Analiza 2 v4 (Marek Svetlik)

Jana Vuković 124/22
Lazar Jovanović 34/23

Sadržaj

1 Neodređeni integrali

1.1 Primitivna funkcija

Posmatrajmo neku funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, na primer $f(x) = x^2$. Tada možemo da pronađemo koeficijent pravca u tački $x_0 \in \mathbb{R}$ po formuli:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

U našem primeru dobijamo $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2-(x_0)^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 2x_0 + h = 2x_0$. Dakle, prvi izvod funkcije f u tački x_0 jeste broj $2x_0$.

Na ovaj način imamo određenu novu funkciju $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisanu sa $\phi(x) = 2x$. Uobičajeno je da funkciju ϕ nazivamo izvodna funkcija (izvod, prvi izvod) funkcije f. Prirodno, funkciju ϕ označavamo sa f'. Sada razmotrimo obratan problem.

Odredimo sada funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ako je poznato da je funkcija $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisano sa $f'(x) = 2x$. Jasno je da je $f(x) = x^2$ jedno rešenje. Zapitajmo se da li je jedino? Nije, na primer funkcija $f(x) = x^2 + 1$ je takođe rešenje.

Odredimo funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ako je poznato da je funkcija $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa:

$$f'(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

Takvo f ne postoji, jer f' ima prekid prve vrste!

Neka je $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Funkciju $F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ nazivamo primitivna funkcija za funkciju f na intervalu (a, b) ako je funkcija F diferencijabilna na (a, b) i za svako $x \in (a, b)$ važi $F'(x) = f(x)$

Prirodno se postavljaju pitanja da li za datu funkciju postoji primitivna funkcija i ako postoji koliko primitivnih funkcija ima data funkcija.

Stav 1.1 *Neka je $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ i neka je $F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija za funkciju na intervalu (a, b) i neka je $C \in \mathbb{R}$ proizvoljno. Tada je funkcija $G : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $G(x) = F(x) + C$ primitivna funkcija za funkciju f na intervalu (a, b).*

Dokaz:
G je diferencijabilna na (a, b) kao zbir dve diferencijabilne funkcije i
$\forall x \in (a, b)$ važi $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$ što smo i hteli da dokažemo.

Ovim smo dokazali da ako je $F_1(x)$ primitivna funkcija onda je i $F_1(x) + C$ primitivna funkcija. Sledeće pitanje je da li može da postoji neka funkcija $F_2(x)$ koja nije ovog oblika. O tome nam govori sledeća teorema.

Teorema 1.1 *Neka je $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ i neka su $F_1, F_2 : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ primitivne funkcije za funkciju f na intervalu (a, b). Tada postoji $C \in \mathbb{R}$ takvo da $\forall x \in (a, b)$ važi $F_1(x) = F_2(x) + C$.*

Dokaz:
Neka je funkcija $G : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Tada važi $G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Izaberimo proizvoljne $x_1, x_2 \in (a, b)$ takve da važi $x_1 < x_2$. Dokažimo da je $G(x_1) = G(x_2)$.
1. G je neprekidna na $[x_1, x_2] \subset (a, b)$
2. G je diferencijabilna na $(x_1, x_2) \subset (a, b)$
Iz 1 i 2, a na osnovu Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti sledi da postoji $x_0 \in (x_1, x_2)$ takvo da:

$$G(x_1) - G(x_2) = G'(x_0)(x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0$$

Dakle, $G(x_1) = G(x_2)$. Kako su $x_1, x_2 \in (a, b)$ proizvoljni sledi da je G konstantna funkcija tj. $\exists C \in \mathbb{R}$ takvo da za svako $x \in (a, b)$ važi $G(x) = C$ tj. $F_1(x) - F_2(x) = C$ tj. $F_1(x) = F_2(x) + C$ što smo i hteli da dokažemo.

Ovim smo pokazali da za svake dve primitivne funkcije $F_1, F_2 : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcije $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ mora da važi $\exists C \in \mathbb{R}$ takvo da $F_1 = F_2 + C$.

Primer 1.1 *Neka je $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa: f(x) = 2x. Odrediti:*

a) Sve primitivne funkcije za funkciju f.

To su funkcije $x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$.

b) Funkciju $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ koja je primitivna za funkciju f i za koju važi $g(0) = \sqrt{2}$.

$g(x) = x^2 + C$

$g(0) = 0^2 + C = \sqrt{2} \Rightarrow C = \sqrt{2}$

Rešenje je $g(x) = x^2 + \sqrt{2}$.

Primer 1.2 *Odrediti sve dvaput diferencijabilne funkcije $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ takve da $\forall x \in \mathbb{R}$ važi $f''(x) = 0$.*
$(f'(x))' = 0$
$f'(x) = C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$
Rešenje je $f(x) = C_1 x + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

1.2 Definicija i osnovna svojstva neodređenog integrala

Definicija 1.1 *Neka je $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Neodređeni integral funkcije f na intervalu (a, b) je skup svih primitivnih funkcija za funkciju f na intervalu (a, b). Neodređeni integral funkcije f obeležavamo sa $\int f(x)dx$.*

$$\int f(x)dx = \{F \mid F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R},\ (\forall x \in (a, b))F'(x) = f(x)\}$$

Neka je $F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ proizvoljna primitivna funkcija za funkciju f na (a, b). Tada je:

$$\int f(x)\,dx = \{G \mid G : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R},\quad (\exists C \in \mathbb{R})(\forall x \in (a, b))\, G(x) = F(x) + C\} \tag{1}$$

Jednakost (1) skraćeno zapisujemo na sledeći način:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Napomena: U jednakosti (2) ne vidi se interval (a, b). Tu se stvara potencijalna opasnost.

Primer 1.3 *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Naći integral: $\int(a_n \cdot x^n + ... + a_1 \cdot x + a_0)dx$.*

Nagađanjem možemo da dođemo do rešenja:
$\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + ... + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Primer 1.4 *Naći $\int \frac{1}{x}dx$*

Rešenje: $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f : \mathbb{R}\backslash\{0\} = (-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$
Imamo dva intervala pa posmatramo dva slučaja:

I $x \in (0, +\infty)$ $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$

II $x \in (-\infty, 0)$ $\int \frac{1}{x}dx = \ln(-x) + C$
$(ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$

Važi $\ln x = \ln |x|$ za $x \in (0, +\infty)$ i $\ln(-x) = \ln |x|$ za $x \in (-\infty, 0)$.
Dakle dobijamo $\int \frac{1}{x}dx = \ln |x| + C$, $x \in (-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$. Bitno je naglasiti da se C odnosi na interval, a ne na uniju intervala.

Primer 1.5 *Odrediti funkciju* $f:(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ *takvu da* $f(1)=0$, $f(-1)=1$ *i za svako* $x\in(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$ *važi* $f'(x)=\frac{1}{x}$.

Pogrešno rešenje: $f(x)=\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C$
$f(1)=0=\ln(1)+C \implies C=0$
$f(-1)=1=\ln(1)+C \implies C=1$
Ovo je kontradikcija.
Tačno rešenje: Posmatrajmo $f:(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$ definisanu sa:

$$f(x)=\begin{cases}\ln x, x>0\\ \ln(-x)+1, x<0\end{cases}$$

Tada je njen izvod:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, x>0\\ \frac{1}{x}, x<0\end{cases}$$

Dakle važi $f(1)=0$, $f(-1)=1$. Kao što smo napomenuli, C se odnosi na interval.

Neka je $f:(a,b)\bigcup(c,d)\longrightarrow\mathbb{R}$ pri čemu $(a,b)\bigcap(c,d)=\emptyset$.
Tada $\int f(x)dx=F_1(x)+C_1$ na (a,b) i $\int f(x)dx=F_2(x)+C_2$ na (c,d). Pri tome u opštem slučaju ne mora da važi $C_1=C_2$.

Stav 1.2 *Neka su* $f_1,f_2:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ *funkcije koje imaju primitivne funkcije na* (a,b) *i neka su* $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$. *Tada funkcija* $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ *ima primitivnu funkciju na* (a,b) *i važi:*
$\int(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)(x)dx=\lambda_1\int f_1(x)dx+\lambda_2\int f_2(x)dx$

Dokaz:
Neka je funkcija $F_1:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ primitivna funkcija za f_1 i neka je funkcija $F_2:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ primitivna funkcija za f_2. Tada po definiciji primitivne funkcije važe jednakosti: $F_1'(x)=f_1(x),\ x\in(a,b)$ $^{(1)}$ i $F_2'(x)=f_2(x),\ x\in(a,b)$ $^{(2)}$. Iz $^{(1)}$ i $^{(2)}$ zaključujemo:

$$(\lambda_1F_1+\lambda_2F_2)'(x)=\lambda_1F_1'(x)+\lambda_2F_2'(x)=$$
$$\lambda_1f_1(x)+\lambda_2f_2(x)=(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2)(x)$$

Ako krenemo od desne strane jednakosti koju dokazujemo i primenimo prethodne jednakosti dobijamo:

$$\begin{aligned}D&=\lambda_1\int f_1(x)dx+\lambda_2\int f_2(x)dx\\&=\lambda_1(F_1(x)+C_1)+\lambda_2(F_2(x)+C_2)\\&=\lambda_1\cdot F_1(x)+\lambda_2\cdot F_2(x)+\lambda_1\cdot C_1+\lambda_2\cdot C_2\\&=\lambda_1\cdot F_1(x)+\lambda_2\cdot F_2(x)+C\\&=(\lambda_1F_1+\lambda_2F_2)(x)+C\\&=\int(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2)(x)dx\\&=L\end{aligned}$$

čime završavamo dokaz.

Primer 1.6 *Naći* $\int(\frac{3}{\sqrt{x}} + \cos\frac{x}{3} - 5\cdot 2^x)dx,\ x > 0.$

Rešenje:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3}{\sqrt{x}}dx + \int \cos\frac{x}{3}dx - 5\int 2^x dx \\ &= 6\sqrt{x} + C_1 + 3\sin\frac{x}{3} + C_2 - 5\frac{2^x}{\ln 2} - 5C_3 \\ &= 6\sqrt{x} + 3\sin\frac{x}{3} - 5\frac{2^x}{\ln 2} + C \end{aligned}$$

Tablica integrala:

1. $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ $\quad \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \quad x \in (0, +\infty)$
2. $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ $\quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
3. $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \quad x \in (-\infty, 0)\bigcup(0, +\infty)$
$$\int x^{-n}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-n}x^{1-n} + C_1, x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{1-n}x^{1-n} + C_2, x \in (0, +\infty) \end{cases}$$
4. $x \in (-\infty, 0)\bigcup(0, +\infty)$
$$\int x^{-1}dx = \begin{cases} \ln|x| + C_1, x \in (-\infty, 0) \\ \ln|x| + C_2, x \in (0, +\infty) \end{cases}$$
5. $a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R} \quad \int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$
6. $x \in \mathbb{R} \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $x \in \mathbb{R} \quad \int \cos x dx = \sin x + C$
8. $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi)$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C_k \quad x \in (\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$
9. $x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi, \pi + k\pi)$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + C_k \quad x \in (k\pi, \pi + k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$
10. $x \in (-1, 1) \quad \int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}dx = arcsinx + C$
11. $x \in \mathbb{R} \quad \int \frac{1}{1+x^2} = arctgx + C$

Neka je $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ i $F'(x) = f(x)$ za svako $x \in (a, b)$
Ako je F primitivna funkcija za f na (a, b), onda je i $F + const.$ primitivna za f na (a, b)
Ako su F i G primitivne za f na (a, b), tada je $G = F + const.$

1.3 Metode Integracije

Teorema 1.2 *(O smeni promenljive1) Neka je* $F : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *primitivna funkcija za funkciju* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *i neka je* $g : (\alpha,\beta) \longrightarrow (a,b)$ *diferencijablna funkcija na* (α,β)*. Tada postoji primitivna funkcija za funkciju* $(f \circ g) \cdot g' : (\alpha,\beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ *i važi:*

$$\begin{aligned}\int ((f \circ g) \cdot g')(x)dx &= \int (f \circ g)(x) \cdot g'(x)dx \\ &= \int f(g(x)) \cdot g'(x)dx \\ &= F(g(x)) + C \quad ,C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Dokaz: $x \in (a,b)$ proizvoljno

$$\begin{aligned}(F(g(x)) + C)' &= ((F \circ g)(x) + C)' \\ &= ((F \circ g)(x))' + 0 \\ &\text{po teoremi o izvodu kompozicije} \\ &= F'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= f(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= (f \circ g)(x) \cdot g'(x) \\ &= ((f \circ g) \cdot g')(x)\end{aligned}$$

Primer 1.7 *Neka su* $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$*. Naci:* $\int (ax+b)^n dx$

$f(t) = t^n \quad F(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad g(x) = ax + b \quad g'(x) = a$

$$\begin{aligned}\int (ax+b)^n dx = \int f(g(x))dx &= \int \frac{1}{a} f(g(x))g'(x)dx \\ &= \frac{1}{a} \int f(g(x))g'(x)dx \\ &= \frac{1}{a} F(g(x)) + C \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+n}(ax+b)^{1+n}\end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R} \quad n > 0 \quad x \in (-\infty, -\frac{b}{a}) \bigcup (-\frac{b}{a}, +\infty) \quad n \leq 0, n \neq -1$
Za n = 0 vazi sledece: $\int (ax+b)^n dx = \int (ax+b)^0 dx = \int 1dx$

$$\int x^0 dx = \begin{cases} x + C_1, & x \in (0, +\infty) \\ x + C_2, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

* $\lim\limits_{x \to 0+} x^x = 1$ ali $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^y$ ne postoji

Primer 1.8 *Naći* $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$

Teorema 1.3 *(O smeni promenljive 2) Neka je* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$*, neka je* $g : (\alpha, \beta) \longrightarrow (a, b)$ *diferencijabilna fja takva da postoji* $g^{-1} : (a, b) \longrightarrow (\alpha, \beta)$ *koja je takođe diferencijabilna i neka je* $F : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ *primitivna funkcija za funkciju* $(f \circ g) \cdot g' : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$*.*
Tada postoji primitivna funkcija za funkciju f *i važi:*
$\int f(x)dx = F(g^{-1}(x)) + C, C \in \mathbb{R}$

Dokaz: $x \in (a, b)$ proizvoljno

$$\begin{aligned}(F'(g^{-1}(x)) + C)' &= (F(g^{-1}(x)))' + 0 = F'(g^{-1}(x)) \cdot (g^{-1})'(x) \\ &= ((f \circ g) \cdot g')(g^{-1}(x)) \cdot (g^{-1})(x) \\ &= (f \circ g)(g^{-1}(x)) \cdot g'(g^{-1}) \cdot (g^{-1})'(x) \\ &= (f(x)) \cdot (g \circ g^{-1})(x) = f(x) \cdot 1\end{aligned}$$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty) \quad g(t) = e^t \quad g^{-1}(x) = \ln x$
$g^{-1} : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$
Možemo primeniti teoremu o smeni promenljive.
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad g(t) = t^3 \quad g^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$
$(g^{-1})'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{g^{-1}(h) - g^{-1}(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$ nije diferencijabilno
Ne može u teoremu
$g : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty) \quad g(t) = t^3$
$g^{-1} : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty) \quad g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$
$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ Može u teoremu.

Primer 1.9 *Neka je* $a > 0$ *Naći* $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$

$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} \quad x \in (-a, a) \quad f : (-a, a) \longrightarrow \mathbb{R}$
$g(t) = a \cdot \sin t \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow (-a, a)$
$g^{-1}(x) = arcsin\frac{x}{a} \quad x \in (-a, a) \quad g^{-1} : (-a, a) \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$g'(t) = a \cos t$

$$\begin{aligned}((f \circ g) \cdot g')(t) &= (f \circ g)(t) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t) \\ &= \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} \cdot a \cdot \cos t \\ &= a^2\sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t = a^2 \cos^2 t \\ & t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\end{aligned}$$

Šta je primitivna za $a^2 \cos^2 t$?
$a^2 \cos^2 t = \frac{a^2}{2} \cdot (1 + \cos 2t) = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \cdot \cos 2t$
Primitivna je $\frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4} \sin 2t$
$F : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$
$F(t) = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4} \sin 2t$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2}dx &= \frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} sin(2arcsin\frac{x}{a}) + C \\ &= \frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} 2sin(arcsin\frac{x}{a})cos(arcsin\frac{x}{a}) + C \\ &= \frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\frac{x}{a} cos(arcsin\frac{x}{a}) + C\end{aligned}$$

$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2} arcin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2} + C$
$= \frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C = (G + C)$
Provera:
$G'(x) = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{x}{a})^2} \cdot \frac{1}{a} = ... = \sqrt{a^2 - x^2}$

$*cos(arcsin\frac{x}{a}) = \sqrt{cos^2(arcsin\frac{x}{a})} = \sqrt{1 - sin^2(arcsin\frac{x}{a})} =$
$\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}*$

Primer 1.10 $\int (2x+3)^{50}dx = \begin{vmatrix} t = 2x+3 \\ dt = 2dx \\ dx = \dfrac{1}{2}dt \end{vmatrix} = \int t^{50}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{50}dt = \frac{1}{2 \cdot 51}t^{51} + C = \frac{1}{2 \cdot 51}(2x+3)^{51} + C$

Primer 1.11 $\int \sqrt{1-x^2}dx = \begin{vmatrix} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{vmatrix} = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t dt =$
Napomena: $t \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$
$= \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C$

Teorema 1.4 *(O parcijalnoj integraciji)Neka su* $u, v : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferencijabilne funkcije. Tada funkcija* $uv' : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *ima primitivnu funkciju akko funkcija* $u'v : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *ima primitvnu funkciju i pri tome važi:*
$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$

Dokaz: Neka je $x \in (a,b)$ proizvoljno.

$$(uv)'(x) = (u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad (1)$$

Pretpostavimo da $u'v$ ima primitivnu funkciju. Tada iz (1) dobijamo

$$u(x)v'(x) = (u(x) \cdot v(x))' - u'(x)v(x) \quad (2)$$

Kako $(u(x)v(x))'$ i $u'(x)v(x)$ imaju primitivne funkcije, iz (2) sledi da i $u(x)v'(x)$ ima primitivnu, jer je prema (2) jednaka njihovoj razlici. Osim toga važi

$$\begin{aligned} \int u(x)v'(x)dx &= \int (u(x)v(x))'dx - \int u'(x)v(x)dx \\ &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx \end{aligned}$$

Isto se dobija ako PP da uv' ima primitivnu funkciju.

Primer 1.12 *Naći* $\int e^x \sin x dx$

$$\begin{aligned} u(x) &= e^x & v'(x) &= \sin x \\ u'(x) &= e^x & v(x) &= -\cos x \end{aligned}$$

$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$
Ostaje još: $\int e^x \cos x dx$ da se izračuna.

$$\begin{aligned} u(x) &= e^x & v'(x) &= \cos x \\ u'(x) &= e^x & v(x) &= \sin x \end{aligned}$$

$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$
Uvrstimo dobijeni izraz u prethodnu jednakost.

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$
$$C \in \mathbb{R}$$