A3 rokovi

2023 jan 1

1. Нека је $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1/2$ константа и нека је функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x,y) = \begin{cases} |xy|^\alpha \log(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(а) Доказати да је функција f непрекидна на $\mathbb{R}^2$.

(б) Испитати диференцијабилност функције f у тачки $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |xy|^\alpha \log(x^2+y^2) = \qquad 0 \le \left| |xy|^\alpha \cdot \log(x^2+y^2) \right| \le \dfrac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2+y^2)^\alpha}{(x^2+y^2)^{1/2}}$

$\le \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha (x^2+y^2)^{\alpha - 1/2} \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha 0^{\alpha - 1/2} \xrightarrow{\alpha > 1/2} 0$

Jeste neprekidna

b) $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{f(0+h,0+k) - hf'_x(0+h,0) - kf'_y(0,0+k) - f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim \dfrac{|hk|^\alpha \log(h^2+k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}}$

$0 \le \left| \dfrac{|hk|^\alpha \cdot \log(h^2+k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \left| \dfrac{|h^2+k^2|^\alpha}{|h^2+k^2|} \right| = \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \cdot (h^2+k^2)^{\alpha-1}$ Za $\alpha > 1$ diferencijabilno

2. Одредити локалнке екстремуме функције $f(x,y,z) = 3x - 2y + 5z$ при услову $x^2+y^2+z^2 = 3$.

Bez unutrašnjosti

$3x - 2y + 5z \ , \ x^2+y^2+z^2 = 3$

$F = 3x - 2y + 5z + \lambda(x^2+y^2+z^2-3)$

$F'_x = 3 + 2\lambda x = 0 \to x = -\frac{3}{2\lambda}$

$F'_y = -2 + 2\lambda y = 0 \to y = \frac{2}{2\lambda}$

$F'_z = 5 + 2\lambda z = 0 \to z = -\frac{5}{2\lambda}$

$F'_\lambda = x^2+y^2+z^2-3 = 0$

$9 + 4 + 25 - 12\lambda^2 = 0$

$38 = 12\lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{19}{6}}$

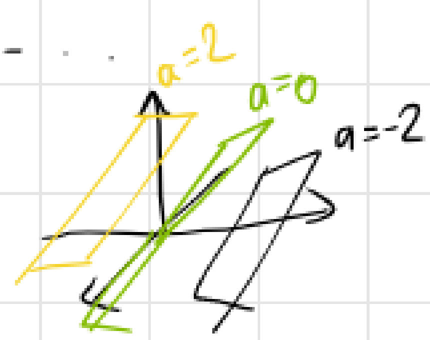
$M_1\left(3\sqrt{\frac{3}{38}}, -\sqrt{\frac{6}{19}}, \sqrt{\frac{3}{38}}\right) \quad \frac{19}{6}$

$M_2\left(-3\sqrt{\frac{3}{38}}, +\sqrt{\frac{6}{19}}, -\sqrt{\frac{3}{38}}\right)$

$f(x,y,z) = 9\sqrt{\frac{3}{38}} + 2\sqrt{\frac{6}{19}} + 5\sqrt{\frac{3}{38}} = \dfrac{9\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{38}} = \qquad \sqrt{114} \quad M_1$

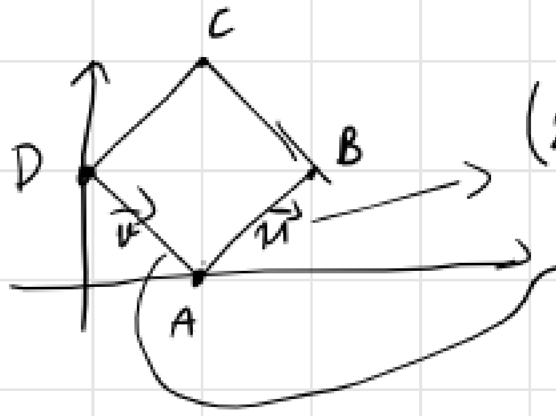
$\qquad -9 - 2 - 5 = \ldots \qquad -\sqrt{114} \quad M_2$

$2^\circ\ \nabla f \neq \vec{0}$ Nikada $(3, -2, 5)$



3. Нека је $S \subset \mathbb{R}^2$ унутрашњост паралелограма са теменима $\underset{A}{(\pi,0)}$, $\underset{B}{(2\pi,\pi)}$, $\underset{C}{(\pi,2\pi)}$, $\underset{D}{(0,\pi)}$. Израчунати интеграл

$$\iint_S \underbrace{(x-y)^2\sin^2(x+y)}_{f(x)}\,dxdy.$$



$(2\pi-\pi, \pi-0) = (\pi,\pi)$

$(0-\pi, \pi-0) = (-\pi,\pi)$

$(x,y) = A + u\cdot(\pi,\pi) + v(-\pi,\pi)$

$u\in[0,1]$, $v\in[0,1]$

$x = \pi + u\pi - \pi v$

$y = u\pi + v\pi$

$$J_F(u,v) = \begin{vmatrix}\pi & -\pi\\ \pi & \pi\end{vmatrix} = \pi^2+\pi^2 = 2\pi^2$$

$$\Rightarrow 2\pi^2\int_0^1\int_0^1 (\pi+\cancel{u\pi}-\pi v-\cancel{u\pi}-v\pi)^2\cdot\sin^2(\pi+2u\pi)\,du\,dy = 2\pi^2\int_0^1\int_0^1 \pi^2(1-2v)^2\cdot\sin^2(\pi+2u\pi)\,du\,dv$$

$$= 2\pi^4\int_0^1\int_0^1 (1-2v)^2\,\frac{1-\cos(2\pi+4u\pi)}{2}\,du\,dv = \pi^4\int_0^1\int_0^1 (1-2v)^2(1-\cos(4u\pi))\,du\,dv$$

$$= \pi^4\int_0^1 (1-2v)^2\left(1-\underbrace{\frac{\sin(4\pi u)}{4\pi}\Big|_0^1}_{0}\right)dv = \pi^4\left(v-2v^2+\frac{4}{3}v^3\right)\Big|_0^1 = \boxed{\pi^4\cdot\frac13}$$

4. Наћи решење диференцијалне једначине $\frac{dy}{dx} = xy\cdot((xy)^2-1)$ које задовољава почетни услов $y(1)=1$.

$\frac{dy}{dx} = xy((xy)^2-1)$

$\frac{dy}{dx} + x\cdot y = x^3\cdot y^3 \quad / : y^3$

$y^{-3}\frac{dy}{dx} + x\cdot y^{1-3} = x^3$

$z(x) = y^{1-3}(x) = y^{-2}(x)$

$z'(x) = y'\cdot(1-3)\cdot y^{1-4} = -2\cdot y^{-3}\cdot y'$

$-\frac12 z'(x) + x\cdot z(x) = x^3$

$z'(x)\underbrace{-2x}_{P}\,z(x) = \underbrace{-2x^3}_{Q}$

$z(x) = e^{-\int -2x\,dx}\left(c+\int -2x^3\cdot e^{\int -2x\,dx}dx\right)$

$t = e^{x^2}\left(c-2\int x^3\cdot e^{-x}dx\right)$

$-x^3e^{-x}+\int 3x^2(+e^{-x})$
$= -x^3e^{-x}+3(x^2\cdot(-e^{-x}))+$
$\int 2x(+e^{-x}) =$
$-x\cdot e^{-x}+\int e^{-x} = -e^{-x}$

$z = \underbrace{e^{x^2}\left(c-2\left(-x^3e^{-x}+3x^2e^{-x}-xe^{-x}-e^{-x}\right)\right)}_{A}$

$\frac{1}{y^2} = \ldots \Rightarrow +\sqrt{\frac1A} = y$

$\sqrt{\frac{1}{e\left(c-2\left(\underbrace{-\frac1e+\frac3e-\frac1e-\frac1e}_{0}\right)\right)}} = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{e\cdot c}} = 1 \qquad \boxed{c=\frac1e}$

$\Rightarrow y = 1 : \sqrt{e^{x^2}\left(\frac1e+2x^3e^{-x}-6x^2e^{-x}+2xe^{-x}+2e^{-x}\right)}$

Писмени испит из Анализе 3 (модул Информатика)
Јун 1, 2023

1. Дата је функција $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x^4+y^2}} + y^2 \sin \frac{1}{\sqrt{y^4+x^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(а) Испитати непрекидност функције f.

$$0 \le \left| x^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x^4+y^2}} + y^2 \sin \frac{1}{\sqrt{y^4+x^2}} \right| \le \left| x^2 \underbrace{\sin \frac{1}{\sqrt{x^4+y^2}}}_{-1\le \dots \le 1} \right| + \left| y^2 \underbrace{\sin \frac{1}{\sqrt{y^4+x^2}}}_{-1\le \dots \le 1} \right| \le |x^2| + |y^2| \xrightarrow{(0,0)} 0$$

(б) Испитати постојање и непрекидност парцијалних извода f'_x и f'_y.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h} \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \cdot \sin \frac{1}{h^2} = 0$$

$-1/2 - 1$

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k} \longrightarrow \lim_{k\to 0} k \cdot \sin \frac{1}{k^2} = 0$$

$$f'_x = 2x \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x^4+y^2}} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{x^4+y^2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4x^3}{\sqrt{(x^4+y^2)^3}} + y^2 \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^4}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2x}{\sqrt{(x^2+y^4)^3}}$$

$$f'_y = 2y \sin \frac{1}{\sqrt{y^4+x^2}} - \frac{2y^5}{\sqrt{(y^4+x^2)^3}} \cos \frac{1}{\sqrt{y^4+x^2}} - \frac{x^2 y}{\sqrt{(y^2+x^4)^3}} \cos \frac{1}{\sqrt{y^2+x^4}}$$

Neprekidnost ispitujemo samo za $(0,0)$:

Uzmimo $\underbrace{(x_n,y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)}_{(0,0)}$ $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{2}{n} \sin n^2}_{\to 0} - 2 \frac{1}{n^5} \cdot n^6 \cdot \cos n^2 + 0 = \lim_{n\to\infty} -2n \cdot \cos n^2 \neq 0$ $\boxed{\text{divergira}}$

(в) Испитати диференцијабилност функције f.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - h\cdot f'_x(0,0) - k\cdot f'_y(0,0) - f(0,0)}{\sqrt{k^2+h^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 \sin \frac{1}{\sqrt{h^4+k^2}} + k^2 \sin \frac{1}{\sqrt{k^4+h^2}} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$0 \le \left| \frac{k^2 \sin \frac{1}{\sqrt{k^4+h^2}} + h^2 \sin \frac{1}{\sqrt{h^4+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \le \left| \frac{k^2+h^2}{\sqrt{k^2+h^2}} \right| \le \sqrt{h^2+k^2} \to \boxed{0}$$ Jeste

2. Одредити локалне екстремуме функције $f(x,y) = x^3 + y^4 - 2x^2y$

1° $\nabla f = (3x^2 - 4xy,\ 4y^3 - 2x^2) = \vec{0}$

$3x^2 = 4xy \ \wedge\ 4y^3 = 2x^2$ $\boxed{M_1(0,0) = 0}$

$3x = 4y \longrightarrow 4y^3 = \frac{16\cdot 2}{9} \cdot y^2 \Rightarrow y = \frac{8}{9}$

$$\underbrace{\frac{32^3}{9^3 3^3}}_{9^4\cdot 3} + \frac{8^4}{9^4} - \underbrace{\frac{2\cdot 32^2 \cdot 8}{27\cdot 27\cdot 9}}_{9^4}$$

$4^2 \cdot 8^2 \cdot 9^4$

$$\boxed{M_2\left(\frac{32}{27}, 8/9\right)} = \frac{8^3\cdot 4^3 + 3\cdot 8^4 - 8^4 \cdot 4}{9^4\cdot 3} = \frac{8^4}{9^4\cdot 3}(8+3-4) = \boxed{\frac{7\cdot 8^4}{3\cdot 9^4}}$$

$$\text{Hess } f(x,y) = d^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x - 4y & -4x \\ -4x & 12y^2 \end{bmatrix}$$

Za $\left(\frac{32}{27}, 8/9\right) \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{64}{9} - \frac{32}{9} & -4\,\frac{32}{9} \\ -4\cdot\frac{32}{9} & \frac{36\cdot 64}{9} \end{bmatrix} \longrightarrow A_1 > 0$ $\quad A_2 = \frac{32}{9}\cdot\frac{32\cdot 64}{9} - \frac{16\cdot 32\cdot 32}{9^2} = \frac{32^2}{9^2}(64-16) > 0$

Minimum

Za $(0,0)$ dobijamo $A_1=0, A_2=0$ što nam ne govori ništa, te gledamo priraštaj $f(h+0,k+0)-f(0,0) = h^3+k^4-2h^2k-0$

$f(-\varepsilon,0) = -\varepsilon^3 \quad f(\varepsilon,0)=\varepsilon^3 \to$ Nije ni min ni max

3. Нека је ℓ позитивно оријентисан део кружнице $x^2-y^2=1$ у првом квадранту и нека је $F\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ векторско поље дато са $F(x,y) = (\underbrace{\sin^2((x+y-1)^2)-y}_{P}, \underbrace{x-\cos^2((x+y-1)^2)}_{Q})$. Израчунати

$$\int_\ell F\cdot dr$$

$x = 1\cos t \quad t\in[0,\pi/2]$
$y = 1\cdot\sin t$

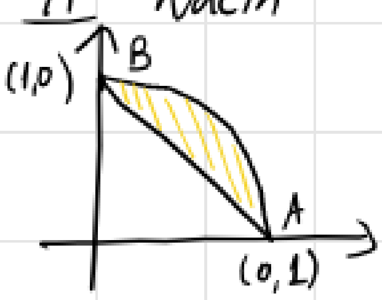
$F(x,y) = (\sin^2(\cos t+\sin t-1)^2) - \sin t, -\cos^2((\cos t+\sin t-1)^2$

$r(t) = (\cos t, \sin t) \qquad \int_\ell F dr = \int_0^{\pi/2} F(r(t))\cdot r'(t) = \int_0^{\pi/2}(\dots)\cdot(-\sin t, \cos t)$

$= \int_0^{\pi/2}\left(\sin^2(\cos t+\sin t-1)^2\cdot(-\sin t) + \sin^2 t - \cos^2((\cos t+\sin t-1)^2)\cdot(\cos t) + \cos^2 t)\right)dt$

$= \int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2((\cos t+\sin t-1)^2)\cdot\sin t - \cos^2(\dots)\cos t\right)dt \to$ No way (dobije se dobro, ali ne)

II Način



$\gamma(t) = (t, 1-t) \quad t\in[0,1]$
$\gamma'(t) = (1,-1)$

Tražimo $\boxed{\int_{\gamma\cup\ell} F dr} = \int_\ell F dr + \boxed{\int_\gamma F dr}$

$\boxed{\int_\gamma F dr} = \sin^2((t+1-t)^2)-1+t-t+\cos(0^2) = 0-1+1 = 0$

$\boxed{\int_{\gamma\cup\ell} F dr} = \iint_D \left(1+\sin(x+y-1)^2\cos(x+y-1)^2\cdot 2(x+y-1) - (\sin(x+y-1)^2\cdot\cos(x+y-1)^2\cdot 2(x+y-1)-1)\right)dxdy$

$= \iint_D 2\,dxdy = 2\iint_D dxdy = 2\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2}-1}$

$\int_\ell F dr = \int_{\gamma\cup\ell} F dr - \int_\gamma F dr = \frac{\pi}{2}-1$!!!

4. Решити диференцијалну једначину $y' + \dfrac{\ln\sqrt{x^2+y^2}}{\operatorname{arctg}\frac{x}{y}} = 0 = \frac{dy}{dx}$

$dy\,\underbrace{\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}_{N} + dx\,\underbrace{\ln\sqrt{x^2+y^2}}_{M} = 0$

$f'_x = M \Rightarrow \int \ln\sqrt{\dots}\,dx = x\ln\sqrt{x^2+y^2} - \int\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = \int\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} - y^2\frac{1}{x^2+y^2}$

$f'_y = N$

$\to x\ln\sqrt{x^2+y^2} - x + \frac{y^2}{y}\int\frac{1}{(\frac{x}{y})^2+1} = x\ln\sqrt{x^2+y^2} - x + y\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C(y)$

$\cancel{C(y)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \frac{y\cdot y^2\cdot(-x)}{(x^2+y^2)\cdot y^2} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + c\dots = \operatorname{arc}$

$c'(y)\ \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$

$C(y) = \int\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{xy}{x^2+y^2}\right)dy = \int\frac{2xy}{2\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{2xy}{2(x^2+y^2)} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x}{2}\ln(x^2+y^2)$

$x\ln\sqrt{x^2+y^2} - x + y\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x}{2}\ln(x^2+y^2) = \boxed{y\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - x + \frac{x}{2}\sqrt{x^2+y^2} = C}$

Писмени испит из Анализе 3 (модул Информатика)

Јун 2, 2023

1. Дата је функција $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(а) Испитати непрекидност функције f.

$$0 \leq \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3}{x^2}\right| + \left|\frac{y^3}{y^2}\right| \leq |x| + |y| \to 0 \quad \text{Jeste}$$

(б) Одредити извод функције f у правцу произвољног вектора кроз тачку $(0,0)$.

$$f'_{\vec{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h\cdot\alpha, h\cdot\beta) - f(0,0)}{h} = \frac{h^3(\alpha^3+\beta^3)}{h^2(\alpha^2+\beta^2)\cdot h} = \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}$$

(в) Одредити друге парцијалне изводе функције f у тачки $(0,0)$.

$$f'_x = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} \qquad f'_y = \frac{3y^2(x^2+y^2) - 2y(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 1 \qquad f'_y(0,0) = \ldots = 1$$

$$f''_{xx} = \lim_{h\to 0} \frac{f'_x(h,0) - f'_x(0,0)}{h} = \frac{\frac{h^4(3-2)}{h^4} - 1}{h} = \frac{1-1}{h} = 0$$

$$f''_{xy} = \lim_{h\to 0} \frac{f'_x(0,h) - f'_x(0,0)}{h} = \frac{0-1}{h} \to \text{Ne postoji}$$

$$f''_{yx} = \lim_{h\to 0} \frac{0-1}{h} \to \text{Ne postoji}$$

$$f''_{yy} = \lim_{h\to 0} \frac{f'_y(0,h) - f'_y(0,0)}{h} = \frac{\frac{h^4(3-2)}{h^4} - 1}{h} = \frac{1-1}{h} = 0$$

(г) Испитати диференцијабилност функције f.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3+k^3}{h^2+k^2} - 0 - f'_x(0,0)\cdot h - f'_y(0,0)\cdot k}{\sqrt{k^2+h^2}} = \lim_{(h,k)\to 0} \frac{h^3 - h^3 + k^3 - k^3 - hk^2 - kh^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to 0} \frac{-hk(k+h)}{\ldots}$$

Uzmimo $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ $\quad \frac{-\frac{1}{n^2}\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{n}} = -\frac{n^3}{n^3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$ Nije diferenc.

2. Одредити најкраће растојање тачке $A(0,3,3)$ од круга $\mathcal{K} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ x+y+z = 1\}$.

$$d(M,A) = \sqrt{x^2+(y-3)^2+(z-3)^2} \Rightarrow g(x,y,z) = x^2+(y-3)^2+(z-3)^2$$

$$F: x^2 + \ldots + \lambda_1(x^2+y^2+z^2-1) + \lambda_2(x+y+z-1)$$

$$F'_x = 2x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 \qquad F'_y = 2(y-3) + 2\lambda_1 y + \lambda_2 \qquad F'_z = 2(z-3) + 2\lambda_1 z + \lambda_2$$

$$F'_{\lambda_1} = x^2+y^2+z^2-1 \qquad F'_{\lambda_2} = x+y+z-1$$

$F'_x = 2x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \longrightarrow 2(x+y+z) - 12 + 2\lambda_1(x+y+z) + 3\lambda_2 = 0$

$F'_{\lambda_1} = x^2+y^2+z^2-1 = 0 \qquad -10 + 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \to \lambda_2 = \frac{10-2\lambda_1}{3}$

$F'_{\lambda_2} = x+y+z-1 = 0 \qquad 2x + 2\lambda_1 x + \frac{10-2\lambda_1}{3} = 0 \to x = \frac{2\lambda_1 - 10}{6(1+\lambda_1)}$

$F'_y = 2(y-3) + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \qquad 2(y-3) + 2\lambda_1 y + \frac{10-2\lambda_1}{3} = 0 \to y = \frac{2\lambda_1+8}{6(1+\lambda_1)}$

$F'_z = 2(z-3) + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \qquad 2(z-3) + 2\lambda_1 z + \frac{10-2\lambda_1}{3} = 0 \to z = \frac{2\lambda_1+8}{6(1+\lambda_1)}$

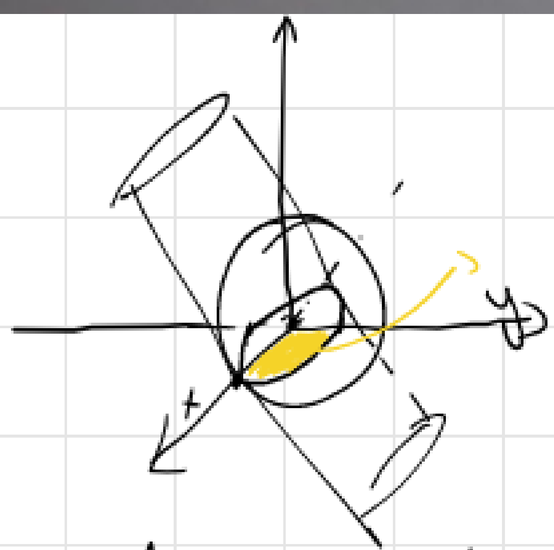
... Nmg

$M_1(1,0,0),\ M_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$M_1: \sqrt{1^2+3^2+3^2} = \sqrt{19}$

$M_2: \sqrt{\frac{1}{9} + 2\cdot\frac{49}{9}} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{99} = \boxed{\sqrt{11}}$

3. Израчунати површину дела сфере $x^2+y^2+z^2=4$ који се налази у унутрашњости цилиндра $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.



$P = \iint_S dS \qquad z = \sqrt{4-x^2-y^2}$

$dS = \sqrt{1^2 + \left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4-x^2-y^2+x^2+y^2}{4-x^2-y^2}}$

$dS = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy$

$8\int_0^2 \int_1^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \frac{2}{\sqrt{(4-x^2)-y^2}}\,dy\,dx = 16\int_0^2 \left(\arcsin\sqrt{\frac{4-x^2}{4-x^2}}\cdot\frac{1}{2} - 0\right)dx$

$= 16\int_0^2 \frac{\pi}{6}\,dx = \frac{16}{3}\pi$

4. Решити диференцијалну једначину $y' = \dfrac{2y^3 - y\sin x\cos x}{2\cos^2 x}$ за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

$y' + y\cdot\frac{\sin x}{2\cos x} = y^3\cdot\frac{1}{\cos^2 x} \quad / : y^3 \qquad x \in (0, \pi/2)$

$y'\cdot y^{-3} + y^{-2}\cdot\frac{\sin x}{2\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad y=0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \boxed{y = C}$

$z = y^{-2} \qquad z' = (-2)\cdot y^{-3}\cdot y' \Rightarrow z' + \cancel{2}\frac{\sin x}{\cancel{2}\cos x}\cdot z = \frac{-2}{\cos^2 x}$

$z = e^{-\int\frac{\sin x}{\cos x}}\left(C + (-2)\int\frac{1}{\cos^2 x}\, e^{+\int\frac{\sin x}{\cos x}}dx\right) = \frac{1}{\cos x}\left(C + 2\int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx\right)$

$= \frac{1}{\cos x}\left(C - \ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right| dx\right)$

$y = \sqrt{\frac{\cos x}{C - \ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right|}}$

$y = 0 \to \frac{0+0}{2\cos^2 x} = 0$???

Писмени испит из Анализе 3 (модул Информатика)

Септембар 1, 2023

1. Дата је функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5 - 3xy^4}{(x^2 - xy + y^2)\sqrt{x^2 + 2y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

(а) Испитати непрекидност функције f на $\mathbb{R}^2$.

$$0 \le \left| \frac{x^5 - 3xy^4}{(x^2-xy+y^2)\underbrace{\sqrt{x^2+2y^2}}_{\le \sqrt{x^2}}} \right| \le \left| \frac{x^4}{(y-\frac{1}{2}x)^2 + \frac{3}{4}x^2} \right| + \left| \frac{3y^4}{(x-\frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2} \right| \le \left| \frac{x^4}{\frac{3}{4}x^2} \right| + \left| \frac{4y^4}{y^2} \right| \to x^2 + y^2 \to 0 \checkmark$$

(б) Одредити парцијалне изводе функције f у тачки $(0,0)$.

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^5}{h^2\sqrt{h^2} \cdot h} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - 0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{h^4 \cdot sgn(h)} = \boxed{0}$$

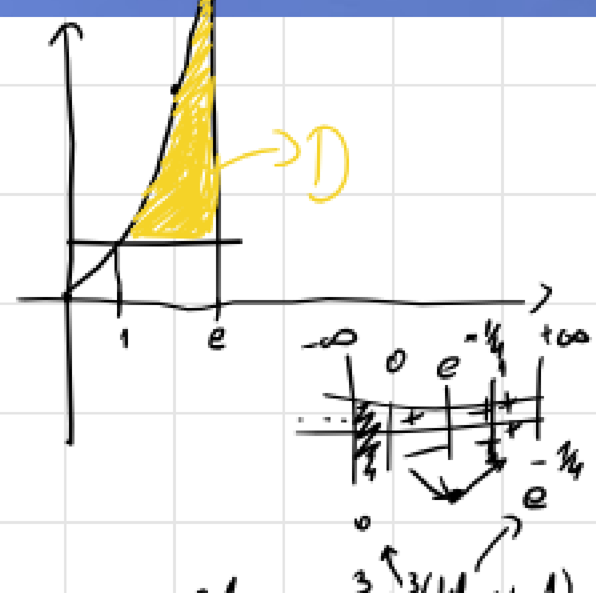
(в) Испитати диференцијабилност функције f на $\mathbb{R}^2$.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h \cdot f'_x(0,0) - k f'_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\frac{h^5 - 3hk^4}{(h^2-hk+k^2)\sqrt{h^2+2k^2}} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$0 \le \left| \frac{h^5 - 3hk^4}{(h^2-hk+k^2)\underbrace{\sqrt{h^2+2k^2}}_{\ge h^2+k^2}\sqrt{h^2+k^2}} \right| \le \left| \frac{h^5 - 3hk^4}{(h^2+k^2)(h^2-hk+k^2)} \right| \le \frac{|h^3|}{(h^2-hk+k^2)} + \frac{|3hk^4|}{(h^2+k^2)|hk|}$$

$$\le |h| + 3|k| \to 0 \quad \checkmark$$

2. Нека је функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ задата са $f(x,y) = x^2 y \ln x$. Одредити најмању и највећу вредност функције f на скупу $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le e, 1 \le y \le x^2\}$.



$f(x,y) = x^2 y \ln x \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le e,\ 1 \le y \le x^2\}$

1° $\nabla f = (2xy\ln x + xy,\ x^2 \ln x)$

$x^2 \ln x = 0$

$x = 0$ ↯ $\quad x = 1 \quad y = 0$ ↯

2° 1 $\{(x,1) \mid x \in [1,e]\}$, 2 $\{(e,y) \mid y \in [1,e^2]\}$, 3 $\{(x,x^2) \mid x \in [1,e]\}$

$x^4 \cdot \ln x \to 4x^3 \ln x + x^3 = x^3(4\ln x + 1)$

1 $\quad x^2 \ln x \quad \boxed{Min = 0\ (1,1) M_1}$ $\quad Max = e^2\ (e,1) M_2$

2 $\quad e^2 \cdot y \quad Min = e^2\ M_3(e,1)$ $\quad e^4 \quad Max = e^4\ M_4(e,e)$

3 $\quad M_5(1,1) \to 0$ $\quad \boxed{M_6(e,e^2) \to e^4}$

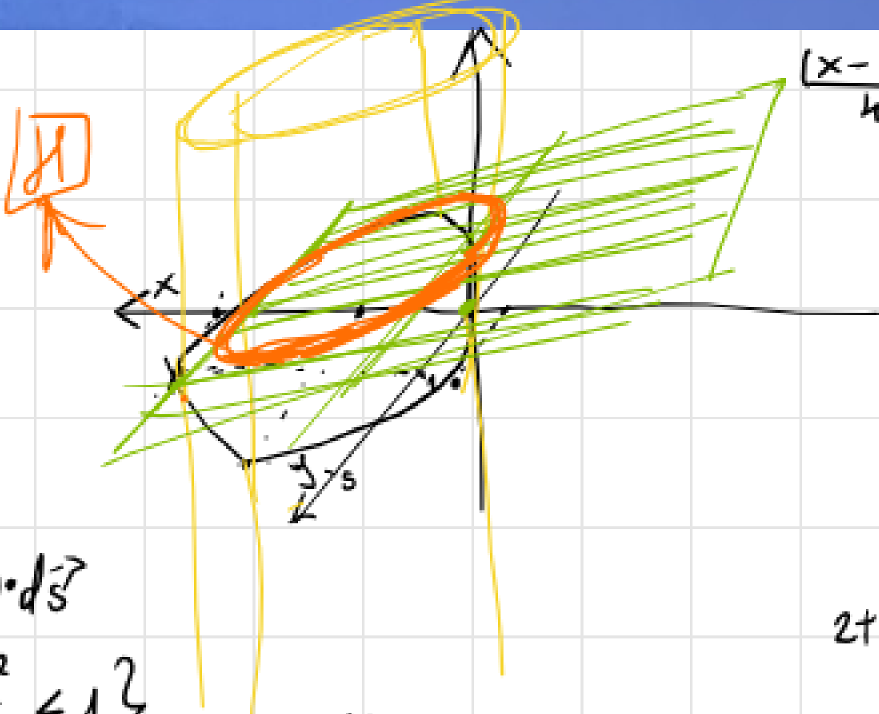
4. Израчунати интеграл $I=\oint_\gamma (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$, где је крива γ пресек површи $S_1: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=\frac{x}{2}+\frac{y}{4}$ и $S_2: \frac{x}{2}+z=1$. Крива γ је негативно оријентисана посматрано са позитивног дела z-осе.

$$I=\oint_\gamma (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

$\frac{x}{2}+z=1$

$0 \to z=1$

$x=2 \quad z=0$



$$\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{1}{4}+\frac{(y-2)^2}{16}-\frac{1}{4}=0$$

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{16}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} \quad \frac{7}{16}$$

$$x=\sqrt{\frac{7}{4}}+1$$

$$2+\sqrt{8}=2+2\sqrt{2}$$

$P=y-z \qquad Q=z-x \qquad R=x-y$

$$I=\iint_S(-1-1,-1-1,-1-1)\cdot d\vec{S}=\iint_S(-2,-2,-2)\cdot d\vec{S}$$

$z=1-\frac{x}{2}$, $(x,y)\in D$ $\quad D=\left\{\frac{(x-1)^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{(y-2)^2}{\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2}\le 1\right\} \to$ elipsa

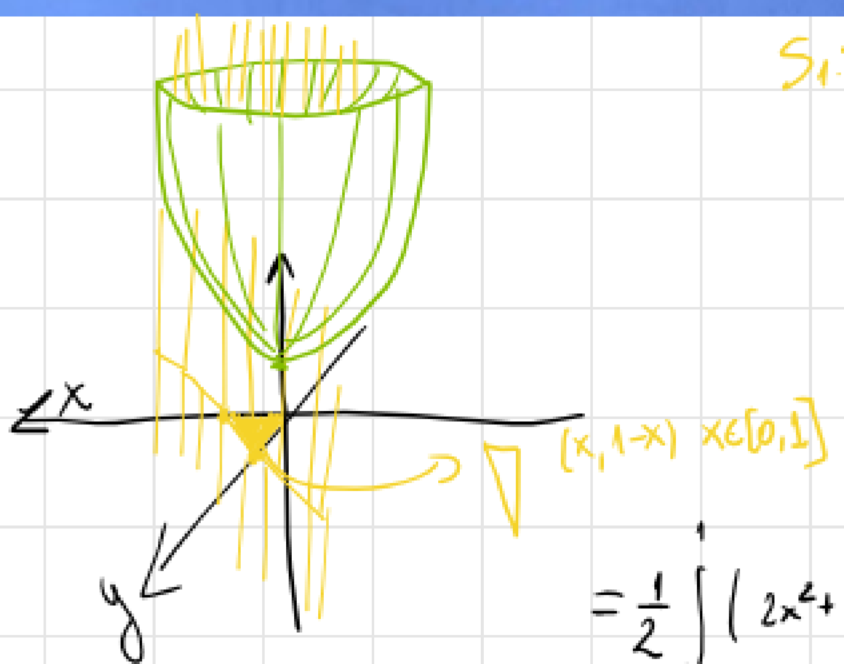
$r(x,y)=(x,y,1-\frac{x}{2})$

$r'_x(x,y)=(1,0,-\frac{1}{2}) \qquad r'_y(x,y)=(0,1,0)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(\tfrac{1}{2},0,1)$$

$$I=\iint_S(-2,-2,-2)\circ(\tfrac{1}{2},0,1)\,dx\,dy=\iint_S(-1+2)\,dx\,dy=3\underbrace{\iint_S dx\,dy}_{P(E)}=3\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\pi=\boxed{12\pi}$$

3. Нека је T просторна област ограничена координатним равнима и површима $S_1: x+y=1$ и $S_2: z=2x^2+y^2+1$. Израчунати интеграл $\iiint_T y\,dx\,dy\,dz$.



$(x,1-x) \quad x\in[0,1]$

$S_1: x+y=1 \qquad S_2\ \ 2x^2+y^2+1=z$

$0\le x\le 1, \quad 0\le y\le 1-x, \quad 0\le z\le 2x^2+y^2+1$

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{2x^2+y^2+1} y\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{1-x} y(2x^2+y^2+1)\,dy\,d$$

$$=\int_0^1 \frac{(2x^2+1)}{2}y^2+\frac{1}{4}y^4\Big|_0^{1-x}dx=\int_0^1\frac{(2x^2+1)(1-2x+x^2)}{2}+\frac{(1-x)^4}{4}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(2x^2+1-4x^3-2x+2x^4+x^2\right)+-\frac{(1-x)^4}{2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cancel{\tfrac{2}{3}}+\cancel{1}-\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{2}{5}+\frac{\cancel{1}}{3}+\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

Писмени испит из Анализе 3 (модул Информатика)

Септембар 2, 2023

1. Дата је функција $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

log10 u osnovi → Da je ln moglo bi sve

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(а) Испитати непрекидност функције f.

$$\frac{\log_{10}(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\log_{10}(1+\frac{1}{n^2}+0)}{1/n^2}=\lim_{m\to 0}\frac{\log_{10}(1+m)}{m}=\log_{10}e\neq 1$$ Nije

(б) Испитати постојање и непрекидност парцијалних извода f'_x и f'_y.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\ln(1+h^2)}{\ln 10\, h^2}-1}{h}=\frac{\frac{1}{\ln 10}-1}{h}$$

$\frac{\ln(1+h^2)}{h^2}\to 1$

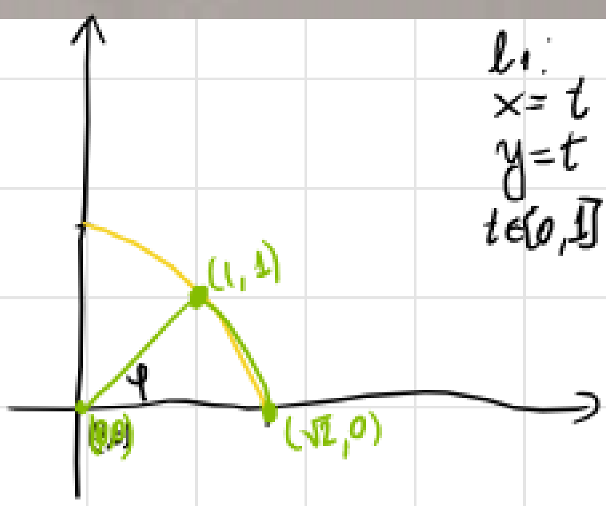
$$\lim_{k\to 0} f(0,k)-f(0,0)$$ isto je

(в) Испитати диференцијабилност функције f. Ne može, buuv ne.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h+0,k+0)-f(0,0)-(\frac{1}{\ln 10}-10)-(\frac{1}{\ln 10}-1)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{\ln(1+h^2+k^2)}{\ln 10(h^2+k^2)}-1-\frac{2}{\ln 10}-2}{\sqrt{h^2+k^2}}\neq 0$$

2. Нека је $\ell=\ell_1\cup\ell_2$ крива у $\mathbb{R}^2$ где је ℓ_1 дуж чији су крајеви тачке $(0,0)$ и $(1,1)$, а ℓ_2 краћи лук одређен тачкама $(1,1)$ и $(\sqrt{2},0)$ на кружници $x^2+y^2=2$. Израчунати

$$\int_\ell xy\,ds$$



ℓ_1: $x=t$, $y=t$ } (t,t), $t\in[0,1]$

ℓ_2: $x=\sqrt{2}\cos t$, $y=\sqrt{2}\sin t$

$x=1$, $y=1$; $\cos t=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin t \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$ } $t\in[0,\pi/4]$

$$\int_0^1 t^2\cdot\sqrt{2}\,dt=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

$$\int_0^{\pi/4} 2\cos t\sin t\sqrt{2(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt=\int_0^{\pi/4} 2\cdot\sin 2t\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\,dt=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\cos 2t)\Big|_0^{\pi/4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}\cdot 5}{6}}\ ?$$

3. Нека је T тело ограничено површима $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=9$ и $x^2+y^2+(z-5)^2=9$ и нека је $S=\partial T$ граница тела T оријентисана ка споља и нека је $F\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ векторско поље дефинисано са $F(x,y,z)=(xz,yz,xy)$. Одредити

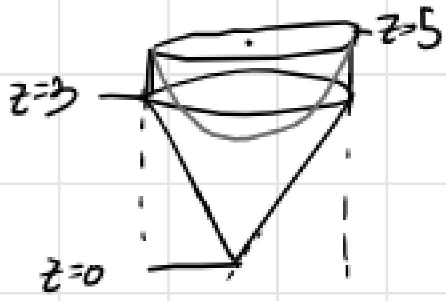
$$\iint_S F\cdot d\vec{S}$$

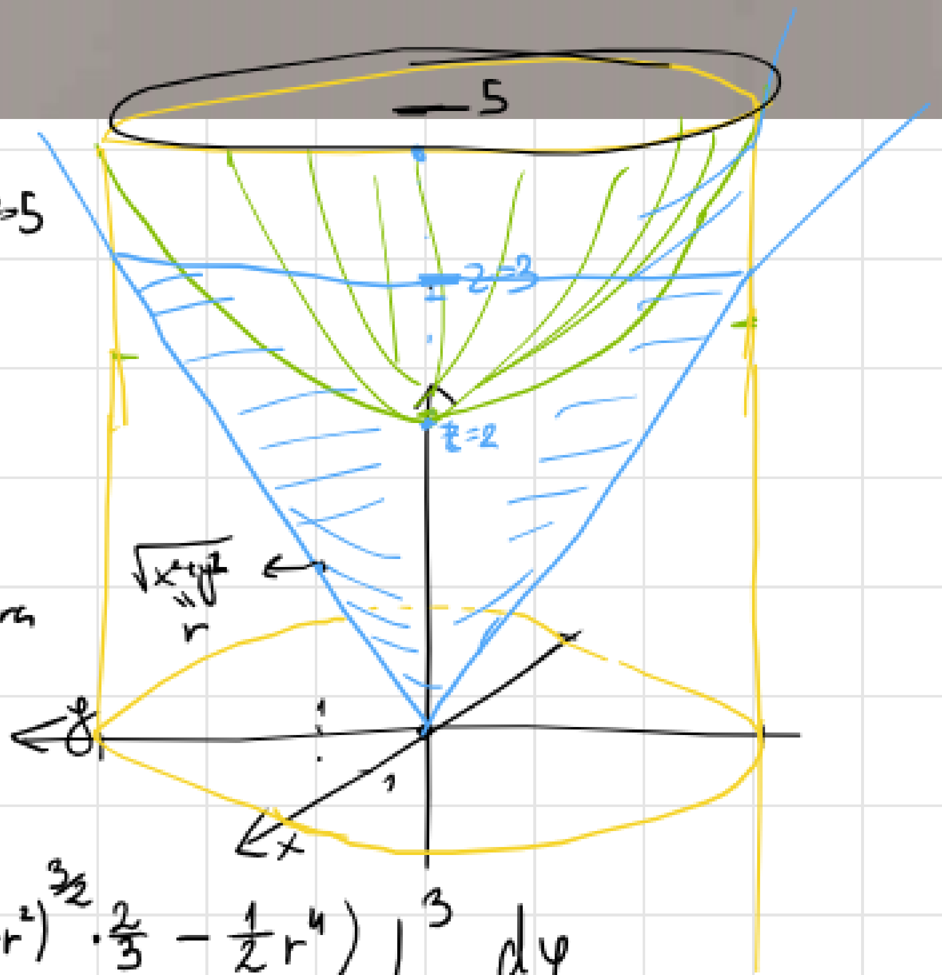
$$=\iiint 2z\,dV \qquad J_F\,dx\,dy\,dz$$

$x=r\cos\varphi$ $\quad$ $r\in[0,3]$

$y=r\sin\varphi$ $\quad$ $\varphi\in[0,2\pi)$

$z: \; 5-\sqrt{9-r^2}$, $\; r$





$$\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_r^{5-\sqrt{9-r^2}} 2z\cdot r\,dz\,dr\,d\varphi$$

Površine su: unutrašnjost konusa od $z=0$ do $z=3$, cilindra od 3 do 5 i spoljašnjost polu sfere od 2 do 5

$$\int_0^{2\pi}\int_0^3 r\left(25-10\sqrt{9-r^2}+9-\cancel{2}r^2\right)dr\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(17r^2+5\cdot(9-r^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{2}r^4\right)\Big|_0^3\,d\varphi$$

$$=2\pi\left(17\cdot 9-\frac{10}{\cancel{3}}\cdot 3^{\cancel{3}2}-\frac{81}{2}\right)=\pi(14-9)\cdot 9=45\pi$$

4. Решити диференцијалну једначину $2xyy'+y^2=4x^2$

$$2xyy'+y^2=4x^2 \longrightarrow x=0,\ y=0$$

$$y'\cdot y+y^2\cdot\frac{1}{2x}=2x$$

$$z=y^2$$

$$\frac{z'}{2}=y\cdot y'$$

$$z'+z\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{P}=\underbrace{4x}_{Q}$$

$$z=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\cdot\left(c+\int 4x\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}\,dx\right) \qquad -\ln x=\ln\frac{1}{x}, \quad \ln x$$

$$z=\frac{1}{x}\left(c+\int 4x^2\,dx\right)$$

$$z=\frac{1}{x}\left(c+\frac{4}{3}x^3\right)$$

$$y=\sqrt{\frac{1}{x}\left(c+\frac{4}{3}x^3\right)}$$

Анализа 3 (И смер), јун 2022

1. Нека је функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ дефинисана са

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^5+yx^3}{x^2+y^4} & , (x,y) \neq (0,0) \\ a & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(а) Одредити (уколико постоји) a такво да је функција непрекидна.

(б) За то a израчунати парцијалне изводе и испитати диференцијабилност функције.

a) $0 \le \left|\frac{xy^5+yx^3}{x^2+y^4}\right| = \left|\frac{xy(y^4+x^2)}{x^2+y^4}\right| = |xy| \longrightarrow 0 \qquad a=0$

b) $f'_x = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2}-0}{h} = \frac{0}{h^3} = 0$ isto za $f'_y(0,0)$

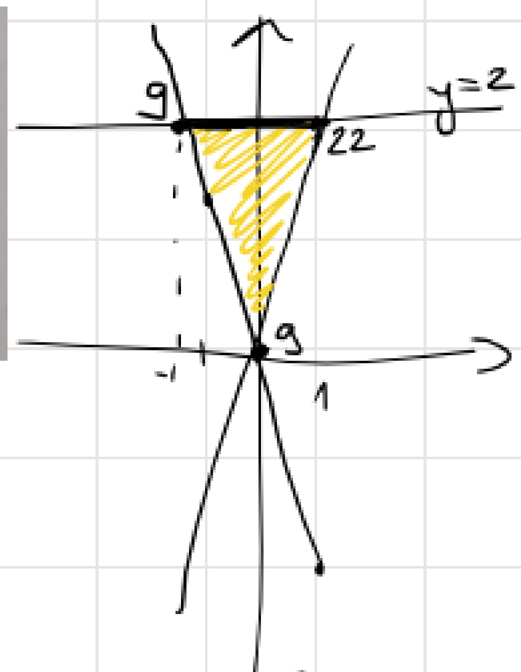
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{hk^5+kh^3}{h^2+k^4} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$0 \le \left|\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|$ $h \to 0$, $k \to 0$

2. Одредити најмању и највећу вредност функције

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4xy + 9$$

на делу равни ограниченом кривама $y = 2x$, $y = -2x$ и $y = 2$.



$f(x,y) = (x-2)^2+(y+1)^2+4+4xy$

$f'_x = 2x-4+4y=0 \qquad f'_y = 2y+2+4x=0$

$x-2+2y=0 \wedge y+1+2x=0$ $\cdot(-2)$ $\qquad -3x-4=0 \to x=-\frac{4}{3}$

$y=\frac{5}{3} \qquad \to \frac{100}{9}+\frac{64}{9}+\frac{36}{9}-\frac{80}{9}=\frac{40}{3}$

Na $y=2 \to 13+8x+(x-2)^2$

$8+2x-4 = 2(x+2) \quad x=-2$ ne pripada

Za $(x-2)^2+(2x+1)^2+4+8x^2 = \boxed{x^2}-\cancel{4x}+4+\boxed{4x^2}+\cancel{4x}+1+4+\boxed{8x^2} = 13x^2+9 \quad \left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\} \boxed{9}$

Za $x^2-4x+4+4(-8x^2+4x^2)-4x+1 = -3x^2-8x+9$

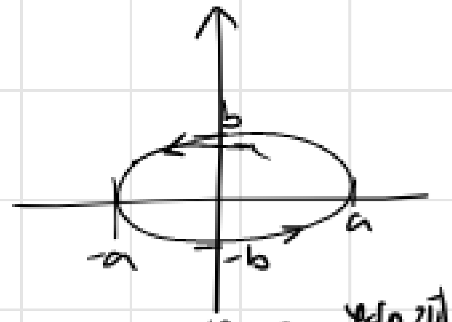
$-6x-8=0 \qquad x=-4/3,\ y=\frac{8}{3}$ Ne pripada

3. Нека је дато векторско поље

$$F(x,y) = (e^{\sin x + \cos x} - y^3 + x^3 y \quad , \quad \frac{x^4}{4} + x^3 + \log(y^3 + y^2))$$

и нека је крива C позитивно оријентисана елипса са полуосама дужине a и b $(a > b)$ које су паралелне координатним осама x и y редом, центрирана у координатном почетку. Одредити

$$\oint_C F \cdot dr.$$



$x = r\cos\varphi \cdot a \quad \varphi \in [0, 2\pi]$

$y = r\sin\varphi \cdot b \quad r \in [0,1]$

$$\oint_C F dr = \oint_C \left(\left(e^{\sin x + \cos x} - y^3 + x^3 y\right) dx + \left(\frac{x^4}{4} + x^3 + \log(y^3 + y^2)\right) dy \right) = \iint_D \left(\cancel{x^3} + 3x^2 + 3y^2 - \cancel{x^3}\right) dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 3\left(a^2 r^2 \cos^2\varphi + b^2 r^2 \sin^2\varphi\right) J \, dr \, d\varphi = \left[J = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & \cos\varphi \cdot br \end{vmatrix} = abr\cos^2\varphi + abr\sin^2\varphi = abr \right]$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2\cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi \cdot d\varphi = \int_0^{2\pi} a^2 \cdot \frac{\cos 2\varphi + 1}{2} + b^2 \cdot \frac{\cos 2\varphi - 1}{2} d\varphi = \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot 2\pi + \underbrace{\frac{a^2 + b^2}{4} \sin\varphi \Big|_0^{2\pi}}_{0}$$

$$= \boxed{(a^2 - b^2)\pi}$$

4. nismo radili na vežbama pa neću ni ja (dif. jed. deg 3)

Анализа 3

Писмени испит, 11.6.2022.

1. Нека је функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^7}{x^2 + y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(а) Доказати да је функција f непрекидна на $\mathbb{R}^2$.

(б) Испитати диференцијабилност функције f на $\mathbb{R}^2$.

a) $0 \leq \left| \frac{x^7}{x^2 + y^4} \right| \leq \left| \frac{x^7}{x^2} \right| = |x^5| \to 0$?

b) $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\frac{h^7}{x^2 + k^4} - 0 - f'_x(0,0) \cdot h - f'_y(0,0) \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$

$\left[f'_x(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{h^7}{h^2} - 0}{h} = h^4 \to 0 \right.$

$f'_y(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{0}{h^4} - 0}{h} = 0$

$= \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{h^7}{(h^2 + k^4)\sqrt{h^2 + k^2}} = \left[0 \leq \left| \frac{h^7}{h^2 \cdot h} \right| \to h^4 \to 0 \right] = 0$ ✓

$\nabla f = (-y e^{-xy}, -x e^{-xy})$

$(0,0) \; M_2$

1

2. Дата је област $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\}$ и функција $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{-xy}$. Одредити екстремне вредности те функције.

$e^{-xy} + \lambda_1(x^2 + 4y^2 - 1) \Rightarrow$

$-y \cdot e^{-xy} + 2\lambda_1 x = 0 \quad \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)$

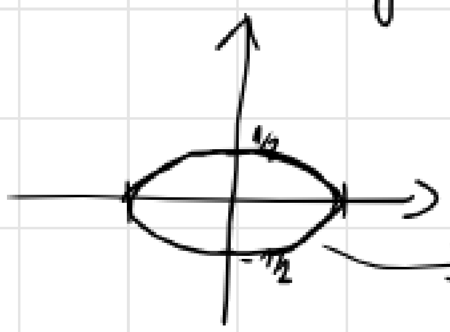
$-x e^{-xy} + 8\lambda_1 y = 0$

$x^2 + 4y^2 - 1 = 0$

$\to 8y\lambda_1 - \frac{x^2}{y} \cdot 2\lambda_1 = 0$

$4y^2 - x^2 = 0$

$4y^2 = x^2 \to \left. \begin{array}{l} x = 1/2 \\ y = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \underbrace{M_1}_{\frac{1}{\sqrt[8]{e}}}$



$\to$ Da ispitamo još za elipsu

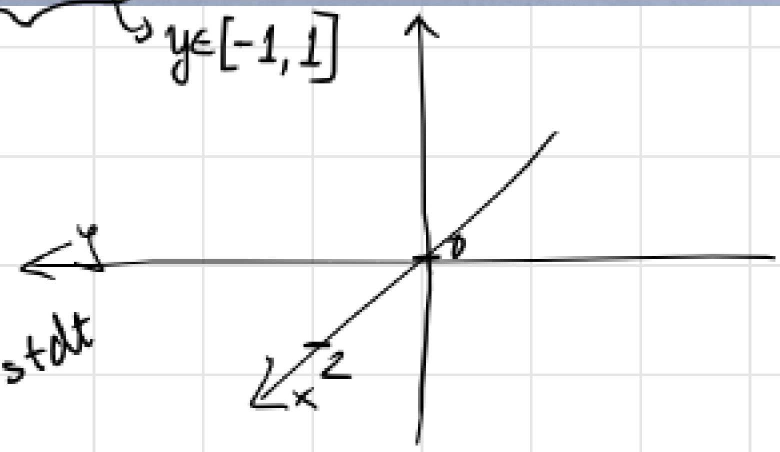
$x = \sqrt{1 - 4y^2} \to e^{-y\sqrt{1-4y^2}} \to \left(-\sqrt{1-4y^2} - \frac{-4y^2}{\sqrt{1-4y^2}}\right) = -\left(\frac{1 - 8y^2}{\sqrt{1-4y^2}}\right) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} y = \sqrt{\frac{1}{8}} \\ x = \sqrt{1/2} \end{array} \right\} \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$

$\boxed{Max = 1}$

$Min = \frac{1}{\sqrt[8]{e}}$

3. Израчунати интеграл $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ где је $\mathbf{F}: S \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ и где је S спољно оријентисана граница пуног полуцилиндра $T = \{(x,y,z) \mid \underbrace{0 \le x \le 2}, \underbrace{0 \le z \le \sqrt{1-y^2}}\}$.

$y \in [-1, 1]$



$$\iint\limits_S F\,ds = \iiint\limits_T 2(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^2 \int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \left(2(x+y) + 2z\right) dz\,dy\,dx$$

$y = \sin t$

$dy = \cos t\,dt$

neparna = 0

$$= \int_0^2 \int_{-1}^{1} \left(2(x+y)\sqrt{1-y^2} + 1 - y^2\right) dy\,dx = \int_0^2 \left(\int_{-1}^{1} 2x\sqrt{1-y^2}\,dy + 2 - \frac{2}{3}\right) dx =$$

$\frac{\pi}{2}\cdot 2 = \pi$

$-\frac{\pi}{2}\cdot 2 = -\pi$

$$= \int_0^2 \frac{4}{3} + 2x \int \cos t \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{\underbrace{\cos t}_{\frac{\cos 2t + 1}{2}}} \longrightarrow \int_0^2 \frac{4}{3} + x\left(-\frac{1}{2}\sin(\cancel{2\arcsin y}) + \arcsin y\right)\Big|_{-1}^{1} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{4}{3} + x\pi\,dx = \boxed{\frac{8}{3} + 2\pi}$$

4. Нека је $t \in [0, \infty)$ време и $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ величина популације мишева на пашњаку. Популација задовољава диференцијалну једначину $y'(t) = 3\left(1 - \frac{y(t)}{2500}\right) y(t) - 2y(t)$ и у тренутку $t = 0$ на пашњаку се налази 100 мишева.

(а) Решити дату диференцијалну једначину.

(б) Да ли ће популација мишева увек да расте? Да ли популација тежи бесконачности?

$$\frac{1}{N}\cdot y' = \underbrace{3\left(1 - \frac{y}{2500}\right)y - 2y}_{M} \to f'_x = M \qquad f = \int 3\left(1-\frac{y}{2500}\right)y - 2y\,dx$$

$$f = 3\left(1 - \frac{y}{2500}\right)x - 2yx + C(y)$$

$$f'_y = -\frac{3}{2500}\cdot x - 2x + C'(y) = 1$$

$$C(y) = -\int\left(1 + \frac{3}{2500}x + 2x\right) dy = -y - \frac{3}{2500}xy - 2xy$$

$$C = 3x - y - \frac{6xy}{2500} - 4xy \quad \Big\} \quad y\left(1 + \frac{6x}{2500} + 4x\right) = 3x + 100$$

$$(x = 0, y = 100) \longrightarrow \boxed{C = -100}$$

$$y = \frac{3x + 100}{1 + \frac{6x}{2500} + 4x}$$

$$y' = \frac{3\left(1 + \frac{6x}{2500} + 4x\right) - (3x+100)\left(\frac{6}{2500} + 4\right)}{\left(1 + \frac{6x}{2500} + 4x\right)^2} = \frac{3 + \cancel{\frac{9x}{2500}} + \cancel{12x} - \cancel{\frac{9x}{2500}} - \cancel{12x} - \frac{6}{25} - 400}{}$$

Uvek negativno $\longrightarrow$ Opadaće ??

Ne znam

1. Доказати да је функција

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

непрекидна. Доказати да је $f(x)$ диференцијабилна дуж сваког правца који пролази кроз координатни почетак али није диференцијабилна.

$$0 \leq \left| \frac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3}{x^2} \right| + \left| \frac{xy^2}{2xy} \right| \leq |x| + \left|\frac{y}{2}\right| \longrightarrow 0$$

$$\vec{v} = (\alpha, \beta)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3\cdot\alpha^3 - h^3\alpha\beta^2}{\alpha^2h^2+h^2\beta^2} - 0}{h} = \boxed{\frac{\alpha^3-\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}$$

α i $\beta \neq (0,0)$ pa je sve okey :)

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - 0}{h} = \frac{h-0}{h} = 1$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = \frac{1}{h^3}$$ Ne postoji Samim tim nije dif.

2. Одредити локалне екстремуме функције

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y).$$

$$\nabla f = (\cos x(\sin y)\sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y),\ \sin x \cos y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y)$$

$$\sin(x+y)(\cos x \cdot \sin y - \sin x \cos y) = 0$$

$$\sin(x+y)\left(\tfrac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(y-x)) - \tfrac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))\right) = 0$$

$$\tfrac{1}{2}\sin(x+y)\cdot 2\sin(x-y) = 0 \rightarrow \sin(x+y)=0 \longrightarrow x+y=k\pi \quad 1^1 \rightarrow f(x,y)=0$$

$$\sin(x-y)=0 \longrightarrow x-y=k\pi \quad 1^2 \rightarrow (-1)^k \sin y \cdot \sin y \cdot \sin(2y)(-1)^k = \sin^2 y \cdot \sin 2y$$

$x = y + k\pi$

$y = k\pi \longrightarrow 0$

$$\cos y \sin y \sin(2y) + \sin y^2 \cdot \cos 2y = 0$$

$$2\cos^2 y \sin^2 y \quad \sin^2 y(2\cos^2 y + \cos 2y) = 0$$

$$2\sin^2 y + \cos^2 y - \sin^2 y = 0$$

$$\neq 0$$

0

Ne mogu štu

i iz prve $\sin y = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \quad 2^1 \rightarrow 0$

ili

$y = k\pi \rightarrow 0 \quad \sin(x+y)=0 \rightarrow x = k\pi \quad 2^2 \longrightarrow 0$

3. Израчунати

$$\int_D e^{-x^2-y^2}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

где је $D = \{(x,y) | x^2+y^2 \le 1\}$.

$$2\pi\int_0^1 e^{-r^2}\cdot\sin(r^2)\cdot r\cdot dr = \pi\int_0^1 e^{-x}\sin x\cdot dx =$$

$$\int \underbrace{e^{-x}}_{dv}\sin x = -e^{-x}\sin x + \int \underbrace{e^{-x}}_{dv}\cos x = -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int(-e^{-x})\cdot(-\sin x)\,dx$$

$$I = \frac{-e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)$$

$$\pi\left(-\frac{1}{e\cdot 2}(\sin 1+\cos x)+\frac{1}{2}\right)$$

4. Решити Кошијев проблем

$$xy' + 4y = x^4y^2 \quad , \quad y(2) = -1.$$

$$y^{-2}y' + y^{-1}\frac{4}{x} = x^4 \qquad z = y^{-1} \quad z' = -y^{-2}\cdot y' \to z' + z\frac{-4}{x} = -x^4$$

$$z = e^{-\int\frac{-4}{x}dx}\left(c + \int -x^4\cdot e^{-\int\frac{4}{x}dx}dx\right) = e^{\ln x^4}\left(c+\int -x^4\cdot\frac{1}{x^4}dx\right) = x^4(c-x)$$

$$y = \frac{1}{x^4(c-x)} \qquad -1 = \frac{1}{8(c-2)} \to \quad c-2 = -1/8$$

$$\boxed{c = \frac{15}{8}}$$

Анализа 3

Писмени испит, 2.9.2022.

1. Нека је функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x,y) = \begin{cases} y - x^2, & y \ge x^2 \\ 0, & -x^2 \le y < x^2 \\ y + x^2, & y < -x^2 \end{cases}$$

(а) Доказати да је функција f непрекидна на $\mathbb{R}^2$.

(б) Испитати диференцијабилност функције f у $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

a) $0 \le |y - x^2| \le |y-y| = 0 \qquad 0 \le |y+x^2| \le |-x^2+x^2| = 0$

b) $f_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h^2 - 0}{h} = h = 0 \qquad \lim\limits_{h\to 0}\frac{h-0}{h} = 1$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{k-h^2-0-0\cdot h-k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to 0}\frac{-h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \to \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \to -\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}\sqrt{2}}\ \ -\frac{1}{n^2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

2. Одредити тачку подскупа равни $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 4y\}$ најближу тачки $(3,0)$ A и доказати да је добијено растојање најмање могуће.

$$d(M,A) = \sqrt{(3-M_x)^2+M_y^2} \to g(x,y) = (3-x)^2+y^2 \to \nabla g = (-6-2x,\ 2y)$$

$x = 3 \quad y = 0$ Nije u skupu

$$\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 4y\}$$

$$-6-2x+2\lambda_1 x = 0 \to 3 = x(1-\lambda_1) = x\left(1-\frac{x^2}{8}\right)$$

$$2y - 4\lambda_1 = 0 \to y = 2\lambda_1$$

$$x^2 - 4y = 0 \to y = \frac{x^2}{4}$$

$$x^3 - 8x + 3 = 0$$

$$(x-3)(x^2+3x+1) = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}$$

$$y_{1/2} = \left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2/4$$

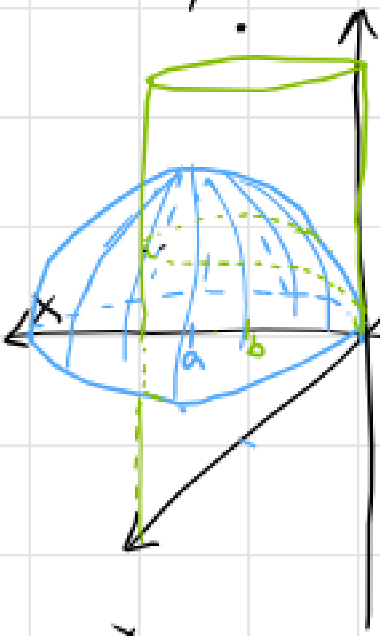
$x = 3,\ y = 9/4$

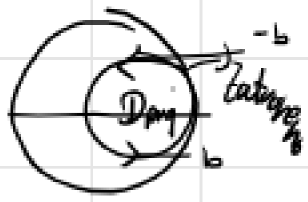
$\boxed{9/4}$

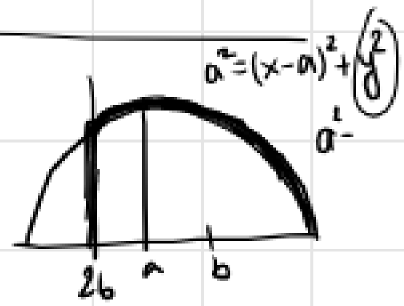
ovo se nađe i uporedi, ali vra 9/4

3. Дате су реалне константе a и b такве да је $0 < b < a$. Израчунати интеграл $\int_C (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x + (x^2+z^2)\,\mathrm{d}y + (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z$ где је крива C дата као пресек хемисфере $x^2+y^2+z^2 = 2ax,\ z>0$ и цилиндра $x^2+y^2 = 2bx$, са позитивном оријентацијом посматрано из тачке $(b, 0, 2022)$.

$$\int_C \underbrace{(y^2+z^2)}_{P}dx + \underbrace{(x^2+z^2)}_{Q}dy + \underbrace{(x^2+y^2)}_{R}dz \qquad (x-a)^2+y^2+z^2 = a^2,\ z>0 \qquad (x-b)^2+y^2=b^2$$







$$\longrightarrow 2(y-z,\ z-x,\ x-y) = \nabla F$$

$$x = b+b\cos\varphi \longrightarrow \varphi\in[0,2\pi)$$

$$y = b\sin\varphi$$

$$z = z \longrightarrow 0 \le z \le \sqrt{2(a-b)b(1+\cos\varphi)}$$

$$\left.\begin{array}{l} r'_\varphi = b(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \\ r'_z = (0,0,1) \end{array}\right\} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -b\sin\varphi & b\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(b\cos\varphi) + \vec{j}(b\sin\varphi) \Rightarrow b(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

$$2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2(a-b)(1+\cos\varphi)b}} (b\sin\varphi - z)b\cos\varphi + (z-b-b\cos\varphi)b\sin\varphi \ dz\, d\varphi$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left(\cancel{b^2\sin\varphi\cos\varphi} - b^2\sin\varphi - \cancel{b^2\cos\varphi\sin\varphi}\right)z + \frac{b}{2}\left(\sin\varphi\, z^2 - \cos\varphi\, z^2\right)\Big|_0^{\sqrt{\ }} d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} b^2(a-b)(1+\underbrace{\cos\varphi)(\sin\varphi-\cos\varphi)}_{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}} - b^2\sin\varphi\sqrt{2b(a-b)(1+\cos\varphi)}\ d\varphi$$

$$= 2\left(b^2(a-b)\right)\left(-\cos\varphi - \sin\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{2} - \frac{\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{2}}{2}\right) - b^2\sqrt{2b(a-b)}\cdot\frac{2}{3}(1+\cos\varphi)^{3/2}\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 2(b^2(a-b))\left(-1-\pi-\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}\right) = 2\pi b^2\cdot a$$

WIP