ee} = [G]_{fe} \cdot [L]_{ef} = BA = A^{-1} \cdot A = E \Rightarrow G \circ L = I_{dV}$

G je inverzno preslikavanje preslikavanja L.

Dokaz 38: Posmatrajmo A i PA, gde je P invertibilna i P je matrica dobijena transformacijama na vrstama matrice A.

A i PA imaju isti rang kolona: dokaz 38 dokaz 39 dokaz 40 dokaz 41

$$AX = 0 \iff PAX = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 A_{1\downarrow} + x_2 A_{2\downarrow} + \dots + x_n A_{n\downarrow} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1 (PA)_{1\downarrow} + x_2 (PA)_{2\downarrow} + \dots + x_n (PA)_{n\downarrow} = 0$$

Dakle elementarnim operacijama na vrstama ne menja se rang vrsta, ali ni rang ~~vrsta~~ kolona. Slično, elementarnim operacijama na kolonama ne menja se rang kolona, ali ni rang vrsta

Dokaz 39:

Refleksivnost: $A \simeq A$ jer je $A = E^{-1} A E$

Simetričnost: $A \simeq B \Rightarrow B = P^{-1} A P \Rightarrow P B P^{-1} = A \Rightarrow B \simeq A$

Tranzitivnost: $\left.\begin{matrix} A \simeq B \\ B \simeq C \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} B = P^{-1} A P \\ C = Q^{-1} B Q \end{matrix}\right\} \Rightarrow C = Q^{-1} P^{-1} A P Q = (PQ)^{-1} A (PQ) \Rightarrow A \simeq C$

Dokaz 40: $L(\alpha u + \beta v) = L_1(\alpha u + \beta v) + L_2(\alpha u + \beta v) =$

$= \alpha L_1(u) + \beta L_1(v) + \alpha L_2(u) + \beta L_2(v) = \alpha(L_1(u) + L_2(u)) + \beta(L_1(v) + L_2(v)) =$

$= \alpha L(u) + \beta L(v) \Rightarrow L \in \mathcal{L}(V, W)$

Dokaz 41: $L'(\beta u + \mu v) = \alpha \cdot L(\beta u + \mu v) = \alpha(\beta L(u) + \mu L(v))$

$= \beta(\alpha L(u)) + \mu(\alpha L(v)) = \beta L'(u) + \mu L'(v) \Rightarrow L' \in \mathcal{L}(V, W)$

Dokaz 42: $F(\alpha L_1 + \beta L_2) = [\alpha L_1 + \beta L_2]_{ef} \overset{?}{=} \alpha F(L_1) + \beta F(L_2) =$
$= \alpha [L_1]_{ef} + \beta [L_2]_{ef}$

$(\alpha L_1 + \beta L_2)(e_i) = \alpha L_1(e_i) + \beta L_2(e_i)$ za sve $i = \overline{1,n}$ pa je

$(\alpha L_1 + \beta L_2) e = \alpha L_1(e) + \beta L_2(e) = f[\alpha L_1 + \beta L_2]_{ef}$

$L_1(e) = f[L_1]_{ef}$ $\quad L_2(e) = f[L_2]_{ef}$

$f \cdot [\alpha L_1 + \beta L_2]_{ef} = f \alpha \cdot [L_1]_{ef} + f \beta \cdot [L_2]_{ef} = f(\alpha [L_1]_{ef} + \beta [L_2]_{ef})$

$\Rightarrow [\alpha L_1 + \beta L_2]_{ef} = \alpha [L_1]_{ef} + \beta [L_2]_{ef}$

$F(\alpha L_1 + \beta L_2) = \alpha F(L_1) + \beta F(L_2)$

$\Rightarrow F$ je linearno preslikavanje v.p. $\mathcal{L}(V, W)$ u v.p. $M_{mn}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow F$ je izomorfizam

$\dim \mathcal{L}(V, W) = m \cdot n = \dim V \cdot \dim W$

Dokaz 43: $B = P^{-1}AP \Rightarrow \chi_B(x) = \chi_A(x)$ (*)

$$\chi_B(x) = \det(B - xE) = \det(P^{-1}AP - xE)$$
$$= \det(P^{-1}AP - x(P^{-1}EP)) = \det(P^{-1}(A - xE)P)$$
$$= \det P^{-1} \cdot \det(A - xE) \cdot \det P$$
$$= \frac{1}{\cancel{\det P}} \cdot \det(A - xE) \cdot \cancel{\det P} = \det(A - xE) = \chi_A \ (*)$$

Dokaz 44:

$$[L]_f = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} L(f_1) = \lambda_1 f_1 \\ L(f_2) = \lambda_2 f_2 \\ L(\lambda_n) = \lambda_n f_n \end{array}\right\} \begin{array}{l} f_1, f_2, \ldots, f_n \text{ su sopstveni vektori} \\ \text{operatora } L. \end{array}$$

$\Rightarrow L$ ima $n = \dim V$ linearno nezavisnih sopstvenih vektora.

Važi i obrnuto, ako L ima $n = \dim V$ linearno nezavisnih sopstvenih vektora, onda će u bazi ~~sopstvenih vekt~~ sastavljenoj od njih, L imati dijagonalnu matricu.

Dokaz 45. Koši-Švarcova nejednanost

Posmatrajmo vektor $v - xu,\ x \in \mathbb{R}$

$(v - xu) \circ (v - xu) \geq 0$

$v \circ v - x(u \circ v) - x(v \circ u) + x^2(u \circ u) \geq 0$

$\underbrace{v \circ v}_{c} - 2x\underbrace{(u \circ v)}_{b} + x^2\underbrace{(u \circ u)}_{a} \geq 0 \Rightarrow ax^2 - 2bx + c \geq 0$

1°

- $a \geq 0$ jer je $u \circ u \geq 0$ (ako je $\underline{a=0}$ tada je $u \circ u = 0$, pa je $u = 0_v$)

$|0_v \circ v| \overset{?}{\leq} \underbrace{\|0_v\|}_{=0} \cdot \|v\|$

$|0| \leq 0 \cdot \|v\|$ T

2° Ako je $a > 0$

za sve $u \neq 0_v$ važi da je $a > 0$ i funkcija $f(x) = ax^2 - 2bx + c \geq 0$

$\Rightarrow$ diskriminanta ove funkcije je ≤ 0

$D = 4b^2 - 4ac \Rightarrow 4b^2 - 4ac \leq 0 \ /:4$

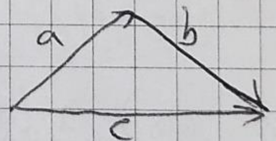
$b^2 - ac \leq 0$

$(u \circ v)^2 - (u \circ u) \cdot (v \circ v) \leq 0$

$(u \circ v)^2 - \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \leq 0 \qquad (u \circ v)^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \ /\sqrt{\ }$

$|u \circ v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

Dokaz 46: Nejednanost Minkovskog



$\|a\| + \|b\| \geq \|c\|$

$\|a\| + \|b\| \geq \|a + b\|$

$\|u + v\|^2 = (u + v) \circ (u + v) = u \circ u + v \circ u + u \circ v + v \circ v =$

$= \|u\|^2 + 2(u \circ v) + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2|u \circ v| + \|v\|^2$

koši švarc

$\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$

$\Rightarrow \|u + v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2 \ |\sqrt{\ }$

$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Dokaz 47: $[v_1, \dots, v_n]$ - ortogonalan sistem vektora, $v_i \neq 0_V$

$\Rightarrow v_i \circ v_j = 0, \ i \neq j.$

Neka je $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V \ / \circ v_i \quad , i \in \{1, \dots, n\}$

$\Rightarrow \alpha_i \underbrace{(v_i \circ v_i)}_{>0} = 0 \quad \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad [v_1, \dots, v_n]$ je linearno nezavisan

Dokaz 48: indukcijom po n

(bi) $n = 1$ Ako je $\mathcal{L}(f_1) = \mathcal{L}(e_1) \Rightarrow f_1 = \alpha e_1 \quad , \alpha = ?$

$$\left.\begin{array}{l} \|f_1\| = \|\alpha e_1\| = |\alpha| \cdot \|e_1\| = 1 \Rightarrow |\alpha| = \frac{1}{\|e_1\|} \\ f_1 \circ e_1 = \alpha(e_1 \circ e_1) > 0 \Rightarrow \alpha > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\|e_1\|} \text{ pa je } f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$$

(ih) Pretpostavimo da tvrđenje teoreme važi za n baznih vektora

Dokazujemo da važi i za $n+1$ baznih vektora:

$[f_1, f_2, \dots, f_n]$ - već konstruisani ortonormirani sistem za koji je:

$\mathcal{L}[f_1, f_2, \dots, f_n] = \mathcal{L}(e_1, e_2, \dots, e_n)$?

Kako dodajemo novi vektor?

Kada je $\mathcal{L}(f_1, \dots, f_n, v) = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$?

Odgovor je kada je $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n + \alpha e_{n+1}$

$\alpha \neq 0$ inače bi $v \in \mathcal{L}(e_1, \dots, e_n)$ pa bi $\mathcal{L}(e_1, \dots, e_n) = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$

i $e_{n+1} \in \mathcal{L}(e_1, \dots, e_n)$, a to ne može jer su $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}$ linearno nezavisni.

dalje ćemo računati sa f-ovima jer je lakše.

$v = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n + \alpha e_{n+1}$

to možemo da radimo jer je $\mathcal{L}(e_1, \dots, e_n) = \mathcal{L}(f_1, \dots, f_n)$ prema (ih)

želimo da je $v \perp f_1, \dots, f_n$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = v \circ f_1 = \alpha_1 + \alpha(e_{n+1} \circ f_1) \\ 0 = v \circ f_2 = \alpha_2 + \alpha(e_{n+1} \circ f_2) \\ \vdots \\ 0 = v \circ f_n = \alpha_n + \alpha(e_{n+1} \circ f_n) \end{array}\right\} \begin{array}{ll} \alpha_1 + \alpha(e_{n+1} \circ f_1) = 0 & \alpha_1 = -\alpha\lambda_1 \\ \alpha_2 + \alpha(e_{n+1} \circ f_2) = 0 & \alpha_2 = -\lambda_2\alpha \\ \vdots & \\ \alpha_n + \alpha(e_{n+1} \circ f_2) = 0 & \lambda_n = -\alpha\lambda_n \end{array}$$

$\lambda_i = e_{n+1} \circ f_1 \leftarrow$ možemo izračunati

$v = -\alpha\lambda_1 f_1 - \alpha\lambda_2 f_2 - \dots + \alpha e_{n+1} = \alpha(e_{n+1} - f_1\lambda_1 - f_2\lambda_2 - \dots - \lambda_n f_n)$

Skalar α ~~nazivamo~~ nalazimo iz uslova $\|v\| = 1$; zbog $e_{n+1} \circ v > 0$ skalar α mora biti pozitivan.

Dakle $f_{n+1} = \cancel{\dots} = \frac{1}{\|\hat{f}_{n+1}\|}$ gde je $\hat{f}_{n+1} = e_{n+1} - \lambda_1 f_1 - \dots - \lambda_n f_n$

Na osnovu ovoga formule glase:

$e = [e_1, \dots, e_n] \rightarrow$ proizvoljna baza evp. V $\hat{f} = [\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n]$ - ortogonalna baza konst. od e.

$f = [f_1, \dots, f_n] \rightarrow$ ortonormirana baza konstruisana od e

$\hat{f}_1 = e$ $\qquad f_1 = \frac{1}{\|\hat{f}_1\|} \cdot \hat{f}_1$

$\hat{f}_2 = e_3 - (e_3 \circ f_1) f_1 - (e_3 \circ f_2) f_2$ $\qquad f_2 = \frac{1}{\|\hat{f}_2\|} \cdot \hat{f}_2$

$\hat{f}_n = e_n - (e_n \circ f_1) f_1 - (e_n \circ f_2) f_2 - \dots - (e_n \circ f_{n-1}) f_{n-1}$ $\qquad f_n = \frac{1}{\|\hat{f}_n\|} \cdot \hat{f}_n$

Dokaz 49:

e-onb, $P = [\alpha_{ij}]$ $f = eP \iff f_i = \alpha_{1i} e_1 + \dots + \alpha_{ni} e_n$, za sve $1 \le i \le n$

pa je $f_i \circ f_j = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \dots + \alpha_{nj} \cdot \alpha_{ni}$

t_j. $f_i \circ f_j = P_{\downarrow i} \cdot P_{\downarrow j} = P^T_{i\rightarrow} \cdot P_{\downarrow j} = (P^T P)_{ij}$

Dakle:

f je onb $\iff f_i \circ f_j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \iff (P^T P)_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ $P^T P = E$

Dokaz 50: Neka je $[e_1, e_2, \ldots, e_k]$ baza za W. Dopunimo je do baze celog prostora V $[e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n]$

Ortonormiramo novu bazu Gram-Šmitovim postupkom i dobijamo onb. $[f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_n]$ ~~za W~~

$\Rightarrow [f_1, \ldots, f_k]$ je onb za W (zato što G.Š. čuva lineale u svakom koraku)

Tražimo $W^\perp$:

$v = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n \in W^\perp \Leftrightarrow v \perp w,\ w \in W$

$\Leftrightarrow v \perp f_i,\ 1 \le i \le k \Leftrightarrow v \circ f_i = 0,\ 1 \le i \le k$

$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$ (jer je f onb i važi $v \circ f_i = \alpha_i$)

$\Leftrightarrow v = \alpha_{k+1} f_{k+1} + \ldots + \alpha_n f_n \Leftrightarrow v \in \mathcal{L}(f_{k+1}, \ldots, f_n)$

$\Leftrightarrow W^\perp = \mathcal{L}(f_{k+1}, \ldots, f_n)$

$W = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k)$ $W^\perp = \mathcal{L}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$

$[e_1, \ldots, e_k] \cup [e_{k+1}, \ldots, e_n]$ baza za $V \Leftrightarrow V = W \oplus W^\perp$

Za svaki vektor $v \in V$ postoje jedinstveni vektori $v' \in W, v^\perp \in W^\perp$ tdj. $v = v' + v^\perp$

Dokaz 51: $v = \underbrace{v'}_{\in W} + \underbrace{v^\perp}_{\in W^\perp}$ Kako $v^\perp \in W^\perp$, sledi $v^\perp \perp w$ za sve $w \in W$

Neka je $w \in W$ proizvoljan i neka je $w_1 = w - v'$

$v^\perp \perp w_1$ pa na osnovu Pitagorine teoreme $\|v^\perp - w_1\|^2 = \|v^\perp\|^2 + \|w_1\|^2$

$\|v^\perp\|^2 + \|w_1\|^2 \ge \|v^\perp\|^2 \Rightarrow d(v, w) = d(v, v')$

$d(v, w) \ge d(v, v')$ Jednakost važi kada je $w = v'$